Aspetti della matematica prima del Calcolo

Mariano Giaquinta

Mariano Giaquinta
Professore Emerito
Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri, 7
I-56100 Pisa
mariano.giaquinta@sns.it

Indice

Prefazione ix

Capitolo 1. Le origini 1
1.1. Talete e Pitagora: una storia inventata, ma verosimile 2
1.2. Incommensurabilità e processi infiniti 6

Capitolo 2. Da Pitagora a Euclide 11
2.1. Eudosso: la teoria delle proporzioni e il metodo di esaustione 12
2.2. Algebra geometrica e esaustione: alcuni esempi 14
2.2.1. Il metodo delle aree 14
2.2.2. Il metodo delle proporzioni 16
2.2.3. Il metodo di esaustione 18
2.3. I problemi classici 20
2.3.1. Quadratura del cerchio 21
2.3.2. Duplicazione del cubo 23
2.3.3. Trisezione dell'angolo: la quadratrice di Ippia 24

Capitolo 3. Il periodo d'oro: Euclide, Apollonio e Archimede 27
3.1. Euclide e gli *Elementi* 28
3.2. Apollonio da Perga 31
3.3. Archimede 32

Capitolo 4. Dal III sec. a.C. al V sec. d.C. 49
4.1. Geografia e astronomia matematica 49
4.2. Aritmetica 54
4.3. Il principio di Erone 55
4.4. I commentatori 57

Capitolo 5. Il continuo e il movimento 61

Capitolo 6. Dai greci agli arabi e alla rinascita 63

Capitolo 7. Il problema delle quadrature e dei centri di gravità 71
7.1. Maurolico, Keplero, Valerio 72
7.2. Gli indivisibili di Cavalieri 80

7.3. Torricelli 82
7.4. Verso metodi sempre più numerici 85

Capitolo 8. Verso un approccio analitico: la nuova nozione di curva 95
8.1. La geometria cartesiana e il problema delle tangenti 96
8.2. Il metodo di adequazione di Fermat 100
8.3. Rettificazione delle curve 108

Capitolo 9. La nuova scienza del moto di Galilei 115
9.1. Prima di Galilei 117
9.2. Galilei 123
9.3. Le leggi del moto di Galilei 127

Capitolo 10. Huygens 135
10.1. Cinematica 136
10.2. Il pendolo isocrono 142
10.3. La teoria ondulatoria della luce 144

Capitolo 11. Complementi e temi da sviluppare 147

Bibliografia 159

Indice dei nomi 163

Indice analitico 167

Prefazione

Questo volume fa parte di tre volumetti — indipendenti ma con un filo conduttare comune — che intendono presentare alcuni temi di storia della matematica e alcuni temi di matematica nel contesto storico, dagli antichi greci agli inizi del 1900; quindi, storia e soprattutto matematica con le sue argomentazioni e deduzioni che utilizzano soltanto metodi del puro ragionamento logico, senza l'uso di evidenze geometriche o numeriche o retoriche, dimostrazioni, anche se non sempre nel senso in cui lo intendiamo oggi.

Alla base di questi tre volumetti c'è anche il desiderio di presentare questi temi alla riflessione soprattutto degli insegnanti e degli studenti di matematica e, auspicabilmente, dei colleghi, con la speranza che il distacco storico e il senso del poi rendano i fatti esposti fruibili e di aiuto alla riflessione.

Ma c'è di più. Come ogni attività umana, la matematica è una attività che si svolge all'interno di una società che evolve storicamente, e fatti come quelli relativi alla sua o alle sue *verità*, al senso da attribuire al *dimostrare* sono condizionati dal tempo e dalle conoscenze già acquisite. Ci sono però delle caratteristiche specifiche della matematica:

- Si tratta di una scienza *cumulativa*: non ci sono rivoluzioni che cancellano una teoria in favore di un'altra, come nelle scienze sperimentali (sempre che si concordi che vi siano rivoluzioni nelle scienze sperimentali). Ci possono invece essere, e ci sono stati, cambiamenti di prospettiva.
- Il processo storico consiste nel selezionare e nell'inglobare in un contesto più ampio e *astratto* le conoscenze note, magari alla fine di lunghi periodi di *sperimentazione*.
- I matematici, o almeno alcuni di essi per primi, sanno anche capire quando il processo *localmente* è arrivato alla fine con delle *"verità" condivise unanimemente* dall'intera comunità.

Se guardiamo alla storia della matematica, ma anche all'apprendimento elementare, vediamo infatti due aspetti che si susseguono e, spesso, coesistono e che possiamo identificare, con il senno di poi e con i limiti connaturati alle schematizzazioni, come una fase *sperimentale* o *procedurale* e una fase di *astrazione* o di *concettualizzazione* o di *oggettivazione*: una sorta di *dualità operazionale/strutturale* che si manifesta anche nel dibattito se la matematica

si *inventi* o si *scopra*, riconducibile alle visioni epistemologica e ontologica di Aristotele e di Platone. Nella prima fase si sperimentano e ci si abitua a procedure e dimostrazioni che permettono di ottenere risultati, che poi diventeranno casi particolari, utilizzando ipotesi al momento evidenti e che in un periodo successivo non lo saranno più e suggeriranno la necessità di ulteriori *motivazioni*. Successivamente, la maturazione delle idee porta ad una fase di *astrazione* o *concettualizzazione* o *oggettivazione*. Nel seguito vedremo vari esempi. Ovviamente il processo non è lineare nel tempo né nella esplicita comprensione delle vari fasi e spesso ha richiesto molto tempo. Ad esempio, gli *Elementi* di Euclide presentano la matematica (elementare) che probabilmente si è sviluppata nell'arco di due o tre secoli. Il *Calcolo infinitesimale* introdotto alla fine del 1600 trova una sua presentazione ragionevole e coerente alla fine del 1800, dopo due secoli di intenso uso.

Nella maturazione delle tecniche e delle idee, spesso quel che era evidente lo è sempre meno. Intervengono spesso nuove scoperte, che, quando rilevanti, si trasformano in nuovi oggetti matematici. Si ha allora un passaggio ad un grado di maggiore astrazione, che permette di inglobare lo sviluppo precedente, senza più preoccuparsi esplicitamente di tutti i dettagli raccolti nel corso dello sviluppo; e poi si ricomincia ad un livello di astrazione superiore. Questo processo di selezione e chiarificazione di fatti e concetti spesso riduce migliaia di pagine a poche pagine, tramite la formazione di un linguaggio *essenziale*, *preciso* e *sintetico*. Di conseguenza, per avere speranza di capire occorre spesso studiare e digerire una lunga sequela di concetti di livello inferiore. Tuttavia, questo è uno svantaggio con cui si deve convivere: rende più difficile la gestione dei concetti che ne derivano e rende necessaria, di volta in volta, la costruzione di nuove visioni che per buona parte non possono che essere personali. Da qui derivano sicuramente parte delle difficoltà a capire gli scritti di matematica, anche da parte degli addetti ai lavori, e le difficoltà a ripercorrere lo sviluppo storico in tempi e spazi ragionevoli e, ancor più, a dare una presentazione storica delle verità acquisite. Ciononostante una presentazione storica ha il vantaggio di essere utile alla comprensione e alla riflessione sul senso e, ovviamente, sulle motivazioni e l'origine di molti concetti e metodi della matematica.

Quanto detto offre indubbiamente spunti di riflessione e, soprattutto, questioni che impongono risposte che potremmo definire *pedagogiche*. Innanzi tutto che cosa è elementare e cosa non lo è; cosa quindi sia opportuno insegnare in un primo momento e cosa sia opportuno rimandare, e quali siano i modi più efficaci e magari divertenti per insegnare questi fatti elementari e non; servirà poi una riflessione sulla natura, ad esempio psicologica, dell'apprendimento matematico; servirà definire le finalità e gli obiettivi da raggiungere; serviranno anche dei metodi di valutazione atti a verificare se gli obiettivi siano stati raggiunti o

meno, e così via. Esistono una vasta letteratura e una altrettanto vasta sperimentazione (come sempre, più o meno interessanti e utili) connesse alle domande poste; ma è sempre presente il rischio di trasformare esigenze giustissime in una nuova disciplina accademica, magari dimenticandosi dell'oggetto principale in questione, nel nostro caso la matematica. Comunque, non essendo purtroppo l'autore un esperto in questi argomenti, in questi volumetti non ci sarà nessuna proposta o suggerimento nelle direzioni indicate dalle questioni appena poste. Tuttavia questo non ci esime dal ribadire alcune considerazioni ben note sulla utilità dell'insegnamento della matematica.

Parafrasando dalla Prefazione di [45], la matematica con la sua storia di più di 2500 anni è sicuramente una delle componenti fondamentali della nostra civiltà come la filosofia, la letteratura, le religioni, le arti, le scienze in generale, non solo quelle naturali ma anche quelle sociali, e la tecnologia; si può anzi dire che tutta la nostra vita in realtà, anche in modo nascosto, si fonda sui risultati di questa scienza:

- è utile, anzi essenziale, a fini pratici; nel tempo e particolarmente oggi buona parte della tecnologia che utilizziamo o vediamo utilizzata non sarebbe stata possibile senza un'enorme e spesso raffinata quantità di matematica;
- è la struttura portante e sostiene il carico principale del ragionamento scientifico ed è al centro delle più importanti teorie scientifiche; si può dire che molta parte della fisica o della chimica non ci sarebbero senza matematica; ma ormai essa è rilevante anche nelle scienze sociali come quelle comportamentali, l'economia, le scienze politico-sociologiche, o quelle relative all'analisi delle situazioni di rischio;
- ha fortemente contribuito a determinare la direzione e il contenuto di buona parte del pensiero filosofico; molti filosofi sono stati anche matematici o, comunque, fortemente interessati alla matematica; infatti, essendo la matematica l'espressione fondamentale della razionalità, essa è anche espressione della filosofia, perlomeno se questa vuole essere filosofia razionale;
- ha generato la nostra logica a partire dai greci, passando per le raffinatezze medievali, alle riflessioni metodologiche rinascimentali, alle intuizioni leibniziane fino a Bolzano e Cantor e ai grandi logici-matematici del XIX e XX secolo Frege, Russell, Hilbert, Gödel solo per citare pochi nomi, tanto da poter dire che oggi la logica è un ramo della matematica;
- infine, ha influenzato nel corso dei secoli stili pittorici, musicali, architettonici e anche letterari.

Ma, come sempre, c'è di più. Nelle parole del platonico Proclo, cfr. [84],

> Questa è quindi la matematica: essa suscita in voi le forme invisibili dell'anima, dà vita alle proprie scoperte, sveglia la mente e purifica l'intelletto; essa porta alla luce le nostre idee

> intrinseche, essa elimina l'oblio e l'ignoranza che sono con noi fin dalla nascita.

e in quelle di Robert Musil, cfr. [78],

> Tutto il nostro progresso civile è nato con il suo [della matematica] aiuto [...]. Ma soltanto se, invece di guardare all'utilità esterna, consideriamo nella matematica stessa la proporzione fra le parti utilizzate e le parti non utilizzate scorgeremo l'altro volto, il volto autentico, di questa scienza. Il volto non finalizzato, ma antieconomico e passionale [...]. La matematica è un'ostentazione di audacia della pura ratio; uno dei pochi lussi oggi ancora possibili. [...] Alleghiamo un piccolo esempio [...]. I pionieri della matematica ricavarono da certi principi delle idee utilizzabili. Da quelle idee nacquero induzioni, tipi di calcolo, risultati. I fisici ci misero su le mani e ne ricavarono nuovi risultati. Alla fine arrivarono i tecnici, accontentandosi spesso di questi risultati, ci fecero su dei nuovi calcoli e crearono le macchine. Ma ad un tratto, quando ogni cosa era stata realizzata per il meglio, saltan su i matematici [...] e si accorgono che nelle basi di tutta la faccenda c'è qualcosa che non torna. Proprio così, i matematici guardarono giù al fondo e videro che tutto l'edificio è sospeso in aria [...]. A questo scandalo intellettuale il matematico reagisce in modo esemplare: lo sopporta con orgogliosa fiducia nella pericolosità del proprio intelletto [...]. Noialtri dopo l'Illuminismo ci siamo persi di coraggio. È bastato un piccolo fallimento per farci voltare le spalle all'intelletto, e permettiamo a ogni esaltato zuccone di tacciare di vano razionalismo le aspirazioni di D'Alembert e Diderot. Andiamo in visibilio per il sentimento e diamo addosso all'intelletto.

In effetti per più di duemila anni una certa familiarità con la matematica è stata considerata parte indispensabile del patrimonio intellettuale di ogni persona colta, mentre oggi molte persone colte rifiutano la matematica anche come oggetto di *interesse culturale*. Agli inizi del ventesimo secolo Henri Poincaré già scriveva, cfr. [81]

> Un fatto ci deve meravigliare o, meglio, ci dovrebbe meravigliare se non fossimo ormai abituati ad esso. Come può essere che ci siano persone che non capiscono la matematica? Se la scienza invoca solo le regole della logica, quelle accettate dalle menti ben educate, come è possibile che in così tanti siano impervi ad essa come molti insegnanti di scuola media ci testimoniano?

Nell'ambito di una scuola più formativa che informativa, l'esposizione alla matematica e al suo sviluppo con il fluire di ragionamenti logici, la necessità continua di un esame critico e del controllo del contesto e delle ipotesi nelle quali si produce una tesi, l'attenzione nell'evitare tautologie e ragionamenti circolari ecc., è un formidabile strumento per lo sviluppo delle competenze per comprendere la realtà. A questo fine basterebbe forse esporre gli studenti ad alcune delle problematiche già note che si sono imposte nei secoli, piuttosto che costringere i più a risolvere spesso problemi dove lo studente è ridotto a semplice esecutore se non altro perché i dati forniti sono sempre quelli necessari e sufficienti per la conclusione. Volendo proseguire con l'insegnamento per problemi, sarebbe di gran lunga più utile fornire più dati o anche, perché no, meno dati del necessario, in modo da lasciare spazio alla sperimentazione e all'invenzione. E comunque perché non dedicare un po' di tempo ad illustrare il ruolo della matematica nello sviluppo culturale complessivo? In fondo non tutti sono

particolarmente vogliosi di esercitarsi per acquisire gli aspetti più tecnici e di questo bisognerà pur tener parzialmente conto.

In questi volumetti, come già detto, si parlerà di matematica o, meglio, di alcuni problemi specifici, con particolare riferimento a come sono stati affrontati nei vari periodi storici, con errori e argomentazioni non necessariamente 'matematiche' nel senso in cui lo intendiamo oggi, analizzando le ragioni sia interne alla matematica sia esterne che hanno motivato l'introduzione di nuove idee e tecniche. Come detto, l'idea guida è stata quella di fornire momenti di *riflessione* all'insegnante che vorrà dedicare del tempo alla loro lettura e trarre magari stimoli di lavoro — in fondo, alla fine le responsabilità delle scelte restano dell'insegnante, ed è giusto che sia così — e, più in generale, a quanti hanno voglia di riflettere su queste cose. .

Veniamo ora al contenuto dei tre volumi. *Aspetti della matematica prima del Calcolo* [53] comincia col discutere il problema dell'area per le figure geometriche nella matematica greca, la soluzione geometrica trovata dai Greci con la teoria delle proporzioni e, soprattutto, il metodo di esaustione nei contributi di Archimede. Prosegue col discutere la rinascita della matematica in Europa a partire dal dodicesimo secolo, l'uso di metodi infinitesimali, l'evoluzione della nozione di curva, l'introduzione del concetto di variazione, . . . , fatti che delineano un cambiamento verso una visione sempre più *analitica* della matematica, e ancora una serie di questioni che, viste a posteriori, sembrano delineare l'esigenza di un calcolo differenziale e integrale. *La nuova filosofia della natura. Misure, variazioni ed equazioni differenziali* [55] riguarda la nascita del Calcolo con Newton e Leibniz e quindi la sintesi di variazione e integrazione che si realizza con le *equazioni differenziali*, che portano alla nuova visione matematica del mondo: la *meccanica razionale* e la *gravitazione universale*. Infine, *Funzioni e numeri* [54], partendo dai grandi successi del Settecento, soprattutto nella descrizione del mondo reale, le equazioni differenziali delle vibrazioni, delle onde, del calore e del potenziale gravitazionale, analizza la nuova visione delle funzioni in termini di *frequenze* che, oltre a richiedere risposte a molte questioni, impone un ripensamento, in termini di *rigore* e non solo, delle nozioni di continuità, differenziabilità e integrazione, che troveranno un riequilibrio nella nuova e più astratta teoria della misura a fine Ottocento e inizio Novecento. Parte di questo sviluppo si ricollega alla fondazione delle nuove università nello spirico humboldtiano, che si prefiggono di educare e avviare alla ricerca e quindi richiedono una presentazione organica del materiale da presentare agli studenti. Il volume si chiude con un piccolissimo sguardo su una piccolissima parte di un nuovo mondo che si sta aprendo, la matematica del ventesimo e ventunesimo secolo.

Come detto fin dall'inizio, i tre volumetti possono essere letti e utilizzati separatamente, ma il tema guida e allo stesso tempo unificante che ci ha guidato

sono le equazioni differenziali come sintesi di una visione matematica del mondo, le equazioni differenziali in quanto equazioni che coinvolgono gli elementi differenziali, cioè le variazioni delle funzioni, e l'integrazione, cioè il processo inverso che in modo 'naturale' porta, dopo un lungo cammino, alla nuova *teoria della misura* che idealmente ci riporta al problema iniziale dell'area per gli antichi greci.

Il lettore troverà ulteriori informazioni, anche sulla letteratura primaria e secondaria, ad esempio in [45] [46] da cui è tratto molto materiale dei primi due volumetti[1]. Per quanto riguarda il terzo volume, molto materiale è tratto da [60] [61] [65] [72] [73] e più in generale dalle opere citate in Bibliografia. Una fonte di informazioni è ovviamente la "rete" dove si possono trovano molte opere qui citate e non, contributi di esperti e meno esperti su qualunque argomento qui trattato (un esercizio utile potrebbe essere quello di separare contributi interessanti da contributi meno interessanti o non corretti). Ovviamente enorme è la letteratura *tecnica* che presenta in modo formale e coerente, nel linguaggio matematico contemporaneo, quanto viene solitamente raggruppato e denominato come *Analisi Matematica*; per ovvi motivi l'autore non può che "propagandare" [49] [48] [50] [51] [52].

Mi piace concludere questa prefazione ringraziando Giuseppe Modica, a cui sono legato da una lunga amicizia e collaborazione scientifica, per aver letto varie stesure di questi volumetti, aver eliminato molti errori e aver contribuito ad

[1] Qui mi sembra opportuno fare qualche osservazione. A mio parere – da una parte a sostegno della tesi che in vari problemi matematici importanti ci sia *a posteriori* una sorta di filo conduttore attorno a cui tentativi, errori, sperimentazione, idee, concetti e presentazione formale si diramano in direzioni a volte non buone o non corrette e a volte prefigurando quelle corrette, e questo fin dalla matematica ellenica, e dall'altra per una migliore comprensione delle motivazioni che hanno portato agli argomenti discussi nel terzo volume – i primi due volumetti [53] [55] sono da ritenere parte integrante e utili all'intera opera non solo dal punto di vista degli argomenti discussi ma anche perché operativamente spesso cercano di instaurare un confronto-rapporto tra la rappresentazione informale e la presentazione formale su questioni relativamente più semplici di quelle discusse nel terzo volume [54].

Avendo discusso in un contesto più ampio vari aspetti della matematica dal periodo ellenistico fino alla fine del Settecento in [45] e [46], come detto, molto materiale è tratto appunto da quei volumi, spesso letteralmente. Infatti, essendo questi volumi diretti soprattutto a studenti ed insegnanti e non avendo pretese accademiche, se non la speranza che il lavoro fatto potesse essere apprezzato anche da colleghi accademici, non mi sembrava opportuno riferirsi semplicemente a [45] e [46], che assieme assommano a circa 950 pagine, e limitarsi ad aggiungere quanto già non presente.

Ma, essendomi stato comunicato che erano state sollevate difficoltà relativamente alla pubblicazione dei primi due volumetti, ho accettato l'offerta di pubblicare a stampa solo il terzo volume e ho deciso di mettere a disposizione dei lettori interessati i primi due volumetti all'indirizzo `homepage.sns.it/giaquinta/`.

una migliore selezione e presentazione di vari argomenti. Gli errori che ancora restano sono ovviamente da imputare all'autore.

Un ringraziamento va alle *Edizioni della Normale* che hanno accettato di pubblicare il terzo volume, mentre i primi due volumetti si possono trovare all'indirizzo `homepage.sns.it/giaquinta/`.

Firenze, Dicembre 2018

CAPITOLO 1

Le origini

Rudimenti di matematica, o anche regole algebriche e geometriche, compaiono in molte civiltà pre-elleniche tra il 3000 e il 600 a.C., ad esempio, nelle civiltà Egiziana, Sumero-Babilonese, Indiana e Cinese. Si tratta però di una matematica di tipo *normativo*, in cui si danno istruzioni, oggi si dice spesso *algoritmi*, per risolvere specifici problemi, prevalentemente anche se non esclusivamente pratici. La matematica sembra invece essere assente nei primi settemila anni di civilizzazione dal 10.000 a.C., in cui si datano i primi insediamenti e l'inizio dell'agricoltura, fino al 3.000 a.C..

Erodoto (484–408 a.C.), [38], Libro II.109, fa risalire l'origine della matematica a necessità di ordine pratico-catastali: la misurazione delle terre erose dal Nilo. Mentre Aristotele (384–322 a.C.), nella *Metafisica*, A1, sostiene che le arti matematiche fiorirono dapprima in Egitto dove "veniva concessa un'agiata libertà alla casta sacerdotale che poteva dedicarsi a quelle scienze che non hanno attinenza né con il piacere né con i bisogni". Probabilmente necessità commerciali portarono allo sviluppo dell'aritmetica presso i Fenici.

La matematica come disciplina organizzata, indipendente e razionale, cioè come scienza, si sviluppò però nel mondo ellenico. Talete di Mileto (624–546 a.C.) e Pitagora da Samo (585–520 a.C.) sono secondo Proclo (411–485) gli inventori della *dimostrazione matematica*, da intendere qui come argomento ineccepibile che, impiegando soltanto metodi del puro ragionamento logico, permette di dedurre la validità di una data asserzione matematica dalla validità, già stabilita, di altre asserzioni matematiche e/o da certe affermazioni primitive la cui validità è ritenuta evidente o, in altre parole, ricondurre la validità di una affermazione alla validità di affermazioni *chiare* ed *evidenti*. Dice ad esempio Aristotele, in qualche modo in contrasto con le teorie delle *idee* e della *reminescenza* di Platone, che "ogni dottrina e ogni apprendimento, che siano fondate sul pensiero discorsivo, si sviluppano da una conoscenza precedente". Va sottolineato anche il ruolo della dimostrazione come esposizione delle ragioni di una verità, come argomentazione che mira a convincere della verità, e come presa d'atto e come comunicazione sintetica della comprensione di specifici fatti in un determinato contesto.

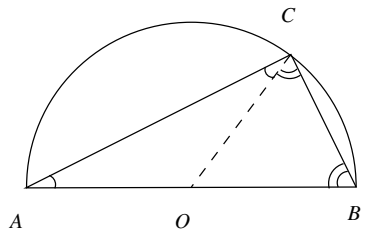


FIGURA 1. In un semicerchio l'angolo alla circonferenza è retto.

È indubbio però che anche nella civiltà greca sia esistita una matematica pratica di tipo normativo utile a risolvere problemi elementari relativi alle misurazioni e ai conteggi. È anche da ritenere che i due aspetti, matematica empirica e razionale, siano stati presenti per tutto il periodo dello sviluppo della matematica greca, a volte l'uno a migliorare l'altro, a volte come in Archimede usando metodi empirici per escogitare teoremi (che poi lo stesso Archimede si preoccupa di dimostrare in modo razionale), a volte accontentandosi di affermazioni o di calcoli approssimati. È da tener presente che spesso sono le giuste domande a promuovere lo sviluppo più che i metodi.

In realtà le fonti relative a Talete e Pitagora sono successive di alcuni secoli e spesso si riferiscono a loro come a figure leggendarie e mitologiche.

Risulta quindi difficile capire quali siano state le influenze, sicuramente presenti, della matematica pre-ellenica su quella ellenica e le influenze di una matematica empirica su quella razionale; ma, indubbiamente, nel primo periodo *ellenico* è stato attivo un intenso laboratorio matematico, che ha notevolmente influenzato il successivo periodo *ellenistico* o *alessandrino* — all'incirca dal 300 a.C. all'inizio dell'era cristiana — in cui la cultura greca, in seguito alla conquista di Alessandro Magno si estende verso il mondo orientale e fino alla fine del IV–V secolo d.C. includendo i cosiddetti *commentatori*.

Sicuramente uno dei problemi fondamentali fin dall'inizio della matematica greca fu quello di *misurare le figure geometriche*. Ma prima e col fine di illustrarne le difficoltà, cominciamo (cfr. [45], [49]) col presentare quello che ragionevolmente possiamo ritenere sia stato il periodo iniziale della matematica greca, cioè dalle origini fino alla sintesi degli *Elementi* di Euclide (325–265 a.C.).

1.1. *Talete e Pitagora: una storia inventata, ma verosimile*

Riferisce Proclo, [84], che Talete aveva *dimostrato*, cioè ricondotto a affermazioni evidenti, che

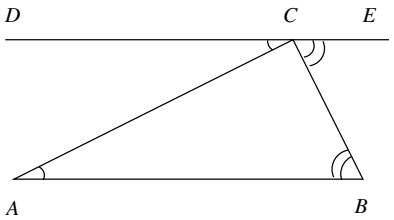


FIGURA 2. La somma degli angoli interni di un triangolo è 180 gradi, mentre l'angolo esterno è somma degli altri due angoli interni.

(i) Il cerchio è dimezzato da ciascuno dei suoi diametri.
(ii) Angoli opposti al vertice sono uguali.
(iii) Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali.
(iv) In ogni semicerchio l'angolo alla circonferenza è retto.
(v) Triangoli aventi un lato e due angoli uguali sono uguali.

Di ambiente ionico o pitagorico sembra invece essere il seguente risultato:

(vi) La somma degli angoli interni di un triangolo è pari a due retti.

È difficile immaginare che le (i) e (ii) abbiano bisogno di una dimostrazione. La (iii) sembra evidente: se proprio si vuole, la si può ottenere per riflessione rispetto alla bisettrice-mediana a partire dall'angolo al vertice.

La (vi) è, come sappiamo, sostanziale: caratterizza la geometria euclidea rispetto alle geometrie non-euclidee. È equivalente al fatto che *una retta trasversale a due rette parallele determina angoli alterni interni uguali*: è quindi legata alla nozione di *parallelismo*. Se DE è la retta parallela al lato AB del triangolo ABC, cfr. Figura 2 si ha $\widehat{CAB} = \widehat{DCA}$, $\widehat{CBA} = \widehat{ECB}$, quindi

$$\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = \widehat{DCA} + \widehat{ECB} + \widehat{ACB} = 180^\circ.$$

La (iv) è della stessa natura di (vi) e, infatti, segue da (iii) e (vi): poiché i triangoli della Figura 1 AOC e COB sono isosceli, abbiamo $\widehat{ACO} = \widehat{OAC}$ e $\widehat{OCB} = \widehat{OBC}$, quindi $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

Il teorema di Talete

Dice ancora Proclo che Talete "trovò le distanze delle navi nel mare", un'altra tradizione dice che Talete avrebbe misurato "l'altezza delle piramidi". Questo ha a che fare con i *triangoli simili*. È quello che oggi chiamiamo *teorema di Talete*, esemplificato in Figura 3. Ragionamenti analoghi verranno usati da Aristarco (310–230 a.C.) per il calcolo delle dimensioni della Luna e della sua distanza dalla Terra, e da Eratostene (284–192 a.C.) per il calcolo del raggio e della circonferenza della Terra, cfr. Capitolo 11.

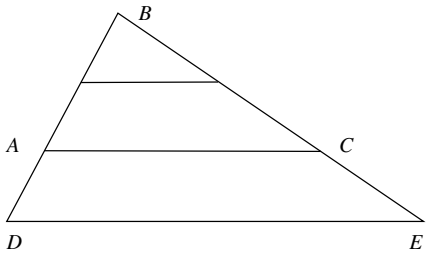


FIGURA 3. Teorema di Talete: se $AB/AD = 1,2,3,\ldots$, allora $BC/CE = 1,2,3,\ldots$.

Una enunciato un po' più generale dell'enunciato in Figura 3 si ottiene facilmente usando la nozione di *grandezze commensurabili*

1.1. DEFINIZIONE (*Grandezze commensurabili*). Due grandezze sono *commensurabili se una è un multiplo di un sottomultiplo dell'altra.*

In altre parole due grandezze sono commensurabili se esiste un *sottomultiplo* comune ad entrambe ossia se esse sono *misurate* come multipli di una stessa grandezza. Si ha

1.2. TEOREMA (*Talete*). *Se ABC e DEF sono due triangoli con angoli uguali. Se AB e DE sono commensurabili con rapporto $\frac{m}{n}$, allora le coppie BC ed EF e, rispettivamente, AC e DF sono commensurabili con lo stesso rapporto $\frac{m}{n}$.*

Tutte le linee sono commensurabili? E, se questo non è il caso, il teorema continua a essere vero per grandezze non commensurabili?

L'area del rettangolo

Al di là di motivazioni pratiche, il calcolo dell'area del rettangolo, vale a dire l'assegnazione di un numero quale sua area, è piuttosto rilevante per una fondazione *numerica* della geometria. Infatti, se sappiamo calcolare l'area del

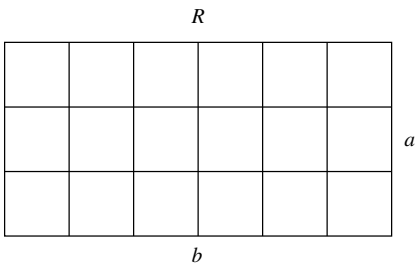


FIGURA 4. Area di un rettangolo con lati commensurabili $a = 6e$, $b = 3e$.

rettangolo, sappiamo anche calcolare l'area del triangolo e quindi, per decomposizione, l'area delle figure poligonali. Se i lati a e b di un rettangolo R sono commensurabili, cioè $a = ne$ e $b = me$, allora basterà contare i quadratini di lato e contenuti in R, concludendo che, se e^2 indica l'area del quadratino di riferimento, $\text{Area}\, R = nme^2$. E se non sono commensurabili? Torneremo su questa questione centrale. E che cosa è l'area per una figura con contorni non rettilinei? Qui osserviamo che negli *Elementi* di Euclide non compare una formula per l'area del rettangolo o del triangolo. Euclide introduce piuttosto una proprietà intrinseca dell'area, cfr. Proposizione 2.2. Probabilmente a causa delle difficoltà che stiamo illustrando, per i Greci in qualche senso *l'area della figura* è e sarà sostanzialmente *la figura*.

Il teorema di Pitagora

Un altro teorema rilevante è *il teorema di Pitagora*.

1.3. TEOREMA (*Pitagora*). *Il quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

Non sappiamo come si sia pervenuti a questo fondamentale risultato che compare tra le 'conoscenze' dell'uomo (in tutte le culture) molto prima che si iniziasse a *dimostrare*. È possibile che esso sia stato concepito come estensione della situazione particolarmente semplice presentata nella Figura 5 o dalla conoscenza di quelle che sono ora note come *terne pitagoriche*.

L'enunciato del teorema di Pitagora di cui sopra si pensa sia dovuto a Euclide. Lo si può dimostrare in molti modi. I modi 'classici' utilizzano il *principio di equiscomponibilità*: due figure hanno la stessa area se si possono decomporre finitamente in pezzi corrispondenti uguali. Non è necessario insistere sul significato da dare alla parola area né attribuire un numero alla stessa. Ad esempio, il confronto tra le due decomposizioni in Figura 6 dimostra il teorema di Pitagora, pur di mostrare che il quadrato nella figura a sinistra sia effettivamente un quadrato; ma questo segue dal fatto che la somma degli angoli di un triangolo è di

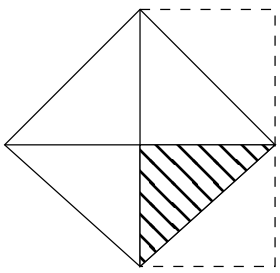


FIGURA 5. Il triangolo isoscele rettangolo.

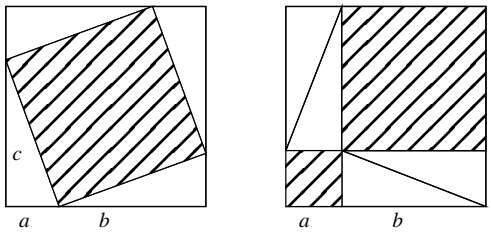


FIGURA 6. Due decomposizioni di un quadrato: i quattro triangoli nelle due decomposizioni sono uguali. Si vede che il quadrilatero interno nella figura a sinistra è un quadrato con una ispezione degli angoli. Per differenza il quadrato di lato c ha come area la somma dei quadrati di lati a e b.

due retti. La dimostrazione di Euclide, sempre basata sulla equiscomponibilità, non usa il fatto che la somma degli angoli di un triangolo è di due retti.

1.2. *Incommensurabilità e processi infiniti*

La nozione di commensurabilità ha per Pitagora o meglio per i pitagorici una posizione di assoluto rilievo. Dice Aristotele nella *Metafisica* A5, 985b23-986b2:

> Essi [i pitagorici] per primi si applicarono alle matematiche e le fecero progredire e, nutriti delle medesime, credettero che i principi di queste fossero i principi di tutti gli esseri. E, poiché nelle matematiche i numeri sono per loro natura i principi primi, e appunto nei numeri essi ritenevano di vedere, più che nel fuoco e nella terra e nell'acqua, molte somiglianze con le cose che sono e che si generano: per esempio ritenevano che una data proprietà dei numeri fosse la giustizia, un'altra invece l'anima e l'intelletto, un'altra ancora il momento e il punto giusto, e similmente, in breve, per ciascuna delle altre, e inoltre, poiché vedevano che le note e gli accordi musicali consistevano nei numeri; e infine, poiché tutte le altre cose, in tutta la realtà, pareva a loro che fossero fatte a immagine dei numeri e che i numeri fossero ciò che è primo in tutta quanta la realtà, pensarono che gli elementi dei numeri fossero elementi di tutte le cose e che tutto il cielo fosse armonia e numero. E tutte le concordanze che riuscivano a mostrare tra i numeri e gli accordi musicali e i fenomeni e le parti del cielo e l'intero ordinamento dell'universo, essi le raccoglievano e le sistemavano. E, se qualcosa mancava, essi si ingegnavano a introdurla, in modo da rendere la loro trattazione in tutto coerente. Per esempio: siccome il numero dieci sembra essere perfetto e sembra comprendere in sé tutta la realtà dei numeri, essi affermavano che anche i corpi che si muovono nel cielo dovevano essere dieci; ma dal momento che se ne vedono solo nove, allora essi ne introducevano di conseguenza un decimo: l'Antiterra.

Per i Pitagorici e per la matematica greca i numeri (naturali) hanno forma e ogni forma della realtà è aggregazione di queste forme, in modo analogo a come ogni forma naturale sarà aggregazione degli elementi fondamentali rappresentati dai solidi platonici per Platone o aggregazione di atomi per Democrito.

Con riferimento alla *commensurabilità*, i Pitagorici quasi sicuramente pervennero alla convinzione che i rapporti tra grandezze omogenee si potessero

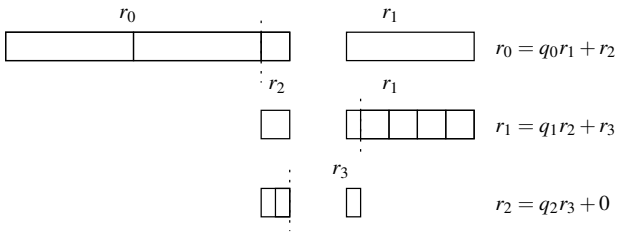


FIGURA 7. $r_0 = q_0 r_1 + r_2$, $r_1 = q_1 r_2 + r_3$, $r_2 = q_2 r_3 + r_4$, ...

esprimere sempre come rapporti di interi, in linea di principio contando i numeri di punto-numero di ciascuna quantità, conseguentemente che tutte le grandezze omogenee fossero fra loro commensurabili. Ma poi devono aver scoperto che ciò non è vero: *esistono coppie di grandezze incommensurabili*. Racconta la tradizione che la rivelazione della scoperta dell'incommensurabilità, che aveva portato alla crisi della fondazione numerica della geometria e, probabilmente, di parte della cultura dominante, costò la vita ad Ippaso da Metaponto (V secolo a.C.).

1.4. TEOREMA. *Il lato e la diagonale di un quadrato sono incommensurabili.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che il lato l e la diagonale d siano commensurabili; allora essi avrebbero un sottomultiplo comune e per cui $l = me$ e $d = ne$ con m,n interi. Possiamo anche supporre che m e n non siano divisibili entrambi per uno stesso intero r, cioè siano *primi fra loro* (se non lo fossero, potremmo scrivere $l = \frac{m}{r}(re)$, $d = \frac{n}{r}(re)$ con $\frac{m}{r}$ e $\frac{n}{r}$ interi; se anche gli interi $\frac{m}{r}$ e $\frac{n}{r}$ non fossero primi fra loro, potremmo continuare ad eliminare i fattori comuni e con un numero finito di passi eliminarli tutti essendo essi necessariamente finiti). Per il teorema di Pitagora abbiamo allora:

$$n^2e^2 = d^2 = l^2 + l^2 = m^2e^2 + m^2e^2 = 2m^2e^2$$

cioè $2m^2 = n^2$. Quindi n^2 sarebbe pari, e, siccome, come dice Aristotele, i pari non sono dispari, anche n sarebbe pari, perché altrimenti n e quindi n^2 sarebbero dispari. D'altra parte se $n = 2p$, troviamo allora $2m^2 = 4r^2$ ossia $m^2 = 2r^2$, pertanto m^2, e quindi m, sarebbero anch'essi pari. Un assurdo, perché m e n erano stati scelti primi fra loro. □

Questa dimostrazione, ricostruita sulla base del riferimento di Aristotele, presenta un grado di astrattezza piuttosto elevato. Sembra più ragionevole pensare che si sia arrivati alla scoperta dell'incommensurabilità dall'analisi del pentagono cfr. Figura 10 o, meglio, del *pentacolo* (o stella a cinque punte), simbolo dei pitagorici. Ancora, la data e l'autore della scoperta sono ignoti. L'ipotesi più probabile è che la scoperta sia dovuta a pitagorici posteriori a Pitagora in una data imprecisata anteriore al 410 a.C., si veda, ad esempio [40]..

Tornando alla ricerca del rapporto tra grandezze, nel senso fin qui inteso, essa può essere formalizzata così:

(i) trovare una unità di misura e comune alle due quantità date A e B,
(ii) contare: se la quantità A è n-volte e e la quantità B è m-volte e, allora il rapporto tra A e B è $\frac{n}{m}$.

Una procedura utile a trovare un sottomultiplo comune a due quantità r_0 e r_1 è il cosiddetto *algoritmo di Euclide*. Troviamo quante volte la quantità più piccola r_1 entra in quella più grande r_0. Se non c'è resto, allora r_0 è un multiplo di r_1. Altrimenti si cerca quante volte la parte rimanente r_2 entra in r_1. Se questa volta non c'è resto allora r_1 è un multiplo di r_2 e r_0 è anch'esso un multiplo di r_2 essendo pari alla somma di r_1 e r_2. Se l'operazione precedente ha un resto r_3 si vede quante volte r_3 entra in r_2 e si procede continuando come illustrato in Figura 7.

In generale, l'algoritmo di Euclide non si ferma dopo un numero finito di passi, anzi ovviamente *due grandezze sono (in)commensurabili se e solo se l'algoritmo (non) si ferma dopo un numero finito di passi* e nel caso in cui finisce in un numero finito di passi dà il più grande sottomultiplo comune di r_0 e r_1. Così scrive Euclide negli *Elementi* Libro X,2:

> Se, quando la minore di due grandezze disuguali venga continuamente sottratta a turno dalla maggiore, ciò che resta non misura mai quella che la precede, allora le due grandezze sono incommensurabili.

Questa procedura chiaramente termina dopo un numero finito di passi se r_0 e r_1 sono interi positivi, infatti l'unità di sicuro è una misura comune: in questo caso l'*algoritmo di Euclide* restituisce il *massimo comun divisore*.

L'incommensurabilità del rapporto tra diagonale e lato di un quadrato, è illustrata nella Figura 8.

Risulta ancora più evidente la incommensurabilità della diagonale e del lato del pentagono, cfr. la Figura 9 e la Figura 10.

Il pentagono è strettamente legato a quello che i greci chiamavano la *sezione*, ribattezzata da Keplero (1571–1630) *sezione aurea*, rapporto di grandissima importanza nell'arte greca, cfr. Figura 9.

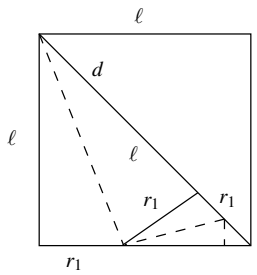


FIGURA 8. Incommensurabilità tra il lato e la diagonale del quadrato: i primi due passi dell'algoritmo di Euclide. $d = l + r_1$, $l = 2r_1 + r_2$, $r_1 = 2r_3 + r_4$, ….

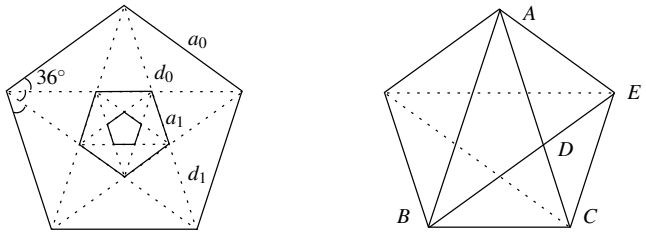


FIGURA 9. A sinistra, l'illustrazione della incommensurabilità del lato e della diagonale di un pentagono. $d_0 = a_0 + d_1$, $d_1 = a_1 + d_2$, ... A destra, il rapporto aureo. Il triangolo ADE è isoscele con due angoli di 72° e un angolo di 36°. Perciò $AD = BC$. Inoltre i triangoli ABC e BCD sono simili. Perciò $AB : AD = AB : BC = BC : CD = AD : CD$.

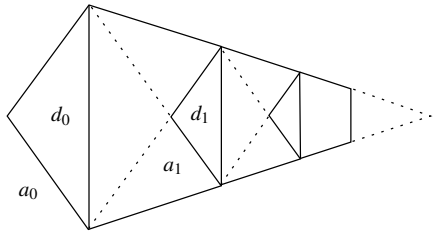


FIGURA 10. Un'altra illustrazione della incommensurabilità di diagonale e lato di un pentagono. Enumeriamo i pentagoni da sinistra a destra. Si ha $d_0 = a_0 + a_1$ e $a_0 = d_1$ quindi $d_0 = d_1 + d_2$. La figura mostra che il processo di costruzione si ripete $d_1 = d_2 + d_3$, $d_2 = d_3 + d_4$, ..., e non ha termine, Le quantità d_0 e $a_0 = d_1$ sono perciò incommensurabili.

CAPITOLO 2

Da Pitagora a Euclide

Con l'incommensurabilità entrano in modo prepotente alcuni fatti che saranno rilevantissimi per la matematica e la filosofia per secoli:

- ci sono grandezze *discrete* e grandezze *continue*. Emerge una radicale separazione tra i concetti di *contare* e *misurare*. Scrive Aristotele in *Metafisica* Δ, 1020a7:

  > Quantità si dice ciò che è divisibile in parti immanenti e delle quali ciascuna è per propria natura un alcunché di uno e di determinato.
  > Una quantità è (1) una pluralità se è numerabile (2) è invece una grandezza se è misurabile.
  > (1) Si chiama pluralità ciò che può dividersi in parti non continue; (2) si chiama invece grandezza ciò che è divisibile in parti continue.
  > Fra le grandezze, quella continua in un'unica dimensione è lunghezza; quella continua in due dimensioni è larghezza e quella continua in tre dimensioni è profondità.
  > Una molteplicità delimitata è un numero, una lunghezza delimitata è una linea, una larghezza delimitata è una superficie e una profondità delimitata è un corpo.

  Come far convivere il continuo geometrico con i punti? Il continuo è fatto di punti? Il tempo di istanti? Cosa caratterizza la continuità? Un dualismo presente anche in filosofia naturale — gli atomisti in contrasto con Parmenide e gli eleatici, di cui i paradossi di Zenone (circa 495 a.C.) sono una manifestazione — e costituisce uno dei temi principali della *Fisica* di Aristotele.
- Una nuova problematica sui rapporti fra finito e infinito, dicotomia introdotta dall'algoritmo di Euclide a partire da quella tra commensurabile e incommensurabile.
- L'infinito e l'infinitamente piccolo: le grandezze si possono suddividere idealmente quante volte si vuole.
- Bisogna riflettere con cura su possibili argomenti che comportano un processo logico di regressione all'infinito.
- La necessità di una nuova riflessione sulla geometria, ed in generale una riflessione sulla metodologia matematica: il semplice diventa complesso e non è più chiaro cosa sia evidente.
- Sembra necessario riflettere sul significato della conoscenza, sui modi con cui perveniamo ad essa e sulla certezza della conoscenza matematica.

Diamo ora un rapido sguardo d'insieme ai temi matematici prevalenti nel periodo che va da Pitagora a Euclide, che possiamo raggruppare come:

(1) lo sviluppo dell'algebra-geometrica, e i contributi fondamentali di Eudosso: la teoria delle proporzioni e il metodo di esaustione,
(2) i tre classici problemi: il problema della quadratura del cerchio, della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo,
(3) in connessione con questi, l'introduzione e lo studio di curve di ordine superiore.

2.1. *Eudosso: la teoria delle proporzioni e il metodo di esaustione*

La scoperta degli incommensurabili porta Eudosso di Cnido (400–355 a.C.) ad introdurre la nozione di *grandezza* contrapposta a quella di numero: si conta con i numeri ma *non* si misura in termini numerici: si dice solo se due grandezze (omogenee) sono nella stessa proporzione di altre due grandezze. È la *teoria delle proporzioni*, presentata e sviluppata nel V libro degli *Elementi* di Euclide. Assieme al *metodo di esaustione* — la terminologia è del Seicento, per i Greci il problema era proprio quello di evitare l'*esaustione* infinita di una figura con altre —, sempre dovuto ad Eudosso e presentato nel XII libro degli *Elementi*, essa permette di confrontare figure anche con contorni non lineari, e va sicuramente considerata tra le più grandi conquiste della geometria euclidea. Raggiungerà il suo splendore con Archimede (287–212 a.C.) e più tardi, nel Rinascimento e primo Seicento, con tra gli altri Francesco Maurolico (1494–1575), Luca Valerio (1552–1618) e Bonaventura Cavalieri (1598–1647), con i loro vari tentativi di generalizzazioni e di reinterpretazione operativa della teoria stessa.

L'idea di Eudosso è di parlare solo di *egual relazione tra coppie di grandezze* senza far riferimento ai numeri. In questo modo non si considerano come 'oggetti' del discorso eventuali processi infiniti, ma ci si limita a catturare il loro senso grazie al processo di dimostrazione detto metodo di esaustione. Caratteristica delle *grandezze omogenee* è che si possono sommare e sottrarre, verificano le semplici regole del maggiore e del minore — questa assunzione, ovvia per le lunghezze, è in realtà molto più difficile da gestire per le aree, per i volumi e per gli angoli e sarà causa di notevoli problemi nel XVII secolo —, ed inoltre verificano quello che successivamente sarà chiamato il

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE: *Date due grandezze A e B, esiste sempre un intero m tale che $mA > B$ o, equivalentemente, esiste un sottomultiplo $\frac{1}{m}B$ di B minore di A.*

In questa situazione

PRINCIPIO DI UGUAGLIANZA: Si dice che *le grandezze a e b sono nello stesso rapporto delle grandezze A e B se, dati in modo arbitrario due numeri interi positivi n e m si ha*

$$\begin{aligned} &\text{se } ma < nb \text{ allora } mA < nB,\\ &\text{se } ma = nb \text{ allora } mA = nB,\\ &\text{se } ma > nb \text{ allora } mA > nB. \end{aligned}$$

Nella sostanza la definizione precedente può essere interpretata oggi in termini numerici come: quando il rapporto a/b è irrazionale, cioè le grandezze a e b sono incommensurabili, allora a/b e A/B sono uguali se e solo se ogni approssimazione razionale per difetto di a/b è una approssimazione razionale per difetto di A/B e ogni approssimazione razionale per eccesso di a/b è una approssimazione razionale per eccesso di A/B. Ma non c'è niente in Euclide che possa far pensare al sistema dei rapporti fra grandezze come a un *sistema numerico*, cfr. Kline [73] pp. 87-88.

Il precedente principio di uguaglianza richiede in linea di principio *infiniti* confronti, ma nessuna regressione all'infinito. Esso permette di dimostrare (cosa che viene fatta in molti corsi di geometria elementare) i teoremi fin qui enunciati (quello di Talete e di Pitagora, il teorema di Euclide e i teoremi di confronto di aree di rettangoli e triangoli) .

Il *metodo di esaustione*, che come si è detto, è tra le più grandi conquiste della geometria greca, nella comprensione seicentesca può essere formalizzato come segue:

METODO DI ESAUSTIONE: *Supponiamo che due grandezze R e K siano nella situazione seguente*:

$$a < R < b \qquad \text{e} \qquad a < K < b$$

e che $b-a$ si possa scegliere piccolo come si vuole. Allora $R = K$.

Infatti, se per assurdo fosse $R \neq K$, ad esempio $K < R$, allora esisterebbe un intero m tale che $\frac{1}{m}R < R-K$ per il principio di Archimede e d'altra parte si possono scegliere a e b in modo che $b-a < \frac{1}{m}R$. Pertanto $\frac{1}{m}R < R-K < b-a < \frac{1}{m}R$, un assurdo.

Questo è in effetti il modo con cui viene utilizzato dai Greci.

Equiscomponibilità e principio di equivalenza

Come abbiamo accennato, per figure poligonali, cioè limitate da segmenti, è possibile pensare all'equivalenza in area in termini di *equiscomponibilità*: *due figure hanno la stessa area se sono decomponibili finitamente in figure corrispondenti congruenti*. È chiaro che due poligoni equiscomponibili hanno la stessa area; e si può dimostrare che due poligoni con la stessa area sono equiscomponibili.

Nel processo di assiomatizzazione della geometria euclidea sviluppatosi alla fine del diciannovesimo secolo si pose il problema se fosse possibile sostituire l'equivalenza eudossiana con la equiscomponibilità. Questo problema fu esplicitamente enunciato da David Hilbert come terzo problema nella sua celebre lista di problemi aperti posti al Congresso dei Matematici del 1900 a Parigi [70]: sarebbe possibile definire i poliedri aventi lo stesso volume come quelli equiscomponibili? Eulide per dimostrare che tetraedri con la stessa base e la stessa altezza hanno lo stesso volume utilizzava, a differenza che nel caso dei triangoli, il metodo di Eudosso.

Nel 1902 Max Dehn (1878–1952) dimostrò che la risposta è negativa: esistono due tetraedri con la stessa base e la stessa altezza, quindi con volumi uguali, che tuttavia non sono equiscomponibili in poliedri congruenti. In altre parole, non è possibile suddividere il primo in un numero finito di poliedri che si possano riassemblare in modo da comporre il secondo.

2.2. *Algebra geometrica e esaustione: alcuni esempi*

L'*algebra geometrica*, cioè la dimostrazione di affermazioni geometriche e algebriche per via *sintetica*, è di origine pitagorica secondo l'opinione concorde degli storici. Vi si usano essenzialmente due metodi: il *metodo delle proporzioni* e il *metodo delle aree*, in cui le affermazioni seguono da confronti di aree. Vediamo alcuni esempi tipici tratti dagli *Elementi* di Euclide.

2.2.1. *Il metodo delle aree*

2.1. PROPOSIZIONE. *Triangoli con la stessa base e con la stessa altezza hanno la stessa area.*

DIMOSTRAZIONE. Con riferimento alla Figura 1, i triangoli ADE e BCF sono uguali. Pertanto il parallelogramma $ABCD$ ha la stessa area del rettangolo $ABFE$. Poiché due rettangoli con la stessa base e la stessa altezza sono uguali e ogni triangolo è la metà di un parallelogramma, la tesi segue. □

Ricordiamo che Euclide non ha alcuna formula per l'area di un rettangolo o di un triangolo.

2.2. PROPOSIZIONE. *Triangoli con la stessa altezza hanno aree nelle stesse proporzioni delle basi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia T un triangolo con base a e vertice in S. Prolunghiamo la base ripetendola m volte e costruiamo i triangoli sui nuovi segmenti. Questi hanno tutti altezze uguali e basi uguali quindi hanno la stesa area. Il triangolo mT, unione di tutti i triangoli, ha dunque area m volte l'area di T.

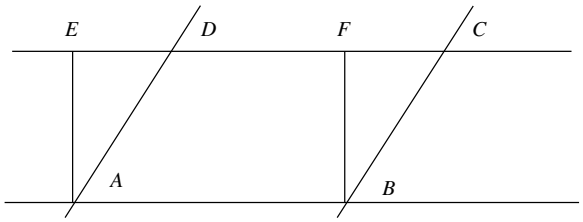


FIGURA 1

Siano ora S, T due triangoli con la stessa altezza e basi rispettivamente a e b. Tenendo conto che a base minore corrisponde un'area minore e a basi uguali corrispondono aree uguali,

$$\begin{aligned}
&\text{se } ma < nb \text{ allora } m\,\text{Area}\,(S) = \text{Area}\,(mS) < \text{Area}\,(nT) = n\,\text{Area}\,(T),\\
&\text{se } ma = nb \text{ allora } m\,\text{Area}\,(S) = \text{Area}\,(mS) = \text{Area}\,(nT) = n\,\text{Area}\,(T),\\
&\text{se } ma > nb \text{ allora } m\,\text{Area}\,(S) = \text{Area}\,(mS) > \text{Area}\,(nT) = n\,\text{Area}\,(T).
\end{aligned}$$

Le basi a, b e le aree dei triangoli S e T sono dunque nella stessa proporzione secondo il principio di uguaglianza di Eudosso. □

Si noti che Euclide non dice, come diciamo noi oggi, che l'area di un triangolo è proporzionale alla base, cosa che richiederebbe un confronto diretto fra area e lunghezza, grandezze tra loro non omogenee: confronta rapporti di aree con rapporti di lunghezze: col tempo si sarà meno rigidi su questo punto.

