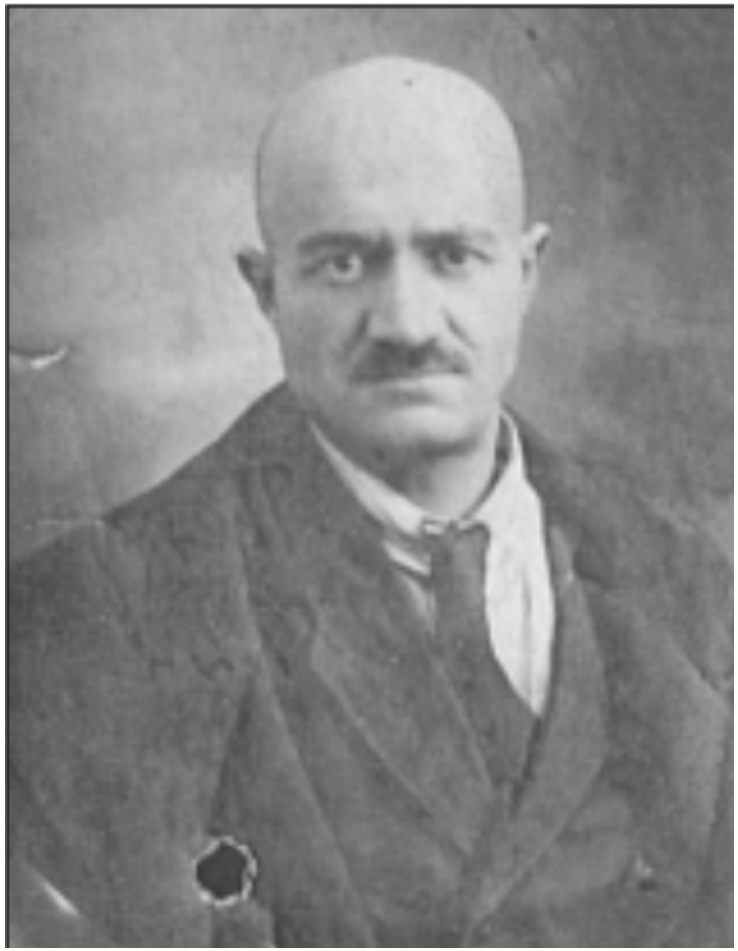
La figura e l'opera di Alexander Grothendieck

Angelo Vistoli

Scuola Normale Superiore, Pisa

Pisa, 22 gennaio 2015

Nasce a Berlino il 28 marzo 1928 a Berlino, da Alexander (Sascha) Schapiro e Johanna (Hanka) Grothendieck.



Sascha, ebreo hassidico russo e anarchico militante, nato nel 1890, fuggì nel 1921 dalla Russia, dopo avere passato dieci anni in prigione. Hanka, tedesca, nata nel 1900, era figlia di borghesi luterani di Amburgo, ma aveva idea socialiste. Si conobbero nella Berlino progressista degli anni '20; Hanka era sposata con una figlia, Maidi.

Nel 1933, con l'arrivo al potere dei nazisti, Sascha fuggì a Parigi. Hanka lo seguì a breve, lasciando Alexander con una famiglia affidataria, gli Heydorn, vicino ad Amburgo.

Nel maggio 1939 Alexander raggiunse i genitori a Parigi. Allo scopo della guerra Sascha fu internato a Le Vernet, un campo per stranieri indesiderabili; nel 1942 fu deportato dalle autorità francesi a Auschwitz, dove morì.

Nel 1940 Hanka col figlio fu internata in un altro campo per stranieri indesiderabili, a Rieucros. Ad Alexander fu permesso di andare a scuola. Dopo due anni furono separati, e Alexander finì a Chambon-sur-Lignon, dove terminò le scuole secondarie. Alla fine della guerra si riunì con la madre, ed andò a vivere vicino a Montpellier, dove poté cominciare gli studi universitari.

