

Funzioni e numeri

Mariano Giaquinta

Mariano Giaquinta
Professore Emerito
Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri, 7
I-56100 Pisa
mariano.giaquinta@sns.it

Indice

Prefazione	xi
Capitolo 1. Annotazioni sull'eredità del Settecento	1
1.1. Sul calcolo infinitesimale	3
1.2. Le serie trigonometriche e le equazioni della fisica matematica	6
1.2.1. Interpolazione	7
1.2.2. d'Alembert: l'equazione delle onde	12
1.2.3. Fourier: l'equazione del calore	19
1.2.4. Laplace: il potenziale gravitazionale	27
Capitolo 2. Cauchy, Abel e Bolzano	33
2.1. L' <i>analisi</i> di Cauchy	33
2.1.1. Variabili, funzioni, limiti e continuità	35
2.1.2. Differenziabilità e integrazione	38
2.1.3. Serie numeriche e serie di funzioni	43
2.2. Serie di potenze	45
2.2.1. Gauss sulla serie ipergeometrica	46
2.2.2. Abel sulle serie di potenze	46
2.2.3. Serie di potenze: un breve sommario oggi	49
2.3. Bolzano	50
2.3.1. <i>Rein analytischer Beweis e Funktionenlehre</i>	51
2.3.2. <i>Reine Zahlelehre e Paradoxien des Unendlichen</i>	53
Capitolo 3. Serie di Fourier: Dirichlet e Riemann	55
3.1. Poisson e Cauchy sulle serie trigonometriche	55
3.2. Dirichlet	57
3.2.1. Sulle serie di Fourier	58
3.2.2. Su alcuni principi del calcolo	60
3.2.3. Il principio di Dirichlet.	62
3.3. Riemann	63
3.3.1. L'integrale di Riemann	66
3.3.2. Il criterio di integrabilità di Riemann-Lebesgue-Vitali	69
3.3.3. Sulle serie trigonometriche	74
3.4. Serie di Fourier: uno sguardo dopo Riemann	75

3.4.1.	I teoremi di Dini	76
3.4.2.	Il teorema di Fejér	77
Capitolo 4.	Il periodo del rigore di Weierstrass	81
4.1.	Il calcolo	82
4.1.1.	Continuità e differenziabilità	82
4.1.2.	Convergenza delle funzioni	86
4.2.	Cantor e la nascita della teoria degli insiemi	89
4.2.1.	I reali di ordine λ , la retta e gli insiemi di prima specie	91
4.2.2.	Il teorema di unicità di Cantor	93
4.3.	Ulteriori riflessioni sull'integrale di Riemann	94
4.3.1.	Le funzioni discontinue	95
4.3.2.	Limiti dell'integrale di Riemann	97
4.3.3.	La misura di Peano-Jordan e l'integrale multiplo	99
4.4.	La misura di Borel	104
Capitolo 5.	Numeri e insiemi	109
5.1.	I numeri	110
5.1.1.	Da Weierstrass a Cantor	110
5.1.2.	Dedekind	114
5.1.3.	Dai naturali ai reali e viceversa	122
5.2.	Cantor e l'infinito	124
5.2.1.	I <i>Grundlagen</i>	126
5.2.2.	Il procedimento diagonale di Cantor	129
5.2.3.	I <i>Beiträge</i>	130
5.2.4.	Gli insiemi e i paradossi dell'infinito	131
5.3.	Il metodo assiomatico	132
5.3.1.	La teoria assiomatica degli insiemi	133
5.3.2.	Hilbert e Gödel: coerenza e certezza	134
Capitolo 6.	Misura e integrazione	137
6.1.	Misura e integrale di Lebesgue	138
6.1.1.	La Tesi di dottorato di Lebesgue: misura e integrale	138
6.1.2.	Misura e integrale di Lebesgue	141
6.1.3.	I teoremi di convergenza	149
6.1.4.	Derivazione e teorema fondamentale del calcolo	152
6.2.	Teoria astratta della misura	157
6.2.1.	La teoria di Carathéodory	160
6.2.2.	Misure di Borel e di Radon	162
6.2.3.	Derivazione delle misure	164
6.2.4.	La misura di Lebesgue-Stieltjes	166
6.2.5.	La misura di Hausdorff	167

Capitolo 7. Appena uno sguardo su un nuovo mondo	169
7.1. Il primo Novecento: qualche annotazione	169
7.1.1. La teoria spettrale di Hilbert-Schmidt	173
7.2. Le serie trigonometriche e lo spazio L^2	179
7.2.1. Lebesgue e le serie trigonometriche	179
7.2.2. Fatou e le serie trigonometriche	182
7.2.3. Il teorema di Riesz-Fischer	186
7.2.4. Gli spazi L^1 e L^2	188
7.3. Gli spazi di Hilbert	192
7.3.1. Qualche definizione	192
7.3.2. Spazi di Hilbert separabili e serie di Fourier astratte	194
7.3.3. Il principio di Dirichlet	195
Capitolo 8. Complementi e temi da sviluppare	199
Bibliografia	243
Indice dei nomi	257
Indice analitico	261