Nell'approccio di Euclide, che presenta i precedenti sviluppi della matematica elementare, anche il teorema di Talete è subordinato al metodo delle aree.

2.3. TEOREMA. *La parallela ad un lato di un triangolo divide i prolungamenti degli altri due lati del triangolo proporzionalmente.*

DIMOSTRAZIONE. Con riferimento alla Figura 2, sia *DE* la parallela al lato *BC* del triangolo *ABC*. Il triangolo *BDE* è uguale al triangolo *CDE* perché essi

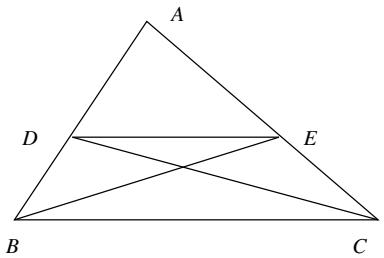


FIGURA 2. Teorema di Talete.

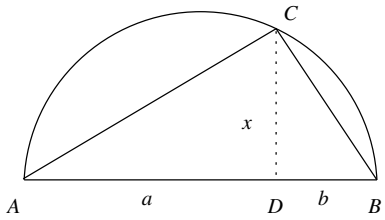


FIGURA 3. Costruzione del medio proporzionale.

hanno la stessa base *DE* e stanno nelle parallele *DE* e *BC*, cioè hanno la stessa altezza. Quindi il triangolo *BDE* sta al triangolo *ADE* come il triangolo *CDE* sta al triangolo *ADE*. Ma allora come *BDE* sta a *ADE* così sta *BD* a *DA*, avendo i triangoli *BDE* e *ADE* la stessa altezza. Per la stessa ragione *CE* e *EA* stanno nello stesso rapporto dei triangoli *CDE* e *ADE*. Di conseguenza *BD* sta a *DA* come *CE* sta a *EA*. □

2.2.2. *Il metodo delle proporzioni*

In Euclide VI.8 troviamo

PROBLEMA *Dati due segmenti a e b, costruire un segmento medio proporzionale ad a e b.*

Si vuole trovare x tale che $a : x = x : b$, cioè $x^2 = ab$. Con riferimento alla Figura 3, seguendo Euclide, i triangoli *ADC* e *CDB* sono simili al triangolo *ACB* e quindi simili tra loro, si ha $a : x = x : b$, cioè, $x^2 = ab$: l'altezza relativa ad *AB* è il segmento cercato.

La soluzione di Euclide VI.8 ci dice in particolare come costruire *un quadrato equivalente ad un rettangolo di lati a e b* o, se si vuole, come costruire con riga e compasso $\sqrt{ab}$. Più in generale, ci permette di risolvere *geometricamente* equazioni di secondo grado. cioè di rispondere al seguente problema, che è una semplificazione di Euclide VI.28:

PROBLEMA: *Dividere un segmento in modo che il rettangolo formato dalle sue parti sia uguale ad un quadrato assegnato il cui lato non superi la metà del segmento stesso.*

In altre parole, se a è il segmento e b^2 il quadrato, trovare x tale che $x(a-x) = b^2$, equivalentemente, $x^2 - ax + b^2 = 0$. Si osservi che $a > 0$. La mancanza di numeri negativi costringe (e questo per molti secoli ancora) alla moltiplicazione delle forme dell'equazione di secondo grado: tre forme semplici

$$ax^2 = bx, \quad ax^2 = c, \quad bx = c,$$

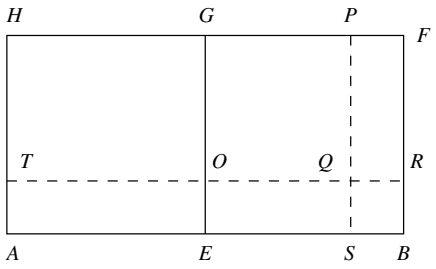


FIGURA 4. Soluzione geometrica di una equazione di secondo grado.

e tre composte

$$ax^2+bx=c, \quad ax^2=bx+c, \quad ax^2+c=bx,$$

con $a,b,c>0$. Si noti che queste equazioni hanno sempre almeno una soluzione positiva.

Seguendo Euclide e con riferimento alla Figura 4, siano AB il segmento dato di lunghezza a e Q il quadrato assegnato. Sia E il punto di mezzo di AB, sia $FB=EB$ perpendicolare ad AB e supponiamo completati i relativi rettangoli. Se Area$AEGH$ = Area$Q$ abbiamo finito. Altrimenti, sia $OQPG$ il quadrato, come in figura, con Area$EBFG-$ Area$OQPG=$ Area$Q$, allora è chiaro che il segmento AS è la soluzione cercata.

Con riferimento nuovamente alla Figura 3 si deduce ancora dalla similitudine dei triangoli ADC, CDB e ACB

$$AB:BC=BC:DB, \qquad \text{da cui} \qquad BC^2=AB\times DB,$$

$$AB:AC=AC:AD, \qquad \text{da cui} \qquad AC^2=AB\times AD,$$

e quindi

$$BC^2+AC^2=AB\times DB+AB\times AD=AB^2.$$

Abbiamo così un'altra dimostrazione del *teorema di Pitagora*.

Ma in realtà siamo andati un po' oltre: così non fa Euclide, o meglio fa così ma usando il metodo delle aree e non la similitudine: mentre i teoremi sulla similitudine sono presentati nel VI libro, il teorema di Pitagora è presentato alla fine del I libro, Euclide I.47. Come dice Boyer [20],

> le difficoltà create dalle grandezze incommensurabili probabilmente indussero ad evitare nella matematica elementare, fin dove era possibile, il ricorso all'uso di rapporti. L'equazione lineare $ax=bc$, per esempio, veniva considerata come una uguaglianza tra le aree ax e bc piuttosto che come proporzione,

con delle conseguenti limitazioni rilevanti: se la quantità x^2 trova una sua rappresentazione nel piano, x^3 nello spazio, come trattare quantità del tipo x^4 o ax^3?

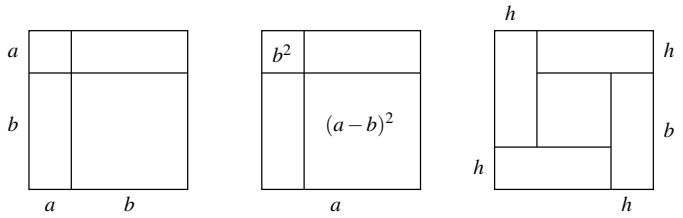


FIGURA 5. $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, $(b+h)^2-(b-h)^2 = 4bh$.

Con la teoria delle proporzioni si rinuncia ad ogni fondazione numerica della geometria, e anzi si sviluppa una forma di algebra geometrizzata: formule aritmetiche trovano il loro fondamento in considerazioni geometriche-sintetiche, che trovano una loro estensione a situazioni generali, in ciò rinforzando procedure già presenti nella matematica pre-ellenica e pitagorica. Un semplice esempio è dato in Figura 5.

2.2.3. *Il metodo di esaustione*

Come è stato detto, il metodo di esaustione di Eudosso è una delle più grandi conquiste della matematica greca. Con esso si possono confrontare aree e volumi di figure con contorni anche non lineari. Al fine di illustrare il metodo, presentiamo due semplici esempi, un teorema di Euclide da *Elementi* libro XII, e un teorema di Archimede da *La misura del cerchio*. Concludiamo enunciando un famoso teorema di Archimede, da lui dimostrato con il metodo di esaustione, cfr. Sezione 3.3.

2.4. TEOREMA (*Euclide*). *Siano C e D due cerchi con diametri rispettivamente c e d. Allora*

$$\text{Area}\,C : \text{Area}\,D = c^2 : d^2 \tag{2.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Euclide dimostra prima che la differenza fra l'area del cerchio[1] e l'area di un poligono regolare inscritto può essere resa arbitrariamente piccola (come si dirà nel Seicento, i poligoni (regolari) *esauriscono* il cerchio) pur di considerare poligoni con un sufficiente numero di lati. Quindi procede per assurdo (e questa, come detto, è una caratteristica del metodo di esaustione, anzi è il modo di evitare l'infinito). Supponiamo che le aree non stiano come i

[1] Ci si potrebbe chiedere che cosa è l'area del cerchio o, più in generale di una figura piana ma, insistiamo, i greci essenzialmente danno per scontato che c'è un'*area*, l'*area è la figura ed è una grandezza*.

rapporti dei quadrati dei diametri, cioè la (2.1) non valga, allora esiste un cerchio E con

$$\text{Area}\,C : \text{Area}\,E = c^2 : d^2. \tag{2.2}$$

Si avrà $\text{Area}\,E > \text{Area}\,D$ o $\text{Area}\,E < \text{Area}\,D$ e supponiamo valga quest'ultima; in modo analogo si procede nell'altro caso. Costruiamo un poligono P', inscritto in D, con $\text{Area}\,D - \text{Area}\,P' < \text{Area}\,D - \text{Area}\,E$. Allora

$$\text{Area}\,D > \text{Area}\,P' > \text{Area}\,E. \tag{2.3}$$

Inscriviamo in C un poligono P simile a P'. Per la (2.3) e poiché per i poligoni con lo stesso numero di lati inscritti, rispettivamente in cerchi di raggi c e d, si ha $\text{Area}\,P : \text{Area}\,P' = c^2 : d^2$, concludiamo $\text{Area}\,P : \text{Area}\,P' = \text{Area}\,C : \text{Area}\,E$ o $\text{Area}\,P : \text{Area}\,C = \text{Area}\,P' : \text{Area}\,E$. Essendo $\text{Area}\,P < \text{Area}\,C$ si dovrà avere $\text{Area}\,P' < \text{Area}\,E$, che contraddice la (2.3). □

2.5. OSSERVAZIONE. In realtà la dimostrazione di Euclide è incompleta. Infatti non è chiaro perché ci sia un cerchio per cui valga la (2.2): Euclide dimostra l'esistenza del quarto proporzionale solo per grandezze lineari (ed in questo caso la dimostrazione sembra usare la *continuità* della linea o ancor più una *costruzione*), ma qui è applicato, come in altri casi negli *Elementi*, a grandezze non lineari. Sembra che si assuma in qualche modo o una 'continuità' delle grandezze o che tra rapporti di grandezze di due classi omogenee ci sia una specie di corrispondenza di eguaglianze (per ogni rapporto di una classe c'è sempre un rapporto dell'altra, con lo stesso 'denominatore', che lo eguagli). Ma potrebbe semplicemente essere che, per Euclide, la situazione descritta cattura l'essenza dell'argomento corretto, come si vede da quanto segue. Modificando leggermente l'argomentazione di Euclide, e usando sempre il metodo di esaustione, diamo una dimostrazione completa che non usa la (2.2).

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che l'affermazione non sia vera, si avrà allora

$$\text{Area}\,C : \text{Area}\,D \leqslant c^2 : d^2.$$

Supponiamo che si abbia

$$\text{Area}\,C : \text{Area}\,D > c^2 : d^2,$$

in modo analogo si procederà nell'altro caso. Inscriviamo in C un poligono regolare con 2^n lati e n abbastanza grande in modo che si abbia ancora

$$\text{Area}\,P : \text{Area}\,D > c^2 : d^2,$$

e sia P' il poligono con 2^n lati inscritto in D. Si avrà allora

$$\text{Area}\,P : \text{Area}\,P' > c^2 : d^2,$$

ma $\text{Area}\,P : \text{Area}\,P' = c^2 : d^2$, quindi un assurdo. □

Si noti come Euclide si guardi bene dal calcolare il rapporto tra l'area del cerchio e l'area del quadrato di lato pari al raggio, anche se si tratta di quantità omogenee. Naturalmente esistevano già approssimazioni di π che non entrano nelle considerazioni di Euclide.

2.6. TEOREMA (*Archimede*). *L'area di un cerchio C è uguale all'area del triangolo rettangolo T con cateti rispettivamente la circonferenza e il raggio di C.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che l'affermazione non sia vera; ad esempio supponiamo che $\text{Area}\,C > \text{Area}\,T$; in modo analogo si procede se vale la diseguaglianza opposta. Poiché possiamo esaurire il cerchio con poligoni, possiamo trovare un poligono inscritto P tale che $\text{Area}\,C - \text{Area}\,P < \text{Area}\,C - \text{Area}\,T$, cioè, $\text{Area}\,P > \text{Area}\,T$. Poiché il perimetro e l'apotema del poligono P sono rispettivamente più piccoli della circonferenza e del raggio di C troviamo che $\text{Area}\,P < \text{Area}\,T$: assurdo. □

Concludiamo con il seguente enunciato su cui ritorneremo più avanti, Sezione 3.3.

2.7. TEOREMA (*Archimede*). *I rapporti tra i volumi di un cono, di una semisfera e di un cilindro, tutti di eguale altezza e con lo stesso raggio di base, stanno come* $1 : 2 : 3$.

Osserviamo che, anche se negli esempi precedenti il confronto tra figure, cioè decidere se $A > B$ è semplice, in generale la cosa può essere piuttosto complessa; ancor più difficile può essere la scelta delle approssimanti utili a produrre un assurdo nel confronto di eguaglianza. Infine insistiamo, date due grandezza omogenee A e B il metodo di Eudosso ci permette di decidere se $A = B$, ma, data A non suggerisce nessun modo per determinare B: il metodo sembra utile a dimostrare, ma non a trovare. Questo sarà uno dei grossi problemi con cui si troveranno a confrontarsi i matematici dal Rinascimento in poi.

Il metodo di esaustione troverà una organica presentazione negli *Elementi* di Euclide, come risultato di una lunga elaborazione. Ulteriori importanti sviluppi si troveranno nel tempo, in particolare nell'opera di Archimede e nelle opere dei matematici del primo seicento.

2.3. *I problemi classici*

Nel periodo ellenico, come successivamente, vengono studiate anche problematiche di carattere più complesso di quelle trattate negli *Elementi*. In particolare, vengono studiati questioni di matematica non elementare, legate ai tre classici

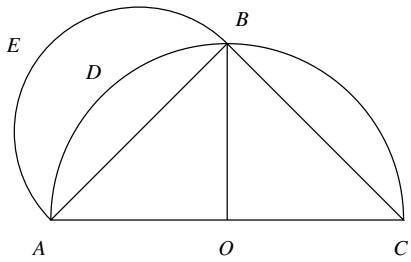


FIGURA 6. Una lunula di Ippocrate.

problemi di costruzione (quadratura del cerchio, duplicazione del cubo e trisezione dell'angolo). Ciò ha come conseguenza l'ampliamento della classe di curve e di figure geometriche prese in considerazione.

L'origine di questi tre problemi viene riferita in vari modi e sempre con l'aria di un certo mistero, forse dovuto alle difficoltà trovate nei tentativi di soluzione. In realtà, oltre al loro interesse intrinseco, questi problemi appaiono come naturali generalizzazioni di problemi già risolti. Ogni angolo si poteva bisecare, naturale chiedersi se si potesse trisecare; la questione era probabilmente legata anche al problema della costruzione di poligoni regolari di n lati, con n un multiplo di 3. Il quadrato costruito sulla diagonale di un quadrato raddoppia il quadrato stesso, naturale chiedersi di raddoppiare il cubo. Ancora, in queste costruzioni i Greci si imposero di usare solo riga e compasso, probabilmente in quanto analoghi fisici della retta e del cerchio realizzabili con una fune, cfr. [73] pp.48-49.

2.3.1. *Quadratura del cerchio*

Il problema della quadratura del cerchio rientra nello studio della costruzione di figure di forma data equivalenti ad una figura data.

Fin dagli inizi si deve esser posto il problema dell'area del cerchio e, più precisamente, il problema di costruire un quadrato di area uguale all'area di un cerchio dato. Plutarco riferisce nell'*Esilio* che Anassagora, mentre era in prigione utilizzava il suo tempo in tentativi per risolvere il problema della quadratura del cerchio. Ed il problema doveva esser ben noto se, intorno al 414 a.C., Aristofane ne parla negli *Uccelli*.

Vi è da dire che intorno al 430 a.C. Ippocrate di Chio (470–410 a.C.) era riuscito nella quadratura di alcune *lunule* che sono figure delimitate da archi di cerchio. Ci limitiamo ad un semplice esempio per illustrare il tipo di risultati. Consideriamo un triangolo isoscele rettangolo ABC, inscritto nel semicerchio di centro O, cfr. Figura 6, e sia AEB il semicerchio avente AB come diametro.

Allora, poiché $AC^2 = 2AB^2$,

$$\frac{\text{Area Semicerchio}\,ABC}{\text{Area Semicerchio}\,AEB} = \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{2}{1}$$

e quindi l'area del quarto di cerchio *OADB* è uguale all'area del semicerchio *AEB*. Se sottraiamo l'area di *ADB* comune ad entrambe, troviamo che l'area della lunula *AEBD* è uguale all'area del triangolo *AOB*: l'area di una figura limitata da archi è quindi uguale all'area di una figura rettilinea.

Ippocrate in effetti riconduce la quadratura della lunula al fatto che le aree di due cerchi stanno fra loro come i quadrati dei loro diametri, un risultato che non è dimostrabile senza il metodo di Eudosso, che vive dopo Ippocrate. La 'dimostrazione' di Ippocrate può esser vista come un esempio di uso del *metodo analitico* nel quale non si cerca di risolvere un problema partendo da assiomi dati, ma si cerca di ridurlo ad un altro problema che si ritiene più facile da risolvere.

Sono state fatte varie 'dimostrazioni' della quadratura del cerchio, cosa che sappiamo impossibile. Tuttavia è interessante percorrere le argomentazioni in proposito.

In Antifonte (480–411 a.C.), Brisone (450–390 a.C.) e Platone (428–347 a.C.) troviamo una storia che in una forma o nell'altra sarà presente in molti degli sviluppi sul calcolo delle aree. Racconta Simplicio (cfr. *Aristotelis Phys. Comm*) (490–560). p. 54, 20-55, 11, [Diels], da [22]):

> Antifonte descriveva un cerchio e vi disegnava un poligono di quelli che possono venire inscritti. Il poligono inscritto sia ad esempio un quadrato. Dimezzandone subito i lati, tirava a partire dai punti di divisione delle linee perpendicolari verso l'arco di cerchio ognuna delle quali dimezzava evidentemente il relativo segmento di cerchio. Quindi tirava delle rette di collegamento dai punti di divisione agli estremi dei lati del quadrato così che sui lati del quadrato nascevano quattro triangoli e l'intera figura inscritta era un ottagono. Dimezzando poi secondo la stessa procedura ognuno dei lati dell'ottagono, tirando dal punto di divisione la perpendicolare verso la circonferenza e tracciando delle rette di collegamento dal punto in cui la perpendicolare incontrava la circonferenza ai punti terminali della retta divisa, rendeva il poligono inscritto un esadecagono. E dividendo nello stesso rapporto i lati dell'esadecagono inscritto e tirando le linee e raddoppiando il poligono inscritto e ripetendo questo costantemente egli credeva che alla fine, esauritasi la superficie, *si sarebbe inscritto nel cerchio un poligono i cui lati, in virtù della loro piccolezza si sarebbero sovrapposti alla circonferenza*. E poiché, come abbiamo appreso negli *Elementi*, noi sappiamo costruire per ogni poligono un quadrato uguale, così, dato che il poligono va considerato uguale al cerchio cui si sovrappone, siamo anche in grado di costruire per il cerchio un quadrato ad esso uguale.

Giovanni Filopono (490–570) ci riferisce ancora (cfr. *Aristotelis An. Post. Comm.*,p. 112, 20-4, [Wallies] da [22]):

> Ora Proclo diceva che Brisone aveva quadrato il cerchio nel modo seguente: il cerchio, diceva Brisone, è maggiore di ogni poligono inscritto e minore di ogni poligono circoscritto. Ma *rispetto a ciò per cui esiste maggiore e minore, esiste anche uguale*. Ma esistono poligoni maggiori e minori del cerchio, dunque ne esiste anche uno uguale.

Aristotele negli *Analitici secondi*, A9, chiama sofistica la quadratura di Brisone per aver usato un principio in verità giusto (sic!) ma non specificamente geometrico. Questo principio in una forma, forse più geometrica se teniamo conto dell'esaustione di Eudosso, si legge nel *Parmenide* di Platone

> ma *a ciò cui conviene grandezza e piccolezza, a quello conviene anche uguaglianza, che giace fra queste due*.

Molte curve non elementari sono state inventate per la quadratura del cerchio nel periodo ellenico ed ellenistico, come la spirale di Archimede, la quadratrice di Ippia, la concoide di Nicomede, come nel corso dei secoli fino al 1882 quando Carl von Lindemann mostrò che π è un numero *trascendente*, cioè non è radice di nessuna equazione polinomiale a coefficienti interi, cosa che implica che il problema della quadratura del cerchio è irresolubile con riga e compasso.

In questa lista di curve la prima sembra essere la *trisettrice* o *quadratrice di Ippia*; a Dinostrato, fratello di Menecmo, è attribuita l'osservazione che questa curva poteva esser usata per quadrare il cerchio.

Quindi oltre alle curve poligonali, considerate come unione di segmenti, i Greci considerarono anche curve complesse costruite in linea di principio come luoghi o intersezioni di luoghi, *luoghi geometrici* ma anche luoghi descritti da un punto che si muove con velocità diverse, ad esempio sul piano, lungo due direttrici diverse, *luoghi meccanici*.

2.3.2. *Duplicazione del cubo*

Nel suo commento al trattato di Archimede *Sulla sfera e il cilindro* Eutocio (VI secolo d.C.) presenta una collezione di "soluzioni" del problema della duplicazione del cubo.

Come ben noto, il problema *non* è risolubile con solo riga e compasso, ma è possibile scrivere una soluzione come intersezione di curve in molti modi. Si possono elencare soluzioni date da: Archita (428–350 a.C.), Eudosso (408–355 a.C.), Menecmo (380–320 a.C.), da Nicomede (280–210 a.C.) tramite la concoide, da Apollonio (262–190 a.C.), Erone (100 a.C.–100), Filone (280–220 a.C.), da Diocle (240–180 a.C.) tramite la cissoide, e una cosiddetta soluzione meccanica attribuita a Platone e una di Eratostene (276–197 a.C.). Per una discussione rimandiamo a [66], ci limitiamo qui a qualche osservazione. La riduzione di Ippocrate (470–410 a.C.) chiede di trovare x e y tali che

$$a : x = x : y = y : 2a;$$

in questo caso infatti si ha:

$$\frac{a}{x}\frac{a}{x}\frac{a}{x} = \frac{a}{x}\frac{x}{y}\frac{y}{2a}, \quad o, \quad \frac{a^3}{x^3} = \frac{1}{2}, \quad o, \quad 2a^3 = x^3$$

Le proporzioni di Ippocrate dicono, in termini moderni, che

$$x^2 = ay,\ y^2 = 2ax,\ xy = 2a^2,$$

e che le eventuali soluzioni (x,y) si possono ottenere come intersezione di due parabole (le prime due equazioni) o di una parabola (una delle prime due equazioni) e di una iperbole (l'ultima equazione). Quanto sopra è sostanzialmente l'approccio sintetico di Menecmo espresso in forma analitica.

Sebbene non si sappia con certezza che cosa abbia condotto alla scoperta e allo studio delle coniche (parabola, ellisse, iperbole), è opinione comune che il loro studio sia iniziato con Menecmo nell'Accademia di Platone proprio in questo contesto.

Sommando le prime due equazioni si ha

$$x^2 + y^2 = a(2x + y)$$

che è l'equazione di un cerchio; quindi la soluzione può anche essere ottenuta come intersezione di un cerchio con una parabola o con una iperbole (questa è essenzialmente la soluzione di Erone e Filone), sempre però in modo sintetico.

Queste soluzioni coinvolgono le coniche, la soluzione di Archita coinvolge curve pi'u complesse ed è pi'u difficile. Egli esprime la soluzione come intersezione di un cono, un cilindro e un toro nello spazio; in linguaggio moderno queste hanno equazioni rispettivamente

$$y^2 + z^2 = 3x^2, \quad x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

2.3.3. *Trisezione dell'angolo: la quadratrice di Ippia*

A proposito della trisezione dell'angolo Pappo (290–350) dice:

> Nicomede trisecò ogni angolo rettilineo per mezzo della concoide, la cui costruzione, ordine e proprietà ci ha trasmesso essendone lui lo scopritore. Altri hanno fatto lo stesso per mezzo della quadratrice di Ippia [...]. Altri ancora, usando la spirale di Archimede, divisero qualunque angolo rettilineo in un dato rapporto.

Ed ancora

> [...] Dinostrato, Nicomede e altri geometri posteriori usarono per la quadratura del cerchio una certa curva che prese il nome dalla sua proprietà; per questo quei geometri la chiamarono quadratrice.

Il metodo di costruzione della quadratrice è descritto da Pappo, cfr. [66].

Supponiamo che $ABCD$ sia un quadrato e BED il quarto di cerchio con centro A. Supponiamo che

(i) un raggio del cerchio si muova uniformemente attorno ad A dalla posizione iniziale AB a quella finale AD,

(ii) nello stesso tempo la linea $B'C'$ si muova uniformemente dalla posizione BC alla posizione AD restando parallela a se stessa e con estremità B' che si muove lungo AB,

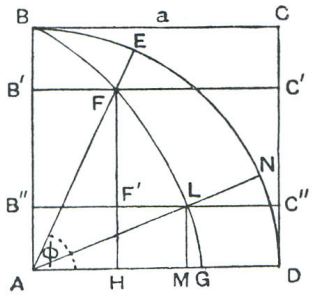


FIGURA 7. La quadratrice di Ippia.

in modo che nella loro posizione finale la linea e il raggio coincidano con AD (si noti come questa sia un'assunzione delicata) e in ogni istante precedente, durante il moto, la loro intersezione determini un punto: il luogo di questi punti è la *quadratrice*.

Con riferimento alla Figura 7, la proprietà caratterizzante la curva è:

$$\widehat{BAD} : \widehat{EAD} = \text{Arco}\, BED : \text{Arco}\, ED = AB : FH$$

In termini moderni, se ϕ è l'angolo FAD fatto dal raggio vettore AF con AD, misurato in radianti, ρ la lunghezza di AF e a la lunghezza del lato del quadrato, l'equazione della quadratrice è:

$$\frac{\rho \sin \phi}{a} = \frac{\phi}{\pi/2}.$$

Supponiamo ora che EAD sia l'angolo dato e dividiamo FH con F' in un dato rapporto; si tracci $F'C''$ parallela ad AD e sia L la sua intersezione con la curva; sia N l'intersezione del prolungamento di AL con il cerchio. Allora gli angoli EAN, NAD sono nello stesso rapporto di FF' a $F'H$, come si verifica facilmente. In particolare, dividendo in tre parti il segmento FH si ottiene con la costruzione precedente la trisezione dell'angolo FAD.

L'applicazione della quadratrice alla rettificazione del cerchio è più difficile, perché richiede di conoscere la posizione del punto G in cui la quadratrice interseca AD, cfr. [66] e [45] pp.34-36.

CAPITOLO 3

Il periodo d'oro: Euclide, Apollonio e Archimede

Il cosiddetto *periodo Ellenistico* si situa convenzionalmente tra il III sec. a.C. e il IV–V sec. d.C., ed è diviso in due parti: dal III secolo a.C. all'inizio dell'era cristiana, cui ci si riferisce come all'*epoca aurea* della matematica greca, e dal II–III al IV–V sec. d.C., il periodo della rinascita e della decadenza o periodo dei *commentatori*. Il centro geografico del periodo ellenistico, almeno per quanto riguarda la scienza, è Alessandria e, perciò, esso è anche chiamato *periodo alessandrino*.

Con riferimento alla matematica, le figure di spicco di questo periodo sono: Euclide (325–265 a.C.), Archimede (287–212 a.C.) e Apollonio da Perga (262–190 a.C.), quindi Eratostene (284–192 a.C.), Diocle (240–180 a.C.), Zenodoro (200–140 a.C.), Nicomede (circa 200 a.C.), Ipparco (190–120 a.C.), e alla fine del periodo aureo Menelao (I sec. a.C.), Erone (I sec. d.C.) e Tolomeo (85–165 d.C.). Nel secondo periodo ellenistico, a parte Diofanto (200–284), la scena è occupata dai cosiddetti *commentatori* come Pappo (290–350), Teone di Alessandria (335–360), e Proclo (411–485).

Da un punto di vista *ideale* Euclide e, anche se posteriore, Apollonio chiudono il periodo ellenico con una formalizzazione dei principali risultati ottenuti e allo stesso tempo aprono il periodo ellenistico, che mostra una maggiore disinvoltura sull'approccio numerico e attenzione agli aspetti applicativi. Infatti, Euclide si occupa anche di fenomeni naturali, di ottica, di musica, e Apollonio di astronomia.

La figura emblematica di questo periodo è sicuramente Archimede che godette di una notevole fama già al suo tempo. Con il metodo di esaustione egli determinò l'area e il volume (in realtà rapporti di) di molte figure, determinò i valori approssimati di π e delle radici dei numeri, trovò i baricentri di molte figure piane e solide, stabilì molti teoremi sulle leve, fondando la statica; fondò anche lo studio dell'idraulica indagando l'equilibrio dei corpi galleggianti, studiò le coniche e gli specchi, e introdusse varie curve.

Volendo schematicamente riassumere alcuni dei traguardi fondamentali raggiunti, possiamo dire che in questo periodo assistiamo:

- ad un uso raffinato, come già detto, del *metodo di esaustione* per il calcolo (dei rapporti) delle aree e dei volumi, sia dal punto di vista teorico che

pratico;
- all'introduzione e allo studio di nuove *curve* che, non solo esistono come le sezioni coniche, ma che si *costruiscono*, come la spirale di Archimede, la concoide di Nicomede o la cissoide di Diocle, come *luoghi geometrici*;
- allo sviluppo, sempre in termini geometrici, della *trigonometria*, soprattutto sferica, ad opera di Ipparco, Menelao e Tolomeo; essa trova una presentazione sistematica nella *Collezione matematica* o *Almagesto* di Tolomeo, che diventò la base della cosiddetta 'teoria tolemaica';
- alla (ri)nascita dell'*aritmetica* e dell'*algebra* ad opera di Nicomaco e, soprattutto, di Diofanto: si studiano sistemi lineari ed equazioni di secondo grado, e soluzioni intere di equazioni indeterminate, le future *equazioni diofantee*; si opera con rapporti di interi che vengono visti come numeri, anche se vengono respinti come numeri gli irrazionali e i numeri negativi;
- infine, come già detto, assistiamo alla nascita dell'ottica geometrica, della statica e dell'idraulica in senso scientifico.

3.1. *Euclide e gli Elementi*

Non sappiamo quasi nulla della vita di EUCLIDE, se non pochissime informazioni dovute a Proclo, storie di fantasia sono raccontate da autori arabi. Secondo queste notizie, Euclide visse intorno al 300 a.C.; probabilmente dopo un periodo di iniziale formazione nell'Accademia platonica ad Atene, diresse una scuola ad Alessandria, dice infatti Proclo che Apollonio passò molto tempo ad Alessandria con gli studenti di Euclide.

L'opera più famosa di Euclide sono gli *Elementi*; essi raccolgono le basi della matematica greca come disciplina razionale sviluppatasi nei secoli precedenti, ma sono da considerare come opera originale di Euclide, almeno nella risistemazione e presentazione; probabilmente anche molta parte di essi è originale. Essi furono particolarmente stimati in Grecia, a prova di questo Proclo riferisce di molti commenti, e fin da allora sono stati un riferimento costante e importante per la matematica, sia per il contenuto che per la forma. Assieme alla Bibbia, gli *Elementi* vantano il maggior numero di edizioni e di traduzioni. In Europa arrivano intorno al 1100 in traduzione latina dall'arabo, traduzioni imprecise a causa della necessità di costruire un nuovo linguaggio e per la mancanza di una cultura matematica. Con l'approssimarsi della caduta di Costantinopoli nel 1453 arrivarono in Italia, in particolare a Venezia, Firenze e Roma, alcuni fuoriusciti e con loro numerosi manoscritti greci, con un rinvigorirsi dell'interesse per il mondo greco antico. Alla fine del Cinquecento viene pubblicata ad opera di Comandino una traduzione, questa volta dal greco, che offre una comprensione sufficientemente ampia e corretta dell'opera. Le traduzioni moderne

discendono dai manoscritti già noti nel Cinquecento, più precisamente dalla revisione degli *Elementi* da parte di Teone d'Alessandria e da un manoscritto greco scoperto di François Peyrard (1760-1822) nella Biblioteca Vaticana.

Sugli *Elementi* di Euclide molto è stato scritto. Rimandiamo i lettori interessati ad esempio a [73] [45]. Qui diamo un breve sommario del contenuto.

Gli *Elementi* sono suddivisi in tredici libri: i primi sei, libri I–VI, riguardano la geometria piana elementare, i tre successivi, libri VII–IX, la teoria dei numeri, il libro X gli incommensurabili, e gli ultimi tre, libri XI–XIII, soprattutto la geometria solida. Non c'è nessuna introduzione e il libro I comincia con un elenco di *definizioni*, *postulati* e *nozioni comuni*. Molte definizioni in realtà non definiscono in senso logico, mancando un elenco di termini non definiti con cui definire. Questo è il caso di punto, linea e superficie, ad esempio. Sembra che con le definizioni si cerchi di spiegare il significato dei termini, facendo riferimento a concetti o sensazioni o processi fisici. Ancora, le definizioni a volte sono poco chiare, come la definizione di angolo tra due linee (non necessariamente rette), non essendo chiaro il termine inclinazione per linee curve (questo susciterà infatti enormi dibattiti fino al diciassettesimo secolo). Molti postulati non sono esplicitamente assunti, ma usati successivamente. A questo si potrebbe aggiungere che anche nel seguito dell'opera si danno definizioni vaghe o inutili, e che alcune dimostrazioni non sono del tutto corrette o complete (valgono, per esempio, in situazioni speciali). Tutti questi aspetti nel corso dei secoli hanno suscitato un'abbondante letteratura e troveranno una completa soluzione solo nella risistemazione di David Hilbert nei [69] *Fondamenti della geometria*. Ma ciò dice una piccola parte della verità.

In realtà gli *Elementi* sono un'opera matematica molto raffinata. Diamo solo qualche esempio. I postulati permettono di usare riga e compasso, ma in linea di principio non di dire se due segmenti sono uguali o no. La riga è non numerata e il compasso è il cosiddetto *compasso euclideo*: si può puntare e tracciare, ma immediatamente dopo si chiude; non si può usare per verificare se due segmenti sono uguali. Ebbene, Euclide dimostra che sulla base dei suoi assiomi è possibile usare il compasso come si fa di solito per riportare le distanze. Euclide pare rendersi conto che la nozione comune — cose che coincidono fra loro sono uguali fra loro —, che è la base per le dimostrazioni per sovrapposizione, è piuttosto delicata ed evita di usare queste dimostrazioni per quanto possibile, sostituendole con dimostrazioni più complesse. Infatti, nelle dimostrazioni per sovrapposizione si usa, in primo luogo, il concetto di moto ed egli non ha base logica per questo; in secondo luogo si assume che una figura conservi tutte le sue proprietà quando viene spostata da una posizione all'altra; la figura spostata potrebbe essere congruente a una seconda senza che nella sua posizione originaria lo sia: sembra che debbano intervenire concetti più moderni come quello di omogeneità dello spazio e quello di traslazione nello spazio. Nel postulato 4

— tutti gli angoli retti sono uguali —, che a prima vista sembra strano è appunto l'omogeneità dello spazio che Euclide sembra assumere. Ancora, un esempio è costituito dall'assioma delle parallele, il cui uso è rimandato e sostituito con altre argomentazioni da Euclide fino a quando possibile. Aristotele negli *Analitici secondi* dice che ai suoi tempi la teoria delle parallele non era ancora stata posta su basi ferme. Questo è in qualche senso quello che succede con Euclide (come il corso dei secoli dimostrerà). La complessità della questione resta e, dopo Euclide, ci saranno vari tentativi di sostituire il postulato delle parallele con qualcosa d'altro. Posidonio e Gemino tenteranno di sostituirlo con una teoria della *equidistanza*. Tentativi di dimostrazione sono dovuti a Tolomeo, Proclo e ad un certo Diodoro. Ma questa è un'altra storia, cfr. [16] [62].

I LIBRI V E VI, basati sull'opera di Eudosso, espongono la teoria delle proporzioni, e sono quelli i cui contenuti sono stati dibattuti forse più di ogni altra parte degli *Elementi* sia nell'antichità che nel Rinascimento e nel Seicento. Euclide trova i fondamentali teoremi sui triangoli, *costruisce* il terzo, il quarto e il medio proporzionale di tre grandezze lineari, formula una generalizzazione del teorema di Pitagora, e discute in modo geometrico equazioni di secondo grado. Non fanno uso della geometria le definizioni e le dimostrazioni del libro V, ma furono considerate dai successori di Euclide come applicabili solo alla geometria; quando nuove esigenze, nel Seicento, spinsero verso lo studio di grandezze non geometriche, si pose il problema di una revisione di questa teoria e di una nuova reinterpretazione con Galilei, Cavalieri, Torricelli e altri delle grandezze o dei loro rapporti come *numeri*, ma il processo sarà lungo e complicato.

I LIBRI VII, VIII E IX trattano della teoria dei numeri, cioè delle proprietà dei numeri interi e dei rapporti dei numeri interi; essi contengono i fondamentali teoremi dell'aritmetica:

(1) Se due numeri moltiplicati fra loro fanno un qualche numero e un qualsiasi numero primo misura il prodotto, allora esso misura anche uno dei numeri originali.
(2) Ogni numero composto è misurato da qualche numero primo.
(3) Se un numero è il più piccolo che è misurato da certi numeri primi, esso non sarà misurato da nessun altro primo eccetto che da quelli che lo misuravano in origine.
(4) I numeri primi sono più di qualsiasi moltitudine assegnata.

Il LIBRO X intraprende la classificazione degli irrazionali del tipo $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ dove a e b sono due grandezze lineari commensurabili, ovviamente in modo sintetico-geometrico. Ciò rende questo libro particolarmente difficile. Tra gli enunciati compare il seguente, che è alla base del metodo di esaustione:

(1) Date due grandezze diseguali, se dalla maggiore si sottrae una grandezza maggiore della sua metà e da ciò che rimane una grandezza maggiore della sua metà e se questo procedimento viene ripetuto continuamente, allora alla fine rimarrà una grandezza che sarà minore della minore delle grandezze date.

Il LIBRO XI presenta il metodo di esaustione e, proseguendo nel LIBRO XII, tratta della geometria solida. Elenchiamo alcune delle proposizioni presenti:

(1) Poligoni simili inscritti in cerchi stanno l'uno all'altro come i quadrati dei diametri dei cerchi.
(2) I cerchi stanno l'uno all'altro come i quadrati dei diametri.
(3) Piramidi che hanno la stessa altezza e basi triangolari stanno l'una all'altra come le basi.
(4) Ogni cono è la terza parte del cilindro che ha la stessa base e uguale altezza.
(5) Coni e cilindri che hanno la stessa altezza stanno gli uni agli altri come le loro basi.
(6) Coni e cilindri simili stanno gli uni agli altri nel rapporto triplo (cubico) dei diametri delle loro basi.
(7) Le sfere stanno le une alle altre nel rapporto triplo (cubico) dei loro rispettivi diametri.

Infine, il LIBRO XIII considera le proprietà dei poligoni regolari, sia in sé sia in quanto inscritti in un cerchio, e il problema di come inscrivere i cinque solidi regolari in una sfera, e si chiude con la dimostrazione che ci sono solo cinque poliedri regolari convessi. Accenniamo brevemente al perché.

La somma degli angoli che stanno attorno al vertice di un solido regolare è minore di 360°; siccome attorno al vertice ci sono almeno tre facce poligonali, questi devono avere angoli minori di 120°; ma ci sono solo tre poligoni regolari con angoli minori di 120°: il triangolo, il quadrato e il pentagono. Sono quindi possibili solo tre facce:

- *triangolari*: 3, 4, 5 triangoli equilateri attorno ad un vertice (tetraedro, ottaedro, icosaedro),
- *quadrangolari*: 3 quadrati che si incontrano attorno ad un vertice (cubo),
- *pentagonali*: 3 pentagoni che si incontrano attorno ad un vertice.

Questi solidi poi esistono effettivamente, si costruiscono, si possono inscrivere in una sfera e circoscrivono una sfera.

Per concludere possiamo dire che negli *Elementi* due punti, fondamentali e in qualche modo correlati, restano, per così dire, nella nebbia: la nozione di *continuità* e la *teoria delle proporzioni*. Inoltre, a parte una definizione circolare di figura geometrica (*figura* è ciò che è compreso da uno o più *termini*, *termine* è ciò che è estremo di qualcosa), gli *Elementi* studiano solo classi specifiche di figure e i loro rapporti di aree e volumi come poligoni, figure rettilinee, il cerchio, coni, prismi, poliedri e la sfera, anche se, come abbiamo visto e vedremo ancora, nella matematica greca compaiono figure e rapporti di aree o di volumi di figure più complesse.

3.2. *Apollonio da Perga*

Poco sappiamo della vita di APOLLONIO. Secondo la tradizione nacque a Perga, città dell'Asia Minore, andò da giovane ad Alessandria, dove studiò con i

discepoli di Euclide, e vi rimase per lungo tempo. Dalla dedica delle sue *Sezioni coniche* al re di Pergamo Attalo I (241–197), si deducono le date 262 a.C. per la nascita e 190 a.C. per la morte. Apollonio era dunque di circa 25 anni più giovane di Archimede.

La sua opera più importante sono le *Sezioni coniche*. In quest'opera Apollonio raccolse i risultati precedenti, spogliandoli di ogni aspetto non pertinente; aggiunse molto materiale nuovo che presentò in modo sistematico e con tale raffinata organizzazione da impedire quasi ogni ulteriore sviluppo per molti secoli successivi. Per lungo tempo le *Sezioni coniche* furono riconosciute come *il* trattato sull'argomento.

Non entreremo nei dettagli dell'opera di Apollonio, ma faremo solo qualche osservazione, il lettore interessato è rimandato ai volumi di Heath [66] e [2]. Partendo da un cono obliquo (a doppia falda) che proietta un cerchio, tagliandolo con un piano, Apollonio ottiene l'ellisse, l'iperbole e la parabola, che caratterizza sul piano di intersezione in termini di diametri e corde. A partire da questo, studia le proprietà dei diametri, degli assi, dei centri, degli asintoti, dei fuochi e le proprietà focali. Studia le proprietà di tangenza e le proprietà delle normali ad una conica, in termini di proprietà di minima e massima distanza di un punto da una conica, e le proprietà polari.

Molte altre opere di Apollonio non ci sono pervenute; di esse ci si può fare un'idea dalle descrizioni fornite da Pappo e da altri commentatori posteriori, cfr. [66][2]. Ad Apollonio pare sia da attribuire il meccanismo matematico preferito da Tolomeo per rappresentare il moto dei pianeti, si veda [79], quello degli *epicicli* e degli *eccentrici*. Nel primo schema un pianeta si muove di moto uniforme lungo un piccolo cerchio (epiciclo) il cui centro a sua volta si muove uniformemente lungo la circonferenza di un cerchio più grande (deferente) con centro nella Terra. Nel secondo schema il pianeta si muove uniformemente lungo la circonferenza di un grande cerchio, il cui centro si muove a sua volta uniformemente in un piccolo cerchio con centro sulla Terra. Ovviamente, se i raggi dei cerchi piccoli sono uguali, le due teorie sono equivalenti.

3.3. *Archimede*

Non vi è nessun singolo matematico la cui opera riassuma il carattere dell'età alessandrina tanto bene quanto quella di Archimede (287–212 a.C.), il più grande matematico dell'antichità, sostiene Kline in [73].

Della vita di ARCHIMEDE abbiamo alcuni dati certi. Sicuramente muore nell'assedio di Siracusa da parte di Marcello durante la seconda guerra punica e, secondo Joannes Tzetzes (erudito bizantino del XII secolo), muore a 75 anni, quindi le date pertinenti alla sua vita sono 287–212 a.C. Forse era figlio di

Feidia, astronomo. Secondo Diodoro (I a.C.) si recò da giovane ad Alessandria dove probabilmente incontrò matematici alessandrini con i quali si tenne in contatto, come Conone da Samo astronomo reale, di cui ebbe grandissima stima, ed Eratostene a cui manderà il *Metodo*. Ma visse e morì a Siracusa.

Fin dall'antichità si sviluppò la mitologia di Archimede e il mito sopravanzò di molto la diffusione delle opere e il numero dei continuatori. Già Erone, sembra non le conoscesse tutte, ed Eutocio (IV secolo) che scrisse un commento ad alcune opere di Archimede non disponeva più di alcuni suoi testi. La *Misura del cerchio* e la *Sfera e il cilindro* erano quelle più note e delle quali vennero a conoscenza gli arabi. È solo nel IX–X secolo che a Bisanzio vennero radunati e copiati i testi (tranne il *Metodo* il cui palinsesto fu trovato solo nel 1906) di quello che oggi è noto come il *corpus* archimedeo. Una traduzione dal greco in latino di Guglielmo di Moerbeke (1296) non si diffuse. A partire dal 1450 l'opera di Archimede viene di nuovo tradotta in latino da Regiomontano e, basata su questa traduzione esce a stampa a Basilea nel 1544 l'*editio princeps* greco-latina di quasi tutto il corpus degli scritti, ovviamente senza il *Metodo*. È soprattutto nel Seicento che l'opera di Archimede eserciterà tutta la sua influenza.

La cronologia dei testi e delle traduzioni delle opere di Archimede è un tema piuttosto complesso che qui eviteremo di discutere. Ci limitiamo a menzionare che, dopo il ritrovamento del *Metodo* nel 1906, l'edizione di riferimento greco-latina è quella di Heiberg, Teubner 1910–15 [3], mentre varie edizioni in lingue moderne sono disponibili, come ad esempio [4] o [5] e in italiano [6]. Il miglior libro su Archimede è probabilmente [34], si veda anche [24] e [4] .

Gli scritti di Archimede hanno la forma di brevi trattati, somigliano ad articoli di matematica inviati ad una rivista; per questo forse sono da una parte così affascinanti e dall'altra di non facile lettura. Le dimostrazioni a volte sono solo accennate, ci sono molti riferimenti non sempre identificabili, come ad una forma di conoscenza comune, ma c'è sempre una sorta di genialità.

Ecco una lista delle opere a noi pervenute nell'ordine in cui compaiono nell'edizione critica di Heiberg [3]:

1 *Sulla sfera e il cilindro*. È indirizzato a Dositeo, matematico di Alessandria. È in due libri. Nel primo si dimostra che la sfera è pari ai $2/3$ del cilindro ad essa circoscritto e che la superficie sferica è uguale a quattro cerchi massimi. Nel secondo si tratta di problemi risolubili a partire da questi risultati, come, ad esempio, dividere una sfera in due parti che abbiano fra loro un rapporto dato.

2 *Misura del cerchio*. Consiste di sole tre proposizioni. Nella prima si dimostra che il cerchio è uguale al triangolo rettangolo avente per cateti il raggio e la circonferenza rettificata. Nella terza si dimostra che il rapporto tra la circonferenza e il diametro deve essere compreso tra $3+10/71$ e $3+1/7$.

3 *Sui conoidi e sferoidi*. Indirizzato a Dositeo, studia il paraboloide e l'iperboloide di rotazione (conoidi) e gli ellissoidi (sferoidi). Si dimostra che il paraboloide di rivoluzione è pari ai $3/2$ del cono avente stessa base e stessa altezza, e analoghi ma più complessi risultati per l'iperboloide e l'ellissoide.

4 *Sulle spirali*. Indirizzata a Dositeo. Viene definita la *spirale di Archimede*, la curva descritta da un punto che si muove di moto uniforme su una retta che si muove a sua volta di moto circolare uniforme; tale curva è utilizzata per costruire una rettificazione della circonferenza.

5 *Sull'equilibrio dei piani*. In due libri: nel primo viene dedotta la legge della leva e viene determinato il centro di gravità di alcune figure piane: parallelogramma, triangolo, trapezio; nel secondo viene determinato il centro di gravità del segmento di parabola.

6 *Arenario*. Dedicato al re Gelone, vi si presenta un sistema di numerazione in grado di contare numeri grandissimi quali il numero di granelli di sabbia contenuti in una sfera grande quanto l'universo.

7 *Quadratura della parabola*. È indirizzato a Dositeo. Si dimostra che la parabola è pari a $4/3$ del triangolo avente uguale base e uguale altezza. Il testo è diviso in due parti: la quadratura meccanica, in cui si fa ricorso a concetti di statica, e quella geometrica.

8 *Sui galleggianti*. È in due libri. Nel primo si enuncia il *principio di Archimede*: un corpo immerso in un liquido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di liquido spostato. Su questa base, alla fine del primo libro vengono determinate le condizioni di equilibrio di un segmento sferico galleggiante. Nel secondo libro si studiano le condizioni di equilibrio stabile di un paraboloide galleggiante.

9 *Stomachion*. Probabilmente si discute di come suddividere un quadrato tramite quattordici tessere date.

10 *Sul metodo meccanico*. È dedicato a Eratostene. Archimede vi rivela il metodo euristico che seguiva per ottenere molti dei suoi risultati e mostra come applicarlo alla quadratura della parabola, sfera, segmenti sferici, conoidi e sferoidi. Vi si studia inoltre la cosiddetta unghia cilindrica e il solido ottenuto come intersezione di due cilindri inscritti in un cubo. Questo scritto fu ignoto fino al 1906.

11 *Libro dei lemmi*. Pervenuto solo attraverso una parafrasi araba, tratta di figure come quelle ottenibili per mezzo di intersezioni di cerchi.

12 *Il problema dei buoi*. Qui Archimede sfida i contemporanei a risolvere il problema dei buoi — bianchi, pezzati, neri, fulvi — che il dio Sole pascolava nella Trinacria, note certe relazioni fra il numero dei buoi di ogni colore. Il problema si riconduce ad una equazione indeterminata del secondo ordine, le cui soluzioni sono numeri con più di 200.000 cifre.

È molto probabile che non tutte le opere di Archimede siano giunte fino a noi.

Per la loro rilevanza matematica, illustreremo ora con qualche dettaglio alcuni risultati e metodi di Archimede (le traduzioni dei passi di Archimede sono tratte da [6] o da [22], o sono traduzioni da [4]

Quadratura della parabola

L'opera comincia con una prefazione:

> Archimede a Dositeo salute.
> Avendo sentito che era morto Conone, il quale in nulla è mai venuto meno nella sua amicizia verso di noi, e avendo sentito che tu avevi ben conosciuto Conone e che sei esperto di geometria, ci dolemmo per la morte di un uomo amico e mirabile nelle matematiche e decidemmo di farti giungere per iscritto, come avevamo pensato di scrivere a Conone, uno dei teoremi di geometria che prima non era stato studiato e che era stato trattato da noi, che prima l'abbiamo trovato per via meccanica, in seguito dimostrato per via geometrica.
> Tra quelli che prima di noi si sono occupati di geometria, alcuni tentarono di esporre per iscritto che era possibile trovare un'area poligonale eguale ad un cerchio dato o a una parte del cerchio e poi tentarono di quadrare l'area compresa da tutta la sezione del cono e una retta, assumendo lemmi non facilmente ammissibili, cosicché il più delle persone hanno riconosciuto che questi problemi non erano stati risolti. Ma per quanto riguarda il segmento compreso

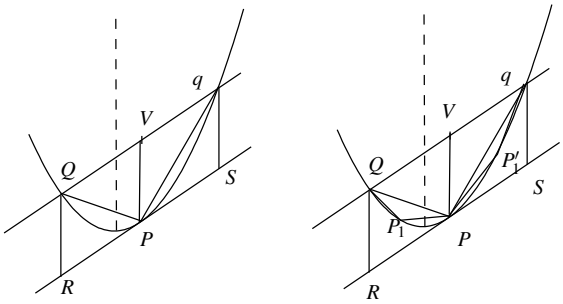


FIGURA 1. Quadratura della parabola.

da una retta e da una sezione di cono rettangolo sappiamo che nessuno ha prima di noi tentato di quadrarlo, ciò che da noi è stato ora trovato.
Dimostriamo infatti che qualunque segmento compreso da una retta e da una sezione di cono rettangolo [parabola] è uguale ai $4/3$ del triangolo avente la stessa base e altezza uguale al segmento: ciò avendo assunto il seguente lemma per la sua dimostrazione: date due aree disuguali è possibile, aggiungendo a se stesso l'eccesso di cui la maggiore supera la minore, superare ogni area limitata data. [Si tratta del *principio di Archimede*].
Anche i geometri anteriori [tra cui Euclide] a noi si sono serviti di questo lemma: infatti se ne sono serviti per dimostrare che i cerchi stanno tra loro in ragione duplicata dei diametri e che le sfere stanno in ragione triplicata dei diametri e ancora che ogni piramide è la terza parte del prisma avente la stessa base della piramide e uguale altezza e che qualunque cono è la terza parte del cilindro avente la stessa base del cono e altezza uguale, cioè assumendo un lemma simile a quello suddetto.
Accade ora che dei suddetti teoremi ciascuno è considerato non meno degno di fiducia di quelli dimostrati senza questo lemma: a noi basta che venga concessa simile fiducia ai teoremi da noi qui dati.
Inviamo dunque le dimostrazioni che abbiamo scritto di quel teorema, dapprima come è stato trattato per via meccanica, dopo come è stato dimostrato per via geometrica. Vengono premesse anche alcune proposizioni elementari sulle sezioni coniche, che risultano necessarie per la dimostrazione.
Stai sano.

Rimandando a dopo la discussione dell'approccio meccanico, diamo un breve resoconto dell'approccio geometrico, che secondo lo schema già discusso può esser visto come un'applicazione del metodo di esaustione.

Archimede dimostra innanzitutto che il segmento parabolico può essere esaurito da una serie di triangoli. Sia QPq (cfr. Figura 1) il segmento parabolico, sia PV il *diametro* (retta parallela all'asse della parabola) che biseca le corde parallele alla base Qq del segmento, cosicché V è il punto medio di Qq. Archimede dimostra (proposizione 18) che la tangente in P è parallela a qQ, cioè che la retta per P parallela a Qq tocca la parabola solo in P. Se QR e qS sono paralleli a PV, allora il triangolo qPQ è metà del parallelogramma $QRSq$ e perciò il triangolo QPq è maggiore della metà del segmento parabolico.