L'università di Montpellier era allora di livello molto basso; in un ambiente poco stimolante, Grothendieck sviluppò da solo una teoria dell'integrazione essenzialmente equivalente a quella di Lebesgue. Nel 1948 ottenne una borsa di studio per studiare a Parigi, dove cominciò a frequentare il leggendario seminario di Henri Cartan, dedicato alla topologia algebrica e alla teoria dei fasci, e i corsi di Leray sugli spazi vettoriali topologici.

Nel 1949 si trasferì a Nancy per studiare analisi funzionale con Laurent Schwartz; nel 1953 si addottorò (*doctorat d'État*) dopo avere scritto sei articoli fondamentali di analisi funzionale. Aveva difficoltà a trovare un lavoro, essendo un apolide: passò un anno a San Paolo, in Brasile, e un anno in Kansas.

Nel 1955 scrisse "Sur quelques points d'algèbre homologique", noto come "Tôhoku", e cominciò ad interessarsi di geometria algebrica. Cominciò anche una corrispondenza con Jean-Pierre Serre, durata molti anni. Nel 1956–57 dimostrò la sua versione del teorema di Riemann–Roch.

Il teorema di Grothendieck–Riemann–Roch

Sia X una varietà proiettiva complessa liscia, E fibrato vettoriale olomorfo X. Quest'ultimo ha dei gruppi di coomologia $\mathrm{H}^i(X, E)$, che sono spazi vettoriali su $\mathbb{C}$. Consideriamo la caratteristica di Eulero $\chi(E) = \sum_i \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^i(X, E)$. Friederich Hirzebruch aveva dimostrato che

$$\chi(E) = \int_X \mathrm{ch}(E)\,\mathrm{td}(X)$$

dove $\mathrm{ch}(E) \in H^*(X, \mathbb{Q})$ è il *carattere di Chern* di E, e $\mathrm{td}(X) \in H^*(X, \mathbb{Q})$ è la *classe di Todd* di X. Si tratta di un'importante generalizzazione dei teoremi di Riemann–Roch per curve e superfici. Grothendieck estese questo teorema alle mappe tra varietà proiettive lisce.

Per ogni varietà X, Grothendieck definisce un anello $\mathrm{K}(X)$, i cui elementi sono differenze formali $[E] - [F]$ di classi di fibrati vettoriali. Se $f : X \to Y$ è una mappa tra varietà algebriche, questa induce un omomorfismo di gruppi $f_! : \mathrm{K}(X) \to \mathrm{K}(Y)$; se $Y = \mathrm{pt}$ è un punto, allora $\mathrm{K}(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$, e $f_! : \mathrm{K}(X) \to \mathrm{K}(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$ manda $[E] - [F]$ in $\chi(E) - \chi(F)$. C'è un omomorfismo di anelli $\mathrm{ch} : \mathrm{K}(X) \to \mathrm{H}^*(X, \mathbb{Q})$ che manda $[E] - [F]$ in $\mathrm{ch}(E) - \mathrm{ch}(F)$. Il teorema di Grothendieck–Riemann–Roch dice che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K}(X) & \xrightarrow{\xi \mapsto \mathrm{ch}(\xi)\,\mathrm{td}(X)} & H^*(X, \mathbb{Q}) \\ \downarrow{\scriptstyle f_!} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \mathrm{K}(Y) & \xrightarrow{\xi \mapsto \mathrm{ch}(\xi)\,\mathrm{td}(Y)} & H^*(Y, \mathbb{Q}) \end{array}$$

commuta. Nel caso $Y = \mathrm{pt}$, questo dà il teorema di Hirzebruch–Riemann– Roch. La versione di Grothendieck non è solo molto più generale, ma anche molto più facile da dimostrare.

Nel 1958 fece una conferenza al congresso internazionale dei matematici a Edimburgo, in cui delineò il suo programma per definire un'analogo della coomologia singolare per varietà algebriche su campi arbitrari.

Visitò anche ripetutamente Harvard, invitato da Oscar Zariski, dove entrò in contatto con David Mumford e Michael Artin.

Infine fu assunto dall'*Institut des Hautes Études Scientifiques* (IHÉS), un istituto di ricerca privato.

Questo fu l'inizio dell'epoca d'oro, che durò fino al 1969.