Archimede quindi reitera la costruzione sui segmenti parabolici qP_2P e PP_1Q, mostrando (proposizione 21) che il triangolo PP_1Q è uguale ad un ottavo del triangolo PQq. Ne segue che, iterando la costruzione n volte, l'area del poligono inscritto è pari a

$$\text{Area}\,PQq + \frac{1}{4}\text{Area}\,PQq + \frac{1}{16}\text{Area}\,PQq + \cdots + \frac{1}{4^n}\text{Area}\,PQq.$$

A questo punto Archimede dimostra (prop 23) che, se si indica con $A_0 := \text{Area}\,PQq$ e $A_n := \frac{1}{4^n}\text{Area}\,PQq$, allora

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_n + \frac{1}{3}A_n = \frac{4}{3}A_0,$$

e quindi che, se A è l'area del segmento parabolico, deve essere

$$A = \frac{4}{3}\text{Area}\,PQq.$$

Infatti, se $A > \frac{4}{3}A_0$, prendendo in considerazione il poligono S inscritto composto dai triangoli iterati fino ad m tale che

$$A > S > \frac{4}{3}A_0,$$

essendo

$$S + \frac{1}{3}A_m = \frac{4}{3}A_0$$

troviamo $S < \frac{4}{3}A$, il che è un assurdo. In modo analogo, se $A < \frac{4}{3}A_0$, possiamo scegliere S in modo che $\frac{4}{3}A_0 - S > A_m$, cioè

$$\frac{4}{3}A_0 - (A_0 + \cdots + A_m) = \frac{1}{3}A_m < A_m,$$

ancora un assurdo.

Misura del cerchio

Consiste in sole tre proposizioni:

1 L'area di un cerchio è uguale all'area di un triangolo rettangolo i cui cateti sono il raggio e la circonferenza del cerchio.
2 L'area del cerchio sta al quadrato del suo diametro come 11 sta a 14.
3 Il rapporto tra la circonferenza di un cerchio e il suo diametro è meno di $3 + \frac{1}{7}$ e più di $3 + \frac{10}{71}$.

Probabilmente si tratta di un testo non in forma originale. La seconda proposizione è strana per posizione e contenuto. La terza consiste nel calcolare il perimetro del poligono inscritto e di quello circoscritto al cerchio di 96 lati e mostra la straordinaria capacità di calcolo di Archimede, calcoli che sono stati ricostruiti, ma non appaiono esplicitamente.

Sulla sfera e il cilindro

L'opera comincia con una prefazione:

> Archimede a Dositeo salute.
> Antecedentemente ti mandai per iscritto, insieme alla dimostrazione, [la seguente] tra le cose che avevo considerato: che ogni sezione compresa da una retta e da una sezione di cono rettangolo supera di un terzo il triangolo avente la stessa base della sezione e uguale altezza. In seguito, essendomi imbattuto in teoremi degni di considerazione, composi le loro dimostrazioni. Sono questi: dapprima che la superficie di ogni sfera è quadrupla del suo circolo massimo, poi che la superficie di qualunque segmento sferico è uguale al cerchio, il raggio del quale sia uguale alla retta condotta dal vertice della sezione alla circonferenza del cerchio che è base della sezione. Oltre a questi: che per qualunque sfera il cilindro avente base uguale al circolo massimo della sfera e l'altezza uguale al diametro della sfera supera della metà la sfera e così la sua superficie supera della metà quella della sfera.
> Queste proprietà erano da sempre inerenti alla natura delle figure menzionate ed erano ignorate da coloro che prima di noi si occuparono di geometria: nessuno di loro si era accorto che per queste figure c'è una simmetria. Perciò non ho esitato a porre queste proposizioni accanto a quelle trovate da altri geometri, e a quei teoremi che sembrano di molto superiori che Eudosso stabilì sulle figure solide, cioè che ogni piramide è la terza parte del prisma avente la stessa base della piramide e uguale altezza, e che ogni cono è la terza parte del cilindro avente la stessa base del cono e uguale altezza: e infatti per queste proprietà appartenenti da sempre alla natura di queste figure accadde che dei molti degni geometri anteriori ad Eudosso tutti le ignorarono e nessuno le comprese. È ora data la possibilità ai competenti di esaminare queste proposizioni. Sarebbe stato bene che esse fossero state rese note quando Conone era ancora in vita: pensiamo infatti che egli massimamente avrebbe potuto comprenderle pienamente e dare su si esse un giudizio confacente: ma ritenendo che sia bene portarle a conoscenza di coloro cui la matematica è familiare, ti inviamo le dimostrazioni che abbiamo scritte, e che sarà possibile di esaminare a coloro che si occupano di matematica. Vengono ora scritti dapprima gli assiomi e i postulati che servono per le dimostrazioni delle proposizioni.

Dopo aver definito curve e superfici concave nella stessa direzione, enuncia cinque ipotesi:

1. Di tutte le linee che hanno gli stessi estremi la retta è quella minima.
2. Due linee del piano con gli stessi estremi sono diseguali quando entrambi sono concave nella stessa direzione e una di esse è completamente contenuta [...] e la linea che è inclusa è la più piccola.
3. In modo simile, delle superfici che hanno le stesse estremità, se queste estremità sono su un piano, il piano è il più piccolo [in area].
4. Due superfici che hanno gli stessi estremi su un piano e sono concave nella stessa direzione e una di esse è completamente contenuta sono diseguali e quella inclusa è la più piccola.
5. Inoltre, di linee, superfici, o solidi non uguali, la più grande eccede la più piccola di una quantità tale che, quando aggiunta a se stessa, eccede ogni assegnata grandezza tra quelle che sono confrontabili [con questa e] tra loro.

Premesse queste cose, se un poligono è inscritto in un cerchio, è chiaro che il perimetro del poligono inscritto è più piccolo della circonferenza del cerchio.

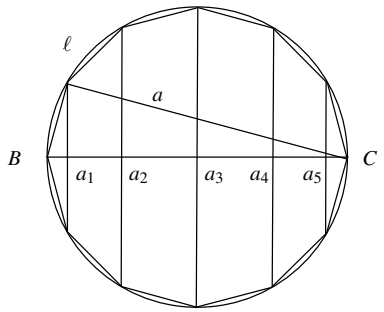


FIGURA 2. Quadratura della sfera.

L'idea fondamentale nel libro I è che, come il cerchio è equivalente al triangolo rettangolo con cateti rispettivamente uguali al raggio e alla circonferenza, la sfera piena è equivalente al cono con base un cerchio equivalente alla superficie sferica e altezza uguale al raggio della sfera. Per questo, volendo studiare la superficie sferica, Archimede comincia a determinare la superficie laterale del cono. Il volume del cono, come detto nella prefazione, era già noto ai tempi di Eudosso. Usando il metodo di esaustione (inscrivendo poligoni regolari sul cerchio di base e considerando il cono con base il poligono), egli dimostra due proposizioni:

13 La superficie di un cilindro circolare retto, escluse le basi, è uguale a(ll'area di) un cerchio il cui raggio è medio proporzionale fra il lato (cioè, una generatrice) e il diametro della sua base. [$\pi a \cdot 2r$]

14 La superficie di un cono circolare isoscele, esclusa la base, è uguale al cerchio il cui raggio è la media proporzionale tra il lato (generatrice) del cono e il raggio del cerchio di base. [πar^2]

A questo punto Archimede inscrive in un cerchio massimo della sfera un poligono di $4n$ lati e fa ruotare la figura lungo il diametro BC (cfr. Figura 2), ottenendo un solido fatto di coni e tronchi di coni inscritto nella sfera. Quindi mostra che ciascuna delle parti di cui questo solido approssimante è composto è pari al cono avente per altezza la perpendicolare condotta al lato del poligono dal centro (l'apotema) e per base la superficie conica che l'avviluppa. La figura approssimante è quindi una somma di coni, tutti di uguale altezza, ma di basi diverse, e la somma delle basi non è altro che la superficie laterale del solido approssimante. Quindi Archimede procede a valutare questo cono. Per calcolare la somma $S_1 + S_2 + \ldots + S_{2n}$ esprime ogni superficie avviluppante S_i come un cerchio il cui raggio risulta essere la media proporzionale fra le due linee. Precisamente S_i è il cerchio di raggio r_i, con $r_i = l \times L_i$, dove l è il lato del poligono e le L_i sono tali che la loro somma sia uguale alla somma $a_1 + \ldots + a_{2n-1}$ (cfr.

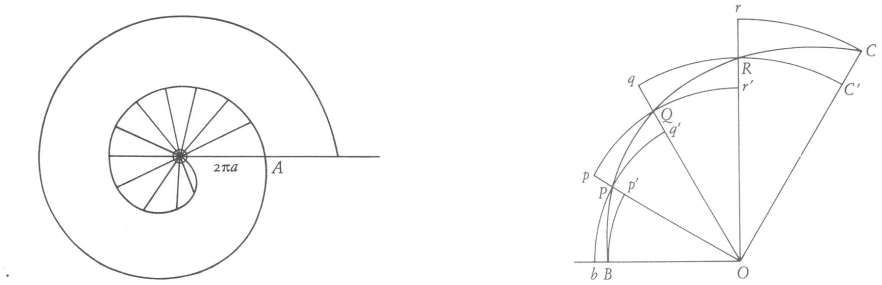


FIGURA 3. La spirale di Archimede e i settori circolari inscritti e circoscritti.

Figura 2). Per cui si ottiene

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_{2n} = \pi(l \times L_1 + \ldots + l \times L_{2n}) = \pi l \times (a_1 + \ldots + a_{2n-1}).$$

In questo modo il problema è stato ricondotto a sommare le corde. Nella proposizione 21, usando le proprietà della similitudine dei triangoli e delle proporzioni, dimostra che $l \times (a_1 + \ldots + a_{2n-1}) = d \times A$ dove d è il diametro del cerchio e A è la retta che sottende la metà dei lati del poligono a eccezione di uno. La base del cono equivalente al solido approssimante ha quindi un'area, πdA, uguale circa a $\pi d^2 = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2$ se il poligono ha un numero sufficientemente grande di lati. Con il metodo di esaustione, approssimando anche dall'esterno, può quindi dimostrare:

33 La superficie della sfera è quattro cerchi massimi.

34 La sfera è quattro volte il cono avente per altezza il raggio e per base il cerchio massimo della sfera [$\frac{4}{3}\pi r^2$], da cui segue che la sfera è uguale ai $2/3$ del cilindro a essa circoscritto.

Sulle spirali

Dopo una serie di lemmi, Archimede definisce la *spirale* in modo cinematico come la curva descritta da un punto che si muove di moto uniforme su una retta che ruota in un piano di moto uniforme attorno ad un estremo. Se ρ denota la distanza dall'estremo O e θ l'angolo in senso antiorario che la retta forma con una retta fissa, in termini moderni, l'equazione della spirale è $\rho = a\theta$. Archimede studia varie proprietà della spirale in connessione con le sue tangenti e mostra che

24 L'area limitata dalla prima spira della spirale e dalla retta iniziale è uguale ad un terzo del primo cerchio, cioè a $\frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$.

La dimostrazione viene fatta con il metodo di esaustione, la figura viene esaurita inscrivendo e circoscrivendo settori circolari. L'area delle regione limitata

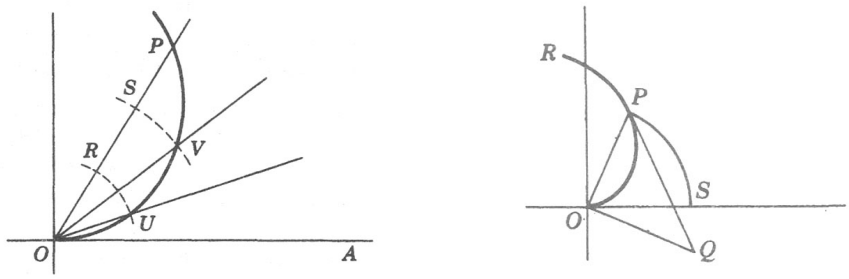


FIGURA 4. La spirale come trisettrice e quadratrice.

da un arco di spirale, l'arco *BPQRC* nella Figura 3, e da due raggi vettori *OB* e *OC* è racchiusa da due insiemi di settori circolari, scelti sempre più piccoli in modo tale che la differenza fra l'area che sta sotto l'arco di spirale e la somma delle aree del numero finito di settori inscritti (circoscritti) possa essere più piccola di qualsiasi grandezza scelta; quindi, Archimede calcola la somma delle aree dei settori corrispondenti ad una spira completa.

La spirale può essere usata per trisecare gli angoli e per quadrare il cerchio. Con riferimento alla Figura 4, se il raggio *OP* viene trisecato nei punti *R* e *S* e si tracciano delle circonferenze aventi *O* come centro e *OR* e *OS* come raggi e queste intersecano la spirale in *U* e *V*, allora le linee *OU* e *OV* trisecano l'angolo *AOP*. Archimede mostra anche che, se nel punto *P* si traccia la tangente alla spirale e questa tangente interseca nel punto *Q* la retta che passa per *O* ed è perpendicolare ad *OP*, allora il segmento *OQ* è uguale in lunghezza all'arco di cerchio *PS* del cerchio avente come centro *O* e come raggio *OP*, arco che è compreso tra il segmento *OS*, asse polare, e il segmento *OP*, raggio vettore.

L'intera opera è piuttosto singolare, è infatti difficile capire come Archimede possa 'aver escogitato' i risultati che dimostra.

Sui conoidi e sferoidi

Questa è senza dubbio una della opere più mature di Archimede. Scopo è determinare il rapporto tra il cono inscritto in un segmento di paraboloide o di iperboloide di rotazione (conoidi) o di un segmento di ellissoide (sferoide, oblato o prolato) e il segmento stesso.

In tutti i casi e contemporaneamente, nella proposizione 19, Archimede circoscrive e inscrive al segmento solido figure fatte di tronchi di cilindro, come in Figura 5, dividendo l'asse della figura in n parti uguali.

È chiaro che l'eccesso tra il volume della figura circoscritta e quello della figura inscritta è dato dal volume del primo tronco, che è piccolo quanto si vuole se n è sufficientemente grande; questo dipende solo dalla monotonia della curva che genera il solido di rotazione, l'approccio comincia quindi ad avere il

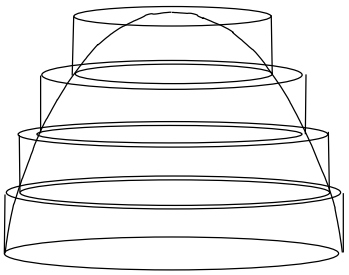


FIGURA 5. Il paraboloide.

carattere di metodo generale. In ogni caso, siamo nella posizione di poter usare il metodo di esaustione.

Archimede procede quindi, separatamente per ciascuna figura, ad una valutazione delle figure approssimanti. Questo risulta piuttosto semplice per il paraboloide, più complesso per l'ellissoide e per l'iperboloide.

Ci limitiamo a dare un'idea rapida nel caso del paraboloide. È chiaro che i tronchi di cilindro di uguale altezza stanno fra loro come le basi; ma le basi sono cerchi, che stanno fra loro come i quadrati dei raggi, raggi che non sono altro che le ordinate della parabola che genera il conoide; i quadrati delle ordinate di una parabola stanno fra loro come le ascisse: in conclusione i tronchi di cilindri della figura inscritta (circoscritta) stanno fra loro come $1:2:3:\ldots$ Archimede deduce quindi, e la cosa per noi è piuttosto chiara, che, se h è l'altezza degli n tronchi di cilindro, si ha

$$\frac{\text{cilindro.circoscritto}}{\text{fig.inscritta}} = \frac{n(nh)h}{h(h+2h+3h+\ldots+(n-1)h)} > \frac{n^2}{\frac{1}{2}n^2}$$

$$\frac{\text{cilindro.circoscritto}}{\text{fig.circoscritta}} = \frac{n(nh)h}{h(h+2h+3h+\ldots+nh)} < \frac{n^2}{\frac{1}{2}n^2},$$

poiché, come Archimede aveva mostrato in precedenza,

$$1+2+3+\ldots+(n-1) < \frac{1}{2}n^2 < 1+2+3+\ldots+n,$$

ricordiamo che $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Quindi

$$\frac{\text{cilindro}}{\text{fig.inscritta}} > 2 > \frac{\text{cilindro}}{\text{fig.circoscritta}},$$

e da questo è facile concludere che *il settore di paraboloide è la metà del cilindro circoscritto*.

Sull'equilibrio dei piani

Si tratta di un'opera che giocherà un ruolo fondamentale nella rinascita della scienza nel Seicento. È il primo trattato che, abbandonando la trattazione aristotelica di tipo speculativo e non-matematico dei fenomeni naturali, stabilisce una strettissima relazione tra matematica e meccanica, facendo derivare principi fondamentali da semplici postulati come nel sistema euclideo.

Il trattato, in due libri, comincia con sette postulati qui di seguito elencati.

Io postulo:

1 Pesi uguali posti a distanze uguali [dal fulcro] sono in equilibrio e pesi uguali posti a distanze diverse non sono in equilibrio ma s'inclinano dalla parte del peso che è a distanza maggiore.
2 Se, quando pesi uguali posti a certe distanze sono in equilibrio, si aggiunge qualcosa a uno dei pesi, allora essi non sono in equilibrio ma s'inclinano dalla parte del peso a cui è stata fatta l'aggiunta.
3 Similmente, se qualcosa è sottratto da uno dei pesi [...].
4 Quando figure piane uguali e simili coincidono, allora similmente coincidono i loro baricentri.
5 In figure che sono diverse ma simili i baricentri sono situati similmente [...]
6 Se certe grandezze si fanno equilibrio a certe distanze, anche grandezze a esse uguali si faranno equilibrio dalle stesse distanze.
7 In ogni figura il cui perimetro è concavo nella stessa direzione il baricentro deve essere interno alla figura.

Sulla base di questi assiomi Archimede *dimostra* nelle proposizioni 6 e 7: *Due grandezze, commensurabili o no, si bilanciano a distanze inversamente proporzionali alle grandezze*. Cioè, due pesi a e b disposti dalle due parti di una bilancia con fulcro F a distanza, rispettivamente, FA e FB, si equilibrano se $a : b = FB : FA$.

Sulla dimostrazione di Archimede discuteranno in molti, tra gli altri Stevino, Galilei, Huygens, Legendre; e, all'inizio del XX secolo, Ernst Mach (cfr. [74]) sostenne che essa contiene una assunzione equivalente a quanto si vuole dimostrare. Questo ovviamente ha generato una cospicua letteratura, discussa, ad esempio, da Dijksterhuis in [34], in favore e contro la tesi di Mach. Noi non entreremo in dettagli e rimandiamo a [74] e [34] o a [45] per una breve presentazione e, in particolare, per una argomentazione conclusiva che, in contrapposizione alla tesi di Mach, sostiene la correttezza della dimostrazione di Archimede.

Riassumiamo la dimostrazione di Archimede: Siano a e b due grandezze commensurabili, i cui centri di gravità stiano rispettivamente in D e in E, e sia C il punto del segmento ED tale che $EC : DC = a : b$. Vogliamo dimostrare che C è il cento di gravità della grandezza composta da a e b. Si comincia col raddoppiare il segmento ED, aggiungendo un segmento DK uguale a CE dalla parte di D e un segmento LE uguale a CD dalla parte di E. Se H è tale che $HD = DK$ risulta $LH = 2CD$ e $HK = 2EC$, per cui si ha $HK : LH = a : b$. Ora

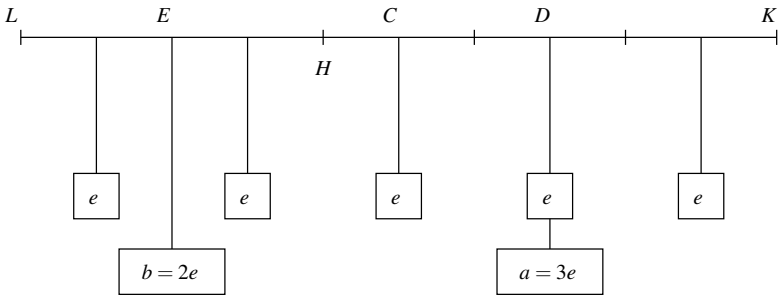


FIGURA 6. La dimostrazione di Archimede del principio della leva.

dividiamo a e b in tante parti e uguali fra loro, e analogamente HK e LH in tanti segmenti s uguali quante sono rispettivamente le parti di a e di b. Poniamo ogni parte e al centro di ogni segmento s. La configurazione risultante avrà come centro di gravità il punto di mezzo di LK, cioè C (questo viene dimostrato prima da Archimede). D'altra parte il sistema di pesi che insistono sul segmento LH, che insieme compongono b, ha il suo centro di gravità in E, mentre quello composto dai pesi del segmento HK, equivalente ad a, ha centro di gravità in D. Perciò a risulterà posta in D e b in E; poiché il centro di gravità globale è il punto C, ne segue che, se b è in E e a in D, esse saranno in equilibrio attorno a C.

Il primo libro poi continua determinando il baricentro del triangolo nell'intersezione delle tre mediane, mentre, nel libro II, si determina il baricentro del segmento parabolico.

Sul metodo meccanico

Archimede a Eratostene salute.

Ti ho precedentemente inviato dei teoremi trovati, scrivendo di essi gli enunciati e invitandoti a trovare le dimostrazioni, che non avevo ancora indicate. Gli enunciati dei teoremi inviati erano i seguenti: [...] Di questi teoremi ti mando le dimostrazioni, avendole scritte in questo libro.

Vedendoti poi, come ho detto, diligente ed egregio maestro di filosofia e tale da apprezzare anche nelle matematiche la teoria che [ti] accada [di considerare], decisi di scriverti e di esporti nello stesso libro le caratteristiche di un certo metodo, mediante il quale ti sarà data la possibilità di considerare questioni matematiche per mezzo della meccanica. E sono persuaso che esso sia non meno utile anche per la dimostrazione degli stessi teoremi. Ed infatti alcune delle cose che a me prima si sono presentate per via meccanica sono state più tardi dimostrate per via geometrica, poiché la ricerca mediante questo metodo non è una dimostrazione: è poi più facile, avendo già ottenuto con questo metodo qualche conoscenza delle cose ricercate, compiere la dimostrazione, piuttosto che ricercare senza alcuna nozione preventiva.

Perciò anche di quei teoremi, dei quali Eudosso trovò per primo la dimostrazione, intorno al cono e alla piramide, — che il cono è la terza parte del cilindro e la piramide del prisma aventi

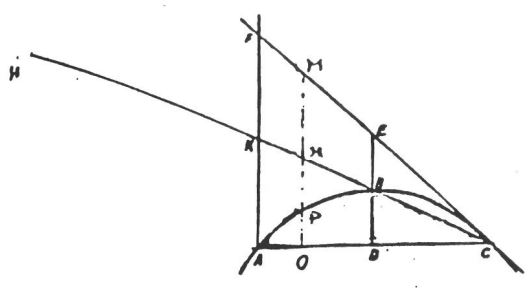


FIGURA 7. La quadratura meccanica del settore di parabola.

> la stessa base e altezza uguale —, non piccola parte [del merito] va attribuita a Democrito, che per primo fece conoscere questa proprietà della figura suddetta, senza dimostrazione.
> A noi accade poi che anche il ritrovamento del teorema ora pubblicato è avvenuto similmente a quelli prima; ho voluto quindi, avendolo scritto, pubblicare quel metodo, sia perché ne avevo prima parlato (sicché non sembri che abbia fatto un vuoto discorso) sia perché sono convinto che porterà non piccola utilità nella matematica: confido infatti che alcuni dei matematici attuali o dei futuri, essendo loro mostrato questo metodo, ritroveranno anche altri teoremi da noi non ancora escogitati.
> Scriviamo dunque come primo teorema quello che pure per la prima volta ci apparve per mezzo della meccanica: che ogni segmento di sezione di cono rettangolo è uguale ai quattro terzi del triangolo avente la stessa base e uguale altezza; dopo di ciò ciascuno dei teoremi veduti con lo stesso metodo; alla fine del libro scriviamo le dimostrazioni geometriche di quei teoremi dei quali ti mandammo prima gli enunciati.

Ironia della sorte: il metodo fu ignorato dai contemporanei di Archimede e riscoperto, come metodo di Archimede, solo all'inizio del 1900 quando altri metodi lo rendevano inutile!

3.1. *La sezione di parabola*. Consideriamo un segmento di parabola $ABCD$ in Figura 7. Sia CE la tangente alla parabola in C, che incontra BD in E; allora $BD = BE$. Si tracci per A la parallela a BD che incontra EC in F e la secante BC che prolungata incontra AF in K. Allora $AK = KF$. Infine prolunghiamo CK in KH con $CK = KH$ e, per ogni punto O, tiriamo la parallela a DB che incontra la parabola in P, la secante in N e la tangente in M. Si verifica ora facilmente che

$$HK : KN = OM : OP.$$

Se interpretiamo HC come il giogo di una leva avente fulcro in K, la relazione precedente si interpreta nel modo seguente: se pensiamo OM e OP come due corpi con pesi proporzionali alle loro lunghezze e baricentri posti rispettivamente in N e H, essi sono in equilibrio sulla leva con fulcro in K. Con altre parole, il sistema dei due corpi ha baricentro in K.

Dice Archimede: "Ora dalle rette condotte nel triangolo CFA è composto il triangolo CFA e dai segmenti rettilinei ottenuti nella parabola allo stesso modo

che PO, è composto il segmento parabolico ABC. Perciò il triangolo FAC, rimanendo al suo posto farà equilibrio, rispetto al punto K, al segmento parabolico trasportato con il suo centro di gravità in H":

$$\text{segm.parabolico}\,(\text{ABC}) \times \text{braccio}\,\text{KH} = \text{triangolo}\,(\text{AFC}) \times \text{braccio} \quad \text{KX},$$

dove X è il baricentro del triangolo ACF. Ma $KX = \frac{1}{3}CK$, e, essendo $CK = KH$, anche $KX = \frac{1}{3}KH$; deduciamo quindi

$$\text{segm.parabolico}\,(\text{ABC}) \times \text{KH} = \text{triangolo}\,(\text{AFC}) \times \frac{1}{3}\text{KH},$$

cioè,

$$\text{segm.parabolico}\,(\text{ABC}) = \frac{1}{3}\text{triangolo}\,(\text{AFC}).$$

D'altra parte Area$ACF = 4$AreaABC, segue

$$\text{segm.parabolico}\,(\text{ABC}) = \frac{4}{3}\text{triangolo}\,(\text{ABC})$$

Archimede sa che gli "indivisibili" di cui sono composti il triangolo e il segmento parabolico non sono grandezze e non sono compatibili con il continuo, e che quindi l'argomento precedente è puramente euristico. Per questo dà una dimostrazione geometrica con il metodo di esaustione nella *Quadratura della parabola* come abbiamo visto. Ma se gli indivisibili si allargano un po' e si usa il metodo di esaustione, l'argomento meccanico di equilibrio precedente diventerebbe corretto dando una dimostrazione 'meccanica' della quadratura della parabola.

3.2. *La sfera*. Discutiamo ora il rapporto tra il volume della sfera e quello del cilindro circoscritto. Data la sfera $ABCD$, Archimede traccia il cono FAE proiettando dal polo A il cerchio massimo DB, e poi il cilindro $GFEL$, circoscritto al cono. Prende poi un generico piano SM perpendicolare al diametro AC, che taglia il cono in un cerchio di raggio SQ e la sfera in un cerchio di raggio SO. Per costruzione risulta $AC = FC = CE = SM$, e quindi $AS = SQ$ e $AC \times AS = SM \times SQ$.

Essendo il triangolo AOC rettangolo il secondo teorema di Euclide e il teorema di Pitagora implicano

$$AC \times AS = AS \times (SC + AS) = AO^2 = AS^2 + SO^2 = SO^2 + SQ^2,$$

quindi (essendo per costruzione $AC = SM$ e $AS = SQ$)

$$SM \times SQ = SO^2 + SQ^2,$$

$$AC : AS = SM : SQ = SM^2 : (SM \times SQ),$$

e in conclusione:

$$HA : AS = SM^2 : (SM \times SQ) = SM^2 : (SO^2 + SQ^2) = C_{SM} : (C_{SO} + C_{SQ}),$$

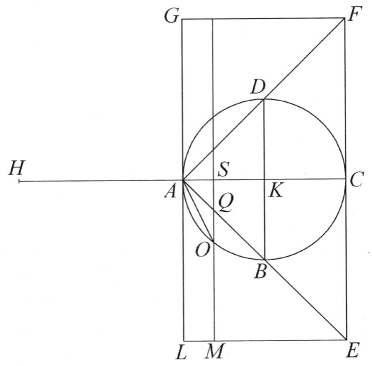


FIGURA 8. La quadratura meccanica della sfera.

dove C_x indica il cerchio di raggio x. Questa relazione si interpreta come esprimente l'equilibrio della leva di bracci HA e AS: il cerchio C_{SM} nella sua posizione fa equilibrio ai due cerchi C_{SO} e C_{SQ} posti in H.

Ed ecco ora la conclusione: poiché comunque si prenda il punto S sul diametro AC il cerchio C_{SM} tagliato nel cilindro fa equilibrio ai due cerchi C_{SO} e C_{SQ} tagliati nella sfera e nel cono, allora tutti i cerchi tagliati nel cilindro (e posti dove sono) faranno equilibrio a tutti i cerchi della sfera e a tutti i cerchi del cono posti in H. Siccome tutti i cerchi del cilindro formano il cilindro, tutti i cerchi della sfera formano la sfera e tutti i cerchi del cono formano il cono, allora il cilindro $GFEL$ al suo posto fa equilibrio alla sfera $ABCD$ e al cono FAE ambedue posti in H. Il resto è ora calcolo. Infatti il centro di gravità del cilindro sta in K e $HA = 2AK$; ne segue, per la legge della leva, che il cilindro è doppio del cono e della sfera presi insieme. Siccome poi il cilindro è triplo del cono, si conclude che il cono è doppio della sfera, e quindi che il cilindro è sei volte la sfera. Essendo il cilindro circoscritto alla sfera un quarto del cilindro $GFEL$ concludiamo che il volume del cilindro circoscritto alla sfera è uguale ai $\frac{2}{3}$ del volume della sfera.

3.3. *Il paraboloide*. Consideriamo un paraboloide P, il cui asse sia lungo a e il cilindro circoscritto C, che avrà altezza a e il cui cerchio di base abbia raggio b. Sezionando il solido con un piano perpendicolare all'asse per un generico punto x dell'asse, sia P_x la sezione del paraboloide di raggio y e sia C_x la sezione del cilindro di raggio b. Dato che i cerchi stanno tra loro come i quadrati dei raggi si avrà $P_x : C_x = y^2 : b^2$, e, siccome in una parabola i quadrati delle ordinate sono proporzionali alle ascisse $y^2 : b^2 = x : a$, concludiamo che

$$P_x : C_x = x : a$$

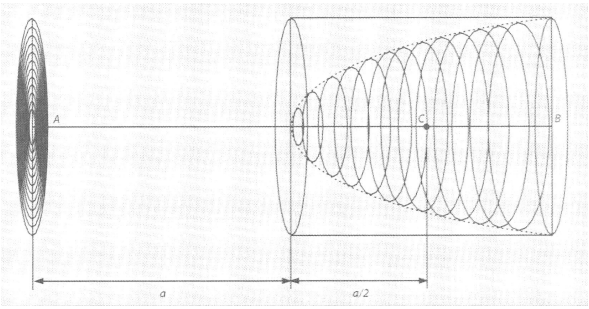


FIGURA 9. La quadratura meccanica della sezione di paraboloide.

ovvero, con riferimento alla Figura 9, se all'estremità A mettiamo P_x e in x mettiamo C_x i due pesi si equilibrano (con fulcro O).

Come nel caso della parabola e della sfera concludiamo che tutte le sezioni del paraboloide poste in A equilibrano tutte le sezioni del cilindro concentrate nel centro di gravità del cilindro che chiaramente è in C, punto di mezzo di OB; quindi $P : C = \frac{a}{2} : a$, cioè il paraboloide è la metà del cilindro circoscritto.

CAPITOLO 4

Dal III sec. a.C. al V sec. d.C.

Dopo aver parlato dei grandi matematici alessandrini (Euclide, Apollonio e Archimede), diamo ora una rapida panoramica della matematica dal III sec. a.C. al IV sec. d.C. con il fine di accennare alla ricchezza e varietà delle questioni studiate pur limitandoci agli aspetti più rilevanti per la nostra storia. Il lettore interessato troverà maggiori informazioni in [66] e nelle altre monografie già citate.

4.1. *Geografia e astronomia matematica*

ARISTARCO DA SAMO (c. 310–230 a.C.) fu uno studioso di geometria, astronomia, musica e di altri rami della scienza. Secondo l'*Arenario* di Archimede, egli per primo sostenne una ipotesi eliocentrica; di lui ci resta un trattato *Sulla grandezza e sulla distanza del Sole e della Luna*.

ERATOSTENE DI CIRENE (284–192 a.C.) fu matematico, geografo (scrisse una *Geographica* in tre libri), poeta (scrisse un poema *Hermes*), filosofo (il suo *Platonicus* è un commento al *Timeo* di Platone in cui si discutono le principali nozioni di matematica in connessione con la filosofia platonica), storico (scrisse una *Cronologia* dall'assedio di Troia), filologo — godette della fama di essere uno degli uomini più colti di tutta l'antichità. Dopo aver studiato nell'Accademia ad Atene, fu invitato da Tolomeo Evergete a dirigere la biblioteca di Alessandria.

Con riferimento più specifico alla matematica, Pappo menziona come sua un'opera in due libri *Sulle medie* e un'opera sui luoghi geometrici, e abbiamo già detto di una sua procedura meccanica per duplicare il cubo. Secondo Erone e Galeno egli scrisse anche *Sulla misura della Terra*, che conteneva il suo risultato più famoso: il calcolo della circonferenza della terra — di questo riferiscono Cleomede, Teone di Smirne, Strabone e Erone.

Un altro risultato molto famoso di Eratostene, il *crivello di Eratostene*, ci viene riferito da Nicomaco; si tratta di un metodo per trovare i numeri primi. Scriviamo di seguito i numeri dispari a partire da 3,

$$3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,\ldots$$

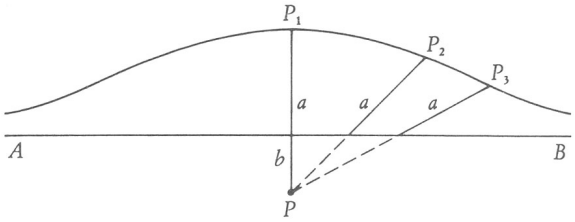


FIGURA 1. La concoide.

Ora 3 è primo, ma i suoi multipli, uno ogni tre, non lo sono: li cancelliamo. In modo simile cancelliamo tutti i multipli di 5, uno ogni cinque, e così via. Se proseguiamo questo processo un numero sufficiente di volte, troviamo tutti i primi minori di un fissato n.

Durante il periodo alessandrino vennero introdotte varie curve, infatti i geometri sentirono meno forte il vincolo della costruzione con riga e compasso. Abbiamo già parlato della spirale di Archimede.

NICOMEDE (c. 280–210 a.C.) è noto per la sua definizione della *concoide*. Dato un punto P e una retta AB, egli misura una lunghezza a lungo i raggi uscenti da P che incontrano AB e in direzione opposta a P: gli estremi così determinati sono i punti della concoide, cfr Figura 1. Nicomede usava la concoide per trisecare l'angolo e duplicare il cubo (si veda [66]).

DIOCLE (c. 240–180 a.C.), nel suo libro *Sugli specchi ustori*, risolve il problema della duplicazione del cubo introducendo la curva che egli chiama *cissoide* (cfr. Figura 2).

Siano AB e CD diametri perpendicolari di un cerchio e siano inoltre EB e BZ archi uguali. Si conduca la perpendicolare ZH a CD e si tracci ED: l'intersezione di ZH e di ED individua un punto P della cissoide. Si dimostra che

$$CH : HZ = HZ : HD = HD : HP,$$

e questo, come sappiamo, cfr. 1.4.2, permette di duplicare il cubo.

Proclo riferisce di un certo PERSEO (c. 180–120 a.C.) che aveva investigato, come fa anche DIONISIODORO (c. 250–190 a.C.), le *sezioni spiriche*, cioè le sezioni di un *toro* (figura che si ottiene facendo ruotare un cerchio attorno ad una retta esterna a lui) con un piano parallelo all'asse di rotazione.

Ancora Proclo ci dice che teoremi quali quelli che affermano che triangoli con la stessa base e la stessa altezza hanno la stessa area apparivano come paradossali. Tucidide stimava la grandezza della Sicilia dal tempo richiesto per circumnavigarla e Polibio osservava che ci sono popoli che non capiscono che campi con lo stesso perimetro possono avere aree diverse. ZENODORO (c. 200–140 a.C.) scrisse un trattato *Sulle figure isoperimetriche* – preservato nel

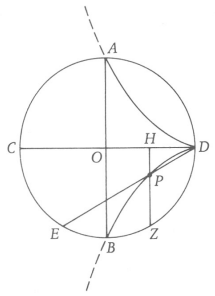


FIGURA 2. La cissoide.

commento di Teone di Alessandria al I libro della *Collezione* di Tolomeo e nella esposizione di Pappo nel V libro delle sua *Collezione* – in cui dimostrava i seguenti teoremi:

1 Fra i poligoni di n lati con lo stesso perimetro quello regolare ha l'area maggiore.
2 Fra i poligoni regolari di eguale perimetro, quello che ha più lati ha l'area maggiore.
3 Il cerchio ha area maggiore di tutti i poligoni regolari aventi lo stesso perimetro.
4 Di tutti i solidi con la stessa superficie la sfera è quella che ha il volume maggiore.

Nel I secolo a.C. sembra cominciare anche un periodo di riflessione e commenti su definizioni e risultati noti.

POSIDONIO (135–51 a.C.), stoico e maestro di Cicerone, si occupò di geografia e astronomia matematica (a lui si deve una misura della circonferenza della Terra e una ipotesi sulla distanza e grandezza del Sole). Si occupò, secondo Proclo, anche di certe definizioni come quelle di limite di una figura, di parallele e di centro di gravità.

Allievo di Posidonio e filosofo stoico pure lui è GEMINO che scrisse intorno al 73–67 a.C. Pappo riferisce di un suo *Sulle classificazioni delle matematiche* ed Eutocio del "sesto libro delle dottrine di matematica" (parte probabilmente di una *Dottrina delle matematiche*, a giudicare dalle citazioni di molti volumi) scritto con lo scopo di dare una vista di insieme della matematica, una specie di enciclopedia. Estratti, anche lunghi, si trovano in Proclo, Simplicio, Erone, Damiano, Eutocio, ... In particolare si occupò del V postulato di Euclide sulle parallele. Sostituì la definizione di Euclide con la seguente:

> linee parallele sono rette situate sullo stesso piano che, prolungate in ogni direzione allo stesso tempo, hanno sempre la stessa distanza.

Partendo da questa definizione Gemino prova il postulato delle parallele, ma, come osserveranno Pietro Antonio Cataldi (1548–1626), Christoph Clavio (1537–1612) e, soprattutto, Gerolamo Saccheri (1667–1733), prima ancora che la definizione di parallele di Gemino possa essere usata bisogna provare che

> il luogo geometrico dei punti equidistanti da una retta sia una retta,

e questo non può essere provato senza un postulato. Con Gemino, seguito poi da Tolomeo, Proclo e tanti altri, tra cui al-Nairizi e Nasir al-Tusi, inizia il lungo cammino dei tentativi di provare — cioè ricondurre ad enunciati più evidenti o, appunto, provare sulla base degli altri assiomi — l'assioma delle parallele che porterà verso la geometria non-euclidea, cfr. [16].

CLEOMEDE (tra il I sec. a.C. e il I sec. d.C.) scrive *Intorno al moto circolare dei corpi celesti* in due libri, basandosi sull'opera di Posidonio. Intorno al I secolo d.C. NICOMACO scrive una *Introduzione all'aritmetica* e TEONE DI SMIRNE una *Esposizione delle cose matematiche utili per leggere Platone* manuali in cui si discute dell'aritmetica separata dalla geometria che hanno una rilevanza storica notevole.

Il desiderio di costruire un'astronomia quantitativa che potesse essere usata per prevedere i moti e le posizioni dei corpi celesti e, quindi, utile alla determinazione dell'ora, alla navigazione e alla geografia porterà i Greci a sviluppare la *trigonometria sferica* e parzialmente la *trigonometria piana* soprattutto ad opera di Ipparco di Rodi (190–120 a.C.), Menelao di Alessandria (70–130 d.C.) e Tolomeo (85–165 d.C.). Osserviamo che è con i greci che fa la sua comparsa un modello cosmologico matematico.

La trigonometria sferica presuppone ovviamente una *geometria sferica*: proprietà dei cerchi massimi e dei triangoli sferici. Lo studio di questioni di questo tipo risale probabilmente ai pitagorici, ad esempio i *Fenomeni* di Euclide contengono fatti di geometria sferica basati su risultati anteriori. TEODOSIO intorno al 20 a.C. raccoglie molti risultati allora noti nella sue *Sphericae*.

Il fondatore della trigonometria sferica è però IPPARCO DI RODI, probabilmente il più grande astronomo dell'antichità.

Ipparco scopre la precessione degli equinozi, calcola il mese lunare, migliora le stime sulle grandezze e le distanze del Sole e della Luna, investiga i moti dei corpi celesti con il metodo degli epicicli e degli eccentrici, compila un catalogo di oltre 850 stelle fisse, migliora gli strumenti in uso e si occupa anche di geografia.

L'approccio alla trigonometria di Ipparco descritto e usato da Tolomeo è il seguente. La circonferenza di un cerchio viene divisa in 360 gradi, come era stato già fatto da Ipsicle di Alessandria (190–120 a.C.) nel suo libro *Sul sorgere delle stelle* e dai Babilonesi, e un diametro in 120 parti. Ciascuna parte della circonferenza e del diametro viene ulteriormente divisa in 60 parti e ciascuna di queste in altre 60 e così via (Figura 3). Quindi studia le corde associate ad archi di cerchio e calcola le unità di corda corrispondenti alle unità di arco: Se 2α è l'angolo al centro dell'arco AB, per noi $\sin\alpha = \frac{AC}{OA}$, Ipparco invece di $\sin\alpha$ usa il numero di unità contenute nella corda AB quando il raggio OA ne contiene 60, cioè

$$\sin\alpha = \frac{1}{60}\frac{1}{2}\,\mathrm{corda}\,2\alpha = \frac{1}{120}\,\mathrm{corda}\,2\alpha.$$

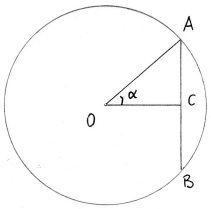


FIGURA 3. La corda di un arco.

La trigonometria greca raggiunge un alto livello con il trattato in tre libri *Sphaerica* di MENELAO pervenutoci in una traduzione araba — una traduzione latina, in realtà con molte aggiunte, ricostruzioni e sviluppi è dovuta a Maurolico (1494–1575). Il primo libro è dedicato alla geometria sferica: lo scopo è quello di provare per i triangoli sferici, cioè per le figure formate da tre archi di cerchio massimo di una sfera ciascuno dei quali è minore di un semicerchio, teoremi analoghi a quelli dimostrati da Euclide. Il libro II è dedicato all'astronomia, mentre il libro III contiene della trigonometria sferica e, in particolare, vari teoremi, noti come *teoremi di Menelao*, che ricompariranno nell'opera di Tolomeo e Pappo.

Lo sviluppo della trigonometria sferica e delle sue applicazioni all'astronomia culminarono nell'opera *Sintassi matematica* o *Collezione matematica*, poi citata dagli Arabi come *Megale syntaxis*, *Megiste* ed infine *Almagesto*, di CLAUDIO TOLOMEO. La trigonometria e l'astronomia sono mescolate nei tredici libri dell'*Almagesto*, che ha un carattere strettamente matematico, eccetto là dove usa la fisica di Aristotele per respingere l'ipotesi eliocentrica di Aristarco.

Tolomeo inizia con il calcolo delle corde di archi particolari — d'ora in poi sostituiremo corde con seni — come l'arco di 36, 72, 60 e 90 gradi, con semplici argomentazioni geometriche. Trova quindi il seno dell'arco supplementare mediante il seno dell'arco stesso, introducendo così il coseno, e osserva che $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Prosegue provando quello che oggi è noto come *teorema di Tolomeo*: dato un quadrilatero qualsiasi inscritto in un cerchio, cfr. Figura 4, si ha $AC \times BD = AB \times DC + AD \times BC$. Da questo deduce la formula di addizione per le corde; dimostra quindi la formula di bisezione e costruisce la tavola dei seni (corde) di tutti gli archi tra 0 e 180 gradi che differiscono per mezzo grado. Tolomeo passa poi a risolvere problemi astronomici che richiedono la determinazione di archi di cerchio massimo di una sfera usando i metodi di Menelao.

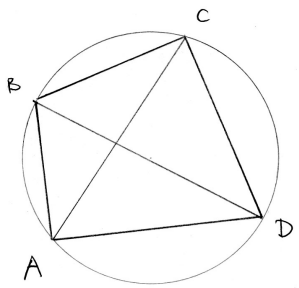


FIGURA 4. Teorema di Tolomeo: $AC \times BD = AB \times BC + AD \times BC$.

4.2. *Aritmetica*

Il ruolo centrale del numero, anche se resta vivo nei circoli pitagorici o neopitagorici, si perde, come abbiamo visto, subordinando il calcolo aritmetico a quello geometrico: per Euclide i numeri sono grandezze e spesso segmenti. Questo atteggiamento continua nel periodo alessandrino anche se Archimede, Apollonio, Tolomeo e, soprattutto, Erone cominciano a servirsi dei numeri per calcolare o approssimare quantità geometriche.

NICOMACO DI GERASA (che vive tra il 60 a.C. e il 120) scrive forse il primo trattato di aritmetica (sicuramente il primo che ci sia pervenuto o di cui si abbia notizia).

Lungo le stesse linee di Nicomaco, anche se in modo meno sistematico, si pone TEONE DI SMIRNE (70–130) nella sua opera *Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*. L'opera è un manuale per studenti di filosofia intesa a mostrare come i numeri primi, i numeri geometrici, le progressioni, la musica e l'astronomia siano correlati. Il suo interesse principale consiste nelle molte e varie citazioni di fonti precedenti.

A partire dall'epoca di Nicomaco problemi che portano ad equazioni (anche indeterminate, di primo e secondo grado o a sistemi di primo grado) sono contenuti nel *Codice Palatino* (X sec. d.C.), altri problemi che portano prevalentemente a equazioni indeterminate sono contenuti nella *Collezione Eroniana*. Ma la figura di gran lunga più importante è DIOFANTO DI ALESSANDRIA (200–284 d.C.). Diofanto scrisse varie opere non giunte a noi tranne che per frammenti; invece possediamo i primi sei libri dell'*Aritmetica*, originariamente in tredici libri. Si tratta di una raccolta di problemi separati (189 nei primi sei libri), che si distingue per l'introduzione di un 'simbolismo' algebrico e per l'interesse dei problemi considerati; interesse che spinse Eulero a dar credito a Diofanto di avere illustrato metodi generali che egli non poteva esplicitamente formulare per mancanza di una notazione appropriata.

L'opera di Diofanto arrivò probabilmente troppo tardi nella cultura greca ed esercitò poca influenza in essa. Invece essa pare abbia esercitato una qualche influenza nella matematica araba e, soprattutto, a partire dal diciassettesimo secolo. Sappiamo di un commento di Ipazia, figlia di Teone di Alessandria, vittima di fanatici Cristiani nel 415 d.C.. Regiomontano, intorno al 1493, pare abbia attirato l'attenzione sull'opera di Diofanto. Bombelli fu il primo a trovare un manoscritto a Venezia e con Antonio Maria Pazzi ne fece una traduzione in latino nel 1570. La traduzione non fu pubblicata ma Bombelli (1526–1573) incluse quasi tutti i problemi nella sua *Algebra*. A partire da Fermat (1601–1665) l'opera di Diofanto diventò abbastanza nota e si susseguirono varie edizioni e traduzioni. Una traduzione inglese in notazioni moderne è dovuta a Heath [35]. Per maggiori informazioni rimandando a [66] [35] o alle storie della matematica citate in bibliografia.

4.3. *Il principio di Erone*

ERONE è un altro tipico rappresentante del periodo alessandrino. Nelle sue opere colpisce la commistione di matematica, rigorosa e formale, e di procedimenti approssimati: scrisse un commentario ad Euclide, usò i risultati rigorosi di Archimede, provò un certo numero di nuovi teoremi, e diede una varietà di risultati approssimati senza dare giustificazioni. Visse non si sa bene quando tra il 100 a.C. e il 100 d.C.. È invece certo che egli fu uno scrittore enciclopedico. Le sue opere si possono dividere in due classi: quelle geometriche e quelle meccaniche. Nelle prime egli si preoccupa prevalentemente di dare teoremi e regole per le aree piane, superficiali e per i volumi di un gran numero di figure; nelle seconde egli dà regole di progettazione di teatri, sale di banchetto e terme e descrive ingegnose macchine come clessidre ad acqua, strumenti di misura, macchine automatiche, macchine a vapore, macchine per sollevare pesi e macchine da guerra.

La più importante opera geometrica è la *Metrica* in tre volumi, scoperta nel 1896 a Costantinopoli, dove troviamo la dimostrazione della formula a noi nota come

FORMULA DI ERONE: *Se ABC è un triangolo di lati a,b,c*, e denotiamo con s *il semiperimetro, cioè* $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, *allora*

$$\text{Area}ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Gli storici hanno anche visto nelle approssimazioni di Erone un algoritmo, che ricompare anche con Luca Pacioli (1445–1517), per l'approssimazione di $\sqrt{2}$.

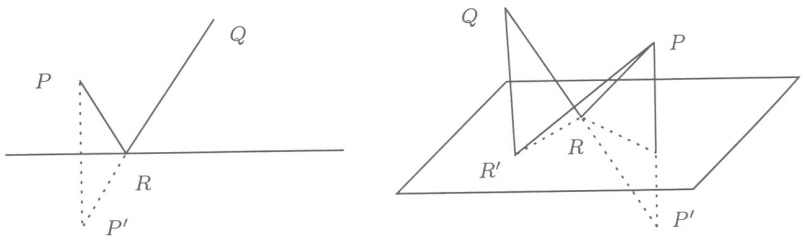


FIGURA 5. Una dimostrazione "geometrica" del principio di riflessione.

ALGORITMO DI ERONE: *Dato un numero qualunque* α, *definiamo ricorsivamente*

$$x_0 = \alpha, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{\alpha}{x_n}).$$

Allora la sequenza x_n *converge per* $n \to \infty$ *a* $\sqrt{\alpha}$.

Infine menzioniamo la *Catottrica* (teoria degli specchi) che si rifà al libro di Euclide dallo stesso titolo. Contiene proposizioni utili alla costruzione di specchi o combinazioni di essi. La teoria è basata sulla Proposizione 4.1 sotto che stabilisce, in accordo con Euclide, che gli angoli di incidenza e di riflessione sono uguali. Erone, ed è questo che qui vogliamo mettere in evidenza, deduce questo fatto non dall'esperienza ma, con considerazioni puramente matematiche, da un *principio di minimo*, noto ora come *principio di Erone*.

PRINCIPIO DI ERONE : *La luce si propaga in mezzi omogenei tra sorgente e ricevitore seguendo cammini di lunghezza minima.*

4.1. PROPOSIZIONE (*Principio di riflessione*). *Un raggio di luce si riflette su uno specchio piano rimanendo nel piano perpendicolare allo specchio da esso determinato, e con angolo di riflessione uguale all'angolo di incidenza.*

Altra conseguenza immediata del principio di Erone è che la luce senza ostacoli va in linea retta, equivalentemente, il segmento AB è la linea di minima distanza congiungente i punti A e B.

La proposizione precedente si dimostra facilmente sulla base della Figura 5 e delle semplici due proposizioni euclidee che seguono.

4.2. PROPOSIZIONE. *Se due lati di un triangolo sono diversi, allora l'angolo opposto al lato maggiore è maggiore dell'angolo opposto al lato minore. Se due angoli di un triangolo sono diversi, allora il lato opposto all'angolo maggiore è maggiore del lato opposto all'angolo minore.*

4.3. PROPOSIZIONE (*Diseguaglianza triangolare*). *In un triangolo ciascun lato ha lunghezza minore della somma delle lunghezze dei due rimanenti, e maggiore*

delle loro differenze. Condizione necessaria e sufficiente affinché x, y e z siano le lunghezze dei lati di un triangolo è che

$$x < y+z, \qquad y < x+z, \qquad z < x+y.$$

Come conseguenza di quanto appena enunciato si deduce

4.4. COROLLARIO. *Si ha*

(1) *Il cammino di lunghezza minore tra due punti nello spazio è il segmento che li congiunge.*
(2) *In un triangolo isoscele la mediana e l'altezza relative alla base e la bisettrice dell'angolo al vertice coincidono.*
(3) *Data una retta r e un punto P fuori di essa, vi è un unico punto di minima distanza di P dalla retta: è il punto di intersezione tra la retta r e la perpendicolare a r per P.*

La Proposizione 4.1 era nota ad Archimede che ne dava una dimostrazione per simmetria: siano α e β gli angoli di incidenza e di riflessione del raggio che va da P a Q. Supponiamo $\alpha \neq \beta$, ad esempio $\alpha > \beta$, rovesciando la direzione del raggio dovremmo allora avere $\beta > \alpha$. Osserviamo ancora che Archimede, come abbiamo visto, definisce il segmento tra due punti come la linea di lunghezza minima tra i due punti, mentre per Euclide la *linea retta* è una linea che 'giace ugualmente rispetto ai punti su di essa'.

4.4. *I commentatori*

Interessanti soprattutto dal punto di vista storico, più che matematico, sono gli autori greci dei secoli successivi. Qui citiamo solo alcuni autori particolarmente rilevanti per averci trasmesso frammenti consistenti di opere greche andate perse.

Al tempo di Diocleziano si verifica un leggero rifiorire della geometria con PAPPO DI ALESSANDRIA (290-350). Ci sono pervenuti frammenti di sue opere e quasi interamente la sua *Synagoge* o *Collezione matematica* in otto libri — in realtà il I libro e le prime 13 proposizioni del II libro, probabilmente dedicate al sistema di scrittura numerico di Apollonio, sono andate perdute —; la prima edizione a stampa apparve nel 1589 nella traduzione latina di Commandino; esiste una traduzione in francese a cura di P. Ver Eecke [96]. Si tratta di una guida alla geometria greca. Anche se non contiene risultati nuovi, se non per alcuni commenti e lemmi alternativi, quest'opera è particolarmente importante per la storia della matematica e per essere una delle opere in cui si formarono molti matematici del Seicento.

In particolare, il libro V contiene il trattato di Zenodoro *Sulle figure isoperimetriche* e alcuni complementi.

Il libro VI include materiale preliminare allo studio dell'astronomia, riportando sulle opere di Menelao, Teodosio, Autolico, Aristarco ed Euclide. Il libro VII è di particolare importanza, poiché è un resoconto di quello che è stato chiamato il *Tesoro dell'analisi*, cioè di quei libri persi — opere di Euclide, Apollonio, Aristeo e Eratostene, un totale di 33 libri — di cui Pappo ci fornisce il contenuto e una vasta collezione di lemmi aggiunti da lui: si tratta dell'unica fonte di informazione su questi libri. Il *Tesoro* si apre con una definizione di 'Analisi' e 'Sintesi' rilevante per i geometri greci e che giocherà un importante ruolo nel Seicento, ma noi non ne discuteremo.

Il libro VII contiene anche un famoso teorema, chiamato a volte *teorema di Pappo* o *teorema di Guldino* perché Paolo Guldino (1577–1643) lo riscoprì indipendentemente. Il teorema afferma che il volume generato dalla rotazione completa di una curva piana chiusa che giaccia per intero da un lato dell'asse di rotazione è uguale all'area delimitata dalla curva moltiplicata per la circonferenza del cerchio descritto dal suo baricentro.

Sempre nel libro VII, nell'addendum alle *Coniche* di Apollonio, è formulato il seguente problema, noto come *problema di Pappo*, che Descartes rienuncerà nella sua *Geometria* come:

> Siano AB, BD, EF, GH, ecc. delle linee date; e si debba trovare un punto, come C, dal quale tirando delle rette sulle date, come CB, CD, CF, e CH, ad angoli assegnati CBA, CDB, CFE, CHG, ecc., ciò che si ottiene dal prodotto di una parte di queste linee sia uguale a quello che deriva dal prodotto delle altre ...

Questo problema avrà un ruolo fondamentale nello sviluppo della nozione di *curva*.

Il libro VIII è dedicato alla meccanica. Esso si apre con una discussione sulla distinzione tra la meccanica come parte della matematica, in accordo con le opinioni di Archimede, Erone e altri, e la meccanica pratica. Pappo definisce il centro di gravità di un corpo come "il punto all'interno del corpo stesso[1] tale che, se il corpo viene sospeso per quel punto, il peso così sostenuto rimane in quiete e conserva la posizione originaria". Discute quindi metodi matematici per determinare i centri di gravità e tratta del moto di un punto lungo un piano inclinato, in particolare discute della forza necessaria per far scivolare un corpo su un piano orizzontale e per sollevarlo lungo un piano inclinato.

La fine del periodo alessandrino si caratterizza per una serie di manualisti e commentatori. SERENO (300–360) scrisse *Sulle sezioni di un cilindro* e *Sulle sezioni di un cono*; TEONE DI ALESSANDRIA (335–395), oltre a scrivere un commento sulla *Sintassi* di Tolomeo, con riferimenti a Menelao, a Diofanto e ai risultati sugli isoperimetri di Zenodoro, curò una edizione degli

[1] In realtà, se il corpo è *convesso*, cioè se ogni linea che congiunge due punti del corpo è anch'essa contenuta nel corpo, allora la definizione è corretta, in generale il centro di gravità può non essere interno al corpo.

Elementi e dell'*Ottica* di Euclide; IPAZIA (370–415), figlia di Teone, scrisse sui pitagorici e compose commenti a Diofanto e Apollonio. PORFIRIO (233–309), oltre ad una vita di Pitagora [83], sembra abbia scritto un commento agli *Elementi* di Euclide; GIAMBLICO (270–330), scrisse su Pitagora e sui neo-pitagorici.

Il più rinomato dei commentatori neo-platonici è sicuramente PROCLO (410–485) il cui commento al primo libro di Euclide abbiamo citato più volte. Egli è particolarmente importante perché, scrivendolo, aveva accesso a opere che sono ora perdute, come la *Storia della geometria* di Eudemo e la *Teoria della matematica* di Gemino.

Fra i molti altri commentatori ricordiamo infine SIMPLICIO (490–560), commentatore di Aristotele, che, oltre ad aver preservato frammenti di Parmenide, Empedocle, Anassagora, Melisso, Teofrasto, ed altri, ci riporta materiale tratto dalla storia di Eudemo, compreso un lungo frammento sui tentativi di Antifonte di quadrare il cerchio e sulla quadratura delle lunule di Ippocrate; EUTOCIO (480–540), che commentò Archimede e Apollonio, e ANTEMIO DI TRALLES (474–534), architetto di Santa Sofia in Costantinopoli, di cui si conserva un frammento di un suo *Sugli specchi ustori*.

CAPITOLO 5

Il continuo e il movimento

Come abbiamo visto in più occasioni, l'idea di un *continuo geometrico*, ad esempio quello della retta e del piano, o anche di una sorta di *principio astratto di continuità*, è presente in tutta la matematica greca anche se difficilmente troviamo una sua esplicita discussione o risoluzione: esso corrisponde all'idea di qualcosa di unitario, di non diviso, di connesso; sicuramente non compatibile con l'idea, ad esempio, che la retta sia unione di punti, ma caratterizzato dal fatto che ogni potenziale divisione del continuo produca ancora un continuo. Il punto è solo il *limite* di una parte, il limite di un segmento. Per una caratterizzazione del continuo in termini *numerici* o in termini *topologici*, cioè matematici, bisognerà aspettare la fine del diciannovesimo secolo.

Il cosiddetto *problema del continuo* è invece un tema centrale (e lo sarà per molti secoli a venire) della filosofia greca nel contesto che vede opposte la concezione eleatica dell'unità dell'essere e la prospettiva aristotelica tesa a una comprensione della realtà molteplice, capace in particolare di render conto in maniera plausibile della dimensione fenomenologica del divenire. La nozione di continuità fa il suo ingresso come tema filosofico, infatti, nella *Fisica* di Aristotele, si veda [8] [7] [67] [102] [95], dove viene introdotta esplicitamente per far fronte alle difficoltà sollevate dalle aporie zenoniane il cui obiettivo è proprio la negazione della molteplicità e del movimento.

Per Aristotele il *movimento* è mutamento secondo qualità, quantità o luogo, è un cambiamento dal meno al più, dal bianco al nero, da un luogo ad un altro, il modello privilegiato è quello della generazione e corruzione e può sempre essere ricondotto logicamente ad un passaggio dall'essere al non-essere (equivalentemente, dal non-essere all'essere). Il movimento, come il *tempo* (che è la sua misura) o lo spazio, è intrinsecamente continuo, continuo in senso *empirico* o *fisico* nel senso che, per quanto raffinate possano essere le nostre capacità descrittive avremo sempre a che fare con parti dotate di estensione. Quindi il continuo deve essere caratterizzato attraverso la nozione di *parte*: il continuo si decompone potenzialmente in parti e l'idea di unità (di parti che stanno insieme) si traduce nel fatto che le parti abbiano un *bordo comune*. Ancora, per Aristotele, il cambiamento è *istantaneo*, e l'istante è il bordo comune delle parti, del prima e del poi. Il continuo si caratterizza quindi per infinita (meglio illimitata) divisibilità e coincidenza dei bordi, cioè del *primo e ultimo istante*. Osserviamo

che connesso a questo approccio empirico ci sono però difficoltà logiche e difficoltà nell'identificare i possibili bordi; il seguente passo di Poincaré [82] può essere indicativo:

> Si è osservato, per esempio, che un peso A di 10 grammi e un peso B di 11 grammi producono una sensazione identica, che il peso B non può essere distinto da un peso C di 12 grammi, ma che invece si distinguono facilmente i pesi A e C. Il risultato dell'esperienza si traduce quindi nelle seguenti relazioni
>
> $$A = B, \quad B = C, \quad A < C,$$
>
> che possono esser viste come delle formule del continuo fisico.

Dato il contesto generale in cui si muove Aristotele e con lui la filosofia, non meraviglia quindi che per molto tempo a venire il problema del *de incipit et desinit* o *de primo et ultimo instanti*, nei suoi aspetti semantici e logici e nella categoria a cui il moto appartiene, occuperà i filosofi soprattutto nel Medioevo. Noi invece ci fermiamo qui, ricordando solo alcune posizioni di Aristotele sul *moto locale* (moto secondo luogo).

Tralasciando il moto infinito delle sfere celesti, pur nell'ambiguità del linguaggio possiamo dire che nell'ambito sublunare i corpi sono dotati di una tendenza ad andare verso il basso e trovare la loro collocazione naturale al centro della Terra o verso l'alto. Poi ci sono moti naturali e moti violenti (al di la della tendenza naturale, i corpi sono sempre mossi). La velocità, intesa essenzialmente come velocità media (confrontabile con altre velocità in tempi uguali o spazi uguali), è proporzionale, in senso vago, al rapporto tra peso e densità del mezzo. Non può quindi esserci vuoto perché non è dato rapporto con denominatore nullo o, in altri termini, la velocità sarebbe infinita.

CAPITOLO 6

Dai greci agli arabi e alla rinascita

I secoli dal VI al XIV, alto e basso medioevo, sono spesso considerati *secoli bui* in Europa, caratterizzati dalle invasioni barbariche, dalle lotte intellettuali e politiche per consolidare il potere della Chiesa e, spesso da un forte misticismo, anche se le testimonianze di vita quotidiana sembrano a volte rivelare una specie di frattura fra le idee prevalenti culturalmente e la vita di ogni giorno.

Tra il 500 e il 1100 d.C. non si verifica nessun progresso della matematica in Europa: seguendo in questo la civiltà latina, la matematica coincide più o meno con le quattro operazioni aritmetiche e le raffinate opere greche non esercitarono nessuna influenza per più di 500 anni. Infatti le invasioni barbariche, che si susseguirono dal V al IX secolo, ridussero la vita civile quasi a nulla: non esistevano più edifici, strade e città, quasi nessuna forma di scambio civile e commerciale. Si attenua grandemente, se non scompare la capacità di leggere e scrivere. Quel poco che persiste, spesso ridotto al solo copiare, si conserva nei monasteri e ogni successivo risveglio culturale sarà quindi mediato dal pensiero monastico. Non entreremo qui in dettagli rimandando ad esempio a [45].

Già prima della caduta dell'impero romano le comunità cristiane erano sufficientemente organizzate e potenti e, forse più variegate di quanto non lo siano oggi. Esse interagirono, soprattutto fino all'VIII–IX secolo, con i nuovi popoli germani, goti, visigoti, ..., che, a loro volta, trovarono in questa interazione la via per la costruzione di una nuova identità. In questo contesto il latino si impone come lingua internazionale e si verifica un marcato disinteresse per lo studio del mondo fisico. I principali interessi sono di tipo religioso: nel Cristianesimo si predica, rifacendosi anche agli ultimi filosofi greci e al misticismo e ascetismo orientale, l'innalzamento dello spirito al di sopra delle cause e della materia e la preparazione dell'anima all'altra vita nei cieli; il fine e la realtà ultima è la vita eterna, da ottenere con l'apprendimento delle virtù morali e spirituali: diventano quindi dominanti le dottrine del peccato, della paura dell'inferno e dell'aspirazione al paradiso. Lo studio della natura non solo è inutile, ma può anche essere dannoso, quindi eretico, per il raggiungimento del fine ultimo; ogni conoscenza della natura poteva essere trovata nelle Scritture o nelle interpretazioni delle Scritture date dall'autorità dei Padri della Chiesa. A dire il vero, la chiusura verso le materie mondane e in particolare la ricerca scientifica non è mai totale: la scienza, se intesa rettamente, come studio della manifestazione della saggezza

di Dio in Terra, e finché resta soggetta all'autorità delle Scritture, può trovare un suo spazio.

La situazione ambientale, il prevalere del latino e il progressivo venir meno della conoscenza del greco tagliano fuori tutto l'alto medioevo dal contatto con la matematica e le forme scientifiche greche. Citiamo solo le traduzioni dal greco, che furono usate fino al XII secolo, di SEVERINO BOEZIO (480–524): egli tradusse parti degli *Elementi* di Euclide, alcune definizioni e teoremi senza dimostrazioni, nella sua *Geometria*, e l'*Introduzione* di Nicomaco nella sua *Institutio arithmetica*.

Bisogna anche dire che, al di là del fatto che non è mai stato chiaro quale sia stato il livello di diffusione della matematica nei periodi d'oro della matematica greca, nel IV e V sec. d.C. questa era già scesa molto al di sotto del livello di autori come Euclide, Apollonio, Archimede, Ipparco e Tolomeo, e le opere di questi erano ormai quasi introvabili per gli stessi (pochi) cultori di matematica.

Quelli che furono secoli bui per l'Europa non lo furono per civiltà quali quella cinese e quella hindu, che nel periodo tra il 200 e il 1300 svilupparono della matematica, anche se con caratteristiche quasi esclusivamente di tipo normativo. La matematica cinese esercitò una modesta influenza sulla matematica occidentale, modesta, ma rilevante, è stata invece l'influenza hindu, particolarmente attraverso gli arabi.

Gli Hindu. La matematica hindu si sviluppa a partire dall'800 a.C.. Elementi di matematica sono presenti fin dalla civiltà Harappa, III millennio a.C., poi nel periodo Vedico, tra il 500 e l'800 a.C., sotto forma di *geometria rituale* — geometria finalizzata alla costruzione di altari. Verso il VI sec. a.C. altre religioni, come il Giainismo e il Buddismo, sostituiscono la religione Vedica e gli sviluppi della matematica sono legati all'astronomia. Segue poi un periodo classico, dedicato ai numerali indiani, agli algoritmi, all'algebra e alla trigonometria, e un periodo medioevale di commenti e sintesi. Sicuramente ci sono stati contatti con la matematica greca; la civiltà alessandrina deve avere influenzato gli hindu.

Il loro interesse principale fu l'astronomia e usarono liberamente nozioni anche raffinate di matematica senza mai sviluppare un corpo argomentato. In particolare, a loro si deve la numerazione posizionale e lo zero; usarono i numeri negativi, motivati come debiti, operarono con gli irrazionali, e trattarono i rapporti di irrazionali come numeri; sotto l'influenza di Diofanto discussero equazioni algebriche ed equazioni indeterminate; disposero di nozioni avanzate di trigonometria, che si presentavano in connessione con gli studi di astronomia. A proposito degli hindu lo storico persiano al-Bîrûnî (973–1048) scrisse (cfr. [73] p. 223):

> Posso paragonare la loro letteratura matematica e astronomica soltanto [...] a una mistura di madreperle e di datteri acerbi, o di perle e di letame, o di cristalli costosi e di ciottoli comuni. Entrambi i tipi di cose sono uguali ai loro occhi perché non sono in grado di elevarsi ai metodi di una deduzione rigorosamente scientifica.

Alla fine del 1200 l'attività scientifica in India comincia a declinare e bisogna aspettare l'epoca moderna per rivedere progressi in matematica.

Gli Arabi. All'incirca alla fine del VII secolo gli arabi diventano i depositari e continuatori della cultura matematica greca. Si suole quindi parlare di matematica araba anche se parte degli studiosi erano greci, cristiani, persiani ed ebrei, e non tutti mussulmani, ma accomunati dall'uso della lingua araba.

Dopo la conquista mussulmana e la creazione dei califfati di Cordova e Bagdad (intorno al 775), Bagdad diventa il centro culturale più importante. Viene fondata una Biblioteca, un'Accademia e un Osservatorio astronomico. Il califfo invia nel mondo studiosi con lo scopo di capire e comprare opere greche e finanzia la loro traduzione in arabo: agli inizi dell'800 vengono tradotti gli *Elementi* di Euclide e la *Sintassi* di Tolomeo. Vari fattori contribuirono al fiorire della matematica araba, che farà poi da tramite per il rifiorire della matematica in Europa; tra questi: la cultura greca fiorita in Persia dopo la chiusura dell'Accademia platonica da parte di Giustiniano; le scuole siriache di Antiochia e Damasco, e la scuola dei cristiani nestoriani che partiti da Costantinopoli si stabilirono ad Edessa in Persia, depositari delle opere greche dopo la distruzione di Alessandria; la presenza di monasteri cristiani nel medio oriente, depositari anche loro di opere greche; e, i contatti con la matematica hindu. Ricordiamo che in Persia trovarono pure rifugio filosofi pagani banditi da Atene da Giustiniano, come Simplicio, commentatore di Aristotele, e il neoplatonico Damascio.

Gli arabi continuarono lo studio della geometria e della trigonometria greca (ad esempio, sostituirono la corda con il seno, cosa che permise semplificazioni e nuovi sviluppi); eccelsero in astronomia e ottica, e soprattutto svilupparono l'algebra e, come detto, fecero da tramite tra la matematica hindu e l'occidente.

L'attività scientifica araba raggiunse il suo culmine intorno all'anno 1000. Poi, tra il 1000 e il 1300 le crociate indebolirono gli arabi d'Oriente, e, a seguito delle invasioni dei mongoli e dei tartari, gli arabi d'Oriente subirono un decisivo colpo: il califfato di Bagdad cessa di esistere nel 1258. In occidente gli arabi furono sconfitti nel 1492.

Non entreremo in dettagli ma tra i molti matematici e astronomi arabi non possiamo non menzionare, in particolare, MUSA AL-KHOWÂRIZMI (790–850), che utilizzò la notazione numerica indiana, e il poeta arabo-persiano OMAR KHAYYAM (1048–1122). Al-Khowârizmi scrisse *Al-jabr w'al muqâbala*. *Al-jabr* significa ristabilire l'equilibrio (in una equazione), corrispondente al portare termini da un membro all'altro di un'equazione (è da tener presente che gli arabi, mentre consideravano numeri irrazionali, non accettavano, come i greci, i numeri negativi); *al-muqâbala* significa semplificare. Da al-jabr derivò il nome *algebra*, usato anche nel senso di conciaossa, mentre dalla traduzione latina di al-Khowârizmi, Algoritmi, derivò il nome di *algoritmi*. Ancora ricordiamo il filosofo al-Kindi, interprete neoplatonico di Aristotele, che scrisse varie opere

di carattere fisico; il matematico Thabit ibn Qurra, che tradusse molte opere matematiche greche; gli astronomi al-Farghani e al-Battani; il matematico, fisico e astronomo Ibn al-Haitham che contribuì al problema isoperimetrico e apportò nuovi contributi all'ottica dei greci. L'approccio degli autori arabi è forse meno formale di quello dei greci, sembrano anche convivere più dei greci con una matematica numerica pur producendo spesso dimostrazioni alla maniera greca. Infine ricordiamo, di particolare importanza per la medicina e la filosofia, Ibn Sina o Avicenna e, per la filosofia, Ibn Rushd o Averroè che esercitarono una forte influenza sulla filosofia scolastica.

Il pre-rinascimento: Duecento e Trecento. In questo periodo si assiste ad un assestamento politico europeo[1] che porta maggiore sicurezza e una rinascita dell'economia, prevalentemente mercantile e artigianale e quindi monetaria, e si verificano dei cambiamenti sostanziali per la nostra storia.

- Nel 1085 Toledo e nel 1091 la Sicilia vengono riconquistati dai Cristiani. Si intensificano i contatti con la cultura araba e greca, attenuando l'iniziale atteggiamento di ostilità.
- Il contatto con gli arabi significa anche la riscoperta della cultura greca. Qui ricordiamo solo l'olandese Guglielmo di Moerbeke (1215-1286), amico di Tommaso d'Aquino, che, oltre a tradurre quasi tutto Aristotele e i commenti di Alessandro di Afrodisia, di Giovanni Filopono, di Simplicio e di Temistio, per primo tradusse opere di Archimede.
- Attorno alle scuole capitolari vengono fondate nel XIII secolo le prime università: Bologna, Parigi, Oxford, Vienna, Pisa ... La Chiesa sente ora bisogno di una *sua* cultura che troverà il proprio assestamento nel tomismo.

Riferimenti matematici sono presenti nell'opera di molti filosofi, ma sempre connessi e motivati da un approccio metafisico che tenda a spiegare il *tutto*, convinti anche che Dio avrebbe potuto fare tutto diversamente e quindi che ci fosse una sorta di impossibilità a priori a raggiungere la verità; si poteva argomentare quindi prevalentemente *ex ipothesi* e in forma di *disputatio*. A questo si aggiungeva una difficoltà reale a comprendere la raffinata matematica greca da parte di persone non use ad essa in traduzioni fatte da non matematici che spesso avevano loro stessi difficoltà a comprendere.

[1] I signori feudali creano governi relativamente stabili, ad esempio in Normandia, Inghilterra, Italia meridionale, Spagna, Portogallo, Francia; in Italia nascono i Comuni, che successivamente daranno luogo alle Signorie, e le Repubbliche Marinare. Queste nuove strutture politiche acquistano sempre più autonomia per via del loro arricchimento economico con attività manifatturiere e commerciali.

Forse l'unica opera matematica rilevante del periodo è il *Liber Abaci* di LEONARDO PISANO, detto Fibonacci, (1170-1250) che apparve nel 1202. Fibonacci venne in contatto con la matematica degli arabi e dei greci a Bugia nell'attuale Algeria, in Egitto e in Siria, a seguito dei commerci del padre, mercante pisano. Negli anni 1220-1230 egli scrisse anche il *Liber quadratorum* e il *Flos*, dedicati a problemi di analisi indeterminata, ed una *Practica geometriae*, forse basata sul trattato euclideo sulle *Divisioni delle figure* e su opere di Erone.

Fibonacci è il matematico che porta l'algebra degli Arabi in Europa, aggiungendo molto di suo. La sua opera eserciterà una notevole influenza sulla formazione che porterà agli sviluppi dell'algebra italiana nel '500 e costituisce, nelle sue parti più pratiche, la base dell'insegnamento nelle *scuole d'abaco*, tipiche della Toscana del 1300 ma diffuse in tutta l'Italia centrale, in cui si formeranno oltre che i mercanti anche gli artisti del Rinascimento: in questo modo la matematica perde il suo carattere elitario tipico della Grecia antica per arrivare a strati sociali a cui non era mai arrivata nel passato. È in questo contesto che si afferma la numerazione araba *decimale* che porta una notevole semplificazione per i calcoli, specialmente per quelli che fanno intervenire numeri grandi. Due secoli dopo una *summa* degli insegnamenti delle scuole d'abaco (derivata per buona parte dal *Liber Abaci* e dai manoscritti di Piero della Francesca (1410–1472)) fu composta da Luca Pacioli (1445-1517): *Summa de arithmetica, geometria, proportione et proportionalitate*.

Il Rinascimento: dal Quattrocento al primo Seicento. Gli anni dal 1400 alla fine del 1600 sono anni di profondi cambiamenti intellettuali e politico-sociali in cui la matematica ritrova una sua centralità.

- Le città acquistano sempre più autonomia, sostenuta dal loro arricchimento dovuto al consolidarsi delle attività manifatturiere e commerciali. La *civiltà comunale* tende a riprodurre le città-stato greche e la repubblica romana, a rinnovare gli studi con un richiamo all'antichità classica e ad un rinnovato richiamo al platonismo su sollecitazione principalmente laica: non più i monasteri, ma le città sono i nuovi centri culturali. L'interesse per il mondo greco-romano, in contrapposizione con la cultura medioevale sentita come espressione di un periodo di decadenza e di imbarbarimento tendente solo alla ricerca di vuote sottigliezze, determina il *rinascere* della cultura e il fiorire delle *humanae litterae*, spesso in contrapposizione alle *divinae litterae*, riproponendo la centralità dell'uomo: è prima l'*Umanesimo* e quindi il *Rinascimento* che riportano l'uomo al centro del mondo pur con un continuo riferimento alla limitazione della condizione umana.
- Intorno al 1450 JOHANN GUTENBERG inventa la stampa a caratteri mobili. Fin dal XII secolo, proveniente dalla Cina tramite gli Arabi, la carta di

lino e cotone si era sostituita al papiro e alla pergamena. Nel 1500 esistevano stamperie in più di 250 città; nella sola Venezia ne esistevano circa 150. Nel 1501 ALDO MANUZIO inaugura una collana di libri tascabili, in quarto o in ottavo, in cui per la prima volta si usa il corsivo, con tirature di 1000 copie, il che gli permette di vendere i libri a prezzi relativamente bassi. L'impatto sulla diffusione della conoscenza è evidente.

- Il Concilio di Firenze (e Ferrara) del 1443, per l'unità delle chiese cristiane e la concordia ritrovata fra greci e latini a fronte della minaccia turca, favorisce i contatti con il mondo bizantino.
- Nel 1453 i Turchi conquistano Costantinopoli e gli studiosi e i ricchi greci si rifugiano in Italia (a Firenze, Roma e, soprattutto Venezia) portando altri manoscritti. Nel 1482 viene pubblicata la traduzione latina degli *Elementi* di Euclide redatta da Giovanni Campano. Nel secolo successivo vengono pubblicate le traduzioni di opere di Archimede, Apollonio, Pappo, Diofanto e Tolomeo.
- La chiusura delle vie verso l'oriente dovuta all'espansione dell'Impero Ottomano spinge alla ricerca di nuove vie. Le navi portoghesi circumnavigano l'Africa e scoprono la via del mare per l'India. CRISTOFORO COLOMBO scopre l'America nel 1492 con tutti i rivolgimenti che questo comporterà[2]. Assieme all'invenzione della bussola, della polvere da sparo, delle macchine meccaniche, diventa ancor più rilevante lo studio della statica e dell'idraulica, dell'ottica in connessione con le lenti e, soprattutto, lo studio del moto, anche in connessione con le nuovi armi, e della misurazione del tempo, particolarmente importante in relazione al problema della determinazione della longitudine nella navigazione.
- Le molte guerre producono notevoli cambiamenti, aprendo anche nuove prospettive intellettuali. Le guerre per il dominio dell'Italia, dal 1494 al 1559, che coinvolgono i nuovi stati nazionali e vedono attivo il papato, incoraggiano l'opposizione intellettuale nei confronti della Chiesa. I dubbi sulla fondatezza della fisica e della cosmologia, le opposizioni alla sperimentazione e alla riflessione critica sui problemi del nuovo ordine sociale, le degenerazioni morali di alcuni capi e le pratiche corrotte della Chiesa culminano al di là delle Alpi nella *riforma protestante* di Martin Lutero (1483-1546), Ulrich Zwingli (1484-1531) e Giovanni Calvino

[2] Dopo la *rivoluzione copernicana* si è costretti a confrontarsi con un nuovo universo, con nuovi mondi, con nuove piante, animali e razze. Ci si scontra con popolazioni 'ignare' del loro peccato originale e con organizzazioni sociali diverse. Si è costretti a toccare con mano la limitatezza delle conoscenze e delle dottrine degli antichi e, in contrasto, si scoprono le nuove capacità tecniche, come quelle del navigare e del far la guerra.

(1509-1564) che sarà poi seguita dalla *controriforma*, cfr. [97]. La Riforma non liberalizzò direttamente il pensiero. Spesso fu anche più rigida della Chiesa, ma, senza averne intenzione, sollecitò molte persone a pensare e ad agire, ed anche a rinunciare ad entrambe le fedi e a rivolgersi all'osservazione e all'esperienza come uniche fonti della conoscenza.

È questo il periodo dell'impegno umanistico di Erasmo da Rotterdam (1466-1536), precursore della Riforma, impegno incentrato sull'ideale di un ritorno alle origini del cristianesimo, improntato all'esigenza della cultura e delle condizioni sociali dell'Europa del tempo. È anche il periodo dell'opera di Filippo Melantone (1497-1561), professore a Wittenberg assieme a Lutero con cui contribuì alla traduzione della Bibbia, fu l'estensore intorno al 1530 della *Confessio Augustana* che doveva rimanere la dichiarazione fondamentale del luteranesimo nei confronti sia del cattolicesimo che delle altre tendenze protestanti. Egli curò varie opere matematiche, tra cui gli *Elementi* di Euclide, le costruzioni matematiche di Tolomeo, l'*Aritmetica* di Peuerbach e quella di Stifel e la teoria dei moti planetari di Peuerbach. Seguendo le sue idee, scuole e università tedesche furono riformate e strutturate in senso umanistico. Un'azione di riforma umanistica nell'insegnamento fondata su discipline dialettico-retoriche e la matematica, in molti aspetti simile a quella di Melantone, fu svolta in Francia da Pietro Ramo (1515-1572), o Pierre de la Ramée, ucciso nella notte di San Bartolomeo. Egli operò nel *Collège de Presle* e successivamente nel *Collège Royal*. Dopo una prima esposizione, nella *Narratio prima* ad opera di Georg Joachim Rhaeticus (1514-1574) pubblicata a Danzica e Basilea nel 1540 e nel 1543, appare il *De revolutionibus orbium coelestium* di Copernico, che cambierà il concetto di universo.

Per quel che riguarda la matematica, assistiamo allo sviluppo di vari filoni di ricerca interdipendenti fra loro, su cui non avremo modo di soffermarci (rimandiamo il lettore interessato ad esempio a [45].

- Gli artisti del Rinascimento, formatisi nelle botteghe artigiane e alle scuole d'abaco, realizzano a partire da Brunelleschi (1377-1446) che la matematica è utile, particolarmente nello studio della *prospettiva*. Leon Battista Alberti (1404-1472) scrive il *Della pittura* e i *Ludi matematici*, Piero della Francesca (1410-1492) il *De perspectiva pingendi* e Dürer l'*Underweysung der Messung mid den Zyrkel und Rychtsckey* (Istruzioni per misurare con riga e compasso). Questi studi evolveranno nel Seicento con Girard Desargues (1591-1661), Abraham Bosse (1602-1676), Blaise Pascal (1625-1662) e Philippe de la Hire (1640-1718) nella cosiddetta *geometria proiettiva*, che avrà particolare rilevanza negli sviluppi del XIX secolo e di cui noi non parleremo.

- Le necessità pratiche, ad esempio l'esigenza di conoscenze astronomiche più accurate per la navigazione, e quindi di tavole astronomiche e trigonometriche più accurate, e le attività commerciali e bancarie, richiedono un'aritmetica e un'algebra più avanzata rispetto a quella degli Arabi. Si possono accettare o no i numeri irrazionali, ma si usano e si approssimano. Qualche problema in più si ha con i numeri negativi, in genere non accettati e sicuramente non accettati come radici di equazioni. È così con Michael Stifel (1486-1567), Simon Stevino (1548-1620) e Girolamo Cardano (1501-1576). Rafael Bombelli (1526-1573) nella sua *Algebra* dà i primi sviluppi in *frazione continua* di radici. Nel 1594 John Napier (1550-1617) introduce i *logaritmi* con lo scopo di facilitare i conti trigonometrici, utili alla navigazione e all'astronomia. Un altro dei successi del secolo è la soluzione delle equazioni di terzo e quarto grado ad opera degli algebristi italiani: Scipione del Ferro (1465-1526), Niccolò Fontana, detto Tartaglia (1499-1557), Girolamo Cardano (1501-1576), Lodovico Ferrari (1522-1565) e Rafael Bombelli (1526-1573). Ad opera di François Viète (1540-1603) si ha l'introduzione del simbolismo letterale non solo per le incognite ma anche per i dati, con una contemporanea evoluzione di una *geometria numerica* che porterà alla *geometria analitica*. Va osservato che l'algebra trova il suo fondamento su costruzioni geometriche e solo successivamente assumerà una sua autonomia.

CAPITOLO 7

Il problema delle quadrature e dei centri di gravità

La pubblicazione a stampa delle opere allora note di Archimede a Basilea nel 1543 provocò un gran numero di ricerche volte ad estendere e completare i risultati archimedei, specialmente relativamente ai centri di gravità dei solidi, ma anche alla quadratura di figure piane e solide e alla rettificazione di curve. Questi studi occuparono i migliori matematici del tempo per tutta la metà del Cinquecento e quasi tutto il Seicento; solo per citare quelli più noti, menzioniamo Francesco Maurolico (1494-1575), Federico Commandino (1509-1575), Simon Stevino (1548-1620), Luca Valerio (1552-1618), Johannes Keplero (1571-1630), Galileo Galilei (1564-1642), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Evangelista Torricelli (1608-1647), Gregorio di San Vincenzo (1584-1667), Gilles de Roberval (1602-1675), Pierre de Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650), Blaise Pascal (1623-1662), John Wallis (1616-1703), Christiaan Huygens (1629-1695), James Gregory (1638-1675), Isaac Barrow (1630-1677). Essi cercarono di estendere i metodi di Archimede, di eliminare il ricorso alla riduzione per assurdo del metodo di esaustione e, soprattutto, costretti a confrontarsi con il continuo, non ebbero timore di trattare gli indivisibili e l'infinito, contribuendo a costruire l'atmosfera favorevole allo sviluppo del *calcolo infinitesimale* di Newton e Leibniz che, a posteriori, semplificherà, ingloberà e renderà superati i loro tentativi.

In termini più espliciti si pongono due problemi:

- estendere il metodo di Archimede a situazioni più generali, come a nuove figure geometriche e allo studio dei centri di gravità dei solidi,
- dare una veste unitaria, oltre che generale, al metodo di esaustione.

A questa attività è dedicata buona parte dell'opera di Francesco Maurolico (1494-1575), Federico Commandino (1509-1575), Simon Stevino (1548-1560) e Luca Valerio (1552-1618). A seguito dei progressi che si fanno, diventa sempre più prevalente l'interesse ad

- arrivare rapidamente a nuovi risultati, dando spesso rilevanza più alle scoperte che alle dimostrazioni,
- eliminare il continuo riferimento alla riduzione per assurdo di Archimede,
- convivere con l'infinito e l'infinitamente piccolo (almeno come metodo per operare).

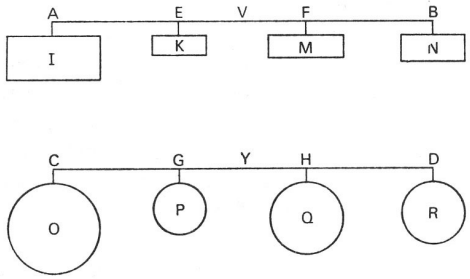


FIGURA 1. Centri di gravità di sistemi di pesi.

Spiccano qui i nomi di Kepler (1571-1630), Cavalieri (1598-1647), Torricelli (1608-1647), Roberval (1602-1675).

Le opere fisiche di Archimede come pure le nuove esigenze tecniche e ingegneristiche, determinate dallo sviluppo delle attività manifatturiere, minerarie, agricole e commerciali, portano ad un nuovo interesse per la statica e l'idraulica, che si evolverà ben presto nello studio della dinamica, cioè del moto. Anche a seguito di questi studi, e del nuovo approccio di Cartesio (si veda dopo), nuove curve oltre la curva logaritmica vengono introdotte (la cicloide, la catenaria, nuovi tipi di spirali, ...) e si pone il problema del loro studio e, in particolare, della loro quadratura e successivamente della ricerca delle tangenti. Si sviluppano sempre più metodi numerico-algebrici e si affronta il problema della *rettificazione delle curve*.

7.1. *Maurolico, Keplero, Valerio*

Passiamo ora ad illustrare una piccola selezione di esempi.

Maurolico. FRANCESCO MAUROLICO (1494–1575) passò quasi tutta la sua vita a Messina. Fu un umanista nel senso che lavorò al recupero della scienza greca: Euclide, Apollonio, Archimede, ..., dando però più rilevanza alla ricostruzione matematica che a quella filologica delle opere. Ad esempio, cosa che più interessa noi qui, rielaborò il testo di Archimede *Sull'equilibrio dei piani*. Quest'opera, *Archimedis de momentis aequalibus ex traditione Francisci Maurolyci*, non verrà stampata nel corso della sua vita — verrà stampata a Palermo nel 1685, come parte delle opere archimedee di Maurolico con il titolo *Admirandi Archimedis Syracusani monumenta omnia, quae extant*. Tuttavia, grazie anche alla sua amicizia con Clavio e i buoni rapporti con i gesuiti l'opera di Maurolico fu nota durante la sua vita e rimase viva dopo la sua morte.

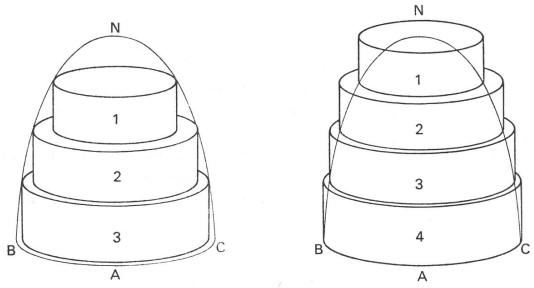


FIGURA 2. Cilindri inscritti e circoscritti a un paraboloide.

Siano m_1 e m_2 due masse poste in due punti A_1 e A_2 a distanza rispettivamente a_1 e a_2 da un punto A, ad esempio a sinistra di A. Se C denota il fulcro della leva a distanza c da A, per il principio della leva di Archimede m_1 e m_2 sono in equilibrio se

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{A_2C}{A_1C} = \frac{a_2 - c}{c - a_1},$$

cioè

$$c(m_1 + m_2) = a_1m_1 + a_2m_2.$$

Da questo si ricava che la posizione del fulcro per l'equilibrio coincide con il *baricentro*

$$c = \frac{a_1m_1 + a_2m_2}{m_1 + m_2}, \tag{7.1}$$

e, per induzione, nel caso di n masse con

$$c = \frac{a_1m_1 + a_2m_2 + \cdots + a_nm_n}{m_1 + m_2 + \cdots m_n}.$$

Vediamo ora come Maurolico trova il centro di gravità di un paraboloide. Egli comincia con il considerare due sistemi di pesi, ad esempio quattro, I,K,M,N, e O,P,Q,R, sospesi rispettivamente sui bracci AB in A,E,F,B e CD in C,G,H,D, cfr. Figura 1. Supponendo che

$$\frac{I}{O} = \frac{K}{P} = \frac{M}{Q} = \frac{N}{R}$$

e $AE = CG, EF = GH, BF = DH$ egli dimostra che i centri di gravità V e Y sono equidistanti da B e D, cioè $VB = YD$, come risulta a noi evidente da (7.1).

Egli considera quindi un settore di paraboloide di asse AN che divide in n parti, ciascuna uguale a h, di modo che $AN = nh$, e i cilindri inscritti e circoscritti, cfr. Figura 2. Assume, senza dirlo, che che i baricentri delle figure inscritte e

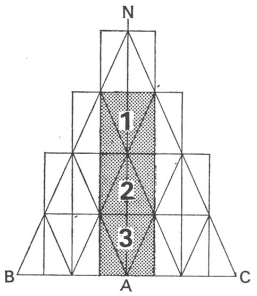


FIGURA 3. Il triangolo *BNC*.

circoscritte sono vicine al baricentro del paraboloide e passa a calcolarne i baricentri. Se $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ e $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ sono rispettivamente i volumi e i raggi dei cilindri inscritti si ha

$$\frac{i_1}{r_1^2} = \frac{i_2}{r_2^2} = \ldots = \frac{i_{n-1}}{r_{n-1}^2},$$

e, poiché $r_1^2 = h, r_2^2 = 2h, \ldots, r_{n-1}^2 = (n-1)h$,

$$\frac{i_1}{1} = \frac{i_2}{2} = \ldots = \frac{i_{n-1}}{n-1}.$$

Maurolico quindi mostra che le aree dei rettangoli inscritti nel triangolo *BNC* con altezza *AN*, cfr. Figura 3, stanno nello stesso rapporto $1 : 2 : \ldots : n-1$, concludendo che i pesi dei cilindri inscritti hanno in *AN* lo stesso centro di gravità dei corrispondenti rettangoli inscritti al triangolo *BNC*. Le stesse considerazioni valgono per le figure circoscritte. Si è allora ricondotti a studiare i centri di gravità delle figure inscritte e circoscritte al triangolo *BNC*. A questo punto potrebbe pensare che i baricentri delle figure inscritte e circoscritte al triangolo sono vicine al baricentro del triangolo, che sa essere su *AN* a $2/3AN$ da *N* e congetturare che il baricentro del paraboloide si trova sull'asse *AN* a distanza $2/3AN$ da *N* e concludere con lo stesso argomento per assurdo del metodo di esaustione. Invece decide di calcolare esattamente la posizione dei baricentri delle figure inscritte e circoscritte al triangolo.

Con riferimento alla Figura 4, il centro di gravità di una sequenza di triangoli (triangoli in alto a destra e sinistra) di altezza b e base h appesi ad *AN* ovviamente si calcola come se fossero uno o due soli triangoli; per uno o due triangoli esso sta a distanza $h/6$ dal punto di mezzo di *AN*. Si conclude allora facilmente che per il centro di gravità G di ciascuna delle due sequenze in figura vale $GN = nh/2 \pm h/6$. Poiché le aree delle figure inscritte e circoscritte al triangolo sono rispettivamente $\Delta(1-1/n)$ e $\Delta(1+1/n)$, dove Δ è l'area del triangolo,

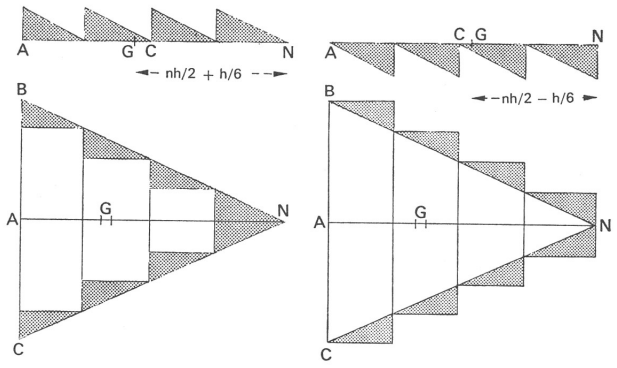


FIGURA 4. Centro di gravità dei rettangoli inscritti e circoscritti ad un triangolo.

per il principio della leva abbiamo

$$\Delta \times \frac{2}{3}nh \mp \frac{\Delta}{n}\left(\frac{nh}{2} \pm \frac{h}{6}\right) = \Delta \frac{n \mp 1}{n} \times GN_{\mp},$$

denotando $G_{\mp}$ il centro di gravità della figura inscritta (-) e circoscritta (+). Con semplici conti si conclude quindi

$$GN_{\mp} = \left(\frac{2}{3}AN \mp \frac{h}{2} - \frac{h}{6n}\right)\frac{n}{n \mp 1}.$$

Con la solita argomentazione per assurdo del metodo di esaustione, visto che h può esser preso piccolo come si vuole, Maurolico conclude che per il centro di gravità G del paraboloide si ha $GN = \frac{2}{3}AN$.

A parte la formula per il calcolo del baricentro, possiamo dire che l'argomentazione di Maurolico è in pieno spirito archimedeo.

Commandino. Molta della rinascita cinquecentesca si deve a FEDERICO COMMANDINO (1506–1575). Vissuto negli ambienti delle corti umanistiche tra Urbino Roma e Bologna, tradusse dal greco con competenza e notevole attenzione filologica le opere di Archimede, Euclide, Apollonio, Tolomeo e Erone, fornendole di commenti tesi a spiegare la matematica nelle parti più oscure. Una delle sue pochissime opere originali è il *Liber de centro gravitatis solidorum*, stampato a Bologna nel 1565, in cui fornisce una dimostrazione delle affermazioni di Archimede sul centro di gravità del paraboloide, discusse però nel *Metodo*, ritrovato solo nel 1906; per una edizione recente con traduzione in italiano del *Liber de centro gravitatis solidorum* di Commandino si veda [25]. Si tratta della prima opera a stampa sull'argomento, anche se sono possibili influenze di Maurolico. Pur con delle varianti rispetto all'approccio di Maurolico, quest'opera si

svolge tutta nello spirito archimedeo del principio di esaustione e della riduzione per assurdo, sempre limitatamente al problema trattato, per questo noi non entreremo in dettagli.

Siamo sempre nel periodo di acquisizione e di assoluto rispetto della tradizione classica, come si può vedere anche nel *Mechanicorum liber*, Pesaro 1577, di Guidobaldo dal Monte protettore di Galileo, un importante trattato sulle macchine, che cerca di svelare la struttura geometrica che soggiace ad esse.

Kepler. KEPLER, o Keplero in italiano, è soprattutto noto per le tre leggi sul moto planetario che portano il suo nome di cui non parleremo qui, si veda [55] [45]. Ma, oltre all'astronomia, egli diede notevoli contributi in vari altri campi: si occupò del problema dei volumi e dei centri di gravità, di ottica (nel senso dell'ottica geometrica e dello studio degli strumenti ottici), dello studio dei poliedri e dei logaritmi, e dello studio di forme ottimali[1].

Per tutta la sua vita Keplero fu un uomo profondamente religioso. Tipico rappresentante del Rinascimento in lui l'irrazionale e il razionale si incontrano: fortemente influenzato dalla dottrina pitagorico-platonica secondo cui l'universo è ordinato da un piano matematico prestabilito e da quella metafisico-cristiana di Nicola Cusano egli vide nella matematica lo strumento di cui Dio si serve per costruire il mondo e fu sempre convinto che, tramite la matematica, l'uomo, fatto a somiglianza di Dio, possa comprendere totalmente questo piano, vivendo e subendo anche personalmente[2] un territorio di frontiera della controriforma caratterizzato dai processi e dai roghi alle streghe.

[1] Nel breve trattato *Strena seu De nive sexangula*, 1611, 'Il dono ovvero Sulla neve esagonale, che studia la forma dei fiocchi di neve', egli enuncia la famosa congettura dell'impacchettamento delle sfere nello spazio. Essa afferma che non esiste alcun modo di sistemare delle sfere nello spazio con densità media superiore a quella dell'impacchettamento cubico a facce centrate o a quella dell'impacchettamento esagonale, che del resto sono piuttosto naturali. Nel 1831 Gauss dimostrò che la congettura è vera se si richiede che le sfere siano sistemate secondo una griglia regolare. Si trattava di mostrare che gli impacchettamenti *irregolari* non sono efficienti. Nel 1900 il problema, in forma più generale, viene formulato da David Hilbert come problema 18 della lista presentata al Congresso dei Matematici di Parigi. Nel 1953 László Fejes Tóth mostrò che il problema di Keplero poteva essere ricondotto ad un numero finito di calcoli, quindi, in linea di principio si poteva pensare ad una dimostrazione per esaustione dei casi. Nel 1993 Wu Yi Hisiang pubblicò una dimostrazione geometrica della congettura di Keplero, ma la comunità matematica la giudicò incompleta. Nel 1996 Thomas Hales riprese l'idea di Tóth e diede una dimostrazione per esaustione via computer la cui validità rimane in qualche modo a tutt'oggi sospesa. Per maggiori informazioni il lettore può consultare [68] in [11].

[2] La madre subì per lunghi anni un processo per stregoneria. Da osservare che Keplero aiutò sempre la madre durante il processo sostenendo che non fosse una strega pur accettando l'idea che si potesse processare qualcuno per stregoneria.

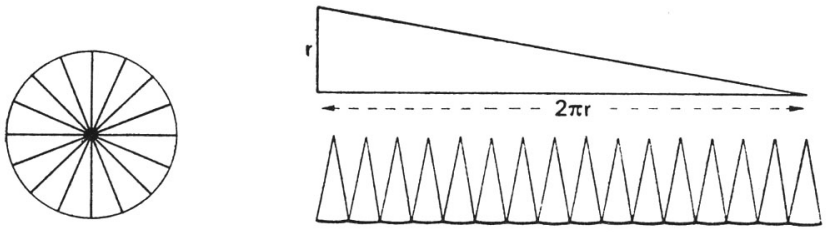


FIGURA 5. Area del cerchio.

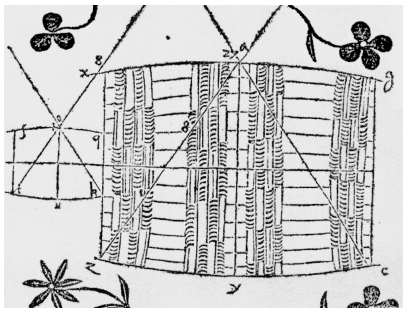
Qui ci limitiamo a qualche osservazione sull'approccio di Keplero allo studio delle aree e dei volumi nell'opera *Nova stereometria doliorum vinorum*, 1615, in cui assume un atteggiamento molto più autonomo rispetto all'ortodossia archimedea.

Egli comincia con il problema di determinare l'area del cerchio. Seguendo Cusano egli considera il cerchio come un poligono regolare con un numero infinito di lati; la sua area è quindi composta da triangoli di altezza il raggio e la cui somma delle basi ammonta alla circonferenza del cerchio. Egli applica quindi lo stesso argomento alla sfera, ma anche al cono e al cilindro, che considera come composti da un numero infinito di lamine circolari, come pure a molti solidi di rotazione, ritrovando il cosiddetto teorema di Pappo e/o Guldino, cfr. 11.21 Capitolo 11: nell'appendice alla prima parte egli discute 92 solidi non trattati da Archimede. I contemporanei vedranno in questo metodo una anticipazione del metodo degli indivisibili di Cavalieri, anche se questo non sembra completamente corretto.

Come ben noto, l'occasione per la scrittura della *Nova stereometria* è offerta a Keplero dal suo incontro con un vinaio austriaco. Volendo comprare del vino per il banchetto del suo secondo matrimonio, Keplero si reca da un vinaio e resta esterrefatto dal modo di calcolare il conto da parte del vinaio: il vinaio aveva posto un'asta graduata all'interno della botte in diagonale, come in Figura 6, e direttamente ne aveva dedotto la capacità. È chiaro infatti che botti con lo stesso diametro possono avere capacità molto diverse. Le botti in uso in Austria dovevano avere delle proprietà geometriche in comune. Questo è il problema che Keplero vuole investigare: quale proprietà?

Keplero approssima la botte con un cilindro a base circolare di raggio r e altezza h. Fra questi cilindri, con diagonale data d, cerca quindi quello di capacità massima. Abbiamo quindi

$$d^2 = (\frac{h}{2})^2 + (2r)^2,$$



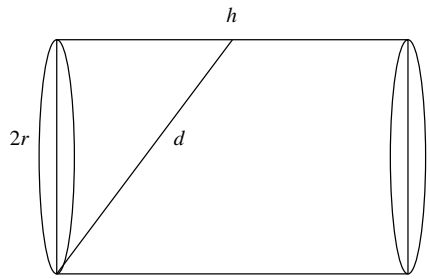


FIGURA 6. Incisione di Keplero per illustrare i rapporti tra le dimensioni di una botte e di un barilotto di riferimento.

cioè

$$h = 2\sqrt{d^2 - (2r)^2},$$

e, in termini di r il volume del cilindro è dato da

$$V = 2\pi r^2 \sqrt{d^2 - (2r)^2}.$$

Posto $r^2 = x$, vogliamo quindi massimizzare (prendendo il quadrato) la funzione

$$x^2(d^2 - 4x) \quad \text{equivalentemente} \quad f(x) := x^2\big(\frac{d^2}{2} - 2x\big).$$

Oggi possiamo utilizzare il calcolo differenziale, cosa che lasciamo al lettore, o la *diseguaglianza tra media geometrica e media aritmetica*: *dati n numeri positivi* $x_1, \ldots, x_n$ *vale*:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},$$

con uguaglianza se e solo se tutti i numeri sono uguali. Nel nostro caso

$$x^2\big(\frac{d^2}{2} - 2x\big) \leq \big[\frac{1}{3}(x + x + \frac{d^2}{2} - 2x)\big]^3 = \big(\frac{1}{3}\frac{d^2}{2}\big)^3,$$

cioè $\big(\frac{1}{3}\frac{d^2}{2}\big)^3$ è il massimo di $f(x)$ ed è raggiunto per

$$x = \frac{d^2}{2} - 2x,$$

da cui

$$r^2 = \frac{d^2}{6} \quad \text{e} \quad h = \frac{2d}{\sqrt{3}},$$

cioè il rapporto tra l'altezza e il diametro della base del cilindro ottimale è $\sqrt{2}$.

La dimostrazione di Keplero è geometrica e consiste nel mostrare che ogni altro generico cilindro ha volume minore di quello che abbiamo trovato ed è

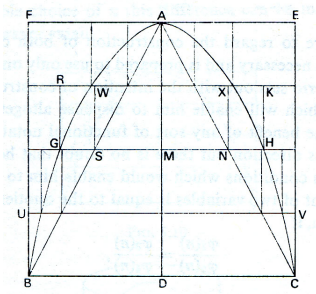


FIGURA 7

enunciata nel suo Teorema V. C'è anche da dire che Keplero studia vari altri problemi di massimo e minimo sempre con metodi geometrici. Ritornando alla questione iniziale, dopo aver provveduto ad un confronto con i dati relativi alle botti in uso, Keplero conclude che da quanto visto è chiaro che i costruttori di botti austriaci, come guidati da un senso comune e geometrico, costruiscono le loro botti in accordo con il principio di massimo stabilito nel suo teorema V, cioè in modo che le botti abbiano capacità massimale

> anche se si devia un po' dalle regole esatte, perché figure vicine a quelle ottimali cambiano di molto poco la loro capacità [...] Le cose stanno così perché vicino a un massimo il decremento da entrambe le parti è all'inizio impercettibile.

Valerio. LUCA VALERIO vive tutta la sua vita intellettuale all'interno dell'area dei gesuiti del Collegio Romano dove, dopo aver insegnato greco, a partire dal 1600 insegna matematica. Dal 1609 al 1616 corrisponde con Galileo, ma dopo la condanna del copernicanesimo tronca ogni rapporto con Galileo e si dimette dall'Accademia dei Lincei di cui era membro. È nel volume *De centro gravitatis solidorum*, 1604, che appaiono le sue maggiori innovazioni metodologiche. Luca Valerio non tratta una sequenza di casi particolari, ma dimostra i suoi risultati per classi generali di figure, le figure decrescenti, per le quali prova risultati di approssimazione e di confronto. In particolare egli stabilisce come lemma autonomo l'essenza del metodo di esaustione: se due quantità differiscono per meno di ogni quantità data allora esse sono uguali. Tratta le successioni di approssimanti come vere approssimazioni per difetto e per eccesso per ottenere poi all'occorrenza anche risultati nuovi (come il centro di gravità dell'iperboloide di rotazione). Questo, pur collocandosi pienamente nell'abito della matematica archimedea, risulterà un passo importante verso la ricerca di metodi generali. Diamo solo un esempio.

Sia BAC un paraboloide con base circolare, diametro AB e asse AD, cfr. Figura 7, si divida l'asse AD in n parti uguali e si considerino le figure circoscritte al paraboloide e al triangolo come usualmente. Sia V il volume del paraboloide,

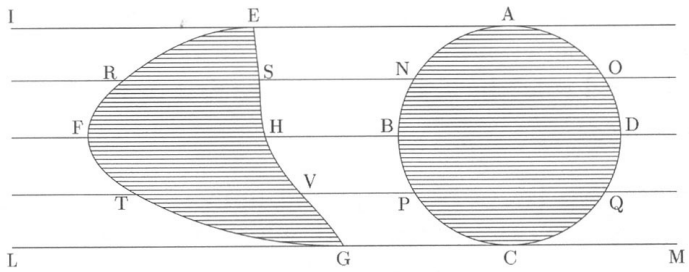


FIGURA 8. *Tutte le linee* o gli *indivisibili* di una figura.

V_n quello della figura circoscritta, Δ l'area del triangolo e Δ_n quello della figura circoscritta. Ovviamente $V_n - V$ e $\Delta_n - \Delta$ si possono fare piccoli come si vuole prendendo n grande. Ora, se M è un punto della suddivisione dell'asse AD, sempre con riferimento alla Figura 7 si ha

$$\frac{AM}{AD} = \frac{MH^2}{DC^2} = \frac{GH^2}{BC^2} = \frac{\text{cerchio su } GH}{\text{cerchio su } BC} = \frac{\text{cilindro } GRKH}{\text{cilindro } BUVC},$$

e

$$\frac{AM}{AD} = \frac{MN}{DC} = \frac{SN}{BC} = \frac{\text{rettangolo } SWXN}{\text{rettangolo } BUVC}.$$

Quindi

$$\frac{\text{cilindro } GRKH}{\text{cilindro } BUVC} = \frac{\text{rettangolo } SWXN}{\text{rettangolo } BUVC},$$

e sommando

$$\frac{V_n}{\text{cilindro } BFEC} = \frac{\Delta_n}{\text{rettangolo } BFEC},$$

da cui si conclude

$$\frac{\text{paraboloide } BAC}{\text{cilindro} BFEC} = \frac{\text{triangolo } BAC}{\text{rettangolo } BFEC} = \frac{1}{2}.$$

7.2. *Gli indivisibili di Cavalieri*

Per il suo *metodo degli indivisibili* Cavalieri (1598-1647) fu uno di più influenti matematici del tempo. L'idea principale di Cavalieri è che sia possibile confrontare due figure geometriche confrontando i loro *indivisibili*.

Per fissare le idee, consideriamo figure piane contenute tra due rette parallele, cfr. Figura 8; secondo Cavalieri, il transito della linea LM, chiamata *regula*, attraverso le figure parallelamente a se stessa produce *tutte le linee* o gli *indivisibili* delle figure — Cavalieri evita accuratamente di parlare del numero di queste

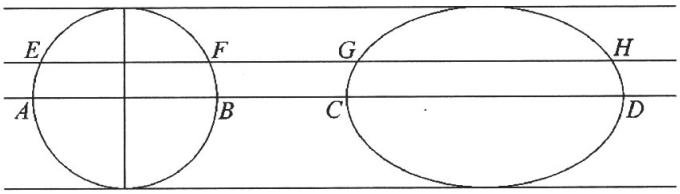


FIGURA 9. Gli indivisibili dell'ellisse e la sua area.

linee, vagamente parla di un *indefinito* numero di linee contenute nelle figure ed evita di discutere se questi indivisibili sono *infinitamente piccoli* confrontati con le figure. Egli tratta *tutte le linee* in due modi: *collettivamente* come un aggregato che definisce una nuova grandezza in accordo con il V libro di Euclide, e *distributivamente* confrontando l'una con l'altra. In modo sintetico, per una discussione approfondita si veda [58] [1], possiamo dire che Cavalieri associa ad ogni figura F tutte le sue linee $O_F(l)$, estende la teoria di Eudosso in modo da includere le 'grandezze' $\{O_F(l)|F\}$, e, quindi, stabilisce tra due figure F_1 e F_2, anche se in modo più retorico che matematico, la relazione

$$F_1 : F_2 = O_{F_1}(l) : O_{F_2}(l)$$

e prova che, se in F_1 e F_2 con la stessa altezza le coppie di segmenti staccati hanno lo stesso rapporto, allora pure $O_{F_1}(l)$ e $O_{F_2}(l)$ hanno lo stesso rapporto, concludendo, [23] Libro II, Teorema IV (argomentazioni simili valgono per i solidi):

PRINCIPIO DI CAVALIERI: *Se due figure piane o solide hanno la stessa altezza; se poi, condotte nelle figure piane delle rette parallele e nelle solide dei piani paralleli, si troverà che i segmenti di retta tagliati dalle figure piane (o le superfici piane tagliate dalle solide) sono grandezze proporzionali, le due figure saranno tra loro come uno qualsiasi dei segmenti (o nei solidi delle superfici) tagliati nella prima al corrispondente segmento tagliato nell'altra.*

Osserviamo che il principio appare come un'idealizzazione del *metodo meccanico* di Archimede, opera allora sconosciuta. Ricordiamo infatti che il testo di Archimede fu ritrovato solo all'inizio del '900.

Un tipico esempio di applicazione del principio di Cavalieri sta nel calcolo dell'area dell'ellisse. Dato un cerchio (diciamo in termini cartesiani di equazione $x^2+y^2=1$) $AEFB$ e un'ellisse (di equazione $x^2/a^2+y^2=1$) $CGHD$ con uno dei semiassi uguale al raggio del cerchio (in modo che abbiano la stessa altezza), cfr. Figura 9, e tracciata comunque la retta EH, risulta $EF : GH = AB : CD$. Per il principio di Cavalieri, lo stesso rapporto avranno le aree del cerchio e dell'ellisse, che quindi staranno tra loro come il diametro AB del cerchio sta all'asse

CD dell'ellisse (o l'area dell'ellisse è πa).

Cavalieri discute molte applicazioni, rilevanti sono quelle ai volumi dei solidi (in particolari di molti solidi di rotazione già considerati da Keplero); introducendo le nozioni di *tutti i quadrati* (cubi, etc.) *di una data figura* egli 'calcola' quelli che in termini moderni sarebbero gli integrali di x, x^2, x^3, etc., noi non entriamo nei dettagli. Ritorniamo invece alla giustificazione del principio di Cavalieri.

La corrispondenza con Galilei mostra che Cavalieri era ben cosciente delle obiezioni che potevano esser rivolte al suo metodo: possibili paradossi legati all'infinito e al continuo (Galilei aveva seri dubbi sulla possibilità di attribuire una proporzione a due aggregati di indivisibili); a questo si aggiunga l'ostilità dei gesuiti agli indivisibili tanto da proibirne l'insegnamento nei loro collegi. Nel libro VII Cavalieri presenta una nuova giustificazione del suo principio basata su un metodo che chiama *distributivo*. Il punto chiave è dimostrare il principio quando i segmenti staccati sono uguali; egli cerca quindi con successive suddivisioni in figure di questo tipo di ricostruire le figure intere, ma è come se si rendesse conto che il processo può non finire, quindi l'infinito di tutte le linee ricompare in altra forma; aggiunge quindi una dimostrazione per assurdo.

Malgrado le difficoltà a dare un fondamento solido al metodo degli indivisibili, questo si impose con molte varianti tra i matematici del Seicento, evolvendosi sempre più in un metodo algebrico; ne furono sostenitori Roberval (1602-1675), Pascal (1623-1662), Wallis (1616-1703) e soprattutto Torricelli. Infatti i matematici non erano disposti a rinunciare ad un metodo generale che permetteva di ottenere tanti risultati e, in fondo, nei casi standard era equivalente al classico metodo per esaustione.

7.3. *Torricelli*

Entusiasta della teoria degli indivisibili, ma non solo, continuatore dell'opera di Galilei, innovatore per molti aspetti e, sicuramente, personaggio di rilievo nella rivoluzione scientifica del Seicento fu EVANGELISTA TORRICELLI (1608-1647)[3].

L'unica opera pubblicata in vita da Torricelli fu l'*Opera geometrica*, [88], che contiene i trattati *De solidis sphaeralibus*, *De motu*, *De dimensione parabolae*, *De solido hyperbolico cum appendicibus de cycloide et cochclea*; complessa è la vicenda della pubblicazione delle altre sue opere. Diciamo solo che a parte le

[3] Stranamente la saggistica su Torricelli non è particolarmente ricca, il lettore può vedere [93], e la sua bibliografia; per le opere primarie si vedano [90] [92] [88] [89] [43].

Lezioni accademiche, tenute all'Accademia della Crusca apparse nel 1715 [89], le opere di Torricelli apparvero a stampa solo nel 1919 [90], si veda anche [92].

Torricelli fu meno interessato ai fondamenti della teoria degli indivisibili, di cui difese sempre il valore dimostrativo, e più alle applicazioni. Nel *De dimensione parabolae* presenta ventuno modi diversi di quadrare il settore di parabola, undici con la tecnica degli indivisibili e dieci con il metodo di esaustione. Nell'appendice sulla *cicloide*[4] applica il metodo degli indivisibili al calcolo dell'area dello spazio cicloidale e alla *rettificazione* delle spirali, cfr. Sezione 8.3; usa poi il metodo della composizione dei moti per il calcolo della tangente alla cicloide. Questo determinerà una polemica con Roberval sulla priorità di questi risultati. Mentre sui risultati relativi alla cicloide e sulla rettificabilità delle curve ritorneremo più avanti, qui vogliamo solo sottolineare come problemi e tecniche simili compaiono indipendentemente in contesti ambientali diversi, come se le cose fossero mature.

Sicuramente il risultato più noto e che ebbe una rilevanza sia matematica che filosofica fu quello del *solido acuto iperbolico* illimitato ma di volume finito. Consideriamo l'iperboloide infinito, cioè il solido che si ottiene facendo ruotare il ramo positivo dell'iperbole $xy = 1$, e più precisamente la parte di solido di rotazione che sta al di sopra di un piano $y = \text{cost} > 0$. Torricelli dimostra con il metodo degli indivisibili e con il metodo di esaustione che il volume di questo solido infinito è finito. In realtà già Oresme (1323-1382) aveva considerato figure piane non limitate di area finita, ma, probabilmente nessuno se ne ricordava più. In ogni caso, il risultato di Torricelli suscitò enorme sorpresa e, soprattutto, un vasto dibattito nei circoli culturali europei sul senso e sulle capacità di intendere l'infinito: in fondo, il solido iperbolico di Torricelli aveva alcuni aspetti dell'infinito *attuale* e necessitava di un superamento della nozione di figura come oggetto limitato da tutte le parti.

L'opera di Torricelli sul moto si pone sulla scia di quella di Galilei. Tra i vari teoremi sul moto dei proiettili provati da Torricelli ricordiamo il seguente: se si lanciano proiettili in qualunque direzione e con diversa elevazione, ma sempre con la stessa velocità iniziale v_0, le parabole da essi descritte sono tutte tangenti a un medesimo paraboloide che in un piano dà la cosiddetta *parabola di sicurezza*.

Il seguente principio, noto come

PRINCIPIO DI PASCAL: *La pressione dell'aria e di qualsiasi altro fluido si esercita in tutte le direzioni.*

[4] Ritorneremo in più occasioni sulla cicloide, o isocrona di Huygens, una curva che ha accompagnato gli sviluppi del calcolo e del calcolo delle variazioni per molti decenni.

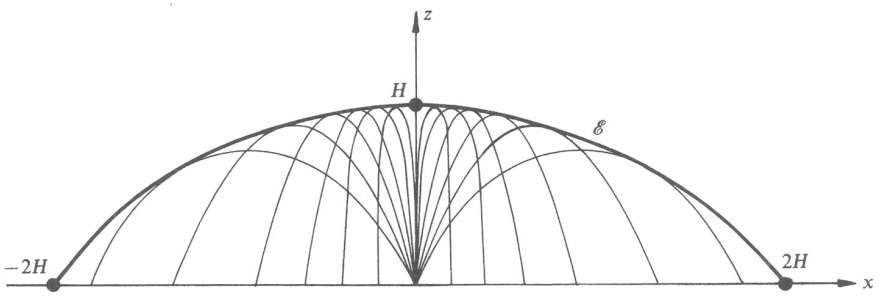


FIGURA 10. Parabola di sicurezza; $H := \frac{v_0^2}{2g}$, dove v_0 è la velocità iniziale di tiro e g la costante di gravità.

è dovuto a Torricelli che così lo illustra:

> Fu una volta un filosofo che, vedendo la cannella messa alla botte da un suo servitore, lo bravò con dire che il vino non sarebbe mai venuto, perché natura dei gravi è di premere in giù e non horizontalmente e dalle bande, ma il servitore fece toccarli con mano che, se bene i liquidi gravitano per natura in giù, in ogni modo spingono e schizzano per tutti i versi anco all'insù, purché trovino luoghi dove arrivare, cioè luoghi che resistono con forza minore della forza di essi liquidi.

Egli enuncia anche, quella che sarà nota come

LEGGE DI TORRICELLI: *La velocità di uscita di un liquido dal fondo di un recipiente bucato è proporzionale alla radice quadrata dell'altezza che separa il buco dall'altezza del liquido*[5].

Infine, nel *De motu* Torricelli enunciò un principio che esercitò un'influenza notevole nella meccanica e, particolarmente, con Huygens nella teoria dell'urto, spesso chiamato:

PRINCIPIO DI TORRICELLI: *Due corpi pesanti collegati fra loro non possono cominciare a muoversi con le proprie forze a meno che il loro comune centro di gravità non si abbassi*.

[5] Vale a dire, la velocità di uscita è uguale a quella che acquisterebbe una goccia d'acqua in caduta libera da un'altezza uguale alla distanza tra il buco e il livello dell'acqua. A partire dal 1668 presso l'Accademia Reale delle Scienze di Parigi si svolgeranno molti esperimenti per verificare questa legge, come pure molti dei risultati descritti nel *Della misura delle acque* di Benedetto Castelli. Mentre a partire dal 1675 verranno eseguiti molti esperimenti di balistica sulla base della teoria di Galileo e Torricelli. Si veda [15]. Questa legge può essere ottenuta come conseguenza della *legge di Bernoulli*.

Parlando di Torricelli non possiamo non accennare brevemente dell'esperimento dell'*argento vivo* realizzato probabilmente da Vincenzo Viviani su indicazioni dello stesso Torricelli[6] e all'invenzione del barometro. Per la rinascita del pensiero scientifico questo esperimento ebbe vari aspetti importanti: con la pressione atmosferica che esso implicava unificava i fenomeni idrostatici e aerostatici, metteva fuori dal contesto scientifico la dottrina dell'*horror vacui*, costringeva a sperimentare per confrontarsi con il vuoto. Il dibattito coinvolse Mersenne, i Pascal (padre e figlio), Cartesio, Roberval, Huygens e Otto von Guericke tra gli altri. Esperimenti furono eseguiti dal cognato di Pascal Florin Périer, da von Guericke e presso l'Accademia del Cimento che da lì a poco avrebbe chiuso. A von Guericke si deve l'invenzione della pompa pneumatica, che è, assieme al telescopio, al microscopio e all'orologio a pendolo, una delle grandi invenzioni del Seicento.

7.4. *Verso metodi sempre più numerici*

PIETRO MENGOLI (1626-1686), studente e successore a Bologna di Cavalieri, continua nello studio degli indivisibili e delle aree sottostanti le iperboli e comincia a servirsi delle *serie*. Nelle *Novae quadraturae arithmeticae, seu de additione fractionum*, Bologna 1650, Mengoli distingue tra serie convergenti e non convergenti: la *serie geometrica* con ragione minore di uno converge, infatti se $0 < a < 1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a},$$

poiché

$$\sum_{n=0}^{k} a^n = \frac{1-a^{k+1}}{1-a},$$

mentre, se $a > 1$ la serie diverge; la *serie armonica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

6 Per un resoconto più dettagliato il lettore può vedere [93].

diverge. Questo si vede facilmente, osservando che

$$\begin{array}{rcll} 1 & = & 1 & \leq 1 \\ \frac{1}{2} & = & \frac{2}{4} & < \frac{1}{2}+\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & = & \frac{4}{8} & < \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & = & \frac{8}{16} & < \frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots++\frac{1}{14}+\frac{1}{15} \\ \ldots & & & \\ \frac{1}{2} & = & \frac{2^n}{2^{n+1}} & < \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}\frac{1}{k}, \end{array}$$

e, sommando le diseguaglianze,

$$\frac{n}{2} \leq \sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k} \qquad \forall n,$$

quindi $\sum_{k=1}^{2^n-1} \to \infty$ per $n \to \infty$. Infine Mengoli scoprì anche che

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots = \ln 2.$$

Questa si ottiene oggi 'integrando' tra 0 e 1 l'uguaglianza

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

Non sembra chiaro quale sia stata l'influenza di Mengoli ai suoi tempi, sembra che le sue opere avessero una certa circolazione, oggi il suo nome è legato alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

che, appunto, si chiama *serie di Mengoli*. Essa è un caso speciale, $a_n = 1/n$, delle cosiddette *serie telescopiche*, cioè serie della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}),$$

con $\{a_n\}$ decrescente a zero, che chiaramente hanno somma a_1. Come vedremo le serie telescopiche furono uno degli strumenti con cui Leibniz arrivò al Calcolo, cfr. [55].

GILLES PERSONNE DE ROBERVAL (1602-1675) a partire dal 1634 occupa la cattedra di Pietro Ramo al *Collège Royal* a Parigi. Questa cattedra veniva assegnata ogni tre anni tramite un esame in cui i problemi venivano proposti dal docente in carica. A questa procedura è probabilmente da attribuire la riservatezza sui suoi metodi e il fatto che le sue opere apparvero solo dopo la sua morte. È quindi difficile stabilire quando Roberval compose il suo *Traité des*

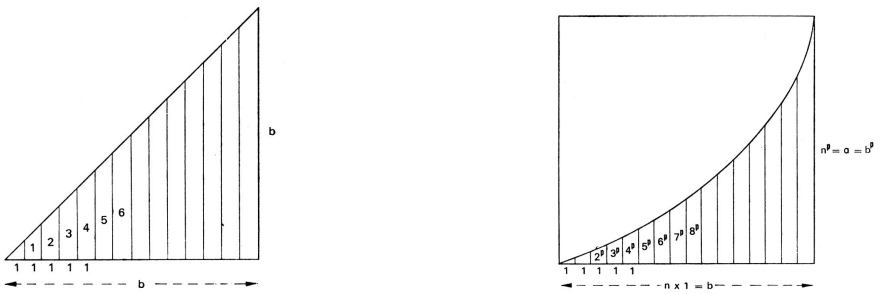


FIGURA 11. Quadratura del triangolo e delle parabole.

indivisibles[7]. Egli non ammise nessun'altra influenza tranne quella di Archimede, anche se nei suoi lavori si può vedere qualche influenza di Keplero e di Luca Valerio e, dopo la sua morte, fu trovato nella sua biblioteca il trattato di Cavalieri; nella sua ultima lettera a Torricelli, comunque, egli ammette che Cavalieri è il primo ad aver pubblicato un trattato sulla teoria degli indivisibili e sostiene che la sua teoria è diversa da quella di Cavalieri. Vediamo ora qualche esempio.

7.1. *Il triangolo e la parabola*. Consideriamo, si veda la Figura 11, le *linee* di un triangolo ortogonali alla base b e egualmente distanziate, in modo che $n = 1/b$. In realtà non è mai chiaro se Roberval pensi in termini di linee o di rettangoli, cosa per lui irrilevante perché l'ampiezza della suddivisione è sempre presa uguale a 1. La cosa è ancora più oscura perché l'argomento è sempre di tipo discorsivo; egli sembra usare in contesti diversi $n \times 1 = b$ e $n = 1/b$. Così egli dice che

$$\text{somma delle linee} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2},$$

e, poiché n è piccolo rispetto a n^2 per n grande, conclude che

$$\text{area del triangolo} = \text{somma delle linee} = \frac{n^2}{2} = \frac{b^2}{2}.$$

In modo simile per la parabola $y/a = (x/b)^2$ egli afferma che $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n^3/3 + n^2/2 + n/6$, quindi

$$\text{somma delle linee} = \frac{n^3}{3},$$

[7] Il lettore può vedere [98]

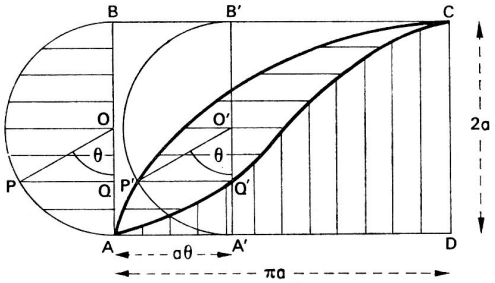


FIGURA 12. Il calcolo dello spazio cicloideo.

ed, essendo $n \times 1 = b$,

$$\text{area della sezione di parabola} = \frac{b^3}{3}.$$

In generale, per le parabole $y/a = (x/b)^p$ Roberval afferma che

$$\text{area della sezione} = \frac{ab}{p+1}$$

poiché

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{i=1}^{n} i^p.$$

7.2. *La cicloide*. A quanto pare, alla fine del Cinquecento Galileo era stato il primo ad occuparsi della *cicloide* e del calcolo dell'area dello *spazio cicloidale*, cioè della figura compresa tra un suo arco completo e la retta fissa. In una lettera a Cavalieri del 24 febbraio 1640 Galilei scriveva:

> Quella linea arcuata sono più di cinquant'anni, che mi venne in mente il descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosizzima per adattarla agli archi di un ponte. Feci sopra di essa, e sopra lo spazio da lei, e dalla sua corda compreso, diversi tentativi per dimostrarne qualche passione, e parvemi da principio, che tale spazio potesse esser triplo del cerchio che lo descrive; ma non fu così, benché la differenza non sia molta[8].

In realtà, Galilei aveva visto giusto, e grande fu l'entusiasmo quando Torricelli ne pubblicò la dimostrazione. Come abbiamo già detto questo fu l'inizio di una lunga polemica con Roberval, e tra italiani e francesi.

8 Citato in [26] e [90].

Già prima di Torricelli Mersenne[9] si era interessato alla cicloide. Probabilmente prima di Torricelli, Roberval aveva determinato l'area dello spazio cicloidale; inoltre, probabilmente provocati dal continuo riferimento di Mersenne al successo di Roberval, nel 1638, sia Fermat che Cartesio[10] avevano dato loro contributi ritrovando il risultato di Roberval. Più tardi sia Blaise Pascal che Huygens ritorneranno sulla cicloide. Il metodo usato da tutti questi autori per determinare lo spazio cicloidale è quello degli indivisibili. Noi non entreremo nella discussione delle diverse varianti, ci limiteremo a trascrivere in forma, diciamo, più moderna la dimostrazione di Roberval, cfr. [10] pp. 156-157.

Facciamo percorrere al semicerchio APB di raggio a e centro O, cfr. Figura 12, la distanza $OO'(=AA')$ in direzione ortogonale al diametro AB. La semicorda PQ (parallela a OO') si sposta nella posizione $P'Q'$, dove $PP' = QQ' = AA'(= a\theta)$. $AP'C$ è l'*arco cicloidale generato dal cerchio di centro O e raggio a*,

$$x = a\theta - a\sin\theta, \quad y = a - a\cos\theta,$$

e Q' sta su un'altra curva,

$$x = a\theta, \quad y = a - a\cos\theta,$$

chiamata da Roberval la *compagna* della cicloide. Poiché $P'Q' = PQ$, e questo è vero per tutte tali linee, lo spazio $AP'CQ'A$ tra le due curve è uguale al semicerchio APB. D'altra parte per simmetria la compagna della cicloide divide a metà lo spazio $ABCD$, che è due volte l'area del cerchio che rotola. Quindi metà dello spazio cicloidale è un cerchio più metà del cerchio che rotola, cioè lo spazio cicloidale è $3\pi a^2$.

Nel 1644 Mersenne rende noto un metodo per costruire le tangenti alla cicloide, dovuto sempre a Roberval; sempre nel 1644 Torricelli pubblica un metodo analogo nella sua *Opera geometrica*; ma anche Cartesio sviluppò un metodo simile. Il metodo si applica a curve descritte in modo *cinematico*, e il principio che ne sta alla base è che la direzione di un punto che descrive una linea curva è

[9] L'importanza di MARIN MERSENNE (1588-1648), oltre che nella sua opera filosofica, risiede nella sua instancabile opera di promozione del dibattito scientifico e nel rilevante ruolo svolto nell'organizzare la cultura europea del tempo: il suo biografo Hilarion de Coste (si veda Hilarion de Coste, *La vie du R. P. Marin Mersenne, theologien, philosophe et mathematicien, de l'ordre des Peres Minims*, Paris 1649) dedica più di 15 pagine per elencare i principali visitatori che Mersenne riceveva nel suo convento; la corrispondenza di Mersenne occupa 17 volumi, e si contano più di 200 corrispondenti. Tra questi compaiono Cartesio, Gassendi, Hobbes, Fermat, Roberval, Etienne et Blaise Pascal, Constantin e Christiaan Huygens, Torricelli.

[10] Descartes, che non amava Roberval, come dice lui si sentì obbligato di "far vedere a quelli che fanno gran rumore che [la quadratura dello spazio cicloidale] è una cosa molto semplice".

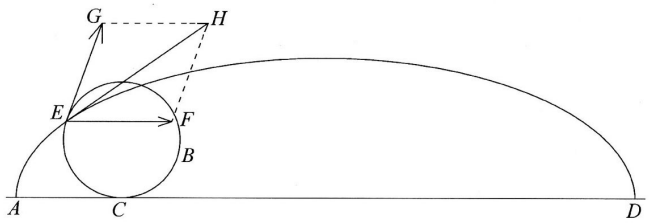


FIGURA 13. La costruzione cinematica delle tangenti.

la tangente alla linea curva in ogni posizione di quel punto. Da qui discende: se si esaminano i diversi movimenti che il punto che descrive la curva ha nel posto dove si vuole tracciare la tangente, basterà comporre tutti questi movimenti in uno solo, tracciare la linea della direzione del movimento composto per avere la tangente alla curva. La cosa è ovviamente semplice per composizioni di moti uniformi (un po' meno per moti non uniformi), ma molte curve si ottengono in questo modo, in particolare le curve degli antichi e la cicloide: la cicloide può esser vista come generata dal moto di una circonferenza che ruota attorno al suo centro (uniformemente) mentre il suo centro si muove di moto uniforme, moto sincronizzato in modo che quando la circonferenza ha compiuto un giro essa si è mossa per un segmento AD uguale alla sua lunghezza, cfr. Figura 13.

JOHN WALLIS. A metà del Seicento i metodi algebrici sono una realtà. Una sorta di *aritmetica degli infiniti* sviene sviluppata da JOHN WALLIS (1616-1703) nel trattato *Arithmetica infinitorum*, 1656, utile tra l'altro alle quadrature. Vediamo qualche esempio.

Con riferimento alla Figura 14, dividiamo l'altezza di un triangolo in n parti uguali e consideriamo il trapezoide circoscritto associato. L'area del k-simo rettangolino è chiaramente $\frac{a}{n}\frac{k}{n}b$, quindi l'area del trapezoide è $ab\sum_1^n \frac{k}{n^2}$, che a parte il fattore di proporzionalità ab possiamo scrivere come

$$\frac{1+\ldots+n}{n+\ldots+n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$

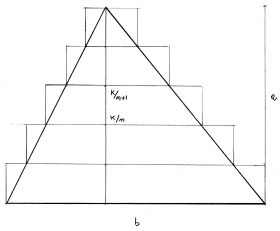


FIGURA 14. Area del triangolo.

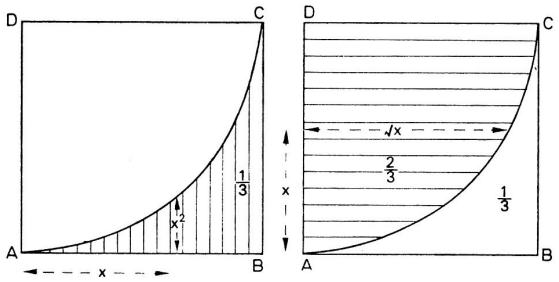


FIGURA 15. Integrale di x^2 e $\sqrt{x}$.

Come ovvio, l'area del trapezoide si avvicina sempre più all'area del triangolo quanto più n diventa grande.

Wallis osserva che

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2},\quad \frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{1}{2},\quad \frac{0+1+2+3}{3+3+3}=\frac{1}{2},$$

e in generale

$$\frac{0+1+2+3+\ldots+n}{n+n+n+n+\ldots+n}=\frac{n(n+1)}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}.$$

Poiché il triangolo è costituito da infinite linee la cui lunghezza è in una progressione aritmetica in cui il massimo è la base, allora (cfr. [99], I, pp. 365-366.)

$$\frac{\text{area del triangolo}}{\text{area del parallelogramma}}=\frac{1}{2}.$$

In modo simile poiché un conoide è fatto da infiniti piani la cui area è in progressione aritmetica, Wallis dice che

$$\frac{\text{volume del conoide}}{\text{volume del cilindro circoscritto}}=\frac{1}{2}.$$

Per la somma dei quadrati, Wallis osserva

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6},\quad \frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

e, in generale,

$$\frac{0+1+4+\ldots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}.$$

Da questo determina quindi l'area del settore di parabola e di spirale, e i volumi dei coni e delle piramidi.

Per la somma delle potenze intere, mostra che

$$\frac{0^p+1^p+3^p+\ldots+n^p}{n^p+n^p+n^p+\ldots+n^p}\simeq\frac{1}{p}. \tag{7.2}$$

Inoltre osserva con riferimento alla Figura 15 che

$$\frac{\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n}+\ldots+\sqrt{n}} \simeq \frac{2}{3} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}},$$

e, usando un 'principio di interpolazione', conclude che la (7.2) vale per ogni p positivo, negativo o frazionario.

Con metodi simili che non discuteremo (usando l'induzione incompleta e l'interpolazione) Wallis cercò anche di quadrare il cerchio, pervenendo ad una famosa formula:

FORMULA DI WALLIS: *Vale*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1},$$

o equivalentemente

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

Queste formule si dimostrano oggi calcolando gli integrali $\int_0^{\pi/2} \sin^m x dx$, confronta, ad esempio, [48].

Infine, osserviamo che nell'*Arithmetica* di Wallis raramente compare la parola 'dimostrare': il suo scopo principale era trovare nuovi risultati e mostrare la potenza del suo metodo, che usò liberamente anche nella sua *Mechanica*, 1669, e nel *De calculo centri gravitatis*, dove cerca anche di stabilire notazioni per un calcolo integrale.

Molto più che i suoi predecessori Wallis cercò di liberare l'algebra dalla rappresentazione geometrica con il suo *Treatise on Algebra*, 1685, e con l'ampliata riedizione latina del 1693. Egli deriva tutti i risultati del libro V di Euclide in forma algebrica, discute le operazioni sui numeri negativi, dà la descrizione completa dei quattro quadranti del riferimento cartesiano, discute i numeri immaginari, e le soluzioni delle equazioni algebriche, e presenta anche un quadro dello sviluppo storico. Alla fine del Seicento l'algebra poteva reggersi sulle sue gambe, anche se mancavano basi sicure su cui appoggiarla; ciò nondimeno, i matematici proseguirono fiduciosi ritenendo con Wallis che i procedimenti algebrici non erano meno legittimi di quelli geometrici.

Ricordiamo infine che come appendice alla seconda edizione dell'*Algebra* Wallis pubblica il *De Postulato quinto* dove mostra l'equivalenza fra il postulato euclideo e l'esistenza di triangoli simili non congruenti[11], iniziando in qualche

[11] Questo ad esempio distingue la geometria del piano euclideo dalla geometria sferica: sulla sfera i triangoli simili sono congruenti.

senso i nuovi studi che porteranno alle geometrie non euclidee e alla concezione di spazi geometrici diversi. Ma questo è un percorso che merita, come abbiamo già detto, una trattazione separata; per questo noi ci fermiamo qui.

CAPITOLO 8

Verso un approccio analitico: la nuova nozione di curva

Nella seconda metà del Seicento si porta a compimento quella che è stata chiamata la *rivoluzione scientifica* che, iniziata nel Cinquecento, darà i suoi frutti nei due secoli successivi. Da una scienza fortemente dipendente dalla tradizione aristotelico-scolastica si passa alla formazione della scienza moderna, la quale progressivamente afferma la propria autonomia dalla metafisica e dalla teologia, indaga i rapporti tra le cose, esprimendoli matematicamente pur poggiandosi su esperimenti reali o virtuali. Protagonisti di questo sviluppo sono, per fare pochi nomi, Galilei, Cartesio, Fermat, Huygens e, soprattutto, Newton e Leibniz; dei primi parleremo in questo capitolo, degli inventori del *calcolo*, Newton e Leibniz, parleremo in [55].

Ovviamente quanto detto è schematico e, in molti punti (localmente nel tempo e nello spazio), non del tutto preciso. Il Seicento è un periodo di continue guerre di religione, della peste, dei processi dell'Inquisizione, della caccia alle streghe, dell'intolleranza protestante, della tratta degli schiavi. Il terrore era ritenuto dalle autorità politico e religiose indispensabile per tenere a freno gli strati inferiori della popolazione, considerati dalla cultura e dalla mentalità corrente depositari dei vizi più orrendi e permanente pericolo per l'ordine e la stabilità sociale. La tortura, tipica dei processi alle streghe, fu adottata come normale pratica giudiziaria sia nella fase dell'indagine che nel sistema delle punizioni. Occorreranno secoli perché questo scompaia, almeno formalmente e non del tutto, visto che riflessi ancora persistono. L'aristotelismo e la scolastica sopravvivono, ma sopravvive anche la magia e sembra costante, oltre che l'entusiasmo, anche lo sbigottimento e la paura per il nuovo che incombe. Il Seicento fu un periodo di grande tensione tra la spinta al nuovo e la volontà di contenere il rinnovamento evitando sconvolgimenti radicali. La schematizzazione che abbiamo presentato sopra può sembrare corrispondere ad una visione *positivista* (discutibile, contestabile e, in effetti, contestata) di un progresso *lineare* delle scienze e della società, ma, in una visione macroscopica dell'evoluzione delle idee e della società, essa conserva una sua validità.

8.1. *La geometria cartesiana e il problema delle tangenti*

RENÉ DESCARTES, latinizzato in CARTESIO (1596-1650), è considerato il fondatore della filosofia moderna e, dal nostro punto di vista, i suoi contributi matematici, particolarmente la connessione da lui posta tra geometria e algebra, furono determinanti per i più maturi sviluppi della matematica. Per uno studio dell'opera di Cartesio, particolarmente in prospettiva scientifica rimandiamo il lettore interessato a [56] [63] [44] [101] [77], e per una breve introduzione a [45]; una traduzione italiana di tutte le opere di Cartesio si trova in [31] [32] [30].

Pur conservando molto di scolastico, Cartesio sposta la riflessione filosofica dall'*essere* al *pensare* e offre una nuova visione del mondo naturale, un mondo di *materia* che possiede poche fondamentali proprietà che interagiscono tramite poche leggi universali; questo mondo include, nell'uomo, una mente pensante immateriale connessa con il cervello; l'"io pensante" diventa così centrale nella costruzione filosofica. In questo processo Cartesio afferma di essere guidato da un *metodo*, chiaramente modellato sul metodo dell'analisi e della sintesi della geometria, e dall'assunzione del *dubbio* come mezzo di conoscenza, anche metafisica. Infatti, Cartesio è pur sempre interessato alla teoria dei principi primi di ogni cosa. L'io pensante, tramite il metodo e il costante ricorso al dubbio perviene alla conoscenza di questi principi.

L'edificio filosofico da lui sviluppato si offre ai contemporanei in sostituzione del vecchio. Criticato o accettato, nelle sue parti o globalmente, le sue riflessioni entrano di forza nella discussione filosofica fino ai giorni nostri. Ancor più, forse, perché egli evita le disquisizioni dotte e si rivolge sempre a tutti gli uomini intelligenti, piuttosto che agli alunni, con una lingua, che in prevalenza è quella francese, letterariamente pregevole.

Consapevole che molte delle sue teorie divergevano dal dettato delle Scritture, a differenza di Galilei è attento a presentarle come ipotesi, che servono meglio a capire la natura di molti fenomeni fisici, anche se possano essere in sé false, ed è esasperatamente attento alle possibili opinioni dei suoi antichi maestri gesuiti.

Gli elementi fondanti della filosofia di Cartesio sono formulate nel *Discorso sul Metodo per un retto uso della propria ragione e per la ricerca della verità nelle scienze* di cui la *Geometria*, 1637, è una delle aggiunte esemplificative. Noi ci limitiamo a fare solo alcune osservazioni sugli aspetti più rilevanti della *Geometrie*, che è il frutto dell'applicazione dell'algebra alla geometria (che ci permette di usare dei calcoli algebrici per trattare la geometria), è l'esemplificazione di questa matematica universale e rappresenta uno dei grandi fatti del secolo, contribuendo in modo determinante ai cambiamenti che verranno nella

storia della matematica. Malgrado le molte semplificazioni nel sistema di notazioni algebriche, in uso ancor oggi, apportate da Cartesio, la *Geometria* non è un libro di facile lettura. Questo, probabilmente, anche per scelta di Cartesio, che lascia spesso il compito di completare costruzioni e dimostrazioni ai lettori, come dice lui, perché non vuole lasciar loro l'opportunità di dire che egli non aveva scritto niente che loro non conoscessero già e non vuole privarli del piacere di ritrovare da soli i risultati.

La *Geometria* è divisa in tre libri. Il primo libro inizia illustrando i legami tra lunghezze e numeri e tra operazioni geometriche e calcoli aritmetici, liberandosi dall'idea degli antichi che i prodotti di lunghezze si debbano rappresentare con superfici. Si può parlare di algebra che applicata alla geometria permette di risolvere problemi di costruzione (con cerchi e rette), ma siamo ancora un po' lontani da quanto chiamiamo oggi geometria analitica. Cartesio passa poi a considerare problemi indeterminati in cui le lunghezze incognite y si scrivono in termini di grandezze arbitrarie x; per ogni fissato x la y verificherà una equazione (polinomiale) $F(x,y)=0$ che ci permette di costruire la 'curva' delle soluzioni: se l'equazione è di primo o secondo grado, questa può essere costruita usando cerchi e rette. Alla fine del primo libro e nel secondo, intitolato *De la nature des lignes courbes*, Cartesio si serve del *problema di Pappo* per illustrare ciò che accade quando un problema conduce ad una equazione in due incognite. Ricordiamolo, nella formulazione di Cartesio:

> Siano AB, BD, EF, GH, ecc. delle linee date; e si debba trovare un punto, come C, dal quale tirando delle rette sulle date, come CB, CD, CF, e CH, ad angoli assegnati CBA, CDA, CFE, CHG, ecc., ciò che si ottiene dal prodotto di una parte di queste linee sia uguale a quello che si ottiene dal prodotto delle altre.

Semplificando e scostandoci dalla trattazione di Cartesio (si veda [27] VI, 382-385 o [28]), supponiamo di avere un numero pari $2n$ di rette date, e che si cerchi il luogo dei punti C tali che il prodotto delle distanze da C dalle prime n rette sia uguale a quello delle distanze di C dalle altre.

Ricordando che in coordinate (X,Y) cartesiane ortogonali (Cartesio non usa coordinate cartesiane, sarà probabilmente Wallis ad usarle per primo almeno in un'opera a stampa) ogni retta si rappresenta *in forma normale* come

$$aX+bY+c=0 \quad con \quad a^2+b^2=1,$$

e che, in questo caso $|c|$ rappresenta la distanza delle retta dall'origine. Se (x,y) sono le coordinate del punto C e $a_iX+b_iY+c_i=0$ è l'equazione in forma normale della retta i-esima r_i, la distanza di C da r_i è data da $|a_ix+b_iy+c_i|$, quindi *il luogo dei punti* è dato dall'equazione in due variabili

$$\prod_{i=1}^{n}(a_ix+b_iy+c_i)=\pm\prod_{i=n+1}^{2n}(a_ix+b_iy+c_i), \tag{8.1}$$

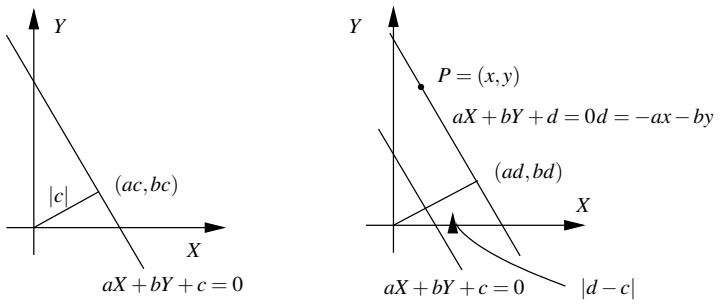


FIGURA 1. Se r ha equazione normalizzata $ax+by+c=0$, dove normalizzata vuol dire $a^2+b^2=1$, la distanza dall'origine di r è $|c|$. Pertanto la distanza dall'origine della retta r' parallela a r per $P=(x_0,y_0)$ è $|ax_0+by_0|$ e la distanza fra r e r' è $||ax_0+by_0|-|c||$.

dove l'ambiguità di segno deriva dal valore assoluto. Si tratta quindi di una equazione di grado n. In particolare, nel caso di quattro rette si trova un'equazione di secondo grado e la curva cercata è quindi una conica, come già sapeva Pappo.

Semplice, ma in questo c'è una piccola ma importante rivoluzione. Per i greci e, comunque, per i geometri subito prima di Cartesio, assegnare una curva significava darne la costruzione geometrica o meccanica; Cartesio sembra liberarsi del vincolo di costruibilità come criterio di esistenza, accettando come curve tutte quelle algebriche, che chiama geometriche, cioè che si scrivono come polinomi in due variabili eguagliati a zero. Ancor più, egli sembra pensare *una curva come la sua equazione* — su questo punto non sembra esserci accordo tra gli storici, si veda [19] [73] [59] [18] — in ogni caso, da lì a poco sempre più i matematici penseranno alle curve come equazioni a partire dalle quali studiarne le proprietà; in questo senso il problema di Pappo discusso sopra si può considerare risolto dalla (8.1). Cartesio distingue tra curve geometriche e curve meccaniche, nella terminologia di Leibniz che è anche la nostra, tra curve *algebriche* e *trascendenti*. Quindi Cartesio include tra le curve geometriche la concoide e la cissoide, ma esclude la spirale, la cicloide, la curva logaritmica, e così via, anche se lo stesso Cartesio e gli altri matematici continueranno a lavorare sulle curve trascendenti.

Il terzo libro ritorna allo studio di problemi di costruzione geometrica una volta formulati algebricamente, studia le equazioni algebriche e la costruzione geometrica delle loro radici come intersezione di curve.

Per la nostra storia sono particolarmente interessanti le pagine del secondo libro dedicate al suo metodo per la determinazione della *normale*, e quindi della *tangente*, ad una *generica* curva algebrica in un punto:

> credevo che avrei dato uno studio sufficiente delle curve quando avessi dato un metodo generale per tracciare una linea retta che formi un angolo retto in un punto dato della curva. Ed

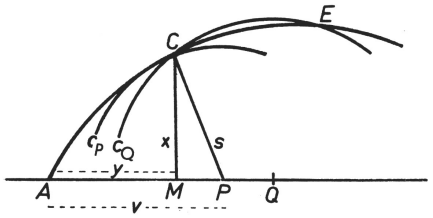


FIGURA 2. Il metodo di Cartesio per tracciare la normale ad una curva.

oso dire che questo è il problema non solo più utile e generale in geometria che io conosca, ma quello che io ho più desiderato risolvere.

Sia *ACE* una curva data di cui si voglia tracciare la normale in *C*, cfr. Figura 2. Sia *CP* la soluzione del problema, e poniamo $CM = x$, $AM = y$, $AP = v$ e $CP = s$. Per comodità supponiamo che la curva abbia la forma $x = f(y)$ [1]. Cartesio considera il cerchio c_P con centro *P* passante per *C*, che ha equazione

$$x^2 + (v-y)^2 = s^2.$$

Questo cerchio toccherà la curva in *C* senza tagliarla, mentre ogni altro cerchio con centro in $Q \neq P$ per *C*,

$$x^2 + (v_Q - y)^2 = s_Q^2,$$

taglierà la curva in un altro punto oltre che in *C*. Questo significa che l'equazione

$$(f(y))^2 + (v_Q - y)^2 - s_Q^2 = 0$$

ha due radici distinte. Questa analisi porta Cartesio a concludere che *CP* è la normale alla curva in *C* quando *P*, o *v*, è tale che l'equazione nell'incognita *y*

$$(f(y))^2 + (v-y)^2 - s^2 = 0$$

ha due radici y_0 coincidenti. Se la curva è di grado *m*, questa equazione è di grado $2m$, ed è della forma $(y-y_0)^2 Q(y)$, dove $Q(y)$ è un polinomio di grado $2(m-1)$.

Così il problema delle tangenti è risolto, almeno in linea di principio, per ogni curva algebrica; per quelle trascendenti serviranno invece metodi *ad hoc*. Ma in pratica le cose non sono così semplici, come il lettore può verificare nel semplice caso $x = py^2$. Semplificazioni al metodo di Cartesio, rispettivamente ad opera di Florimond De Beaune (1601-1652) e di Johann Hudde (1628-1704) (che dà una forma algoritmica alla procedura), compaiono nella prima e nella seconda

[1] Ma questo non è quello che fa Cartesio: egli considera solo polinomi per cui $f^2(y)$ è un polinomio in *y*, o y^2 è un polinomio in *x*.

edizione latina della *Geometria* a cura rispettivamente di De Beaune e di Frans van Schooten (1615-1660) (con contributi di Johan de Witt (1625-1672), Hudde, Hendrik van Heuraet (1633-1660), Erasmus Bartholin (1625-1698) e dello stesso von Schooten), ma noi ci fermiamo qui. In particolare, nell'edizione del 1659-1661 della *Geometrie* compaiono gli *Elementa curvarum* di de Witt che, a buona ragione, possono essere considerati, assieme al *De sectionibus conicis*, 1655, di Wallis, come il primo trattato a stampa di geometria analitica.

8.2. *Il metodo di adequazione di Fermat*

PIERRE FERMAT (1601-1665) contemporaneamente a Descartes applica l'algebra alla geometria e condivide l'invenzione della geometria delle coordinate o geometria analitica, immagina un metodo per trattare problemi di minimo e per determinare le tangenti alle curve, studia varie curve, come la spirale (poi chiamata di Fermat) e la cicloide, la quadratura di figure piane e la lunghezza di varie curve, discute con Pascal di fatti elementari di probabilità, per la prima volta scopre una forma di ordine nel disordine dei numeri primi, formulando vari risultati in *teoria dei numeri*, e introduce un importante *principio di minimo* in ottica. Apparentemente non ama scrivere in modo dettagliato i risultati che ottiene, ed è un vero peccato perché, quando lo fa, la sua scrittura è semplice e chiara. Preferisce sfidare i contemporanei a risolvere i problemi che lui ha già risolto. Per questo, al di là delle polemiche (famosa quella prima con Descartes e poi con i cartesiani), forse non fu particolarmente amato, ma sicuramente fu molto apprezzato. I suoi contributi furono in parte pubblicati postumi dal figlio Samuel nel 1670 e nel 1679. Le *Oeuvres de Fermat* [39] vengono pubblicate all'inizio del ventesimo secolo.

Diamo una descrizione sommaria d'insieme della sua opera, per maggiori informazioni il lettore può vedere [75]. Già nel 1629 a Bordeaux Fermat inizia le sue ricerche matematiche ricostruendo i *Plane loci* (Luoghi piani) di Apollonio sulla base di allusioni contenute nella *Collezione matematica* di Pappo; dello stesso periodo o di poco posteriore è l'uso da parte di Fermat dell'algebra nello studio della geometria, che troverà una presentazione nel breve trattato *Ad locos planos et solidos isagoge* (Introduzione ai luoghi piani e solidi). Quest'opera circolerà intorno agli anni 1637 negli ambienti scientifici parigini, assieme al *Methodus ad disquirendam maximam et minima*, ma apparirà solo postuma, di conseguenza non ebbe particolare influenza; per questo si tende forse ad attribuire al solo Descartes l'invenzione del metodo delle coordinate. L'*Isagoge* comincia con questo principio:

> Quando in una equazione finale si trovano due quantità incognite noi abbiamo un luogo [geometrico], dove l'estremità di una di esse descrive una linea, retta o curva.

Poi Fermat, che usa coordinate ortogonali, dà la rappresentazione grafica della retta, mostra successivamente che l'equazione $xy = k^2$ rappresenta un'iperbole (qui usiamo le notazioni moderne, Fermat usava le notazioni di Viète ancora piuttosto involute), che un'equazione della forma $xy + a^2 = bx + cy$ è riducibile ad una della forma $xy = k^2$, mediante una traslazione degli assi coordinati. Mostra anche che l'equazione $a^2 \pm x^2 = by$, rappresenta una parabola, che l'equazione $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$ rappresenta un cerchio, che $a^2 - x^2 = ky^2$ rappresenta un'ellisse e che $a^2 + x^2 = ky^2$ rappresenta un'iperbole. Infine, ad equazioni di secondo grado più generali Fermat applica una rotazione degli assi per ridurle alle forma precedenti.

Nel 1636 Pierre Carcavy, collega di Fermat a Toulouse e anche lui amante delle matematiche, si trasferisce a Parigi e parla dei risultati di Fermat a Mersenne. Inizia una lunga corrispondenza con Mersenne e, tramite Mersenne, con Roberval e Cartesio. Fin dalla prima lettera Fermat chiede a Mersenne di sfidare i matematici parigini a risolvere due problemi di massimo che egli aveva già risolto. In risposta Roberval e Mersenne chiedono a Fermat di divulgare il suo metodo. Come abbiamo già detto, Fermat invia, assieme al testo di Apollonio da lui ricostruito e all'*Introduzione ai luoghi piani e solidi*, il *Metodo per determinare i massimi e i minimi e le tangenti alle linee curve* che contiene il suo metodo dell'*adequazione*, appunto per trovare massimi e minimi e le tangenti alle curve. Parti del *Metodo* furono pubblicate nel 1642 da Pierre Herigone nel quinto volume del suo *Supplementum Cursus Mathematici*. Il testo completo fu pubblicato postumo dal figlio Samuel nel 1679.

8.1. *Il metodo dell'adequazione*. Il *Metodo per la ricerca dei massimi e minimi*, [39] III, pp. 121-123, comincia così:

> Tutta la teoria della ricerca dei massimi e minimi suppone la posizione di due incognite e la sola regola che segue:
> Sia a una incognita qualunque della questione (che sia piana o solida a seconda di quel che conviene all'enunciato). Si esprimerà la quantità massima o minima in a tramite dei termini che potranno essere di grado qualunque. Quindi si sostituirà $a + e$ all'incognita iniziale a, e si esprimerà così la quantità massima con termini in cui entreranno a e b con gradi qualunque. Si *adequerà* [adaequentur], per parlare come Diofanto, le due espressioni della quantità massima o minima, e si semplificheranno i termini comuni dall'una e dall'altra parte. Fatto questo, si troverà che tutti i termini, dall'una e dall'altra parte, saranno moltiplicati per e o per una potenza di e. Si dividerà tutti i termini per e, o per una potenza di e di un grado più elevato, in modo che in uno almeno dei termini di uno qualunque dei membri e sparisca. Quindi si elimineranno tutti i termini in cui compare ancora e o una delle sue potenze, e si eguaglierà gli altri, oppure, se in uno dei membri non resta niente, si eguaglierà, il che è lo stesso, i termini positivi a quelli negativi. La risoluzione di quest'ultima equazione darà il valore di a, che porterà al massimo o al minimo riprendendo l'espressione iniziale.
> Ecco un esempio: *Si voglia dividere la retta AC in E in modo che* $AE \times EC$ *sia massimo*.
> Poniamo $AC = b$; sia a uno dei segmenti, l'altro sia $b - a$, e il prodotto di cui si voglia trovare il massimo: $ba - a^2$. Sia $a + e$ il primo segmento di b, il secondo sarà $b - a - e$, e il prodotto dei segmenti: $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$; adequando a $ba - a^2$ e sopprimendo i termini comuni

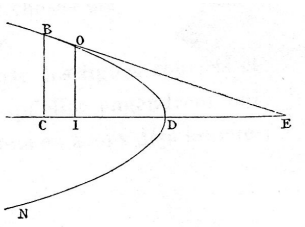


FIGURA 3. Tangente alla parabola.

troviamo: $be \approx 2ae + e^2$; dividendo tutti i termini per e: $b \approx 2a - e$, e eliminando e: $b = 2a$.
Per risolvere il problema bisogna prendere la metà di b.
È impossibile dare un metodo più generale.

Da dove trae origine questo metodo? Scrive Fermat, [39], III, p. 127, citando Pappo:

se uno propone una questione su delle grandezze date, che sia soddisfatta in generale per due punti, per il massimo o il minimo non ci sarà che un solo punto che la soddisfa. È per questo che Pappo dice minimo e singolare (vale a dire unico) il più piccolo rapporto tra tutti quelli che possono essere proposti per la questione.

Sia allora $z < b^2/4$ e consideriamo l'equazione in x

$$x(b-x) = z,$$

che ha due radici. Chiamiamole a e e, allora

$$a(b-a) = e(b-e)$$

o

$$ba - be = a^2 - e^2.$$

Dividendo per $a-e$, vediamo che $b = a+e$. Quanto più z diventa $b^2/4$, tanto più a sarà uguale a e, e $b = 2a$, che è l'unica soluzione che porta al massimo del prodotto. Sembra allora che Fermat scelga di chiamare a e $a+e$ le due radici e infine adequare le due radici scegliendo $e = 0$.

Il metodo continua quindi con

DELLE TANGENTI DELLE LINEE CURVE

Riportiamo al metodo precedente la ricerca delle tangenti a delle curve qualunque in punti dati.
Sia data, per esempio, la parabola *BDN*, cfr. Figura 3, di vertice *D*, diametro *DC*; sia dato su di essa un punto *B*, per cui si vuol tracciare la tangente, che incontrerà il diametro in *E*.
Preso un punto *O* un punto qualunque, tiriamo da *O* l'ordinata *OI* e da *B* l'ordinata *BC*; si avrà: $CD/DI > BC^2/OI^2$, poiché *O* è esterno alla parabola. Ma $BC^2/OI^2 = CE^2/IE^2$, per la similitudine dei triangoli. Dunque $CD/DI > CE^2/IE^2$. Ora il punto *B* è dato, dunque *BC*, dunque *C*, dunque *CD* sono dati. Sia allora $CD = d$, dato. Poniamo $CE = e$; si avrà

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}.$$

Moltiplicando i medi e gli estremi:

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Adequiamo, come nel metodo precedente; si avrà eliminando i termini comuni:

$$de^2 - 2dae \approx -a^2e,$$

o, il che è lo stesso:

$$de^2 + a^2e \approx 2dae.$$

Dividiamo per e:

$$de + a^2 \approx 2da.$$

Eliminando de, resta $a^2 = 2da$, cioè $a = 2d$. Proviamo quindi che CE è doppio di CD, cosa conforme alla verità.

Questo metodo non sbaglia mai e può essere applicato a numerosi problemi molto belli; usandolo abbiamo trovato i centri di gravità di figure limitate da linee rette e curve, come pure di solidi e le soluzioni di molte altre questioni, che tratteremo in altra sede quando ne avremo voglia.

Quanto alla quadratura delle aree limitate da linee curve e rette, come pure al rapporto che i solidi hanno con i coni con la stessa base e stessa altezza, ne abbiamo già parlato con M. Roberval.

È la prima volta che appare l'idea di dare un *incremento* a una grandezza; ancora, per noi oggi sembra quasi naturale pensare alla quantità e come a un incremento *infinitesimo* Δx, se x è la variabile, e al metodo di Fermat come a un modo per introdurre

$$\Big(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\Big)_{\Delta x=0}$$

o meglio

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ma questo sarebbe assolutamente eccessivo. Fermat e, per molto tempo dopo Fermat, nessuno pensò ad una quantità come una *funzione*; mai Fermat parla di e come di un infinitesimo, mai nessuna forma di limite compare. Il metodo di adequazione appare al contrario come puramente algebrico.

Rispondendo a Descartes, che obiettava al fatto che il calcolo delle tangenti usasse il metodo dei massimi e minimi, Fermat, risponde che egli usa solo la stessa procedura di adequazione, [39], III, pp.140-141:

> Le linee curve di cui noi cerchiamo le tangenti hanno le loro proprietà specifiche esprimibili, o per linee rette solamente [curve algebriche in coordinate], o tramite linee rette e altre curve [curve trascendenti]. [...] Noi supponiamo la tangente già trovata in un punto dato sulla curva, e consideriamo per *adequazione* la proprietà specifica della curva, non più sulla curva stessa, ma sulla tangente da trovare. Eliminando, seguendo la nostra teoria dei massimi e minimi, i termini che sono da eliminare, arriviamo a una eguaglianza che determina il punto di incontro della tangente col diametro, o con la tangente stessa.

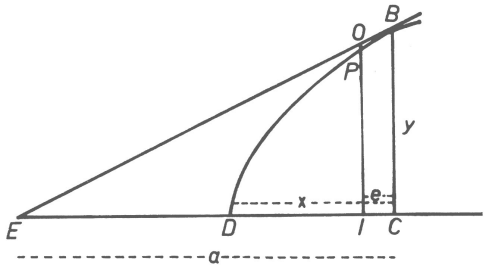


FIGURA 4. Il calcolo della sottotangente per adequazione.

Con riferimento alla Figura 4 e con notazioni moderne, se $F(x,y) = 0$ è l'equazione della curva, dalla similarità dei triangoli EOI e EBC ricaviamo

$$IO = \frac{y(a-e)}{a}.$$

La formula di adequazione che Fermat propone è quindi:

$$F(x-e, \frac{y(a-e)}{a}) \approx 0.$$

Nel caso della parabola $\alpha x = y^2$, otteniamo

$$\alpha(x-e) - \frac{y^2(a-e)^2}{a^2} \approx 0,$$

cioè

$$y^2(a-e)^2 \approx a^2\alpha(x-e);$$

poiché $y^2 = \alpha x$, concludiamo $x(a-e)^2 \approx a^2(x-e)$, e infine $2x = a$.

Con un salto logico enorme e il senno di poi, se sostituiamo la sottotangente a con il coefficiente angolare m, scriviamo la retta tangente in (x_0, y_0) come $y - y_0 = m(x-x_0)$, poniamo αx^2 al posto di y, avremo $\alpha x^2 - \alpha {x_0}^2 \approx m(x-x_0)$, cioè $m(x+x_0) \approx 0$, quindi $m = 2\alpha x_0$, se $x = x_0$.

Fermat calcola quindi le tangenti (meglio, le *sottotangenti*, cioè dove la tangente incontra l'asse delle ascisse) della cissoide di Diocle e della concoide. Egli estende quindi il suo metodo alle curve trascendenti, cfr. [39], III, pp. 143-145, ma noi ci fermiamo qui.

8.2. *Parabole e iperboli di Fermat*. Il ricorso a metodi infinitesimali può sembrare evidente: vicino al punto di contatto la tangente e la curva sono circa uguali; ancor più questo appare quando Fermat studia l''integrazione' delle cosiddette *parabole* e *iperboli di Fermat*, $y = x^n$, $y = 1/x^n$, [39], pp. 216-240. Consideriamo la curva $y = x^n$, e si voglia trovare l'area compresa da tale curva

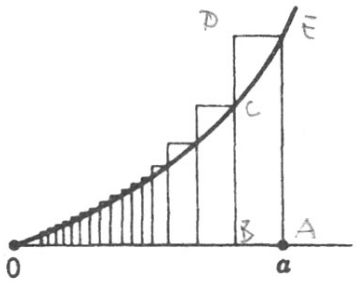


FIGURA 5. Area delimitata dalla *parabola di Fermat*.

nell'intervallo fra $x = 0$ e $x = a$. Suddividiamo l'intervallo $[0,a]$ in infiniti sottointervalli prendendo i punti di ascisse $a, ae, ae^2, ae^3, \ldots$, dove e è una quantità minore di uno; ma, dice Fermat, vicino a uno in modo da poter usare il metodo di esaustione con poligoni interni ed esterni di Archimede, cioè in modo che si possano *adequare* i rettangoli del tipo $ABDE$ con i trapezoidi $ABCE$. Le somma delle aree dei successivi rettangoli circoscritti, a cominciare dal più grande, sono date

$$\begin{aligned} &a^n(a-ae)+(ae)^n(ae-ae^2)+\cdots+(ae^k)^n(ae^k-ae^{k+1})+\cdots \\ &\qquad = a^{n+1}(1-e)[1+e^{n+1}+e^{2(n+1)}+\cdots+e^{k(n+1)}+\cdots] \\ &\qquad = \frac{a^{n+1}(1-e)}{1-e^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{1+e+e^2+\cdots+e^n} \end{aligned}$$

Prendendo $e = 1$, troviamo che l'area desiderata è $a^{n+1}/(n+1)$, come commenta Fermat, è possibile confermare con un conto più lungo fatto alla maniera di Archimede. Fermat estende questo a valori frazionari di n, $n = p/q$; la somma della aree dei rettangoli circoscritti diventa ora

$$a^{(p+q)/q}\Big(\frac{1-e^q}{1-e^{p+q}}\Big) = a^{(p+q)/q}\Big(\frac{1+e+e^2+\cdots+e^{q-1}}{1+e+e^2+\cdots+e^{p+q-1}}\Big)$$

e, per $e = 1$, tale somma diventa

$$\frac{p}{p+q}a^{(p+q)/q}.$$

Per valori negativi di n (tranne $n = -1$), Fermat usa un procedimento simile, con la sola differenza che e viene preso maggiore di uno, ma vicino a uno.

Nella procedura, mai compare qualcosa di infinitesimale o che diventi sempre più piccolo. L'impressione è sempre quella di un *calcolo algebrico* per il "circa uguale a".

8.3. *Il principio di Fermat*. Nel 1637 Mersenne invia a Fermat una copia de *La Dioptrique* che Descartes non ha ancora pubblicato. Fermat risponde, e comincia una polemica Fermat-Cartesio sul *principio di rifrazione* (ma anche sui contributi di Fermat alla geometria), sempre via Mersenne, che durerà fino al giugno 1638, quando Descartes la chiude senza che si sia giunti ad un punto di intesa. La polemica riprende dopo circa venti anni quando, dopo la morte di Descartes, Claude Clerselier, a cui sono stati affidati i manoscritti di Cartesio, contatta Fermat a proposito della vecchia polemica e Marin Cureau de la Chambre, medico di Luigi XIII e di Luigi XIV, gli fa pervenire, nel 1657, una copia della sua opera *La Lumière* nella quale viene riportato l'argomento di Erone che permette di stabilire il principio di riflessione tramite il principio di minimo cammino.

In varie lettere Fermat esprime la sua posizione e, probabilmente all'inizio del 1662, riunisce in due saggi, *Synthèse pour les réfractions* e *Analyse pour les réfractions*, cfr. [39], III, pp. 149-156, le sue conclusioni. La *Synthèse* comincia nel modo seguente:

> L'esperto [savant] Descartes ha proposto per le rifrazioni una legge che è, come si dice, conforme all'esperienza: ma per dimostrarla, si è dovuto appoggiare a un postulato assolutamente indispensabile per i suoi ragionamenti, cioè che la luce si muove più facilmente e più velocemente in un mezzo denso che in uno meno denso; ora questo postulato sembra contrario alla luce naturale[2].
>
> Cercando di stabilire la vera legge di rifrazione, partendo dal principio opposto — vale a dire che la luce si muova più facilmente e più velocemente nei mezzi meno densi che in quelli densi — siamo ricaduti sulla stessa legge che Descartes ha enunciato. Se sia possibile arrivare senza paralogismi alla stessa verità per due strade opposte è una questione che noi lasciamo ai geometri; poiché, senza entrare in discussioni vane, essere entrati in possesso della verità a noi basta e lo stimiamo preferibile a continuare una polemica inutile e illusoria.
>
> La nostra dimostrazione si basa su un solo postulato che la natura agisce con i mezzi più semplici e per le vie più agevoli. Perché è così che noi crediamo che debba essere enunciato e non come si fa di solito dicendo che la natura agisce sempre per le vie più corte.

In effetti, Fermat fa vedere (si veda *Analyse pour les réfractions*), partendo dall'ipotesi opposta a quella di Cartesio, che il raggio di luce si riflette in accordo con la cosiddetta *legge di Snell* proposta da Willebrord Snell (1580-1626), fisico e matematico olandese, nel 1621. La formulazione di Snell venne però resa nota da Huygens dopo che Cartesio l'aveva ritrovata.

LEGGE DI SNELL: *Il rapporto*

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

[2] Altrove, nella lettera a M. de **, 1664, egli lamenta l'uso dell'analogia, senza ulteriore giustificazione, che Cartesio fa tra argomenti geometrici e fisici.

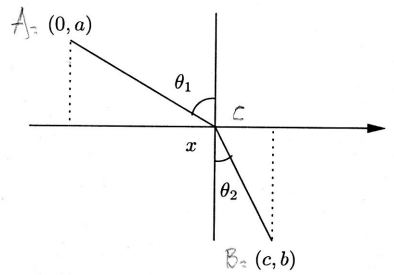


FIGURA 6. La rifrazione della luce.

dei seni degli angoli formati dal raggio incidente e dal raggio rifratto con la perpendicolare al punto di rifrazione è una costante dipendente solo dalle caratteristiche dei due mezzi.

Più precisamente, se r_1, r_2 indicano le 'resistenze' a muoversi della luce nei due mezzi, inversamente proporzionali rispettivamente a v_1, v_2, le velocità della luce nel primo (dove si muove il raggio incidente) e nel secondo mezzo (quello del raggio riflesso), Fermat prova che

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}. \tag{8.2}$$

Descartes aveva invece mostrato che

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{f_1}{f_2},$$

dove f_1, f_2 indicano le 'facilità' della luce a muoversi, inversi delle 'resistenze'. Per molto tempo questo fatto fu ignorato, ritenendo importante solo che il rapporto $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$ fosse indipendente dal raggio di luce, ma solo dai due mezzi: ciò fu origine di molti fraintendimenti nella discussione sul carattere corpuscolare o ondulatorio della luce che da lì a poco si svilupperà.

Ancora, Fermat prova che, se il cammino da A a B, con riferimento alla Figura 6 verifica l'equazione (8.2), allora il tempo che si impiega a percorrerlo è minimo rispetto al tempo di ogni altro cammino da A a B.

Formulando le cose in modo un po' più formale, Fermat postula:

PRINCIPIO DI FERMAT: *La luce si propaga lungo cammini per i quali il tempo di percorrenza è minimo.*

Con riferimento alla Figura 6, se v_1 e v_2 sono le velocità della luce rispettivamente nel semipiano positivo e nel semipiano negativo, il tempo impiegato da un raggio di luce che parte da $(0,a)$ per raggiungere (c,b) attraversando la

superficie di separazione $y = 0$ in $(x,0)$ è pari a

$$T(x) := \frac{1}{v_1}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(c-x)^2+b^2}.$$

Il punto di rifrazione è dunque il punto x_0 di minimo di $T(x)$.

Per adequazione (oggi si direbbe, uguagliando a zero la sua derivata), Fermat trova

$$0 = \frac{1}{v_1}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+a^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{c-x_0}{\sqrt{(c-x_0)^2+b^2}},$$

cioè, la *legge di Snell*

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Fermat fa di più: dimostra *sinteticamente* che il tempo necessario a percorrere un qualunque altro cammino da A a B è maggiore.

La storia fra Fermat e i cartesiani non finisce qui: essi non possono accettare un 'principio finalista'. Il 6 maggio 1662 Clerselier scrive a Fermat:

> Il principio che voi prendete per fondamento della vostra dimostrazione, cioè che la natura agisce sempre per le vie più brevi e più semplici, non è che un principio morale, che non è e non può essere la causa di un effetto in natura. [...] E non può esserlo, perché altrimenti noi supporremo della conoscenza in natura: e qui per natura intendiamo quell'ordine e quella legge stabilita nel mondo come è, la quale agisce senza preveggenza, senza scelta, e con una determinazione necessaria.

Questa critica sarà nel seguito presentata per molti principi variazionali, come il *principio di minima azione*, e ha una certa base di buon senso: perché andando il raggio da A a C (cfr. Figura 6), il raggio devia verso B e non verso un qualunque altro punto alla stessa distanza da C sempre nel semipiano inferiore? A meno di supporre che, ricordandosi che è partito da A abbia l'ordine una volta incontrato l'altro mezzo di muoversi verso B.

8.3. *Rettificazione delle curve*

Fin verso la metà del Seicento nessuno credeva che la lunghezza di una curva potesse essere esattamente uguale a quella di un segmento. Così Cartesio, seguendo una tradizione che risaliva ad Aristotele, nel secondo libro della *Géométrie* scriveva, [28] p. 340, che

> il rapporto tra una linea retta e una curva non è noto, e io credo che non possa essere conosciuto dagli uomini.

In realtà appena due anni dopo, in una lettera a Mersenne, Cartesio stesso commentava sul rapporto lineare tra la spirale logaritmica e il suo raggio. Ma questa osservazione, resa nota solo nel 1657, come pure i tentativi di studiare

il rapporto tra curve diverse fatti da Torricelli[3] e Roberval e di usare metodi di esaustione per la rettificazione dovuti a Fermat passarono inosservati, e molti matematici restarono convinti dell'impossibilità della rettificazione delle curve, cioè di trovare, data una curva, un segmento della stessa 'lunghezza'. Il problema riguadagna notorietà quando, nel 1655, Hobbes lancia una serie di attacchi ai matematici inglesi, ed in particolare a Wallis, sostenendo che l'affermata impossibilità della rettificazione nascondeva solo la loro incapacità e procede quindi a rettificare il cerchio e la parabola e a quadrare il cerchio; ma Wallis ne mette subito in evidenza gli errori.

Gli anni 1657-1659 sono anni intensi per il problema della rettificabilità delle curve. Christopher Wren annuncia di aver rettificato la cicloide; John Wallis sostiene che la rettificazione è possibile tramite una somma infinita di indivisibili; William Neile annuncia di aver rettificato la parabola-semicubica, $y^3 = ax^2$; Christiaan Huygens annuncia di aver ricondotto la rettificazione della parabola alla quadratura dell'iperbole (ancor più, di avere un metodo generale per far questo), di aver rettificato segmenti di cicloide, e informa Wallis che la seconda edizione latina della *Geometria* di Cartesio (*Renati Descartes Geometria: editio secunda*, Amsterdam 1659, a cura di Frans van Schooten) contiene una appendice di Hendrik van Heuraet in cui si presenta un metodo per la rettificazione delle curve e, come corollario, si rettifica la parabola-semicubica. Wallis pubblica il *Tractatus duo*, 1659, [99], I pp. 550-569, contenente le dimostrazioni di Wren e Neile e una storia del problema della rettificazione in Inghilterra. Noi ci limitiamo a presentare alcuni esempi seguendo parzialmente [10].

8.4. *Wallis e Huygens: la parabola*. Con metodi infinitesimali, riconducibili al metodo di esaustione, Huygens e Wallis riconducono la rettificazione della parabola alla quadratura dell'iperbole. In modo più algebrico, nello spirito di Wallis, possiamo parafrasare l'affermazione come segue.

Consideriamo l'arco di parabola $y = x^2$ in $[0,1]$. Dividiamo l'intervallo $[0,1]$ in n parti uguali e consideriamo la spezzata fatta dai segmenti che congiungono i punti di coordinate $((k-1)/n, (k-1)^2/n^2)$ e $(k/n, k^2/n^2)$. La lunghezza complessiva di questa spezzata, che possiamo considerare approssimativamente uguale alla lunghezza dell'arco di parabola se n è molto grande, può essere

[3] Negli anni intorno al 1646 Torricelli mostra che le lunghezze di archi di spirali del tipo $\rho^m = k\theta^n$ sono equivalenti alle lunghezze di archi di parabole (generalizzate), e che le spirali del tipo $\rho = ae^{b\theta}$ sono rettificabili. Questi risultati non furono mai pubblicati e si trovano (trascrizione di vari manoscritti) in [90], II, parte 2, pp. 349-398, con il titolo *De infinitis spiralibus*. Per una selezione, in italiano, si può vedere [91].

FIGURA 7. Le spezzate circoscritte di Fermat.

calcolata facilmente, ed è

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{(2k-1)^2}{n^2}}.$$

Osserviamo ora che

$$0 < \sqrt{1 + \frac{4k^2}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{(2k-1)^2}{n^2}} < \frac{2}{n}.$$

Ne segue che la lunghezza dell'arco di parabola in $[0,1]$ è approssimativamente

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{1 + 4\frac{k^2}{n^2}}.$$

Ma questa espressione dà anche l'area approssimata della regione compresa sotto il ramo di iperbole $y = \sqrt{4x^2+1}$ e l'asse delle x, con x in $[0,1]$.

8.5. *Fermat, lunghezza e esaustione*. Alla base dell'approccio di Fermat alla rettificazione delle curve c'è ancora una generalizzazione del metodo di esaustione. Il trattato *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione*[4], in cui Fermat estende i risultati sulla rettificazione di Wren si apre così:

> Per misurare le linee curve non farò uso di figure inscritte e circoscritte come fece Archimede, ma solo di linee circoscritte fatte di segmenti di tangenti; [...] Dico che è possibile, seguendo nello spirito il metodo di Archimede, circoscrivere a ogni curva due figure composte di linee di cui una supera la linea curva per una differenza più piccola di ogni dato intervallo, l'altra, al contrario, sarà più corta della curva per una differenza minore di ogni dato intervallo.

Fermat considera una curva concava crescente. Su questa curva scegliamo punti P_0,P_1, $P_2, \ldots, P_n$ in modo che le rette ordinate per questi punti siano equidistanti, cfr. Figura 7, denotiamo con T_{r-1} e S_{r+1} i punti in cui la tangente alla curva in

[4] Cfr. [39], I, pp. 211-254; si veda anche [39], III, pp. 181-215.

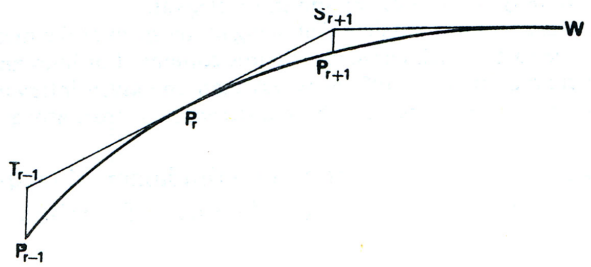


FIGURA 8. Complemento alla spezzata di Fermat.

P_r incontra rispettivamente le rette ordinate per P_{r-1} e P_{r+1}; infine, cfr. Figura 8, da S_{r+1} tiriamo la tangente alla curva $S_{r+1}W$, essendo W il punto di contatto.

Tenendo presente i lemmi di concavità di Archimede, si deduce facilmente

$$T_{r-1}P_r < \text{corda}\, P_{r-1}P_r < \text{arco}\, P_{r-1}P_r$$

e

$$\text{arco}\, P_rP_{r+1} + \text{arco}\, P_{r+1}W < P_rS_{r+1} + S_{r+1}W;$$

quindi

$$\text{arco}\, P_rP_{r+1} < P_rS_{r+1} - (\text{arco}\, P_{r+1}W - S_{r+1}W).$$

E ancora

$$T_0P_1 + T_1P_2 + T_2P_3 + \ldots + T_{n-1}P_n < \text{arco}\, P_0P_n < P_0S_1 + P_1S_2 + P_2S_3 + \ldots + P_{n-1}S_n.$$

Essendo ora

$$P_1S_2 = T_0P_1, \quad P_2S_3 = T_1P_2, \quad \ldots, P_rS_{r+1} = T_{r-1}P_r,$$

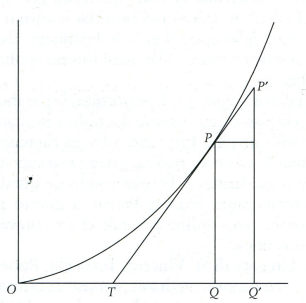


FIGURA 9. Riduzione della lunghezza della parabola-semicubica di Neile alla quadratura della parabola.

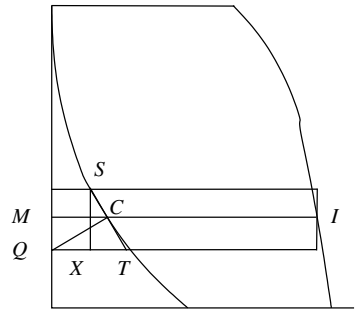


FIGURA 10. La costruzione di van Heuraet.

concludiamo

$$(P_0S_1 + P_1S_2 + P_2S_3 + \ldots + P_{n-1}S_n) - \text{arco}\, P_0P_{n-1} < P_0S_1 - T_{n-1}P_n,$$

che dà appunto la condizione sufficiente per applicare il classico metodo di esaustione.

8.6. *William Neile*. Consideriamo ora la parabola-semicubica $ky^2 = x^3$, cfr. Figura 9. Per ogni punto P sulla curva di ascissa $OQ = a$ e ordinata $PQ = b$, la sottotangente $TQ = c$ può essere calcolata con il metodo di adequazione di Fermat, trovando $c = \frac{2}{3}a$. Se, con riferimento sempre alla Figura 9, $QQ' = e$, allora

$$PP' = e\sqrt{\frac{9a}{4k} + 1}.$$

Per piccoli valori di e possiamo confondere la curva con la tangente e, quindi, calcolare la lunghezza della curva come somma dei PP' che è la stessa cosa che quadrare la parabola

$$y^2 = \frac{9x}{4k} + 1.$$

Ovviamente, questo risultato, una volta trovato, può essere dimostrato in modo preciso con il metodo di esaustione descritto prima.

8.7. *Hendrik van Heuraet*. Un metodo generale per trasformare la rettificazione di una curva nella quadratura di un'altra curva fu presentato da Hendrik van Heuraet nella seconda edizione della *Geometria* di Cartesio a cura di van Schooten. Per ogni punto C sulla curva $ABCDE$, cfr. Figura 10, determiniamo un punto I su una nuova curva $GHIKL$ (determinata appunto da I al variare di P) tramite la proporzione $MI/W = CQ/CM$, dove W è una costante e CQ è la normale alla curva in C. Per similitudine si deduce allora

$$\frac{CQ}{CM} = \frac{ST}{SX},$$

dove ST è un piccolo segmento sulla tangente alla curva in C. Di conseguenza $MI/W = ST/SX$, e $MI \times SX = W \times ST$, cioè l'area del rettangolo di lunghezza MI e altezza (molto piccola) SX è uguale ad una costante per l'arco infinitesimale ST. Aumentando il numero dei rettangoli e sommando le loro aree si arriva alla conclusione che l'area sotto la curva (nella figura gli assi sono scambiati, come è d'uso al tempo) $GHIKL$ è uguale a una costante per la lunghezza di $ABCDE$.

CAPITOLO 9

La nuova scienza del moto di Galilei

Fino al Cinquecento la 'meccanica' può esser vista come lo studio delle macchine. A partire dal Cinquecento e nel Seicento molte discipline in qualche modo autonome — l'astronomia, l'ottica nel senso della propagazione della luce e la musica nel senso delle vibrazioni o delle armoniche — e nuove discipline — la scienza della resistenza dei materiali, il moto delle acque e più in generale dei fluidi, gli urti, e soprattutto lo studio del moto — confluiscono nella 'meccanica', in quella che può essere vista come la progressiva meccanicizzazione della visione del mondo.

In questo processo rivestono un ruolo importante vari fattori: l'eredità archimedea, anche attraverso i contributi di Erone e Pappo, l'uso di nuove macchine che richiedono una comprensione anche teorica della struttura dei meccanismi, la crescente importanza dell'arte della guerra e in essa del ruolo dell'artiglieria, lo sviluppo dell'arte di costruire, l'ampliarsi autonomo della matematica anche in connessione con i nuovi problemi posti appunto dalla 'meccanica', e infine un nuovo approccio, appunto 'meccanicistico', della filosofia naturale. Ad esempio, nel Cinquecento la meccanica, nella denominazione che oggi chiameremmo fisico-matematica, viene insegnata nei curricula universitari dai matematici, mentre il moto e, più in generale, la fisica, come ricerca delle cause, vengono insegnati dai filosofi.

Il periodo che precede Galileo, fu caratterizzato dall'uso dei due principi archimedei in statica e idrostatica; lo studio della cinematica del moto inizia appunto con Galilei. Sulla storia della meccanica il lettore può vedere [33] [36] [13] [14] [94].

Un'affascinante caratterizzazione di questa storia, si veda ad esempio [13] e [14], è dato in termini di"oggetti", da intendere come oggetti reali studiati, o esperimenti mentali o reali, o uso della teoria sviluppata per uno strumento in altro contesto. Sul rapporto tra macchine, scienza e mutamenti delle ideologie tra il 1400 e il 1700 il lettore può vedere anche [85].

Gli 'oggetti' della meccanica. Alcuni oggetti della vita quotidiana hanno suggerito nel corso dei secoli di matematizzare concetti nuovi. Essi hanno permesso di evidenziare leggi della fisica, e hanno contribuito a orientare i ragionamenti. La *leva* o la *bilancia* nella teorizzazione archimedea sono esempi prominenti.

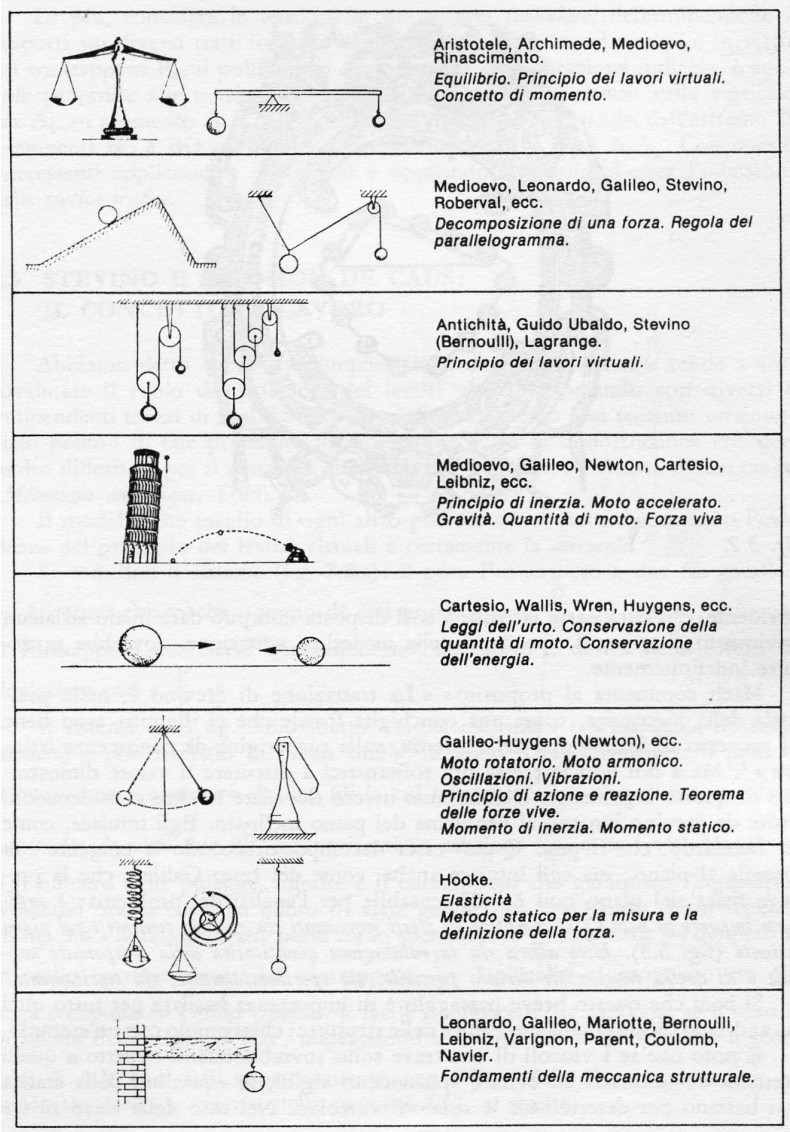


FIGURA 1. Illustrazione di alcuni 'oggetti' che hanno fatto pensare. Da *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico* di Edoardo Benvenuto.

Nel periodo pre-galileiano diventa rilevante il *piano inclinato* sia per la statica che per lo studio del moto, tramite cui, a partire da Stevino, si perviene alla decomposizione delle forze secondo la *regola del parallelogramma*. Dallo studio

delle macchine di sollevamento che utilizzano sistemi di funi si passa al principio di componibilità delle forze e alla sistemazione moderna della statica di Varignon (1654-1722) nella sua *Nouvelle Mécanique*.

Al piano inclinato e, soprattutto, alla *carrucola* o ai *sistemi di pulegge* si può far risalire il *principio dei lavori virtuali* di Johann Bernoulli (1667-1748).

Lo studio della *caduta dei corpi pesanti* e dei *proiettili* porterà, a partire da Galileo, al *principio di inerzia* (soprattutto con Cartesio) e alle *leggi del moto accelerato*. Sempre dalla caduta del grave prenderà inizio la *querelle* di Leibniz contro Cartesio, che porterà alla definizione della *forza viva*, distinta dalla *quantità di moto*, e alla *legge della conservazione dell'energia*, come si vedrà in seguito.

Altrettanto fecondo è lo studio dell'urto di due palline iniziato da Cartesio, che con i contributi di John Wallis (1616-1703), Christopher Wren (1632-1723) e Christiaan Huygens (1629-1695), porterà alla distinzione tra la *legge della quantità di moto* e la *legge di conservazione dell'energia*.

Al pendolo, studiato da Galileo, si collegano le *leggi del moto rotatorio*, delle *oscillazioni* e delle *vibrazioni*, come pure i concetti di *accelerazione* e *forza centripeta* che, dopo i contributi di Huygens, modificheranno nella sintesi newtoniana il quadro della meccanica. Sempre al pendolo si ricollega il terzo principio di Newton, il *principio di azione e reazione*.

Lo studio del *pendolo composto* da parte di Huygens porterà all'introduzione dei concetti di *momento statico* e di *momento di inerzia*.

Infine, un componente estratto dalle macchine più usuali entra a far parte dei modelli teorici e sperimentali più importanti. Si tratta della *molla*, sia essa *elicoidale*, a forma di *spirale*, o semplicemente un *filo metallico deformabile*. Con Robert Hooke (1635-1703) essa diventa l'elemento paradigmatico del fenomeno dell'*elasticità*, ma soprattutto il mezzo con cui si trasforma la nozione intuitiva di *forza* in nozione misurabile: *sic tensio [extensio] sic vis*, tale l'elongazione, tale la forza; in questo modo la forza diventa un concetto *operativo*.

9.1. *Prima di Galilei*

Come detto, nel XIV secolo lo studio della meccanica che si identifica con la statica ha come riferimento (almeno nei suoi aspetti teorici) la leva dell'antichità greca tramite lo pseudoaristotelico *Questiones mechanicae*, le opere di Archimede e le opere di Erone e Pappo attraverso la tradizione araba. Non è invece chiaro quale possa essere stata l'influenza dei raffinati costruttori delle cattedrali medioevali e, particolarmente, dei costruttori delle cattedrali gotiche e dei costruttori di strumenti di sollevamento. Si può però forse dare per scontato

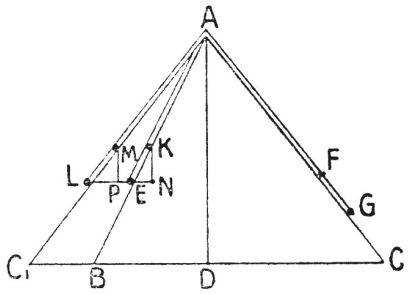


FIGURA 2. La legge del piano inclinato di Giordano Nemorario.

che questi strumenti fossero parte di una cultura diffusa e che potessero suscitare da una parte l'interesse degli studiosi di matematica e, dall'altra, l'interesse di alcuni degli utilizzatori a dare maggiore dignità e magari efficienza ai loro strumenti tramite la matematica.

Giordano Nemorario. Il primo studioso che gli storici ci presentano è GIORDANO NEMORARIO. Si è molto discusso della sua identità, come pure sull'epoca in cui visse, stimando quest'ultima tra il 1200 e la fine del 1300. A lui venivano attribuite tre opere: gli *Elementa Jordani super demonstrationem ponderis*, il *Liber de ponderibus* e il *Liber Jordani de razione ponderis*, che, invece, pare certo siano da attribuire ad autori diversi, della sua scuola. Di queste opere esistono manoscritti nella Biblioteca Nazionale di Parigi databili nella seconda metà del 1400.

Il principio della leva di Archimede e la legge del piano inclinato vengono ricondotti a quelle che a volte è chiamato l'assioma di Giordano e sono dimostrati a partire da esso.

ASSIOMA DI GIORDANO: *Qualcosa che sia capace di sollevare un dato peso P per una data distanza h è anche in grado di spostare n volte questo peso per la n-*sima *parte di questa distanza.*

Riportiamo l'argomentazione relativa al piano inclinato, anche perché molti vi hanno visti aspetti simili al *principio dei lavori virtuali* — il lavoro (forza per spostamento) delle forze lungo spostamenti virtuali infinitesimi compatibili con i vincoli è nullo nello stato di equilibrio.

Consideriamo i piani inclinati AB e AC con la stessa altezza AD e $AC > AB$, cfr. Figura 2. Supponiamo che un corpo di peso w_1 sia posto su AB in E, collegato con una corda che passa per una carrucola posta in A con un corpo di peso w_2 posto sul piano AC in F. I due pesi sono in equilibrio se e solo se

$$w_1 : w_2 = AB : AC.$$

La dimostrazione procede come segue. Supponiamo che valga la relazione precedente ma non ci sia equilibrio. Allora uno dei due pesi, supponiamo w_2 discenderebbe, diciamo da F in G, sollevando il peso w_1 fino a K. Immaginiamo ora un terzo piano inclinato AC_1 con la stessa inclinazione di AC, in maniera che $DC_1 = DC$. Sia L in AC_1 allo stesso livello di E e supponiamo che in L sia posto un corpo di peso w_2. Sia, infine, M in AC_1 tale che

$$LM = EK = FG.$$

Dimostreremo che, se w_2 è capace di spostare w_1 fino a K, esso può anche spostare w_2 da L in M: ciò è chiaramente assurdo per ragioni di simmetria.

Se KN e MP sono le distanze di K e M dalla sottostante linea orizzontale LE, abbiamo

$$\frac{MP}{LM} = \frac{AD}{AC_1}, \quad \frac{KN}{KE} = \frac{AD}{AB},$$

da cui, essendo $LM = KE$ e $AC_1 = AC$, segue che

$$\frac{MP}{KN} = \frac{AB}{AC}.$$

D'altra parte, da $w_1/w_2 = AB/AC$ segue $w_1/w_2 = MP/KN$. Se pertanto $w_1 = nw_2$, allora $KN = MP/n$; così, per l'assioma di Giordano, w_2 posto in AC sarebbe in grado di mettere in movimento w_2 sul piano AC_1, se si ipotizza che esso possa sollevare w_1.

Leonardo da Vinci. Secondo Pierre Duhem [37], nella sua opera di rivalutazione del medioevo scientifico francese in contrapposizione al Rinascimento italiano, dopo la scuola di Giordano e dopo Guglielmo d'Ockham, Giovanni Buridano e Nicola d'Oresme, la figura principale è LEONARDO DA VINCI (1452-1519) che si occupò di argani e apparecchi di sollevamento con sistemi multipli di carrucole, di macchine belliche, di ponti, di strumenti nautici, di coclee, di macchine per filare e tessere, di progetti per volare, di propulsori ad elica e molto altro. L'opera di Leonardo, modesta nelle matematiche, fu, infatti vasta e originale nella meccanica e nello studio della resistenza dei materiali. In verità però, in genere Leonardo limitava il suo intervento nella ricezione di concetti già noti, sviluppandoli applicativamente. Relativamente alle difficoltà obiettive alla comprensione di concetti, per noi oggi usuali, come forza, velocità o accelerazione, riportiamo un famoso passo di Leonardo sul concetto di forza, tratto da [33] (p. 340).

> [La forza è] una virtù spirituale, una potenzia invisibile, la quale per accidentale esterna violenza è causata dal moto e collocata e infusa ne' corpi i quali sono dal loro naturale uso retratti e piegati, dando a quelli vita attiva di meravigliosa potenzia; costrigne tutte le create cose a mutilazioni di forma e di sito; corre con furia alla sua desiderata morte e vassi diversificando mediante le cagioni.
>
> Tardità la fa grande e prestezza la fa debole; nasce per violenza e more per libertà. E quanto è maggiore, più presto si consuma. Scaccia con furia ciò che si oppone a sua disfazione,

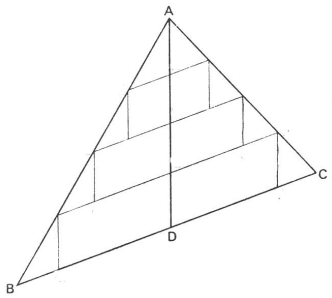


FIGURA 3. Centro di gravità del triangolo.

> desidera vincere, uccidere la sua cagione, il suo contrasto e, vincendo, sé stessa occide. Fassi più potente, dove trova maggior contrasto.
> Ogni cosa volentieri fugge sua morte. Essendo costretta, ogni cosa costrigne. Nessuna cosa senza lei si move. Il corpo dove nasce non cresce in peso né in forma. Nessuno moto fatto da lei fia durabile. Cresce nelle fatiche e manca nel riposo. Il corpo dov'è costretta è fori di libertà. E spesso genera, mediante il moto, nova forza.

Guidobaldo dal Monte. Nel Cinquecento, Tartaglia, Cardano, Benedetti e, soprattutto Guidobaldo dal Monte si occupano, tra gli altri, di meccanica nello spirito archimedeo. Tartaglia (1506-1557) pubblica il *De ratione ponderis* dello pseudo-Giordano, e si occupa dei problemi della caduta dei gravi nei trattati *Nova Scientia*, 1537, e nei *Quesiti et Inventioni diversi*, 1546. Girolamo Cardano (1501-1576), nel *De Subtilitate*, 1551, e nell'*Opus novum*, 1570, riprende il tema della leva mettendo in conto anche i pesi dei bracci e l'azione dei vincoli. Studente di Tartaglia, Giovanni Battista Benedetti (1530-1590) riprende parte della filosofia naturale del Medioevo, corregge la teoria dell'impeto di Buridano e si occupa del moto dei corpi nei fluidi osservando che due corpi dello stesso materiale e forma, uno quattro volte l'altro, cadono nello stesso tempo dalla stessa altezza; infatti, se decomponiamo il maggiore in quattro corpi uguali, questi cadono con la stessa velocità, ma, se immaginiamo i quattro corpi tenuti assieme da una cordicella senza peso, essi cadono tutti con la stessa velocità che è quella del corpo più piccolo.

GUIDOBALDO DAL MONTE (1545-1607) è sicuramente la figura principale del periodo. Studente di Commandino, rappresentante della cosiddetta scuola di Urbino, egli fu amico e sostenitore di Galileo. Nel suo *Mechanicorum liber*, Venezia 1577 — di cui esce una traduzione italiana, *Le meccaniche*, a cura di Filippo Pigafetta nel 1581 — cerca di dare una trattazione sistematica e rigorosa delle macchine sulla base del principio della leva, seguendo in questo Pappo. L'influenza di Guidobaldo dal Monte fu forte per tutto il Seicento e per molto tempo il *Mechanicorum liber* fu il libro di riferimento per la meccanica; esso fu letto e studiato da Galileo, da Cartesio e anche da Lagrange.

Stevino. SIMON STEVINO (1548-1620) trascorre la sua vita in Olanda in un periodo infestato dalle guerre religiose tra cattolici e protestanti, operando come ingegnere militare. Portò contributi rilevanti alla trigonometria, allo studio della prospettiva, alla meccanica, all'idrostatica, alla teoria musicale e alle scienze tecniche (architettura, navigazione, fortificazioni). Fu autore di 11 libri, scritti soprattutto in fiammingo, scelta che egli difese fortemente e che non gli impedì di essere uno stimato studioso al suo tempo.

Particolarmente rilevanti sono i suoi trattati del 1586 di statica *De Beghinselen der Weeghconst* (*Elementi dell'arte del pesare*) e di idrostatica *De Beghinselen des Waterwichts*. La sua dimostrazione del fatto che il centro di gravità di un triangolo giace sulla mediana mostra il suo atteggiamento nei confronti della tradizione archimedea. Egli inscrive nel triangolo *ABC* un numero di parallelogrammi di uguale altezza, cfr. Figura 3. Il centro di gravità della figura inscritta giacerà sulla mediana, perché figure simmetriche bilateralmente sono in equilibrio. Quindi osserva che più grande è il numero dei parallelogrammi inscritti, più piccola sarà la differenza tra la figura inscritta e il triangolo *ABC*. Ne segue che i pesi dei triangoli *ABD* e *ADC* sono uguali e il centro di gravità di *ABC* sta sulla mediana. Egli usò lo stesso argomento ripetutamente per il calcolo del centro di gravità di figure piane curvilinee.

Stevino contributi anche alla meccanica e si può dire che, rispetto alla trattazione geometrica di Guidobaldo dal Monte, la sua è più basata sull'intuizione fisica.

Dopo la pubblicazione del *Beghinselen der Weeghconst* raccoglierà le sue opere nelle *Wiscontighe Ghedachtenissen* (*Hypomnemata mathematica*) che si diffonderà nella sua traduzione latina e francese. Nel frontespizio del *Beghinselen* appare un dispositivo che è diventato famoso con il nome di "corona di sfere" e l'iscrizione *Wonder en is gehen wonder* (la meraviglia non è più meraviglia). Stevino solleva obiezioni formali contro la derivazione della legge del piano inclinato della scuola di Giordano: pensa che sia assurdo derivare una condizione di equilibrio dalla considerazione di una situazione che non si verifica mentre dura l'equilibrio. Il suo ragionamento fa riferimento alla Figura 4.

Si consideri una catena chiusa di spessore e densità uniforme, attorno ad un prisma triangolare. Allora la catena o è in equilibrio o è in movimento. Se si muove, deve essere in moto perpetuo, perché la configurazione non cambia: egli ritenne questo assurdo[1]. Quindi la catena è in equilibrio. La parte di catena sotto il lato orizzontale *AB* sarà anch'essa in equilibrio, ma allora anche le parti

[1] In realtà l'esclusione del moto perpetuo in queste condizioni è piuttosto complessa, essa richiede infatti di mettere in gioco considerazioni riguardanti l'energia potenziale e l'energia cinetica; è però indubbia la sua intuitiva verità.

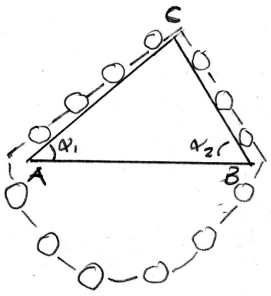


FIGURA 4. La catena di sfere.

AC di peso m_1 e BC di peso m_2 della catena si equilibrano. Con un semplice argomento (la legge dei seni) si conclude quindi

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}.$$

Osserviamo con Dijksterhuis [33] che l'argomentazione non si basa su conoscenze anteriori ed è in grado di convincere anche una persona incolta, rivelando l'intento costante di Stevino di rendere l'educazione scientifica accessibile al maggior numero possibile di persone.

Il secondo contributo che illustriamo è quello del triangolo delle forze, oggi *regola del parallelogramma*, che Stevino usò ripetutamente senza enunciarlo esplicitamente.

Parafrasando Mach [74], consideriamo un piano inclinato e su di esso un peso Q, cfr. Figura 5; tendiamo un filo sopra una puleggia A, e immaginiamo che il peso Q sia tenuto in equilibrio dal peso P. Stevino osserva che non è necessario che Q giaccia sul piano inclinato. Purché il peso possa compiere gli stessi movimenti che gli sono consentiti sul piano inclinato, il rapporto tra forza e peso resta costante. Possiamo quindi immaginare il peso legato a un filo, perpendicolare al piano inclinato, che passa su una puleggia D e che carichiamo in modo adeguato. Abbiamo in questo modo una cosiddetta macchina funicolare. Possiamo ora determinare la frazione di peso che provoca la discesa del corpo sul piano inclinato. Tracciamo una verticale e riportiamo su di essa un segmento ab corrispondente al peso Q. Se tracciamo su aA la perpendicolare bc, abbiamo $P/Q = AC/AB = ac/ab$, dove ac rappresenta la tensione del filo aA. Nulla ci impedisce di scambiare la funzione dei due fili e supporre che il peso Q stia sul piano inclinato EDF. In modo analogo troviamo allora ad che rappresenta la tensione R del secondo filo. In questo modo Stevino giunse alla condizione di

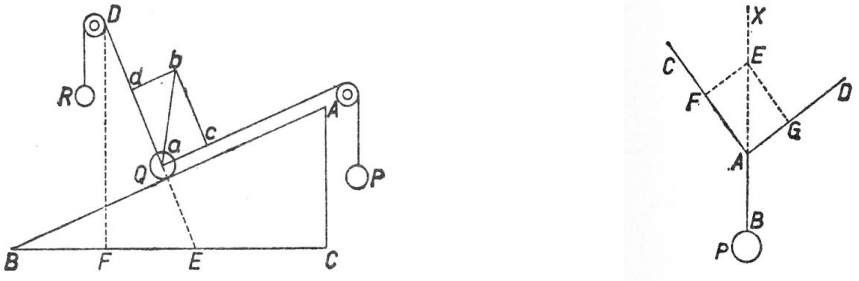


FIGURA 5. Il parallelogramma delle forze

equilibrio della macchina funicolare e al parallelogramma delle forze[2], almeno nel caso che i fili siano perpendicolari. Ma, egli estese queste considerazioni a casi più generali. Ad esempio, osservò che se tre fili AB, AC, AD formano angoli qualunque e il primo di questi fili porta il peso P, è possibile determinare le tensioni come segue. Si prolunghi AB verso X e si prenda il segmento AE. Si tracci poi da E il segmento EF parallelo a AD, e EG parallelo a AC: le tensioni di AB, AC, AD sono proporzionali rispettivamente a AE, AF, AG.

9.2. *Galilei*

GALILEO GALILEI (1564-1642) è una figura centrale nella rivoluzione scientifica del XVII secolo. La sua opera scientifica — con le rilevanti osservazioni astronomiche che egli usa a supporto della teoria copernicana e contro la teoria della *forma* e della *sostanza* aristotelica, con la sua teoria del moto locale che, pur nelle difficoltà di una matematica vincolata all'antico, apre al nuovo nell'affrontare il problema del moto locale —, quella di pensatore in filosofia della natura — in netto contrasto con la visione tomistica-aristotelica —, il suo contrasto con la Chiesa — con il suo ruolo nella storia civile —, le sue riflessioni sulla metodologia scientifica, e non ultimo il suo ruolo nella nostra cultura letteraria ne fanno in qualche modo uno dei punti di inizio dell'era moderna, anche nella sua complessità — alternativamente si tende ad esagerare o a limitare i suoi meriti — e nelle sue varie interpretazioni — enfatizzando le sue caratteristiche archimedee, platoniche, aristoteliche e atomiste, di matematico o sperimentatore o anche di ingegnere. Il risultato è una letteratura sterminata.

[2] Con riferimento al parallelogramma $AFEG$ in Figura 5, si ha equilibrio quando le forze coinvolte hanno intensità indicate dalle lunghezze dei lati del diagramma, direzioni e versi tali da 'chiudere' il diagramma, cioè tali da avere somma vettoriale zero.

A noi qui interessano soprattutto le leggi del moto accelerato ma, in considerazione del ruolo rilevate dell'eredità galileiana nella nostra storia civile, non possiamo non accennare ad alcune considerazioni che ora esporremo, per maggiori informazioni rimandiamo a [46] e alle opere lì citate.

A partire dal 1609 Galilei compie alcune importanti scoperte astronomiche (irregolarità della superficie lunare, le macchie solari che mostrano generazione e corruzione, quattro satelliti di Giove, le fasi di Venere) che eliminano importanti presupposti della fisica aristotelica-scolastica, come quelle di "forma" e "sostanza", mostrano il carattere unitario dell'universo e forniscono indicazioni in favore del sistema copernicano. L'abbandono della dicotomia celeste/terrestre implica che la materia è tutta dello stesso tipo e ci può essere un solo tipo di 'moto naturale' per questa materia.

A partire dal 1612 cambia il clima nei confronti delle dottrine copernicane, fino ad allora osteggiate prevalentemente dai protestanti. Esse vengono dichiarate eretiche e Galilei si impegna sempre più nella difesa dell'*autonomia* della ricerca scientifica dalla metafisica, dalla teologia, dall'autorità spirituale e, in generale, da ogni ideologia, enfatizzando il *valore conoscitivo* della scienza.

Il libro della natura come fonte di verità, come rivelazione o, anche, come insieme di simboli di una divinità nascosta è un tema presente dal Medioevo al Rinascimento; ma, per Galilei c'è l'esperienza e c'è l'essenza oggettiva del reale, costituita da una struttura che è o si riconduce a rapporti matematici misurabili e calcolabili, e che non è conoscibile al di fuori di questa struttura matematica. Essa infatti esprime una realtà assoluta ed una verità necessaria, per l'uomo come per Dio. Per Galilei il sistema copernicano non è una supposizione matematica, come volevano Osiander e il cardinale Bellarmino. Egli è lontano da Urbano VIII che, sostenendo che Dio avrebbe potuto fare le cose diversamente, pensa ad una incapacità intrinseca di arrivare alla verità se non quella delle Scritture, attribuendo al ragionamento una valenza solo di ipotesi.

Segue per Galilei che la scienza per avere validità necessaria si deve occupare solo delle quantità *oggettive*, fondandosi solo sugli aspetti *quantitativi*: la realtà va vista non in termini di *sostanze* o *essenze*, ma in termini di *quantità misurabili*.

Oggi la visione è ancora una volta cambiata. È venuta meno la certezza assoluta della matematica, anche se non quella relativa. La matematica risulta essere l'unico linguaggio che utilizzando argomenti indipendenti dai singoli individui e principi condivisi possa in linea di principio descrivere una realtà esterna agli individui o, se si vuole, possa *identificare una realtà* che abbia una sua coerenza indipendentemente dalle valutazioni dei singoli individui.

Nel febbraio 1616 la Congregazione dell'indice condanna la teoria copernicana e Galilei viene ammonito a non difenderla. Dopo la pubblicazione del *Saggiatore* nel 1623 e del *Dialogo* nel 1632, a Galilei viene ordinato di recarsi a

Roma per essere processato; a conclusione del processo, la sentenza del Tribunale, emanata il 22 giugno 1633, impone a Galilei l'abiura se vuole avere salva la vita. Galilei non ritornò per il resto della sua vita sulla questione copernicana. Fino alla sua morte lavorerà, in cattività, ad una sorta di testamento scientifico in cui raccoglie i suoi tentativi di fondazione delle due nuove scienze della *meccanica* e dei *movimenti locali*: nel 1638 pubblica incompleti i *Discorsi*, muore nel 1642.

Il processo e la condanna di Galilei tolsero speranza e illusioni di esercitare una funzione positiva nel mondo della cultura; questo fu espresso chiaramente da Descartes, da Torricelli, e da Milton. Ad esempio scrive Descartes a Mersenne

> Ora confesso che, se [il movimento della Terra] falso, lo sono anche tutti i fondamenti della mia filosofia: esso viene, infatti, dimostrato in modo evidente per mezzo [di tali fondamenti] ed è talmente legato con tutte le parti del mio trattato, che non potrei scorporarlo senza rendere mancante tutto il resto. Ma siccome, per niente al mondo, vorrei che da me uscisse un discorso in cui si trovasse la minima parola che fosse disapprovata dalla Chiesa, preferisco allora sopprimere il mio trattato piuttosto che farlo uscire storpiato.

e Torricelli a Ricci

> Che i principii della dottrina *de motu* siano veri o falsi a me importa pochissimo. Poiché, se sono veri, fingasi che sian veri conforme habbiamo supposto e poi prendansi tutte le altre specolazioni derivate da essi principii, non come cose miste, ma pure geometriche. Io fingo o suppongo che qualche corpo o punto si muova all'ingiù et all'insù con la nota proporzione et horizontalmente con moto equabile [riferimento alla composizione del moto equabile orizzontale con il moto accelerato verticale dei proiettili]. Quando questo sia, io dico che seguirà tutto quello che ha detto il Galileo et io ancora. Se poi le palle di piombo, di ferro, di pietra non osservano quella supposta proporzione, suo danno: noi diremo che non parliamo di esse.

La condanna di Galilei generò pure un forte senso di paura, anche perché da più di 20 anni durava la Guerra dei 30 anni, si sentiva l'eco dei roghi per stregoneria e del recente rogo di Giordano Bruno, la Terra scena del peccato e della redenzione non risultava più un unicum e non unicum poteva essere il rapporto con Dio e, soprattutto, generò o intensificò l'abitudine alla censura, all'autocensura e alla ricerca del particolare.

Infine, lasciarono aperta la questione del carattere della sentenza e della conformità legale del processo: condanna dei cardinali o decisione dottrinale definitiva?

In Francia il decreto di condanna non fu mai fatto proprio dalla Chiesa francese (non fu mai discusso dai teologi della *Sorbonne*, cosa necessaria per l'approvazione). Lo scontro con la Chiesa si realizzerà come scontro tra poteri politici di stati. Con la rivoluzione e il periodo napoleonico la fiducia nel progresso generato dalla scienza diventerà la nuova religione e Galilei apparirà come lo scienziato che ha posto le basi della moderna scienza più che come eroe e vittima del libero pensiero.

In Italia con il Risorgimento e ancor più con l'unità d'Italia si forma il mito di Galilei (ed ancor più di Bruno, che era stato messo al rogo) di difensore del libero pensiero in contrapposizione al potere papale. Non solo, sotto l'influsso dell'idea positivista del progresso delle scienze e dei governi della destra storica Galilei diventa il simbolo della costruzione della *terza Roma delle scienze*, con la riorganizzazione del sistema scolastico e universitario. Da parte cattolica si contrapponevano invece giudizi critici pur nel tentativo di recuperarlo come un buon cristiano.

Nel 1979 Giovanni Paolo II riapre il caso Galilei, nel 1981 viene costituita una Commissione vaticana; sulla base dei risultati della commissione Giovanni Paolo II, davanti alla Pontificia Accademia delle Scienze, fornisce una ricostruzione dei fatti, sintetizzati da padre George Coyne, già direttore dell'Osservatorio vaticano, emerito e presidente dell'Osservatorio stesso, nel modo seguente:

- Galilei non capì che in quella fase storica il copernicanesimo era semplicemente un'ipotesi: affermandone la verità fisica, egli venne meno al metodo scientifico che egli stesso aveva contribuito a fondare.
- Alcuni teologi dell'epoca non compresero in che modo dovevano interpretare le Sacre scritture; per questo ne estesero il carattere prescrittivo alle questioni naturali.
- Da questi errori rimase immune il cardinale Bellarmino (ormai Santo), al quale apparvero chiari i termini in cui doveva essere affrontato il copernicanesimo.
- Appena furono fornite prove inappellabili della verità fisica, la Chiesa si affrettò ad accettare questa visione e ad ammettere implicitamente l'errore della condanna.

Insomma, i teologi furono dei buoni scienziati ma non buoni teologi e Galilei fu un buon teologo ma un cattivo scienziato. Inoltre Giovanni Paolo II sostiene che la sentenza del 1633 non fu *irriformabile* e non vi fu un coinvolgimento diretto del papa. Come molti studiosi, compreso padre Coyne, hanno mostrato, queste affermazioni sono tendenziose o addirittura false.

Il caso Galilei sembra essere tutt'altro che chiuso per quanto riguarda i rapporti tra scienza e religione e, ancor meno in Italia, per quel che riguarda il riconoscimento del valore culturale della scienza e della rilevanza di un approccio scientifico ai problemi. Ancor oggi si tende ad accettare come prevalenti dal punto di vista delle conoscenze le argomentazioni filosofiche-teologico-morali e quelle retoriche, e a limitare il valore conoscitivo della scienza, raccomandando sempre di non fidarsi troppo. L'accademia e la cultura italiana sono umaniste e non scientifiche; l'opinione di Urbano VIII sembra ancor oggi prevalente: la scienza può formulare ipotesi, ma non può arrivare a verità sull'uomo che solo la filosofia e la letteratura possono raggiungere.

L'aspirazione dell'intellettuale, più che alla conoscenza intesa come analisi e sintesi razionale che ricerca argomentazioni e connessioni da testare in termini di coerenza logica o sperimentale, è rivolta alla *sapienza* vista come capacità di conoscere le cose divine e umane, gli inizi e le cause di ognuna ricorrendo ad una capacità dell'uomo dei tempi che furono, oggi parzialmente perduta, ma che possiamo recuperare, ad esempio, tramite i miti greci, la Bibbia, le antiche civiltà dell'India … Ci possono essere varie culture, ma la vera cultura è umanista. Scriveva De Mauro sul significato restrittivo del termine *cultura* in Italia:

> Un esempio altissimo di uso restrittivo [del termine cultura] è il volume di Alberto Asor Rosa, *La Cultura*, incluso nella *Storia d'Italia* Einaudi del 1975. Lì si parla della cultura al singolare, dal 1870 al 1975, ed è inutile cercare qualsiasi nome che non sia di scrittore, poeta, romanziere, critico letterario, storico della letteratura, saggista di varia umanità. E non c'è traccia del fatto che siano esistiti in questo paese non solo singoli studiosi, ma scuole e tradizioni di discipline naturalistiche, fisiche, matematiche. La cultura è in questa accezione, conoscenza delle belle lettere.

Resta ancora il danno dell'autocensura e la tendenza a guardare solo al particolare.

9.3. *Le leggi del moto di Galilei*

Gli inizi della riflessione galileiana sul moto è di tipo aristotelica, ma contrariamente ad Aristotele, cfr. Capitolo 5, Galilei ritiene che la velocità (essenzialmente intesa come velocità media) sia proporzionale alla differenza (intesa con segno) dei pesi specifici del corpo e del mezzo in cui avviene il moto

$$v \propto \text{peso specifico} - \text{peso specifico del mezzo}$$

Il vuoto ora è possibile, anzi è nel vuoto che si può osservare il moto senza l'interferenza del mezzo. La dinamica è poi determinata nell'ambito della teoria medievale dell'*impeto*.

In questo contesto egli enuncia intorno al 1590 il *principio d'inerzia* per moti di rotazione, ancora in accordo con Aristotele. Il *principio d'inerzia*, come lo conosciamo, *ogni corpo che si muove tende a continuare il suo cammino in linea retta con la velocità che il corpo ha in quel momento*[3] fu enunciato da Cartesio, nei *Principi di filosofia* pubblicato nel 1644.

[3] In realtà nulla nell'esperienza mostra il moto inerziale; questo è una *idealizzazione*. È piuttosto il risultato del rovesciamento della domanda "cosa tiene in movimento un corpo?" in "cosa ne determina l'arresto?". Bisogna sempre mettere in conto che non solo le risposte, ma spesso anche le domande possono non essere ragionevoli e non è possibile rispondere a domande irragionevoli.

Tralasciando i primi tentativi pisani in cui Galilei cerca di dare una trattazione del moto in termini dei principi archimedei (della spinta e della leva), è con lo studio del sincronismo del pendolo che egli si rende conto della rilevanza dell'*accelerazione* nello studio del moto. Già prima del 1604, anno della lettera a Paolo Sarpi, Galilei è in possesso di alcune leggi del moto:

(1) *la legge oraria*: gli spazi percorsi sono proporzionali ai quadrati dei tempi,
(2) *la legge dei numeri dispari*: gli spazi percorsi in tempi uguali dall'inizio del moto stanno tra loro come i numeri dispari,
(3) *la legge del piano inclinato*: i tempi di discesa lungo piani inclinati di eguale altezza sono proporzionali alle lunghezze dei piani;

ed è alla ricerca di un *principio* che permetta di *dimostrare* o quanto meno di collegare o *unificare* questi risultati in una *teoria matematica del moto*. Non vi è certezza su come Galilei abbia acquisito questi risultati: per via sperimentale o come fatti plausibili (e coerenti) da assumere come *ipotesi di lavoro* per la formulazione di una teoria; noi non insistiamo su questo punto. Quanto alle velocità il discorso è più complesso. Galilei cerca di sviluppare una teoria della velocità nell'ambito della teoria delle proporzioni.

Qui è opportuno aprire una parentesi, cfr. ad esempio [33] [57]. Per noi la relazione tra spazio s, tempo t e velocità v nel moto uniforme prende la forma

$$v = \frac{s}{t}, \tag{9.1}$$

per Galilei (o meglio, usando la teoria delle proporzioni) si esprimerà invece come rapporto composto di quello tra gli spazi e di quello inverso dei tempi, cioè, in notazione moderna, come

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2}\frac{t_2}{t_1}. \tag{9.2}$$

Ora,

(i) mentre la prima formula (9.1) permette di *definire* la velocità, e come sappiamo anche la velocità istantanea per un moto non uniforme, la seconda no;
(ii) ammettendo secondo la teoria delle proporzioni solo rapporti di grandezze omogenee, la sola possibilità per introdurre una nuova grandezza è di definirla indipendentemente da queste e, introducendo opportuni assiomi, formulare relazioni quantitative fra le vecchie grandezze e le nuove;
(iii) infine, la seconda formula (9.2) permette di formulare teoremi di proporzionalità — come due velocità stanno nello stesso rapporto come i tempi corrispondenti o gli spazi corrispondenti — solo se i due moti si verificano a spazi uguali o tempi uguali, e questo non è molto adatto per moti accelerati; in questo caso, ad esempio per tempi uguali, la formula

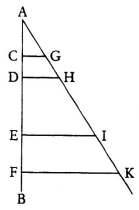


FIGURA 6. I momenti di velocità.

diventerebbe

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2},$$

formula dalla quale sparisce ogni riferimento ai tempi costanti: se il tutto viene espresso a parole, è molto facile incorrere in errori.

Anche per moti non uniformi possiamo, ovviamente, parlare di velocità in tempi *finiti*, cioè in un intervallo finito di tempi e la (9.2) ci permetterà di operare con spazio, tempo e velocità. Ma non è possibile discutere di moto accelerato senza introdurre una *velocità istantanea*. Questa dovrà essere introdotta indipendentemente dalla velocità e, in accordo con (ii) servirà anche identificare le relazioni quantitative con le altre grandezze senza un approccio numerico alla questione.

Nella lettera del 1604 a Paolo Sarpi Galilei annuncia di aver trovato il principio per il moto (naturalmente) accelerato di caduta dai gravi nella proporzionalità tra velocità e distanza dal punto di inizio del moto (principio che come sappiamo è errato).

Egli introduce i *momenti* o *gradi di velocità* tramite la *percossa*, cioè tramite il processo fisico d'urto, cfr. [42], II, p.730:

> Posate un grave sopra una materia cedente, lasciandovelo sin che prema quanto egli può con la sua semplice gravità: è manifesto che, alzandolo un braccio o due, lasciandolo poi cadere sopra la medesima materia, farà con la percossa nuova pressione, e maggiore che la fatta prima co'l solo peso; e l'effetto sarà cagionato dal mobile cadente congiunto con la velocità guadagnata nella caduta. Quanto sia la velocità d'un grave cadente, lo potremo noi senza errore conietturare dalla qualità e quantità della percossa.

La percossa è pensata da Galilei tramite il processo fisico d'urto come proporzionale alla velocità acquisita durante la caduta e quindi all'altezza[4]. Ma i gradi

[4] Quando nel diciottesimo secolo saranno effettuati degli esperimenti, questi mostreranno una dipendenza lineare della percossa dall'altezza di caduta. Essendo però a quel punto acquisito che la velocità istantanea è proporzionale alla radice dello spazio di caduta, essi confermeranno la teoria leibniziana della forza viva proporzionale al quadrato della velocità.

di velocità non possono dar luogo a spostamenti perché durano un istante. Se un mobile cade su una linea verticale AB per ogni punto C, D, E, F in AB c'è un grado di velocità che possiamo rappresentare geometricamente con i segmenti CG, DH, EI, FK. Essi danno luogo per somma (si tratta di grandezza omogenee) alla *velocità complessiva*, intesa come la velocità con cui il mobile passa una data linea che si lega poi con il tempo e lo spazio. I gradi di velocità sono in un certo senso i componenti infinitesimi delle velocità complessive e i rapporti tra le velocità complessive sono uguali a quelli di tutti i gradi di velocità che li compongono. In considerazione della riformulazione geometrica, vediamo quindi che la velocità con cui si è passata la linea AD sta alla velocità con cui si è passata AC con proporzione doppia di quella che ha DA a CA, cioè le velocità complessive stanno come i quadrati degli spazi percorsi. A questo punto, con una argomentazione retorica, cfr. [41], p. XXXV-XXXVI, Galilei conclude in modo errato con la legge oraria del moto.

Malgrado la debolezza dell'ultimo passo, Galilei conserva lo schema generale per dedurre le altre due leggi. Stabilite le tre leggi, egli mostra che da due di esse è possibile dedurre l'altra e sviluppa una serie di interrelazioni che poi troveranno posto nei *Discorsi*, pubblicati a Leida nel 1638: trova in particolare che la velocità è proporzionale al tempo. Ma questo è incompatibile con la proporzionalità velocità-spazio.

A questo punto Galilei introduce il tempo, al posto dello spazio, come variabile indipendente. E nei *Discorsi* è appunto dalla proporzionalità tra velocità e tempi che Galilei riparte per dedurre le leggi del moto. La nuova ipotesi viene però a scombinare una costruzione coerente, anche se con vari errori. Ad esempio, essa non è più in grado di render conto del moto su piani inclinati diversi, perché essi avvengono in tempi diversi.

Così lo studio del moto naturalmente accelerato comincia nei *Discorsi* con la definizione di proporzionalità tra velocità e tempo, cfr. [42], II, p.737:

> Moto equabilmente, ossia uniformemente accelerato, diciamo quello che, a partire dalla quiete, in tempi eguali acquista eguali momenti di velocità

e con l'assunzione:

> Assumo che i gradi di velocità, acquistati da un medesimo mobile su piani diversamente inclinati, siano eguali allorché sono eguali le elevazioni di quei piani medesimi.

Ma ora i fondamenti sono compositi e non semplici come prima, inoltre, lasciando inalterato lo schema generale ed, in particolare, la relazione tra velocità istantanee e velocità complessive, non è possibile arrivare a risultati corretti. Egli è quindi, in qualche modo, costretto a rinunciare alla somma dei momenti e ricorrere a metodi retorici, in qualche modo simili a quelli di Oresme, per dimostrare la legge del moto. Questo fallimento, a posteriori, può esser letto come la dimostrazione dell'impossibilità di un ponte fra *grandezze* infinitesime e *grandezze* macroscopiche. Perché questo avvenga bisognerà abbandonare

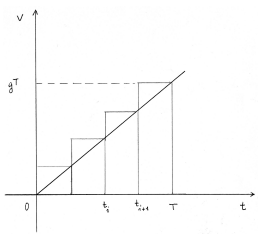


FIGURA 7. Velocità proporzionale al tempo e legge di moto

il principio di omogeneità (via una matematica basata sui numeri) e dotare gli istanti di spessore *infinitesimo*: questo accadrà con il *calcolo infinitesimale* di Newton e Leibniz.

Concludiamo mettendo in evidenza alcuni aspetti della teoria galileiana del moto uniformemente accelerato così come probabilmente furono letti nel XVIII secolo e come infatti possono essere letti, pur non seguendo Galilei filologicamente.

Dalla proporzionalità tra velocità e tempo e dalla legge oraria, si deduce immediatamente quello che nel medio evo era noto come il *Teorema Mertoniano*, cfr. ad esempio [45]: *un corpo uniformemente accelerato percorre la stessa distanza di un corpo con velocità uniforme pari alla media delle velocità iniziale e finale*. Infatti da

$$s = v_0 T + \frac{1}{2} g T^2, \qquad v_1 = v_0 + gT$$

segue che

$$s = \Big(v_0 + \frac{1}{2}(v_1 - v_0) \Big) T = \frac{v_0 + v_1}{2} T.$$

Viceversa, sempre supponendo *velocità proporzionale al tempo* e per semplicità velocità iniziale nulla, $v = gt$ cfr. Figura 7. Suddividiamo l'intervallo dei tempi $[0,T]$ in intervalli I_i, $I_i = [t_i, t_{i+1}]$, di lunghezze uguali, $t_{i+1} - t_i =: \tau$, e consideriamo il moto che in ciascun intervallino I_i avviene con velocità costante uguale gt_{i+1} (o, sulla base del teorema mertoniano, $1/2g(t_i + t_{i+1})$), che possiamo pensare come una 'approssimazione' del moto iniziale. Lo spazio percorso nel secondo moto in ciascun intervallo I_i è chiaramente $\tau g t_{i+1}$, possiamo quindi concludere 'per approssimazione' che lo spazio percorso nell'intervallo $[0,T]$ è l'area del triangolo OTB, cioè

$$s := \frac{1}{2} g T^2,$$

che è la legge oraria di Galilei, $v_0 = 0$.

Consideriamo ora un piano inclinato di altezza $AC =: h$ e lunghezza $AB =: l$, cfr. Figura 8. Se indichiamo con t_{AC} e t_{AB} i tempi di caduta verticale lungo AC

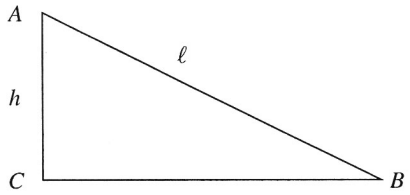


FIGURA 8. Piano inclinato di altezza h e lunghezza l.

e lungo il piano inclinato AB e con v_C e v_B le velocità raggiunte nei punti C e B sempre *partendo con velocità nulla*, abbiamo

$$t_{AC} = \frac{AC}{\frac{1}{2}v_C}, \quad t_{AB} = \frac{AB}{\frac{1}{2}v_B}, \quad \text{cioè,} \quad \frac{t_{AB}}{t_{AC}} = \frac{AB}{AC}\frac{v_C}{v_B}.$$

Assumendo con Galilei che

i gradi di velocità che lo stesso corpo acquisisce su piani inclinati diversi ma con la stessa altezza siano uguali

cioè, $v_C = v_B$, segue

$$\frac{t_{AB}}{t_{AC}} = \frac{AB}{AC}. \tag{9.3}$$

In effetti, (9.3) è equivalente a $v_C = v_B$.

Da $h = \frac{1}{2}gt_{AC}^2$, e $v = gt_{AC}$, e $v_c = v_B$ segue la proporzionalità tra il quadrato della velocità acquisita e l'altezza di caduta, cfr. il capitolo successivo,

$$gh = \frac{1}{2}v_C^2$$

e che il tempo di caduta lungo il piano inclinato con velocità iniziale nulla è dato da

$$t_{AC} = \frac{AC}{v_C/2} = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{l}{\sqrt{h}}. \tag{9.4}$$

Da (9.4) segue il seguente risultato noto come la *legge delle corde di Galilei*:

Si considerino i piani inclinati alla circonferenza dal punto più alto o più basso di un cerchio verticale. I tempi di caduta lungo questi piani sono tutti uguali.

Infatti, considerando un cerchio di diametro $OB = d$ e una corda OP di lunghezza l e altezza $OH = h$, come nella Figura 9 a sinistra, dalla similarità dei triangoli OPH e BOP segue $l/h = d/l$, cioè, $l^2/h = d$; (9.4) si scrive quindi come

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{l}{\sqrt{h}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{d}.$$

FIGURA 9. Il teorema delle corde di Galilei e la retta di discesa più rapida.

Vale anche il viceversa. Infatti, se i tempi di caduta lungo OP e OB sono uguali, allora

$$\frac{OP}{\sqrt{OB}} = \frac{OB}{\sqrt{OB}}, \quad \text{cioè,} \quad OP^2 = OB \cdot OH$$

e questo implica che l'angolo OPB è retto, quindi che P e B appartengono allo stesso cerchio con centro O.

Da (9.4) segue anche che il segmento di discesa più rapida da A, cfr. Figura 9 (a destra), ad un punto della semiretta verticale BC a distanza r da A è la linea inclinata a 45 gradi. Infatti il tempo per andare da A ad un generico punto H sulla semiretta da B attraverso C è

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{AH}{\sqrt{BH}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\frac{r^2+BH^2}{BH}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\frac{r^2}{BH}+BH},$$

che è minimo, al variare di H, quando $BH = r$; con tempo minimo dato da $2\sqrt{r/g}$.

Galilei quindi dimostra, con riferimento alla Figura 10 a destra che, partendo da A con velocità zero, il tempo di caduta lungo la linea spezzata ADC è più piccolo del tempo di discesa lungo la linea AC. Per dimostrare questo Galilei usa la legge delle corde e un argomento geometrico; per una dimostrazione analitica si veda 11.22 Capitolo 11.

Nello *Scholium* fa la seguente osservazione:

> Da quanto abbiamo provato sembra che si possa dedurre [colligi posse videtur] che il moto più rapido da un punto all'altro non si realizza lungo la linea più corta ma lungo un arco di cerchio.

Per convincere il lettore Galilei divide l'arco di cerchio in archi uguali come in Figura 10, nota che, come già provato,

$$t_{AC} > t_{AD} + t_{DC} \tag{9.5}$$

e afferma

FIGURA 10. Tempo di caduta lungo cammini spezzati.

è plausibile che il tempo di discesa lungo le corde spezzate DEC partendo con velocità zero in A richieda un tempo minore che lungo CD,

cioè,

$$t_{DC} > t_{DE} + t_{EC}. \tag{9.6}$$

Iterando il processo Galileo deduce quindi che il tempo di discesa lungo il cammino spezzato $ADEFGC$ sia minore del tempo di discesa lungo la linea spezzata $ADEFC$,

conseguentemente, più le poligonali inscritte sono vicine alla circonferenza, meno è il tempo necessario per andare da A a C.

Ma, la deduzione di Galilei non è corretta: l'argomento che prova (9.5) non prova (9.6), perché nel primo caso la velocità iniziale v_A è zero, mentre nel secondo caso la velocità iniziale v_D in D non è più zero; è invece vera l'intuizione di Galilei che il tempo di discesa lungo un quarto di cerchio sia più breve che quello lungo la corda, si veda 11.23 Capitolo 11. Non è invece vero che il quarto di cerchio sia il cammino di tempo minimo tra tutti i possibili cammini che congiungono A e C, si veda ad esempio [55].

CAPITOLO 10

Huygens

CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1685), secondo figlio del poeta e diplomatico olandese Constantin Huygens, fu fin da giovane introdotto negli ambienti politici e intellettuali d'Europa: per tutta la sua vita frequentò le corti e le accademie e fu in contatto, si può dire, con tutti gli scienziati del suo tempo. Fu fisico, astronomo e, soprattutto, matematico. Non fu un rivoluzionario nella sua ricerca e non fu interessato alla costruzioni di grandi sintesi, piuttosto, come si dice oggi, fu un *problem solver*; ma, nella soluzione dei problemi fu geniale, introdusse molte idee nuove che influenzarono i contemporanei e, forse ancor più, le generazioni successive fino al secolo scorso. Fu sostenitore del *metodo geometrico* e rifiutò il nuovo calcolo; d'altro canto perché ricorrere ad un nuovo metodo quando lui era stato in grado di risolvere tutti i suoi problemi usando il metodo geometrico, tranne il problema della catenaria? Ed infatti verso la fine della sua vita, come risulta dalle lettere, probabilmente si ricredette sull'importanza del nuovo calcolo quando Leibniz e Johann Bernoulli ridussero la costruzione della catenaria alla quadratura dell'iperbole.

Nel 1673 pubblica l'*Horologium oscillatorium sive de motu pendolorum* che incorpora molte delle sue ricerche a partire dagli anni 1650: discute della caduta dei gravi, dimostra che un corpo che cade lungo una cicloide rovesciata raggiunge il punto più basso in un tempo che è indipendente dal punto in cui comincia la caduta, cioè che la cicloide è *isocrona* e introduce la teoria delle evolute, fatti che giustificano matematicamente l'introduzione delle piastre cicloidali ai due lati del pendolo forzandolo a muoversi lungo un cammino cicloidale isocrono indipendentemente dall'ampiezza delle oscillazioni; discute il pendolo composto e il pendolo conico dove enuncia varie proposizioni sulla forza centrifuga (le dimostrazioni appariranno postume nel *De vi centrifuga*); nel 1657, a seguito degli scambi con Pascal e Fermat, compone il *De ratiociniis in ludo aleae* (che è la prima opera pubblicata sull'argomento); nel 1678 appare il suo *Traité de la lumière* in cui difende una teoria ondulatoria della luce, in contrapposizione con la teoria corpuscolare di Newton. Ma le sue opere, pubblicate a cura della Società Olandese delle Scienze, occupano 22 volumi, [71]; si possono quindi capire le difficoltà anche solo ad accennare ad una analisi dello sviluppo, dei risultati, dei rapporti con i contemporanei e del suo impatto sulle generazioni successive. Il lettore interessato può vedere ad esempio [9], [12],

[17], [33], [101] e [103], noi ci limiteremo invece ad illustrare alcuni risultati di particolare rilevanza per la nostra storia e concludiamo questa introduzione con alcune osservazioni sul *Il problema della catenaria*.

Il problema ha la sua fonte in Galilei. Discutendo di come tracciare la traiettoria di un proiettile, Salviati nella Seconda giornata dei *Discorsi*, [41] p. 161, dice:

> Fermisi ad alto due chiodi in una parete, equidistanti all'orizonte e tra di loro lontani il doppio della larghezza del rettangolo su 'l quale vogliamo notare la semiparabola, e da questi due chiodi penda una catenella sottile, e tanto lunga che la sua sacca si stenda quanta è la lunghezza del prisma: questa catenella si piega in figura parabolica, sì che andando punteggiando sopra 'l muro la strada che vi fa essa catenella, haremo descritta un'intera parabola...

e, più precisamente, sempre Salviati nella Quarta giornata, [41] p. 293:

> Ma più voglio dirvi, recandovi insieme meraviglia e diletto, che la corda così tesa, e poco o molto tirata, si piega in linee, le quali assai si avvicinano alle paraboliche: e la similitudine è tanta, che se voi segnerete in una superficie piana ed eretta all'orizonte una linea parabolica, e tenendola inversa, cioè col vertice in giù e con la base parallela, all'orizonta, facendo pendere una catenella sostenuta nelle estremità della base della segnata parabola, vedrete allentando più o meno la detta catenuzza, incurvarsi e adattarsi alla medesima parabola, e tale adattamento tanto più esser preciso, quanto la segnata parabola sarà men curva, cioè più distesa; sì che nelle parabole descritte con elevazione sotto i grad. 45, la catenella camina quasi *ad unguem* sopra la parabola.

Il problema che si poneva era di costruire o determinare la configurazione della catenella: Huygens fa vedere che la forma non è quella di una parabola, ma con i suoi metodi geometrici non riuscirà a trovarla; questa verrà trovata con il nuovo calcolo.

10.1. *Cinematica*

Al di là delle critiche specifiche alla filosofia della natura di Cartesio, la filosofia meccanicistica della natura — appresa da Huygens da giovane direttamente da Cartesio e preponderante nei circoli scientifici europei — eserciterà una notevole influenza nella concezione del moto di Huygens: egli cercherà di ridurre i fenomeni del moto a modelli geometrici, in questo sicuramente affascinato dalla trattazione Galileana, cercando di evitare ogni riferimento a *forze esterne*, piuttosto guardando a queste come effetto del movimento. Pure le 'forze', ancor se misurate, conformemente al modello filosofico, in termini di velocità traspaiono dalla sua trattazione come *forze vive* o capacità di azione.

10.1. *Il moto circolare uniforme*. Cominciamo ricordando alcuni semplici fatti che per noi oggi sono parte della meccanica classica. Il *moto circolare uniforme* è descritto dalle equazioni orarie

$$x(t) = r\cos\omega t, \quad y(t) = r\sin\omega t,$$

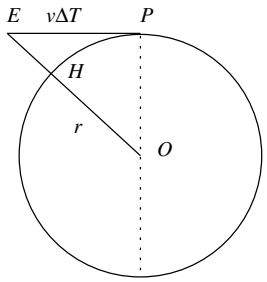


FIGURA 1. La forza centrifuga.

dove r è il raggio del cerchio, ω è la velocità angolare e t il tempo. La *velocità vettoriale* è calcolata come $(\dot{x},\dot{y})$, cioè

$$(-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t),$$

con modulo costante $v=\omega r$, mentre l'accelerazione è

$$(-r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\sin\omega t).$$

In accordo con la seconda legge di Newton — forza uguale massa per accelerazione —, essendo l'accelerazione non nulla (e si osservi che questo segue dal carattere *vettoriale* della velocità che in modulo è costante) segue che sulla particella in movimento agisce una *forza centripeta*, cioè diretta verso il centro, in modulo pari a

$$F=m\omega^2 r=m\frac{v^2}{r}.$$

Per il cartesiano Huygens non c'è nessuna forza centripeta, ma, dovuto alla *inerzia*, un tentativo di allontanamento del corpo lungo la tangente al cerchio, identificato in una *forza centrifuga*. Brevemente accenneremo ora a come Huygens procede per calcolare questa forza centrifuga, cfr. [103] [33].

Supponiamo di muoverci da un punto P con velocità v per un tempo Δt lungo la tangente al cerchio e di arrivare in E, cfr. Figura 1. Pensando di muoverci sulla Terra invece che lungo la tangente, sia H il punto di arrivo. Essendo Δt piccolo, si può pensare che i punti O, H ed E siano allineati ($\tan x = x+1/3x^3+\ldots$). Pertanto l'inerzia ci avrebbe sollevato di

$$\delta=\sqrt{r^2+(v\Delta t)^2}-r$$

e, poiché $\sqrt{1+x}=1+1/2x+\ldots$,

$$\delta=r\frac{1}{2}\frac{v^2(\Delta t)^2}{r^2}=\frac{v^2}{2r}(\Delta t)^2.$$

A questo punto Huygens eguaglia la gravità, la caduta per gravità $\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$, alla distanza δ dovuta alla forza centrifuga di Cartesio e trova

$$g = \frac{v^2}{r}.$$

Con questa formula Huygens calcola la costante di gravità, cioè lo spazio (coerentemente con quanto sopra il doppio) percorso nella caduta libera nel primo secondo, usando la rotazione e la conoscenza del raggio della Terra, e lo confronta con i precedenti valori trovati da Mersenne, da lui stesso e dall'astronomo Giovannni Battista Riccioli (1598-1671) nell'*Almagestum novum*, 1651, ottenuti usando le oscillazioni del pendolo (che però non è isocrono). Tutto questo fornisce un semplice esempio di come un'analisi teorica del problema possa migliorare la sperimentazione.

10.2. *La caduta dei gravi e l'assioma di Torricelli*. Huygens invece di assumere l'assioma di Galileo secondo cui le velocità acquisite lungo diversi piani inclinati sono uguali allorché sono uguali le elevazioni, lo dimostra trasformando il principio di Torricelli da principio statico in un principio dinamico, probabilmente intuito sulla base dell'analisi del moto del pendolo e dell'urto elastico come pure sulla base della tradizione che si ricollega a Stevino. Possiamo enunciare questo assioma come: ogni corpo può risalire fino alla stessa altezza da cui è caduto. In realtà Huygens enuncia e usa il principio per sistemi di masse:

PRINCIPIO MECCANICO DI HUYGENS: *Il centro di gravità di un sistema di masse può risalire esattamente alla stessa altezza da cui è disceso.*

Lo stesso Huygens osserva che questo principio non è altro che l'affermazione che i corpi pesanti non si muovono da sé verso l'alto unito a una sorta di reversibilità della legge del moto. Infatti se un corpo dopo la caduta rimbalzasse oltre il punto di caduta contraddirebbe il principio di Torricelli e l'ovvia intuizione steviniana della impossibilità di un moto infinito; mentre usando lo stesso argomento per il moto rovesciato il corpo non può rimbalzare ad una altezza minore. Lo stesso argomento chiaramente si applica come prova del principio galileiano dell'uguaglianza delle velocità finali su piani inclinati diversi ma con la stessa altezza ed, in effetti, su ogni curva decrescente con gli stessi punti iniziali e finali.

Consideriamo un sistema di masse m_i che cadono da altezze h_i acquistando velocità v_i; in termini di uguaglianza fra l'altezza di caduta e l'altezza di ascesa del centro di gravità abbiamo

$$g\sum m_i h_i = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2$$

che si legge come eguaglianza dell'*energia potenziale* con l'*energia cinetica* o, tenendo conto dei segni opposti da dare alla caduta e all'ascesa come *principio*

della conservazione dell'energia totale

$$\sum m_i g h_i + \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \text{costante}.$$

Il termine $\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2$ è quello che da Huygens e da Leibniz è chiamato *forza viva* del sistema (nella visione che le forze sono associate alle velocità) e da noi *energia cinetica*. Infine osserviamo che quello che in Huygens sono principi, nella teoria di Newton diventeranno, oltre che più chiari, soprattutto teoremi; ma questo richiederà l'introduzione della nozione di forza come variazione della velocità.

10.3. *Il pendolo*. Consideriamo un pendolo semplice con una massa m concentrata a distanza r dal centro di oscillazione. Quando lo si muove da una posizione di massima escursione θ_0 dall'asse di oscillazione, l'altezza di caduta della massa m è kr, $k := \sin\theta_0$. Considerando che il moto circolare è equivalente al moto di caduta e che, se ω è la velocità angolare, la velocità di una massa a distanza r dal centro di oscillazione è ωr, in termini di caduta dei gravi, la capacità di risalita corrispondente ad una velocità v è pari a $\omega^2/2g$. Dal principio di Huygens troviamo quindi

$$kmr = \frac{\omega^2}{2g} m r^2, \quad \text{cioè}, \quad \omega^2 = \frac{2g}{r}\sin\theta_0. \tag{10.1}$$

formula che lega la velocità angolare del pendolo all'angolo di massima escursione e alla lunghezza del pendolo.

Huygens si occupa anche del pendolo composto o fisico, cioè dell'oscillazione di un'asta rigida con un peso distribuito lungo il filo. Per semplicità, supponiamo di avere un certo numero di masse m_i distribuite su un'asta rigida a distanze rispettivamente r_i dal centro di oscillazione. La massa totale è ovviamente $M = \sum m_i$ e il baricentro delle masse è a distanza $r_B = \frac{1}{M}\sum_i r_i m_i$ da centro di oscillazione. Quest'ultimo è allora a distanza kr_B dall'asse di oscillazione. Sommando le equazioni (10.1) relative a ciascuna delle masse, si ottiene,

$$kr_B = k\frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{\omega^2}{2g}\frac{\sum_i m_i r_i^2}{\sum m_i}.$$

Inoltre, sempre per il principio di Huygens applicato questa volta al baricentro

$$kr_B = \frac{\omega^2}{2g} r_B^2,$$

troviamo

$$\omega^2 = \frac{2g}{r_B}\sin\theta_0 \qquad \text{e} \qquad r_B^2 = \frac{\sum m_i r_i^2}{\sum m_i}.$$

10.4. *Le leggi dell'urto*. Il problema dell'urto è centrale sia per la filosofia meccanicista che per lo sviluppo della meccanica e per l'attività sperimentale:

coinvolse un po' tutti gli studiosi della seconda metà del Seicento. Qui vogliamo solamente illustrare alcuni aspetti dell'approccio di Huygens, in particolare non ci soffermeremo sulle correzioni apportare da Huygens alla teoria di Cartesio e continueremo ad usare un linguaggio algebrico più che geometrico.

Huygens considera due masse m_1, m_2 che entrino in collisione sopra una nave che si muove di velocità costante rispetto alla riva; in base al principio di relatività che enuncia esplicitamente in questo caso, il fenomeno dell'urto non risente della circostanza; egli sceglie la velocità della nave opportunamente in modo che per l'osservatore sulla riva l'urto sia riconducibile ad una situazione nota e da questo deduce quello che vedrà l'osservatore sulla nave. Prendendo come direzione positiva quella che va dal primo corpo al secondo, denotiamo con u_1, u_2 e v_1, v_2 le velocità rispetto alla nave prima e dopo l'urto, mentre con U_1, U_2 e V_1, V_2 le corrispondenti velocità prima e dopo l'urto rispetto alla riva; infine sia W la velocità della nave.

Huygens comincia col considerare l'urto elastico caratterizzato da

$$\text{se} \quad m_1 = m_2 \quad \text{e} \quad u_1 = -u_2, \quad \text{allora} \quad v_1 = -u_1 \quad \text{e} \quad v_2 = -u_2.$$

Continuando ad assumere masse uguali, ma velocità diverse, $u_1 > u_2$, scegliamo $W := -(u_1 + u_2)/2$; allora

$$U_1 = u_1 - \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{u_1 - u_2}{2}, \quad U_2 = u_2 - \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{u_2 - u_1}{2}.$$

Dalla riva vale allora l'assioma di urto elastico, quindi $V_1 = (u_2 - u_1)/2$ e $V_2 = (u_1 - u_2)/2$. Da questo segue

$$v_1 = \frac{u_2 - u_1}{2} + \frac{u_1 + u_2}{2} = u_2, \quad v_2 = \frac{u_1 - u_2}{2} + \frac{u_1 + u_2}{2} = u_1,$$

cioè le velocità dei due corpi sono state ancora scambiate.

Per trattare il caso di masse diverse Huygens introduce due nuovi assiomi: se un corpo di massa maggiore urta un corpo di massa minore fermo, impartirà a questo una certa velocità e la sua velocità risulterà diminuita; se per uno dei due corpi il valore assoluto della velocità risulta immutato dopo l'urto, lo stesso succede per l'altro corpo. Supponiamo inizialmente $m_1 < m_2$ e $u_2 = 0$. Dopo l'urto si genererà una velocità v_2 positiva e più piccola di u_1. Se scegliamo $W = -\frac{1}{2}v_2$, le velocità rispetto alla riva sono $u_1 - \frac{1}{2}v_2$ e $-\frac{1}{2}v_2$ prima dell'urto e $v_1 - \frac{1}{2}v_2$ e $-\frac{1}{2}v_2$ dopo l'urto. Siccome il valore assoluto della velocità della seconda massa è rimasto immutato, si ha $u_1 - \frac{1}{2}v_2 = \frac{1}{2}v_2 - v_1$ e così via; ma, noi ci fermiamo qui.

Aggiungiamo che Huygens introduce la *quantità di moto* come prodotto di massa per valore assoluto della velocità, dicendo che in generale può variare ma che si conserva per urti elastici; dai suoi appunti risulta però che conosceva il principio della conservazione della quantità di moto totale come somma

di massa per velocità. Egli infatti poteva derivare questa legge partendo dalla conservazione dell'energia cinetica

$$m_1u_1^2 + m_2u_2^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2,$$

cioè

$$m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2)$$

unita all'invarianza della velocità relativa

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2$$

da cui segue immediatamente

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2.$$

Un altro risultato di cui Huygens sembra fosse cosciente è l'invarianza del moto del centro di gravità del sistema prima e dopo l'urto, cioè, se u_0 denota la velocità del centro di gravità delle due masse:

$$(m_1 + m_2)u_0 = m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

10.5. *Inerzia, relatività e spazio*. Il principio di inerzia e il principio di relatività pongono seri problemi relativamente alla nozione di *spazio fisico* che, in qualche modo, è legata a quella di *spazio geometrico* ed è in questo periodo che infatti ha inizio una riflessione sulla nozione di spazio[1].

In questo periodo sembra delinearsi una concezione di uno spazio fisico in cui avvengono i fenomeni e dello spazio geometrico della geometria euclidea come ente razionale omogeneo e infinito in cui si studia la geometria, con una progressiva identificazione dello spazio (determinato dalla Terra e dalle stelle fisse, lo *spatium mundanum*) con lo spazio geometrico[2].

Ma, dal punto di vista della nascente meccanica, si pone un problema delicato. Il moto di una particella è relativo all'osservatore e le sue leggi sono

[1] Di queste questioni Huygens sembra cosciente, pare anche avesse intenzione di scrivere un trattato, ma, a giudicare da quello che è rimasto egli non sembra essere andato oltre a un primo tentativo di analisi della questione, cfr. [71] XVI, pp. 213-233: *Pièces concernant la question du "mouvement absolu"*.

[2] C'è da osservare che per tanto tempo non si sente e non si sentirà l'esigenza di uno studio specifico dello *spazio geometrico*, questo non potendo non dipendere dall'occorrenza e necessità di spazi diversi. Per la verità fin dall'antichità esistono due geometrie: quella euclidea e quella sferica, ma la seconda ha luogo sulla sfera, e, quindi, in ambiente euclideo. Inoltre, in qualche modo, solo fatti globali le distinguono, mentre, localmente, sono del tutto interscambiabili. Altre istanze potrebbero richiedere la necessità di spazi diversi da quello euclideo, come la geometria prospettica; ma ancora una volta localmente questa è descrivibile in termini euclidei. Con le analisi filosofiche dell'empirismo inglese dello *spazio visivo* e di quello *tattile* si pone la questione di cosa intendere per spazio fisico. Ma la questione sembrò avere più una valenza metafisica che scientifica.

invarianti rispetto ad osservatori che si muovono di moto uniforme rispetto ad un sistema che non è accelerato, i cosiddetti *sistemi inerziali*. Ma qui sembra esserci un circolo vizioso. Esiste un sistema inerziale? Questo sistema è in movimento o no? Questo sistema coincide con lo *spatium mundanum*? Dobbiamo accontentarci dei moti relativi e abbandonare l'idea di un moto vero e affermare che *tutti* gli schemi di riferimento sono equivalenti? Sicuramente la frattura con la meccanica aristotelica è netta: il moto non è uno stato del corpo, può esser visto solo come una relazione tra il corpo e lo schema di riferimento e, quindi, indifferentemente come proprietà del corpo o del riferimento.

Il seguito della storia mostrerà in che modo lo studio di problemi fondamentali matematici e fisico-matematici contribuirà a chiarire e dare risposte a queste questioni, anche se non ovviamente alla questione metafisica del "cosa sia lo spazio fisico".

Concludiamo questa sezione osservando che la spiegazione di Huygens della gravità resterà più o meno quella meccanicistica, introdotta da Cartesio, della tendenza centrifuga di una materia sottile che ruota turbinosamente attorno alla Terra, e che confusa sarà sempre la sua posizione sui concetti di peso e massa.

10.2. *Il pendolo isocrono*

La costruzione e il miglioramento di un pendolo isocrono come pure le sue applicazioni al problema della longitudine fu una costante della vita scientifica di Huygens. Le dimostrazioni matematiche che supportano la sua costruzione sono basate sulla dimostrazione dell'*isocronismo della cicloide* e sull'introduzione del concetto di *evoluta* e di *evolvente*. Per noi oggi la teoria geometrica di Huygens è molto più semplice e trasparente in termini di calcolo differenziale, come avremo occasione di vederne in [55]. Per cui rimandiamo il lettore interessato alle opere già citate; qui ci limitiamo a qualche osservazione sulle nozioni di *evolvente* e *evoluta*.

10.6. *Involuta, evoluta: pendolo isocrono e rettificazione*. Le nozioni di involuta (o evolvente) e evoluta, che Huygens discute nella terza parte dell'*Horologium oscillatorium*, sono oggi trattate nei manuali come esercizi correlati allo studio della curvatura di una curva. Ma nel contesto in cui ci stiamo muovendo giocano un ruolo importante, che vogliamo brevemente illustrare. Eviteremo di entrare in dettagli che, come sempre in Huygens, seguono il metodo geometrico.

Consideriamo una curva piana C, che in questo contesto chiamiamo per motivi che risulteranno evidenti dopo curva *evoluta*, e si immagini una corda arrotolata attorno a C da un punto P_1 sulla curva, diciamo verso destra, cfr. Figura 2.

Teniamo fisso l'estremo P_1 e srotoliamo l'altro estremo tenendo tesa la corda. Il luogo dei punti C' descritto dall'estremo libero è l'*involuta* (o l'*evolvente*)

FIGURA 2. Involuta meccanicamente e evoluta geometricamente.

della curva C. Si dimostra che nell'estremo libero la corda è perpendicolare al luogo C'. Ovviamente ciascun punto della corda descrive pure un'involuta, ad esempio C'', e queste non si possono toccare. Considerando poi che la corda è tangente a C in tutti i punti in cui si stacca da C, ne segue che ogni traiettoria ortogonale alle curve della famiglia delle tangenti è un'involuta della curva.

Il processo meccanico appena descritto associa ad una curva evoluta la curva involuta. In modo *duale* un processo geometrico identifica l'evoluta da una sua involuta. Data una curva MPQ, cfr. Figura 2, in questo contesto l'involuta, dove Q è infinitamente vicino a P, l'intersezione N della normale in P con la normale in Q descrive i punti sull'evoluta. In termini moderni, dopo Newton e Leibniz (Huygens non usò mai questa caratterizzazione), l'*evoluta* è il luogo dei *centri di curvatura* dell'involuta (in modo impreciso, dei centri dei cerchi che hanno miglior contatto con l'involuta).

Huygens dimostra quindi (geometricamente) che l'evoluta di una cicloide è una cicloide o, più precisamente, che l'evoluta della metà sinistra della cicloide inferiore nella Figura 3 è la metà destra della cicloide superiore. In questo modo ha una dimostrazione matematica per il suo *pendolo isocrono*: se un pendolo oscilla tra due piastre a forma di cicloide, la sua traccia è una cicloide e quindi è isocrono. Ritorneremo in [55] sul pendolo isocrono.

Huygens costruì, sempre con metodi geometrici, l'evoluta di una parabola

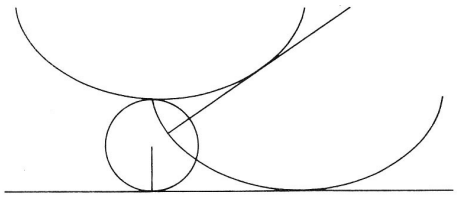


FIGURA 3. Evoluta e involuta di una cicloide.

e di un ellisse e, più in generale, diede un metodo generale per la costruzione dell'evoluta: questo, per definizione, permetteva ovviamente una soluzione geometrica del problema della rettificabilità degli archi di curva. Infatti il calcolo della lunghezza di un arco di curva si può ricondurre alla costruzione della curva involuta dell'arco.

10.3. *La teoria ondulatoria della luce*

La teoria della luce è l'argomento del *Traité de la lumière*. Rispondendo alla domanda se la luce ha un'esistenza indipendente o sia una condizione di qualcos'altro, Huygens dice che essa consiste nel movimento di una materia finemente frantumata, l'etere. Egli immagina che le particelle in rapido movimento di un corpo luminoso vengano in collisione con le particelle dell'etere e che questo impulso si propaghi sfericamente attorno alla fonte luminosa con velocità finita (dipendente dalla densità del mezzo). Ciascuna particella di etere che riceva un impulso diventa essa stessa una fonte luminosa e trasmette questo impulso in ogni direzione. Dalle piccole onde microscopiche si viene a formare, come *inviluppo*, l'onda macroscopica o *fronte d'onda*.

PRINCIPIO DI HUYGENS: *Consideriamo un punto P sul fronte d'onda Σ_{θ_0}, al tempo θ_0 come sorgente di un nuovo fronte d'onda elementare, bordo di una figura convessa caratteristica (del materiale) $\partial B(P,\theta)$, che si è propagato da P in un tempo θ. Allora il fronte d'onda $\Sigma_{\theta_0+\theta}$, $\theta > 0$, è l'inviluppo dei fronti d'onda elementari $\partial B(P,\theta)$, con centri su Σ_{θ_0}.*

Sulla base di questo principio Huygens studiò la propagazione, la riflessione e la rifrazione e, soprattutto, la doppia rifrazione del cristallo d'Islanda, con risultati a volte non pienamente corrispondenti alle osservazioni; e questo fu

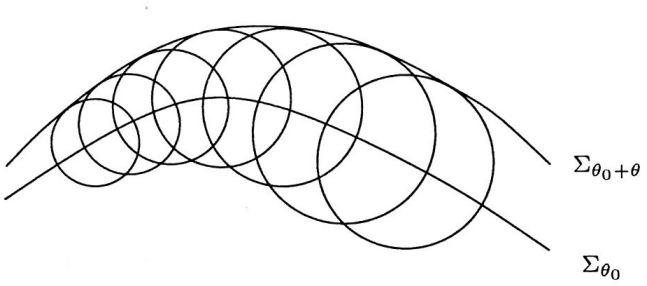


FIGURA 4. Il principio di Huygens.

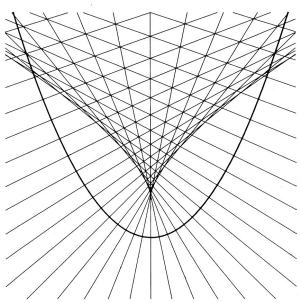


FIGURA 5. Evoluta o caustica della parabola.

probabilmente uno dei motivi per cui Newton restò fermo su una teoria corpuscolare. A questo proposito vogliamo fare due considerazioni. La prima è che in realtà l'aspetto corpuscolare e ondulatorio sono due aspetti (anzi, aspetti duali) di una stessa descrizione, come risulterà chiaro poi dagli sviluppi del calcolo delle variazioni e della meccanica hamiltoniana[3]: i fronti d'onda sono le superfici 'ortogonali' ai raggi in un tempo dato, pur di intendere 'ortogonalità' e tempo opportunamente. La seconda considerazione è che la teoria ondulatoria di Huygens è in realtà una approssimazione scalare di ordine zero della teoria ondulatoria che si svilupperà con Maxwell nel diciannovesimo secolo.

Ovviamente non ci è possibile entrare in più dettagli qui. Concludiamo perciò illustrando solo intuitivamente la nozione di *caustica* studiata da Huygens. Le caustiche si presentano in effetti dopo rifrazione o riflessione in moltissime semplici situazioni come immagini irreali. Supponiamo che la sorgente di luce abbia una forma ellissoidale; in accordo con il principio di Huygens per tempi piccoli il fronte d'onda si muoverà, diciamo verso l'interno, e sarà una curva equidistante dall'ellisse; ma ad un certo istante appariranno delle *singolarità*, più raggi di luce concorrono e geometricamente queste singolarità appaiono come inviluppi delle normali alla sorgente di luce, cioè come evoluta del fronte di luce.

Se consideriamo la parabola $y = x^2$, si verifica che la sua evoluta è la parabola semicubica di Neile di equazione

$$16\big(y - \frac{1}{2}\big)^2 - 27x^2 = 0.$$

Questa è la caustica associata alla sorgente di luce parabolica $y = x^2$. La caustica divide il piano in due regioni, da ogni punto della regione superiore escono tre

[3] Si veda ad esempio [47] e [52].

normali alla parabola, mentre nell'altra regione ne esce una sola; tutte le normali sono tangenti all'evoluta che ne è il loro inviluppo.

CAPITOLO 11

Complementi e temi da sviluppare

Presentiamo qui una serie di temi complementari al testo che invitiamo il lettore ad affrontare autonomamente in termini moderni, cioè non necessariamente nel contesto storico, o analizzando fonti che possono essere reperiti in rete o nelle opere già citate.

11.1. *Numeri pitagorici*. Per i Pitagorici i numeri hanno forma ed ogni forma della realtà è aggregazione di queste forme. Ci sono numeri triangolari, numeri quadrati, numeri pentagonali, cfr. Figura 1.

In Figura 2, a sinistra, la somma dei primi n dispari $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$ e, a destra, la somma dei primi n pari $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$. Dividendo per 2, si ottiene la somma dei primi dei primi n interi $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

11.2. *Talete*. Talete trovò la distanza delle navi nel mare e misurò l'altezza delle piramidi. Con riferimento alla Figura 3 discutere l'affermazione.

Si calcoli in particolare l'altezza h della torre in funzione della distanza b tra A e B e degli angoli α e β. Si calcoli anche l'errore della misura in dipendenza dell'errore nella misura dei dati.

11.3. *Aristarco da Samo*. Aristarco sapeva che la luce della Luna è luce riflessa. Quando è illuminata la metà esatta della Luna, allora l'angolo in L (cfr. Figura 4) è retto e l'osservatore in

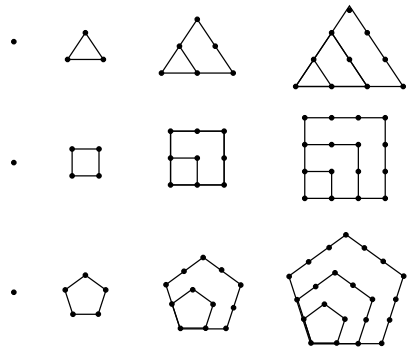


FIGURA 1. I numeri pitagorici: triangolari, quadrati, pentagonali. Da sinistra sulla prima riga 1, $1+2$, $1+2+3$, $1+2+3+4$. Da sinistra sulla seconda riga 1, $1+3$, $1+3+5$, $1+3+5+7$. Da sinistra sulla terza riga 1, $1+4$, $1+4+7$, $1+4+7+10$.

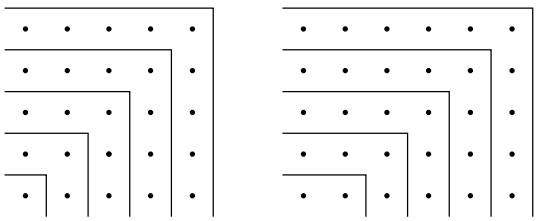


FIGURA 2. A sinistra, la somma dei primi n dispari. A destra, la somma dei primi n pari.

O può misurare l'angolo LOS e le distanze relative OL e OS possono venire stimate: cosa che egli fece. Una volta conosciute le distanze relative, Aristarco valutò le dimensioni relative misurando le dimensioni dei dischi che il Sole e la Luna rivolgono verso la Terra. Le sue misurazioni non sono molto precise, ma il metodo seguito è sicuramente ingegnoso.

11.4. *Eratostene*. A mezzogiorno di un solstizio d'estate si osservò che il Sole era a picco su Siene; nello stesso momento ad Alessandria, sullo stesso meridiano di Siene ma più a nord, si osservò che l'angolo fra la direzione perpendicolare e la direzione del Sole era uguale a $1/50$ di 360 gradi, cfr. Figura 5. Il Sole è così lontano dalla Terra, che le rette OS e AD possono essere considerate parallele, quindi l'arco SA è $1/50$ della circonferenza della Terra. I cammelli percorrevano circa 100 stadi al giorno e impiegavano 50 giorni per giungere a Siene, se ne conclude che la circonferenza della Terra doveva essere circa 250.000 stadi, corrispondenti a 39.250 chilometri.

11.5. *Teorema di Talete*. Usando il metodo di esaustione, provare il teorema di Talete.

11.6. *Crivello di Eratostene*. I multipli di quanti numeri bisogna eliminare per essere sicuri di aver trovato tutti i primi più piccoli di un dato numero n.

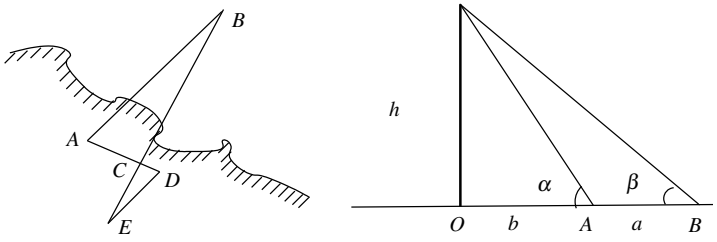


FIGURA 3. Distanza delle navi nel mare: se $AC = 2CD$ allora $AB = 2ED$. A destra: misura di una torre irraggiungibile.

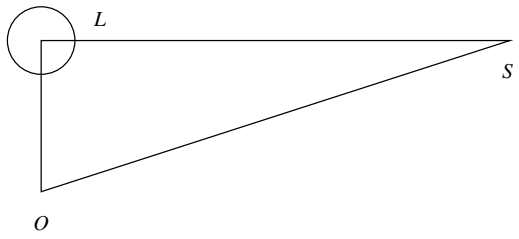


FIGURA 4. Le distanze relative della Luna e del Sole.

11.7. *Irrazionali*. Sia p primo, mostrare che $\sqrt{p}$ è irrazionale; più in generale, mostrare che, se un numero è prodotto di primi distinti, la sua radice quadrata è irrazionale.

11.8. *Rapporto aureo*. Sia R un rettangolo con lati in rapporto aureo. Mostrare che il rettangolo che si ottiene rimuovendo da R un quadrato di lato massimo è ancora un rettangolo con lati in rapporto aureo. Concludere che i lati di R sono incommensurabili o il rapporto aureo è irrazionale.

11.9. *L'insieme dei naturali*. La dimostrazione della incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato ha un certo grado di astrazione. Infatti, frasi come "sia m un intero", o "esiste un intero m" richiedono a priori la conoscenza dell'insieme $\mathbb{N}$ di *tutti i numeri interi naturali*, in particolare la conoscenza di un insieme infinito come un tutto, un *infinito attuale*.

Noi diremmo che gli interi sono 1, 2, 3, *e così via*, intendendo che il processo di sommare 1 ad un intero già noto, produce tutti e soli gli interi. Questa "descrizione" degli interi è tuttavia una regressione all'infinito, un processo che non termina, e, come sappiamo, i matematici greci hanno sempre evitato procedure che non finiscono.

Per i matematici greci, quel che è accettabile e condiviso è il cosiddetto *infinito potenziale*, cioè la possibilità di andare in avanti: supponiamo di avere una frase $p(m)$ indicizzata con interi. I greci accettano il ragionamento *se* $p(m)$*, allora* $p(m+1)$. Non c'è nel ragionamento alcuna regressione all'infinito. I greci tacciono sulla classe degli interi, un infinito attuale. Come si sa, la proprietà chiave è il *principio di induzione*. Nel 1905, Giuseppe Peano ha evidenziato un insieme di assiomi, noti oggi come *assiomi di Peano*, dai quali fa seguire tutta l'aritmetica: l'insieme degli interi è un insieme $\mathbb{N}$ nel quale è definita una mappa $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con le seguenti proprietà:

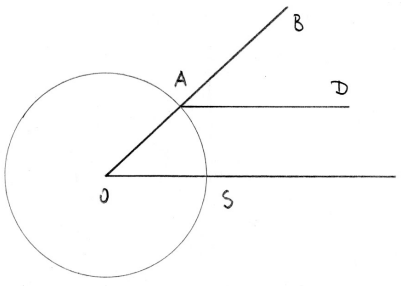


FIGURA 5. La misura della circonferenza della Terra.

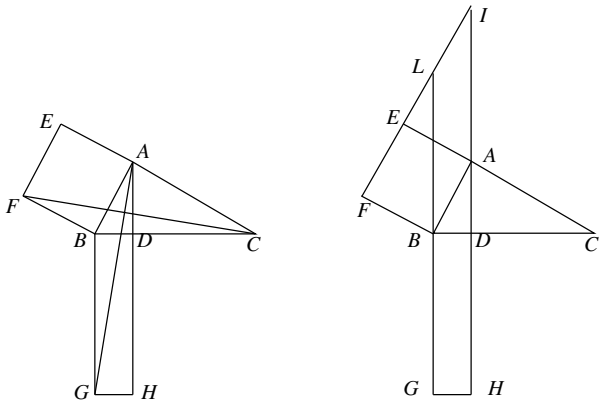


FIGURA 6. Dimostrazione del teorema di Pitagora di Euclide.

(1) $\mathbb{N}$ contiene un elemento detto 0, $0 \in \mathbb{N}$,
(2) se $a \in \mathbb{N}$, allora $\sigma(a) \in \mathbb{N}$,
(3) se $a \in \mathbb{N}$ e $a = \sigma(b)$, allora $a \neq 0$,
(4) σ è iniettiva,
(5) se $A \subset \mathbb{N}$ è tale che $0 \in A$ e $a \in A$ implica che $\sigma(a) \in A$, allora $A = \mathbb{N}$.

Ovviamente, con le notazioni correnti, $\sigma(0) = 1$ e $\sigma(n) = n+1$ e l'assioma (5) è il principio di induzione. A parole, (5) pretende che l'infinito potenziale dei greci è sufficiente a caratterizzare la classe degli interi.

11.10. *Legge dei coseni, Euclide II.12 e II.13, o teorema di Carnot*. In un triangolo ottusangolo (acutangolo) il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso (acuto) è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati del triangolo aumentati (diminuiti) del prodotto di uno dei lati per la proiezione dell'altro su di esso.

Ne diamo qui una dimostrazione moderna. Sia ABC il triangolo, H il piede della perpendicolare da A ad AB, e γ l'angolo in C. Abbiamo

$$AB^2 = AH^2 + BH^2, \quad AH = AC\sin\gamma, \quad BH = BC - HC = BC - AC\cos\gamma.$$

Quindi

$$\begin{aligned} AB^2 =& AC^2\sin^2\gamma + BC^2 + AC^2\cos^2\gamma - 2BC\times AC\cos\gamma \\ =& AC^2 + BC^2 - 2AC\times BC\cos\gamma. \end{aligned}$$

Se ne dia una dimostrazione sintetica.

11.11. *Euclide I.47, teorema di Pitagora*. Con riferimento alla figura a sinistra in Figura 6 dimostrare il teorema di Pitagora; Semplificare la dimostrazione utilizzando la figura a destra, si veda ad esempio [45].

11.12. *Le coniche*. Mostrare, facendo uso di coordinate cartesiane, che l'intersezione di un cono a doppia falda per l'origine intersecato con un piano produce una conica o coniche degeneri (vuoto, punto, coppia di rette).

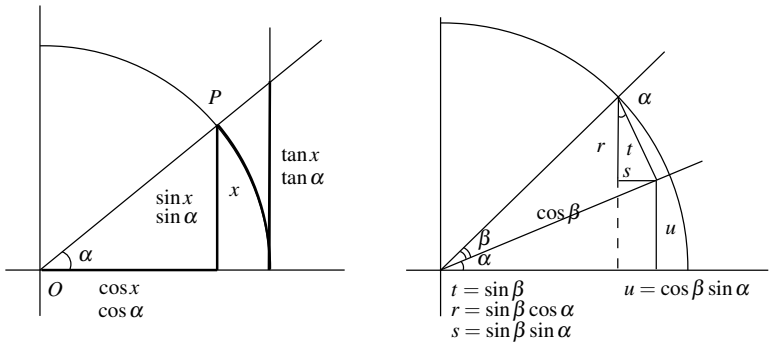


FIGURA 7. Definizione geometrica delle funzioni trigonometriche e dimostrazione della formula del seno della somma di due angoli.

11.13. *Un po' di geometria dei triangoli rettangoli e di trigonometria*. La Figura 7 mostra la definizione geometrica delle funzioni trigonometriche in termini di angolo α o di lunghezza d'arco x o anche di area del settore, che dopo Archimede sappiamo essere $x/2$, e la dimostrazione della formula di somma

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

A sinistra nella Figura 8 (andrebbero in realtà aggiunte analizzate anche le figure in cui A si trova nella semicirconferenza contenente i punti B e C) si mostra che: *l'angolo alla circonferenza è metà dell'angolo al centro che sussiste sullo stesso arco e questo indipendentemente dalla posizione di A*. L'affermazione raccoglie le proposizioni 20 e 21 del terzo libro degli *Elementi* di Euclide. Dalla figura a destra si vede inoltre che vale la cosiddetta *legge sei seni*, a volte chiamata *teorema di Eulero* (ma i teoremi chiamati di Eulero sono tanti): se ABC è un triangolo di vertici A, B, C con angoli rispettivamente α, β e γ e a, b, e c sono i lati opposti ai vertici A, B, C, e infine r ρ è il raggio del cerchio che circoscrive il triangolo si ha

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

Infatti $a = 2r\sin\alpha$.

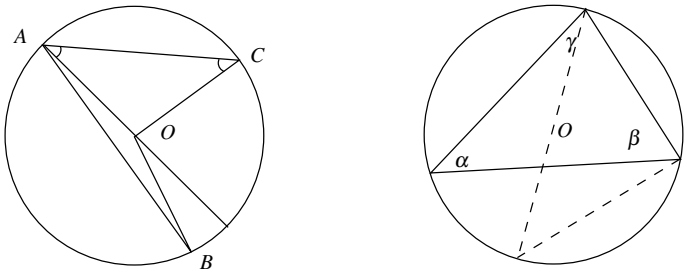


FIGURA 8. A sinistra: l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza; a destra: dimostrazione della *legge dei seni*.

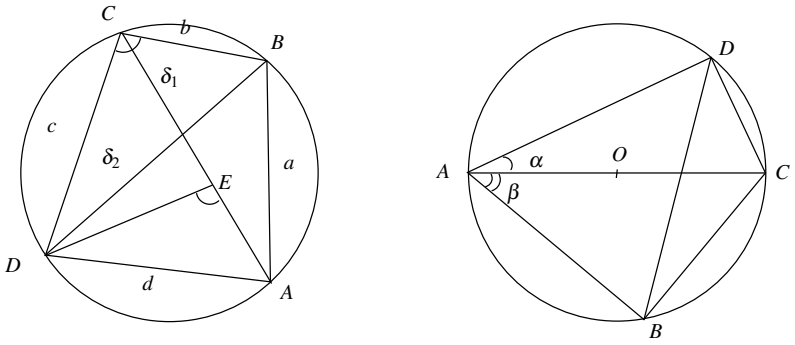


FIGURA 9. A sinistra: dimostrazione del *teorema di Tolomeo*; a destra: la formula di somma per il seno come conseguenza del teorema di Tolomeo.

Nella Figura 9 è visibile la dimostrazione del *teorema di Tolomeo*: se *ABCD* è un quadrilatero inscritto in un cerchio, allora il prodotto delle diagonali δ_1 e δ_2 è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti:

$$bd + ac = \delta_1 \delta_2.$$

La dimostrazione consiste nell'osservare che i triangoli *EDA* e *CBD* e, rispettivamente *DCE* e *DBA* sono simili, quindi $b/\delta_1 = u/d$ e $a/\delta_1 = v/c$.

Dati due angoli α e β (minori di $\pi/2$, costruiamo il quadrilatero inscritto in un cerchio di diametro $AC = 1$ come in Figura 9 a destra. Per costruzione e per la legge dei seni abbiamo:

$$AC = 1, \quad AD = \cos\alpha, \quad DC = \sin\alpha, \quad AB = \cos\beta, \quad BC = \sin\beta,$$
$$AD = \sin(\alpha+\beta),$$

mentre per il teorema di Tolomeo

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta :$$

Il lettore è invitato a sostituire tutti i "si vede" con argomentazioni precise, specificando opportunamente "tutti i dettagli". Per ulteriori informazioni su geometria, analisi e trigonometria rimandiamo ad esempio a [76].

11.14. *Teone di Smirne, approssimazione di* $\sqrt{2}$. Teone spiega la teoria dei *lati-diametri razionali* dei pitagorici, di cui parla anche Platone nella *Repubblica*, tendente a trovare soluzioni iterate intere dell'equazione

$$2x^2 - y^2 = \pm 1.$$

In termini moderni, partendo dalla relazione

$$(2x+y)^2 - 2(x+y)^2 = 2x^2 - y^2,$$

data una coppia (x,y) con $2x^2 - y^2 = \pm 1$, possiamo produrre una nuova coppia $(x+y, 2x+y)$ verificante sempre la stessa equazione $2(x+y)^2 - (2x+y)^2 = \mp 1$. Ponendo quindi

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + d_n$$
$$d_0 = 1, \quad d_{n+1} = 2a_n + d_n$$

troviamo una successione di coppie di interi (a_n, d_n), con $a_{n+1} > a_n$ e $d_{n+1} > d_n$, tale che

$$2{a_n}^2 - {d_n}^2 = (-1)^{n+1}.$$

Poiché si ha

$$2 = (\frac{d_n}{a_n})^2 + \frac{(-1)^{n+1}}{a_n^2}$$

e, in termini moderni $a_n \to \infty$ per $n \to \infty$, vediamo che la successione di razionali $\frac{d_n}{a_n}$ fornisce alternativamente una approssimazione dal basso e dall'alto di $\sqrt{2}$.

11.15. *Formula di Erone*. *Se ABC è un triangolo di lati a,b,c, e denotiamo con s il semiperimetro, cioè $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, allora*

$$\text{Area}\, ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Diamo qui una dimostrazione, moderna e diversa da quella di Erone, che usa però fatti essenzialmente noti al tempo di Erone. Per il teorema di Carnot abbiamo (γ è l'angolo in C):

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

mentre

$$\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \frac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}}{2ab}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\text{Area}\, ABC &= \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.\end{aligned}$$

Confrontare la dimostrazione precedente con la dimostrazione di Erone che si può trovare nel secondo volume di [66]. Heath attribuisce la formula ad Archimede. Si possono trovare altre dimostrazioni in rete.

11.16. *Erone, approssimazione di $\sqrt{\alpha}$.* Gli storici hanno anche visto nelle approssimazioni di Erone un algoritmo, che ricompare anche con Luca Pacioli (1445–1517), per l'approssimazione di $\sqrt{2}$: *Dato un numero qualunque α, definiamo ricorsivamente*

$$x_0 = \alpha, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{\alpha}{x_n}).$$

Allora la sequenza x_n converge per $n \to \infty$ a $\sqrt{\alpha}$.

Infatti si può vedere che

$$x_{n+1} - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2\alpha}(x_n - \sqrt{\alpha})^2 \geq 0$$

e che $\{x_n\}$ è una successione decrescente. Segue quindi che $\{x_n\}$ converge a qualche numero ξ che, dovendo verificare $\xi = \frac{1}{2}(\xi + \frac{\alpha}{\xi})$, necessariamente è $\sqrt{\alpha}$.[1]

[1] Se z è la soluzione di $x^2 = \alpha$, allora $x = \alpha/x$. Ora, se x è un valore per difetto di z, α/x sarà un valore per eccesso di z. A metà strada tra valore per eccesso e per difetto di z ci sarà una stima migliore di x e α/x.

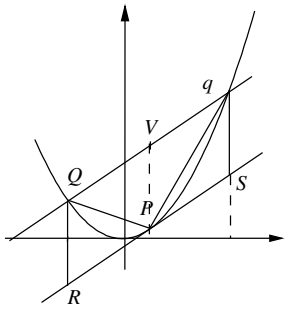


FIGURA 10

11.17. *Principio di Erone e proprietà focali delle coniche*. Assumendo che la riflessione di un raggio di luce in un punto P di una conica avviene come se il raggio si riflettesse sulla retta tangente in P alla conica, provare le proprietà focali delle coniche.

11.18. *Archimede, qualche complemento*. Provare che le mediane di un triangolo si incontrano in un punto e che questo divide ogni mediana in due parti nel rapporto di 2 a 1. Provare che il baricentro di un triangolo è l'intersezione delle tre mediane.

Quadratura della parabola. Provare utilizzando metodi analitici la formula della quadratura della parabola di Archimede.

Con riferimento alla Figura 10, siano $y = ax^2$ l'equazione della parabola, $y = mx+q$ l'equazione della retta secante, $x_1, \bar{x}$ e x_2 le ascissi rispettivamente di Q, P e q. Verificare che $\bar{x} = m/2a$ e che la retta RS tangente alla parabola in $(\bar{x}, a\bar{x}^2)$ è parallela alla retta secante $y = mx+q$. Pertanto $QRSq$ è un parallelogramma e l'area di QPq è la metà dell'area di $QRSq$.

Sia $\delta := \bar{x} - x_1 = x_2 - \bar{x}$. Allora $x_2 - x_1 = 2\delta$ ed è facile verificare che $Sq = a\delta^2$. Pertanto

$$\text{Area}\, QPq = \frac{1}{2} 2\delta a\delta^2 = a\delta^3.$$

Se si esaurisce ora il segmento parabolico QPq come fa Archimede, si trova che

$$\begin{aligned}\text{Area}\,(QPq) &= a\delta^3 + 2\Big(a\frac{\delta}{2}\Big)^3 + 4\Big(a\frac{\delta}{4}\Big)^3 + \cdots \\ &= a\delta^3\Big(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\Big) \\ &= a\delta^3 \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} a\delta^3.\end{aligned}$$

Spirale di Archimede. Il settore di cui Archimede discute l'area è in coordinate polari $A := \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 < a^2\theta^2,\ \theta \in [0, 2\pi]\}$. Pertanto

$$\text{Area}A = \pi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a\theta} \rho\, d\rho = \frac{4}{3} a^2\pi^3 = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2.$$

11.19. *Keplero*. Dimostrare per confronto diretto che fra tutti i parallelepipedi a base rettangolare inscritti in una sfera quello di volume più grande è il cubo. Convincersi della correttezza dell'osservazione di Keplero: vicino ad un punto di massimo le variazioni sono impercettibili. Determinare il cilindro inscritto in una sfera di volume massimo usando il metodo dell'adequazione di Fermat.

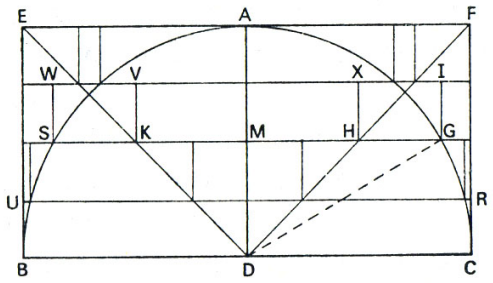


FIGURA 11

11.20. *Valerio*. Con riferimento alla figura Figura 11, *BAC* essendo una semicirconferenza, sezione di una semisfera, si osservi che

$$MG^2 = DG^2 - MD^2 = DG^2 - MH^2 = DC^2 - DC^2 - MH^2,$$
$$\frac{MG^2}{DC^2} = 1 - \frac{MH^2}{DC^2},$$
$$\frac{SG^2}{BC^2} = 1 - \frac{KH^2}{BC^2}.$$

Quindi

$$\frac{\text{cilindro } SWIG}{\text{cilindro } BURG} = 1 - \frac{\text{cilindro } KVXH}{\text{cilindro } BURC}.$$

Dedurre

$$\frac{\text{semisfera}}{\text{cilindro}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

11.21. *Il teorema di Guldino*. Il volume generato dalla rotazione completa di una curva piana chiusa che giaccia per intero da un lato dell'asse di rotazione è uguale all'area delimitata dalla curva moltiplicata per la circonferenza del cerchio descritto dal suo baricentro. Infatti, se A è la regione delimitata dalla curva, il volume da calcolare è quello di

$$E := \{(x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in A\}.$$

In coordinate cilindriche $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, z e ovviamente $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, abbiamo

$$\text{Vol}(E) = \iiint_E dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_A \rho d\rho dz$$

che possiamo scrivere come

$$\text{Vol}(E) = 2\pi h_A \text{Area} A$$

dove

$$h_A := \frac{1}{\text{Area} A} \iint_A \rho d\rho dz$$

è il baricentro di A.

11.22. *Galilei*. Con riferimento alla Figura 10 del Capitolo 4 abbiamo (il cerchio è unitario)

$$ED = \sin\theta, \quad BE = \cos\theta, \quad AE = 1 - \cos\theta,$$

quindi

$$AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}$$

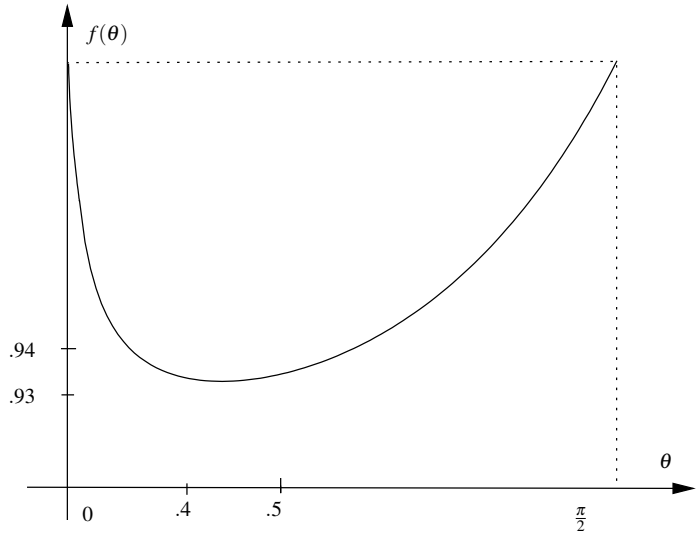


FIGURA 12. Il grafico della funzione $f(\theta)$ in 11.22.

e

$$t_{AD} = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{AD}{\sqrt{ED}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{\sqrt{2-2\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}} = \frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}.$$

Calcoliamo il tempo di caduta lungo DC. Per similarità

$$DC/2 = (1-ED)/DC, \quad \text{i.e.} \quad DC = \sqrt{2(1-\sin\theta)}$$

e

$$v_D = \sqrt{2g\sin\theta}, \quad v_C = \sqrt{2g},$$

quindi

$$t_{DC} = \frac{DC}{\frac{1}{2}(v_D + v_C)} = \frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{1+\sqrt{\sin\theta}}.$$

Il tempo di caduta T_{ADC} lungo il cammino spezzato ADC è quindi

$$T_{ADC} = \frac{2}{\sqrt{g}}\Big[\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}} + \frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{1+\sqrt{\sin\theta}}\Big]$$

e l'affermazione di Galilei è quindi equivalente a

$$f(\theta) := \frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}} + \frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{1+\sqrt{\sin\theta}} \leq 1.$$

Il grafico della funzione $f(\theta)$ è in Figura 12. Il tempo ottimale al variare di D si ottiene quando $\theta = 0.427019...$ e vale

$$T_{opt} = \sqrt{\frac{1}{g}}1.86266...$$

Sostituendo $\sin\theta$ con t^2, ci si riconduce alla disequazione

$$F(t) := \frac{t}{\sqrt{1+\sqrt{1-t^4}}} + \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \le 1 \quad \text{in} \quad [0,1].$$

che vale 1 in 0 e 1. Differenziando, razionalizzando e procedendo all'ulteriore sostituzione $\sqrt{1-t^4} = \theta$ si vede che il segno di $F'(t)$ coincide con il segno di $\theta^3 - \theta^2 + \theta + 1$ in $[0,1]$ e quindi F' è positiva in $[0,1]$ e, essendo negativa in 0 e positiva in 1, ha unico zero in $[0,1]$; da questo segue immediatamente quanto si voleva dimostrare.

11.23. *Tempo di caduta*. Consideriamo una curva $y = y(x)$, $x_1 < x < x_2$ decrescente e un punto materiale che cade sotto l'azione della gravità lungo $y = y(x)$, $x_1 < x < x_2$, con velocità iniziale nulla, $v(x_1) = 0$. Dall'uguaglianza tra energia cinetica e energia potenziale,

$$gy(x_1) - gy(x) = \frac{1}{2}v^2(x)$$

ricaviamo

$$v(x) = \sqrt{2g(y(x_1) - y(x))}$$

dove $v(x)$ è il modulo della velocità istantanea nel punto $(x, y(x))$. Poiché $v(x) = \frac{ds(x)}{dt}$ essendo ds l'elemento di lunghezza della curva, $ds = \sqrt{1+y'(x)^2}dx$, il tempo di discesa lungo $y(x)$, $x_1 < x < x_2$ vale

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v} = \frac{1}{2g}\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y(x_1)-y(x)}}\,dx.$$

Trasliamo l'intervallo di definizione della curva in $[0,r]$, $r = x_2 - x_1$, e cambiamo variabile con $u = y(x_1) - y(x)$, si ha $u(0) = 0$, $u \ge 0$, u crescente; allora il tempo di discesa è dato da

$$T = \frac{1}{2g}\int_0^r \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\,dx.$$

Se $u(x) = kx$, $0 \le x \le r$, si ritrova il tempo di discesa lungo un piano inclinato di altezza kr e lunghezza $\ell = r\sqrt{1+k^2}$:

$$T = \sqrt{\frac{1}{2g}}\sqrt{1+k^2}\int_0^r \frac{1}{\sqrt{kx}}\,dx = \sqrt{\frac{2}{gr}}r\sqrt{1+k^2}.$$

Per la diagonale $k = 1$, si ha in particolare

$$T = 2\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Calcoliamo ora il tempo di discesa lungo un quarto di cerchio di raggio r. Sia $u(x) = \sqrt{2rx - x^2}$, $0 \le x \le r$. Si ha

$$\frac{1+u'(x)^2}{u(x)} = r^2(2rx - x^2)^{-3/2}$$

e dunque, procedendo con la sostituzione $y = x/r$, $dx = r\,dy$,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^r r^2(2rx-x^2)^{-3/4}\,dx = \frac{r^{2-3/2}}{2g}\int_0^1 (2y-y^2)^{-3/4}\,dy \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}}\frac{1}{\sqrt{2}}2.62206... = \sqrt{\frac{r}{g}}1.85407... \end{aligned}$$

tempo più breve di circa il 7.5% del tempo di discesa lungo la diagonale.

11.24. *L'iperboloide acuto infinito*. Recuperare le dimostrazioni di Torricelli della finitezza del volume dell'iperboloide acuto ed analizzarle. Fare il calcolo in termini moderni.

11.25. *Parabola di sicurezza di Torricelli*. . Con Torricelli è probabilmente la prima volta che fa la sua comparsa la curva *inviluppo* di una famiglia di curve. Formalmente e in modo preciso, l'inviluppo di una famiglia di curve $\varphi(x,a)$, con parametro a, è definito da:

$$z = \varphi(x,a), \quad \varphi_a(x,a) = 0.$$

Si determini l'equazione della parabola di sicurezza di Torricelli.

Bibliografia

[1] ANDERSEN, K. Cavalieri's method of indivisibles. *Arch. Hist. Ex. Sci. 31* (1985).

[2] APOLLONIO DA PERGA. *Treatise on Conic Sections*. Cambridge University Press, 1896. Reprint Dover, New York. Edizione e traduzione di Thomas L. Heath.

[3] ARCHIMEDE. *Opera Omnia, cum Commentariis Eutocii*. Teubner, Leipzig, 191015. Ed. J.L. Heiberg, 2 voll.

[4] ARCHIMEDE. *The works of Archimedes*. Cambridge University Press, 1912. Edizione e traduzione di Thomas L. Heath.

[5] ARCHIMEDE. *Les oeuvres d'Archimèdes suivis des commentaires d'Eustocius d'Ascalon*. Vaillant-Carmanne, Liegi, 1960. Traduzione di Paul Ver Eecke.

[6] ARCHIMEDE. *Opere*. Utet, Torino, 1974. A cura di A. Frajese.

[7] ARISTOTELE. *Opere*. Laterza, Bari, 1984. In 9 volumi.

[8] ARISTOTELE. *Fisica*. Rusconi, Milano, 1995.

[9] ARNOLD, V. *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*. Birkhäuser, Basel, 1990.

[10] BARON, M. E. *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Dover, New York, 1987. Oxford, 1969.

[11] BARTOCCI, C. E ODIFREDDI, P., Eds. *La matematica. Problemi e teoremi*. Einaudi, Torino, 2008.

[12] BELL, A. E. *Christian Huygens and the Development of Science in the Seventeenth Century*. Arnold, London, 1947.

[13] BENVENUTO, E. *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*. Edizioni di storia e letteratura, Roma, 2006.

[14] BERTOLONI MELI, D. *Thinking with Objects. The Transformation of Mechanics in the Seventeenth Century*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2006.

[15] BLAY, M. Deux examples de l'influence de l'école galiléenne sur les primiers travaux de l'Académie Royale des Sciences de Paris. In *Geometria e atomismo nella scuola galileana* (1992), M. Bucciantini and M. Torrini, Eds., Olschki, Firenze.

[16] BONOLA, R. *La geometria non-euclidea*. Zanichelli, Bologna, 1906.

[17] BOS, H. J. M., RUDWICK, M. J. S., SNELDERS, H. A. M. E VISSER, R. P. W., Eds. *Studies on Christiaan Huygens*. Sweet and Zeitlinger, Lisse, 1980. Invited papers from the Symposium on the life and work of Christiaan Huygens, Amsterdam, August 1979.

[18] BOS, J. H. M. On the Representation of Curves in Descartes Géométrie. *Arch. for Hist. of Exact Sciences XXIV* (1981).

[19] BOYER, C. B. *History of analytic geometry*. Scripta Mathematica, New York, 1956. Ristampa in Dover, New York, 2004.

[20] BOYER, C. B. *Storia della matematica*. Bruno Mondadori, Milano, 1990.

[21] BRASSINNE, E. *Précis des oeuvres mathématiques de Pierre Fermat*. Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse, 1853.

[22] CASARI, E. Introduzione alla filosofia della matematica. Note del Corso 2000–2001, Scuola Normale Normale Superiore, Pisa.

[23] CAVALIERI, B. *Geometria indivisibilibus continuorum nova quodam ratione promota*. C. Ferronii, Bologna, 1635.
[24] CLAGETT, M. *Archimedes in the Middle Ages*. University of Wisconsin Press, Madison, 1964. In 5 voll.
[25] COMMANDINO, F. *Liber de centro gravitatis solidorum*. Edizioni della Normale, Pisa, 2015. Copia anastatica; introduzione e traduzione di E.Gamba e V. Montebelli, in 2 voll.
[26] DATI, C. *Lettera a Filateti di Timauro Antiate: della vera storia della cicloide e della famosissima esperienza dell'argento viuo*. All'insegna della stella, Firenze, 1663.
[27] DESCARTES, R. *Oeuvres de Descartes*. Paris,, 1897-1913. In 13 volumi, a cura di Charles Adam e Paul Tannery; nuova edizione, Vrin-CNRS, 1964-1974, 11 volumi.
[28] DESCARTES, R. *The Geometry of René Descartes*. Dover, New York, 1954. Riproduzione anastatica del testo francese e traduzione di David Eugene Smith e Marcia L. Latham.
[29] DESCARTES, R. *Opere scientifiche*. Utet, Torino, 1983. A cura di Ettore Lojacono.
[30] DESCARTES, R. *Tutte le lettere 1619–1650*. Bompiani, Milano, 2003. A cura di Giulia Belgioioso.
[31] DESCARTES, R. *Opere 1637–1649*. Bompiani, Milano, 2009. A cua di Giulia Belgioioso.
[32] DESCARTES, R. *Opere 1650–2009*. Bompiani, Milano, 2009. A cua di Giulia Belgioioso.
[33] DIJKSTERHUIS, E. J. *Il meccanicismo e l'immagine del mondo. Dai presocratici a Newton*. Feltrinelli, Milano, 1971.
[34] DIJKSTERHUIS, E. J. *Archimede. Con un saggio bibliografico di Wilbur R. Knorr*. Ponte alle Grazie, Firenze, 1989.
[35] DIOFANTO. *Diophantus of Alexandria*. Dover, 1964. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas Heath.
[36] DUGAS, R. *Histoire de méchanique*. Éditions du Griffon, Neuchâtel, 1955. Dover, 1988.
[37] DUHEM, P. *Études sur Léonard de Vinci I,II: Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu; III: Les précurseurs parisiens de Galilée*. Paris, 1906–1913.
[38] ERODOTO. *Storie*. Mondadori, Milano, 2000.
[39] FERMAT, P. *Oeuvres de Fermat*. Gauthier-Villars, Paris, 1891-1922. In 5 volumi. A cura di P. Tannery, C. Henry, e C. de Waard.
[40] FRITZ, K. V. The discovery of incommensurability by Hippasus of Metaponto. *Annals of Mathematics 46* (1945), 242–264.
[41] GALILEI, G. *Discorsi e dimostrazioni matematiche. Intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica ed i movimenti locali*. Einaudi, Torino, 1990. A cura di Enrico Giusti.
[42] GALILEI, G. *Opere*. Utet, Torino, 2005. A cura di Franz Brunetti, in 2 volumi.
[43] GALLUZZI, P. E TORRINI, M., Eds. *Le opere dei discepoli di Galileo Galilei*. Giunti-Barbera, Firenze, 1975.
[44] GARBER, D. *Descartes Methaphysical Physics*. Chicago University Press, 1982.
[45] GIAQUINTA, M. *La forma delle cose. Idee e metodi di matematica. I. Da Talete a Galileo e un po' oltre*. Edizioni di Storia e Letteratura, Roma, 2010.
[46] GIAQUINTA, M. *La forma delle cose. Idee e metodi di matematica. II. Il calcolo da Leibniz e Newton a Eulero e Lagrange e un po' oltre*. Edizioni di Storia e Letteratura, Roma, 2014.
[47] GIAQUINTA, M. E HILDEBRANDT, S. *Calculus of Variations*. Springer, Berlin, 1996. In 2 volumi.
[48] GIAQUINTA, M. E MODICA, G. *Analisi Matematica. Approssimazione e processi discreti*. Pitagora Editrice, Bologna,, 1998. Revisione e traduzione inglese Birkhäuser, Boston, 2004.
[49] GIAQUINTA, M. E MODICA, G. *Analisi Matematica. Funzioni di una variabile*. Pitagora Editrice, Bologna,, 1998. Revisione e traduzione inglese Birkhäuser, Boston, 2003.

[50] GIAQUINTA, M. E MODICA, G. *Analisi Matematica. Strutture lineari e metriche, continuià*. Pitagora Editrice, Bologna, 2000. Revisione e traduzione inglese in Birkhäuser, Boston, 2007.

[51] GIAQUINTA, M. E MODICA, G. *Analisi Matematica. Funzioni di più variabili*. Pitagora Editrice, Bologna, 2005. Revisione e traduzione inglese Birkhäuser, Boston 2009.

[52] GIAQUINTA, M. E MODICA, G. *Analisi Matematica. Funzioni di più variabili: ulteriori sviluppi*. Pitagora Editrice, Bologna, 2005. Revisione e traduzione inglese Birkhäuser, Boston, 2010.

[53] GIAQUINTA, M. *Aspetti della matematica greca*. 2019. In `homepage.sns.it/giaquinta/`.

[54] GIAQUINTA, M. *Funzioni e numeri*. Edizioni della Normale, 2019.

[55] GIAQUINTA, M. *La nuova filosofia della natura. Misure, variazioni ed equazioni differenziali*. 2019. In `homepage.sns.it/giaquinta/`.

[56] GILSON, E. *Études sur le rôle de la pensée medievale dans la formation du systeme cartesienne*. Vrin, Paris, 1975.

[57] GIUSTI, E. Galilei e le leggi del moto. In *Discorsi e dimostrazioni matematiche* di Galilei, Einaudi, Torino 1990.

[58] GIUSTI, E. *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisible*. Edizioni Cremonese, 1980.

[59] GIUSTI, E. A tre secoli dal calcolo: la questione dell'origine. *Bollettino UMI 3-A* (1984), 1–55.

[60] GRATTAN-GUINNESS, I. *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. The Massachusetts Institute of Technology, 1970.

[61] GRATTAN-GUINNESS, I., Ed. *From the Calculus to Set Theory 1630-1910*. Oxford University Press, 1980.

[62] GREENBERG, M. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries. Development and History.* W. H. Freeman and Company, New York, 1993. Terza edizione, prima edizione 1974.

[63] GUEROULT, M. *Descartes selon l'ordre des raisons*. Aubier, Paris, 1953.

[64] GUIDOBALDO DAL MONTE. *Mechanicorum liber*. Gerolamo Concordia, Pesaro, 1577. Traduzione italiana di Filippo Pigafetta, *Le mechaniche*, Francesco di Franceschi, Venezia, 1581.

[65] HAWKINS, T. *Lebesgue's Theory of Integration. Its Origins and Developments*. AMS Chelsea Publishings, 1979.

[66] HEATH, T.L. *A History of Greek Mathematics*. Clarendon Press, Oxford, 1921. In 2 voll. Reprint Dover, New York, 1981.

[67] HEATH, T.L. *Mathematics in Aristotle*. Clarendon Press, Oxford, 1949.

[68] HENK, M. E ZIEGLER, G. M. *La congettura di Keplero*. In *La Matematica. Problemi e teoremi* Eds. C. Bartocci e P. Odifreddi, Einaudi, Torino, 2008.

[69] HILBERT, D. *Fondamenti della geometria*. Feltrinelli, Milano, 1970. Edizione originale: *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1899.

[70] HILBERT, D. Mathematische Probleme. *Göttinger Nachricten* (1900), 253–297. In inglese: Mathematical problems, Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1902) 437-479; in francese: Sur les problèmes futurs des mathématiques, Compt. rend. du deux. ongr. int. des math., Paris 1902. 58-114.

[71] HUYGENS, C. *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*. Marinus Nijhoff, Den Haag, 1888-1950. 22 volumi.

[72] JAHNKE, H.N., Ed. *A History of Analysis*. American Mathematical Society, 2003.

[73] KLINE, M. *Storia del pensiero matematico*. Einaudi, Torino, 1991.

[74] MACH, E. *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*. Bollati Boringhieri, Torino, 1992.
[75] MAHONEY, M. *The mathematical career of Pierre Fermat 1601-1665*. Princeton University Press, 1973.
[76] MAOR, E. *Trigonometric Delights*. Princeton University Press, 1998.
[77] MOUY, P. *Le developpement de la physique cartesienne*. Vrin, Paris, 1934.
[78] MUSIL, R. L'uomo matematico. In *Saggi e altri scritti*. Einaudi, Torino, 1995.
[79] NEUGEBAUER, O. Eccentric and Epicyclic Motion according to Apollonius. *Scripta Mathematica 24* (1959), 5–21.
[80] PLATONE. *Opere complete*. Laterza, Bari, 1971. In 9 volumi.
[81] POINCARÉ, J.H. *Science et méthode*. Flammarion, Paris, 1908.
[82] POINCARÉ, J.H. *La scienza e l'ipotesi*. Bompiani, Milano, 2003. Testo francese a fronte.
[83] PORFIRIO. *Vita di Pitagora*. Rusconi, Milano, 1998.
[84] PROCLO. *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*. Giardini, Pisa, 1978. A cura di M. Timpanaro Corradini.
[85] ROSSI, P. *I filosofi e le macchine 1400-1700*. Feltrinelli, Milano, 2007. Prima edizione 1962.
[86] TARTAGLIA, N. *Nova scientia*. Stephano da Sabio, Venezia, 1537.
[87] TARTAGLIA, N. *Quesiti et inventioni diverse*. Venturino Ruffinelli, Venezia, 1546.
[88] TORRICELLI, E. *Opera geometrica*. A. Massae et L. de Landis, Firenze, 1644.
[89] TORRICELLI, E. *Lezioni accademiche*. Guiducci e Franchi, Firenze, 1715.
[90] TORRICELLI, E. *Opere di Evangelista Torricelli*. Montanari-Lega, Faenza, 1919-1944. A cura di Gino Loria e Giuseppe Vassura, in 4 volumi.
[91] TORRICELLI, E. *De infinitis spiralibus*. Domus Galileana, Pisa, 1955. Edizione e traduzione in italiano di Ettore Carruccio.
[92] TORRICELLI, E. *Opere scelte di Evangelista Torricelli*. Utet, Torino, 1975. A cura di Lanfranco Belloni.
[93] TOSCANO, F. *L'erede di Galileo. Vita breve e mirabile di Evangelista Torricelli*. Sironi, Milano, 2008.
[94] TRUESDELL, C. A. *Essays in the History of Mechanics*. Springer, Berlin, 1968.
[95] UGAGLIA, M., Ed. *Aristotele, Fisica, Libro III*. Carocci, Roma, 2012.
[96] VER EECKE, P. *Pappus d'Alexandrie: La Collection mathématique*. Desclèe de Brouwer, Bruges, 1933. In 2 voll.
[97] VILLARI, R. *Mille anni di storia. Dalla città medievale all'unità dell'Europa*. Laterza, Bari, 2005.
[98] WALKER, E. *A Study of the "Traité des indivisible" of Roberval*. Teacher College, Columbia University, 1932.
[99] WALLIS, J. *Opera mathematica*. Oxford, 1693-1699. In 3 volumi; ristampa Olms, 1968.
[100] WEBER, M. *Etica protestante e lo spirito del capitalismo*. Bur, Milano, 1991.
[101] WESTFALL, R. *Newton e la dinamica del XVII secolo*. Il Mulino, Bologna, 1982.
[102] WIELAND, W., Ed. *La Fisica di Aristotele*. Il Mulino, Bologna, 1993.
[103] YODER, J. G. *Unrolling Time. Christiaan Huygens and the mathematization of nature*. Cambridge University Press, 1988.

Indice dei nomi

Accademia
  dei Lincei, 79
  del Cimento, 85
  di Platone, 65
  Royale des Sciences, 84
al-Battani, 66
al-Biruni, 64
al-Farghani, 66
al-Haitham, Ibn, 66
al-Khowârizmi, Musa, 65
al-Kindi, 65
al-Nairizi, 52
al-Tusi, Nasir, 52
Alberti, Leon Battista, 69
Alessandro di Afrodisia, 66
Alessandro Magno, 2
Anassagora, 21, 59
Antemio di Tralles, 59
Antifonte, 22, 59
Apollonio da Perga, 23, 27, 28, 31, 32, 49, 54, 57–59, 64, 68, 75, 100, 101
Archimede, 12, 18, 23, 27, 32–45, 49, 54, 55, 57–59, 64, 66, 68, 71, 72, 75, 77, 87, 110, 111
Archita di Taranto, 23, 24
Aristarco da Samo, 49, 53, 58, 148
Aristeo il Vecchio, 58
Aristofane, 21
Aristotele, 1, 6, 7, 11, 23, 30, 53, 59, 61, 62, 65, 66, 108
Attalo I, 32
Autolico di Bitinia, 58
Averroè, 66
Avicenna, 66

Barrow, Isaac, 71
Bartholin, Erasmus, 100
Beaune, Florimond de, 99
Benedetti, Giovanni Battista, 120
Benvenuto, Edoardo, 115
Bernoulli, Johann, 117, 135
Biblioteca
  di Alessandria, 49
  di Bagdad, 65
  Nazionale di Parigi, 118
Blay, Michel, 84
Boezio, Severino, 64
Bolzano, Bernard, xi
Bombelli, Rafael, 55, 70
Bonola, Roberto, 30, 52
Bosse, Abraham, 69
Boyer, Carl B., 17
Brisone, 22, 23
Brunelleschi, Filippo, 69
Buridano, Giovanni, 119

Calvino, Giovanni, 68
Campano da Novara, Giovanni, 68
Cantor, Georg, xi
Carcavy, Pierre de, 101
Cardano, Girolamo, 70
Cartesio, vedi Descartes, 72, 96
Casari, Ettore, 22, 34
Castelli, Benedetto, 84
Cataldi, Pietro Antonio, 51
Cavalieri, Bonaventura, 12, 30, 71, 72, 77, 80, 87, 88
Chambre, Marin Cureau de, 106
Cicerone, Marco Tullio, 51
Clagett, Marshall, 33
Clavio, Christoph, 51, 72
Cleomede, 49, 52
Clerselier, Claude, 106, 108
Collegio
  de Presle, 69
  Romano, 79
  Royal, 69, 86
Colombo, Cristoforo, 68
Commandino, Federico, 57, 71, 120

Conone di Samo, 33, 34, 37
Copernico, Niccolò, 69
Coste, Hilarion de, 89
Cusano, Nicola, 76, 77

Damascio, 65
Damiano, 51
Dehn, Max, 14
Democrito di Abdera, 6, 44
Desargues, Girard, 69
Descartes, René, 58, 72, 85, 89, 96, 97, 100, 101, 103, 106, 108, 112, 117, 120, 136, 140, 142
Dijksterhuis, Edward J., 33, 42, 115, 122
Dinostrato, 23, 24
Diocle, 23, 27, 28, 50
Diocleziano, 57
Diodoro Siculo, 30, 33
Diofanto di Alessandria, 27, 28, 54, 55, 58, 59, 64, 68
Dionisiodoro, 50
Dositeo, 33, 34, 37
Dugas, René, 115
Duhem, Pierre, 119
Dürer, Albrecht, 69

Empedocle, 59
Erasmo da Rotterdam, 69
Eratostene di Cirene, 3, 23, 27, 33, 34, 43, 49, 58
Erodoto, 1
Erone di Alessandria, 23, 24, 27, 33, 49, 51, 54–56, 58, 75, 115, 153
Euclide, x, 2, 5, 8, 12, 14–20, 27–30, 32, 49, 51–59, 64, 65, 68, 69, 75, 81, 92, 150
Eudemo di Rodi, 59
Eudosso di Cnido, 12, 23, 30, 37, 38, 43
Euler, Leonhard, 54
Eutocio di Ascalone, 23, 33, 51, 59

Feidia, 33
Fermat, Pierre de, 55, 71, 89, 100–103, 106, 109, 110, 112
Fermat, Samuel, 100, 101
Ferrari, Lodovico, 70
Ferro, Scipione del, 70
Fibonacci, 67
Filone di Bisanzio, 23, 24
Filopono, Giovanni, 22, 66
Frajese, Attilio, 34
Frege, Gottlob, xi
Fritz, Kurt von, 7

Galeno di Pergamo, 49
Galilei, Galileo, 30, 42, 71, 76, 79, 82, 83, 88, 96, 115, 117, 120, 128–130, 133, 136, 138, 156
Gassendi, Pierre, 89
Gauss, Carl Friedrich, 76
Gelone, 34
Gemino di Rodi, 30, 51, 52, 59
Giamblico di Calcide, 59
Giordano Nemorario, 118, 119
Giustiniano, Pietro Sabazio, 65
Gödel, Kurt, xi
Gregorio di San Vincenzo, 71
Gregory, James, 71
Guericke, Otto von, 85
Guidobaldo dal Monte, 76, 120
Guldino, Paolo, 58, 77
Gutemberg, Johann, 67

Hales, Thomas, 76
Heath, Thomas L., 23, 24, 32–34, 49, 50, 55
Heiberg, 33
Henk, Martin, 76
Herigone, Pierre, 101
Heuraet, Hendrik van, 100, 109, 112
Hilbert, David, xi, 14, 29, 76
Hildebrandt, Stefan, 145
Hire, Philippe de la, 69
Hobbes, Thomas, 89, 109
Hooke, Robert, 117
Hsiang, Wu Yi, 76
Hudde, Johann, 99
Huygens, Christiaan, 42, 71, 84, 85, 89, 106, 109, 117, 135–138, 140–144
Huygens, Constantin, 89, 135

Ipazia, 55, 59
Ipparco di Rodi, 27, 28, 52, 64
Ippaso da Metaponto, 7
Ippocrate di Chio, 21–23
Ipsicle di Alessandria, 52

Keplero, Johannes, 8, 71, 72, 76, 78, 82, 87
Khayyam, Omar, 65
Kline, Morris, 13, 32, 64

Lagrange, Joseph-Louis, 120
Legendre, Adrien-Marie, 42
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 71, 86, 117, 131, 135
Leonardo da Vinci, 119
Leonardo Pisano, 67
Lindemann, Carl von, 23
Luigi XIII, 106
Luigi XIV, 106
Lutero, Martin, 68, 69

Mach, Ernst, 42
Manuzio, Aldo, 68
Marcello, 32
Maurolico, Francesco, 12, 71, 72
Maxwell, James Clerk, 145
Melantone, Filippo, 69
Melisso, 59
Menecmo, 23, 24
Menelao di Alessandria, 27, 28, 52, 53, 58
Mersenne, Marin, 85, 89, 101, 106, 138
Moerbeke, Guglielmo di, 33, 66

Napier, John, 70
Neile, William, 109, 112, 145
Newton, Isaac, 71, 117, 131, 135, 137, 145
Nicomaco di Gerasa, 28, 49, 52, 54
Nicomede, 23, 24, 27, 28, 50

Ockham, Guglielmo di, 119
Oresme, Nicola, 83, 119, 130

Pacioli, Luca, 55, 67, 153
Pappo d'Alessandria, 24, 27, 32, 49, 51, 53, 57, 58, 68, 77, 98, 100, 115, 120
Parmenide, 59
Pascal, Blaise, 69, 82, 85, 89, 100
Pascal, Etienne, 85, 89
Pazzi, Antonio Maria, 55
Périer, Florin, 85
Perseo, 50
Peuerbach, Georg, 69
Piero della Francesca, 69
Pigafetta, Filippo, 120
Pitagora, 1, 2, 7, 12, 59
Platone, 1, 6, 22–24
Plutarco, 21
Poincaré, Jules Henri, 62
Polibio, 50
Porfirio di Malco, 59
Posidonio di Rodi, 30, 51, 52
Proclo, 1–3, 22, 27, 28, 30, 50–52, 59

Qurra, Thabit ibn, 66

Ramo, Pietro, 69, 86
Regiomontano, Johann, 33, 55
Rhaeticus, Georg Joachim, 69
Roberval, Gilles Personne de, 71, 72, 82, 83, 85, 86, 88, 89, 101, 109
Russell, Bertrand, xi

Saccheri, Gerolamo, 51
Sarpi, Paolo, 128
Schooten, Frans van, 100, 109, 112
Sereno, 58
Simplicio, 22, 51, 59, 65, 66
Snell, Willebrord, 106
Stevino, Simon, 42, 70, 71, 116, 121, 122, 138
Stifel, Michael, 69, 70
Strabone, 49

Talete, 1–3
Tartaglia, o Nicolò Fontana, 70, 120
Temistio, 66
Teodosio di Bitinia, 52, 58
Teofrasto, 59
Teone d'Alessandria, 27, 29, 51, 55, 58
Teone di Smirne, 49, 52, 54, 152
Tolomeo Evergete, 49
Tolomeo, Claudio, 28, 32, 51–54, 58, 64, 65, 68, 69, 75
Tommaso d'Aquino, 66
Torricelli, Evangelista, 30, 71, 72, 82–85, 88, 89, 109
Tóth, László Fejes, 76
Truesdell, Clifford A., 115
Tucidide, 50
Tzetzes, Joannes, 32

Valerio, Luca, 12, 71, 79, 87
Varignon, Pierre, 117
Viète, François, 70, 101
Villari, Rosario, 69
Viviani, Vincenzo, 85

Wallis, John, 71, 82, 90–92, 97, 100, 109, 117
Witt, Johan de, 100
Wren, Christopher, 109, 110, 117

Zenodoro, 27, 50, 57, 58
Zenone di Elea, 11
Zwingli, Ulrich, 68

Indice analitico

accelerazione, 128
algebra, 65, 67
  geometrica, 12, 18
algoritmo, 1
  di Erone, 56, 153
  di Euclide, 8
  di Teone, 152
area, 5, 18
  del cerchio, 20
  del settore della parabola di Fermat, 104
  del settore di parabola, 35, 44, 83, 87
  del triangolo, 5, 87
  della superficie della sfera, 38
  della superficie laterale del cono, 38
  dello spazio cicloidale, 83
assioma
  di Giordano, 118

calcolo infinitesimale, 71, 131
catenaria, 72, 135
caustiche, 145
centro di gravità, 58, 71
  del settore di paraboloide, 73, 75
cicloide, 72, 83, 88
  isocronismo, 135
  rettificazione, 109
cissoide, 50, 104
concoide di Nicomede, 50, 104
congettura di Keplero, 76
coniche, 24
continuo, 11, 19, 23, 71
  geometrico, 61
corpo convesso, 58
crivello di Eratostene, 49
curve, 12, 23, 28, 98
  algebriche, 98
  cissoide, 50
  concoide di Nicomede, 23, 50
  coniche, 24
  evoluta, 142, 143
  evolvente, 142
  involuta, 142
  normali, 98
  parabola-semicubica, 109, 145
  quadratrice di Ippia, 23, 25
  rettificabilità, 83
  sezioni spiriche, 50
  spirale di Archimede, 23
  tangenti, 98, 102
  trisettrice, 23

dimostrazione
  matematica, 1
diseguaglianza
  tra media geometrica e media aritmetica, 78
  triangolare, 56

eccentrici, 32
energia
  cinetica, 138
  potenziale, 138
  totale, 139
epicicli, 32
equazione
  di secondo grado, 16
  diofantea, 28
evoluta, 142, 143
evolvente, 142

finalismo, 108
formula
  di Erone, 55, 153
  di Wallis, 92
forza
  centrifuga, 137
  centripeta, 137
  viva, 139
frazioni continue, 70
fronte d'onda, 144

geometria
  analitica, 70, 100
  numerica, 70
  proiettiva, 69
  sferica, 52
grandezze
  commensurabili, 4, 7
  incommensurabili, 7, 8, 11

indivisibili, 71, 80
infinito, 71
inviluppo
  di una famiglia di curve, 158
involuta, 142
iperbole
  di Fermat, 104

lati-diametri razionali, 152
legge
  dei coseni, 150
  dei seni, 151
  delle corde, 132
  di Bernoulli, 84
  di Snell, 106
  di Torricelli, 84
linea retta, 57
logaritmi, 70, 86
lunghezza
  della parabola-semicubica, 112
  di una curva, 112
  equatore terrestre, 148
  parabola, 109
lunula, 21, 59

massimo comun divisore, 8
metodo
  degli indivisibili, 80
  dell'adequazione, 101, 103
  dell'analisi e della sintesi, 22, 58
  della composizione dei moti, 83
  delle aree, 14
  delle proporzioni, 14
  di Archimede, 71
  di esaustione, 12, 13, 27, 71, 75, 110
  geometrico, 135, 136, 142, 143
moto
  circolare uniforme, 136
  di caduta libera, 136, 138

numeri
  trascendenti, 23

ottica
  geometrica, 65, 66

parabola
  di Fermat, 104
  di sicurezza, 83
paradossi
  di Zenone, 11
parallelogramma
  delle forze, 122
pendolo, 128, 139, 142
  isocronismo, 142
piano inclinato, 138
pitagorici, 6, 7, 52
pompa pneumatica, 85
postulato
  delle parallele, 3, 30, 51
principio
  dei lavori virtuali, 118
  della conservazione dell'energia, 139
  della leva, 43, 128
  di Archimede, 12, 35
    in idrostatica, 128
    in statica, 34
  di Cavalieri, 81
  di Erone, 56
  di Fermat, 107
  di Huygens, 144
  di inerzia, 127, 141
  di minima azione, 108
  di minimo, 56, 100
  di minimo cammino, 106
  di Pascal, 83
  di relatività galileiana, 140, 141
  di riflessione, 56, 106
  di rifrazione, 106
  di Torricelli, 84, 138
  di uguaglianza, 13
  meccanico di Huygens, 138
problema
  della longitudine, 68, 142
  di costruzione, 21
  di Pappo, 58, 97
prospettiva, 69

quadratrice di Ippia, 25
quadratura
  del cerchio, 21, 23

delle lunule, 21
quantità di moto, 140

rapporto dimensioni Luna-Sole, 148

serie, 85
armonica, 85
di Mengoli, 86
geometrica, 85
telescopica, 86
sezione aurea, 8
sottotangente, 104
spazio, 141
fisico, 141
geometrico, 141
spirale, 72
di Archimede, 33, 39
successione
di Erone, 56, 153
di Teone, 152

teorema
di Archimede
sul cerchio, 20
sulla sfera, 20
di Dehn, 14
di Euclide, 18
di Guldino, 58, 77, 155
di Menelao, 53
di Pappo, 58, 77
di Pitagora, 5, 7, 13, 17, 30
di Talete, 3, 4, 13, 15
di Tolomeo, 53, 152
teoria
dei numeri, 100
della forza viva, 129
delle proporzioni, 12
toro, 50
trigonometria, 28
piana, 52
sferica, 52
trisezione dell'angolo, 24

urto, 139

velocità
istantanea, 129
volume
del cilindro, 45
del cono, 38
del settore di paraboloide, 41, 46
del solido iperbolico, 83
della sfera, 45