Grothendieck all'IHÉS

All'IHÉS Grothendieck si trovò circondato da studenti e collaboratori di altissimo livello. Una lista parziale: Pierre Deligne, Luc Illusie, Michael Artin, Michel Raynaud, Jean-Louis Verdier, Michel Demazure, Pierre Berthelot, Nicholas Katz.

Condusse una serie di seminari monografici di ricerca, evidentemente ispirati al seminario di Henri Cartan, i cui risultati rivoluzionarono la geometria algebrica.

In questi anni Grothendieck, assieme a studenti e collaboratori, scrisse migliaia di pagine. I testi principali sono i seguenti.

- *Fondements de la Géometrie Algébrique* (FGA).
- Gli *Éléments de géométrie algébrique* (EGA), con la collaborazione di Jean Dieudonné. Questa doveva essere un'opera in tredici volumi che copriva tutti i fondamenti della geometria algebrica. Di volumi ne sono usciti quattro, per un totale di 1.800 pagine.
- I *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie* (SGA 1 – SGA 7).

I contributi principali di Grothendieck

- La nozione di schema. Questa permette di fare geometria algebrica su basi che non sono campi, e di avere degli spazi con delle funzioni nilpotenti non nulle.
- Il punto di vista funtoriale in geometria algebrica. Supponiamo che $f_1, \ldots, f_r$ siano polinomi in n indeterminate a coefficienti in un anello commutativo R. Le soluzioni del sistema di equazioni $f_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = f_r(x_1, \ldots, x_n) = 0$ in R possono non dare molte informazioni. Consideriamo le soluzioni di questo sistema di equazioni in *tutte* le R-algebre: questo dà un funtore da R-algebre a insiemi. Questo caratterizza lo schema su R dato dal sistema di equazioni $f_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = f_r(x_1, \ldots, x_n) = 0$! Uno schema su R può essere pensato come un funtore ad R-algebre a insiemi.

Questo punto di vista è estremamente potente. Permette di definire degli schemi a partire da un funtore (per esempio, lo schema di Hilbert). Ha chiarito completamente, per esempio, il problema della varietà di Picard, che allora presentava degli aspetti misteriosi.

- Topologie di Grothendieck, coomologia étale, topoi.
- Motivi.
- Il gruppo fondamentale algebrico.
- Categorie derivate, dualità.
- ...

Nel 1966 Grothendieck vinse la medaglia Fields; ma il congresso era a Mosca, e Grothendieck rifiutò di andare per motivi politici. Nel 1967 visitò il Vietnam in guerra.

Nel 1970 lasciò l'IHES, in apparenza come protesta per il fatto che l'IHÉS aveva cominciato a ricevere finanziamenti dal Ministero della Difesa. Fonda un gruppo ecologista e pacifista, *Survivre*. Questo fallisce; nel 1973 Grothendieck ottenne un posto all'università di Montpellier, dove rimane fino al 1988. Si convertì al buddismo, poi gravitò intorno ad idee di mistica cristiana, e coltivò i suoi interessi ecologisti.

Grothendieck nel 1988

Pur essendosi allontanato dal mondo della ricerca, negli anni '80 produsse quattro testi matematici, *La Longue Marche à Travers la Théorie de Galois* (1981), *Esquisse d'un Programme* (1983), *A la Poursuite des Champs* (1983) e *Les Dérivateurs* (1987). Nei primi due stabilì dei legami sorprendenti tra il gruppo di Galois assoluto di $\mathbb{Q}$ mediante la sua azione su oggetti topologici, e produsse delle congetture importanti sul legame tra l'aritmetica di una varietà e suo gruppo fondamentale (*geometria anabeliana*). Il terzo tratta di infinito- categorie, e ha avuto molta influenza sul campo.

Scrisse anche *Récoltes et Semailles: Réflexions et Témoignage sur un Passé de Mathématicien* (Raccolti e semine: riflessioni e testimonianza su un passato di matematico), che contiene pensieri affascinanti sulla sua attività di matematico, e anche duri attacchi alla comunità matematica, e ai suoi vecchi studenti e collaboratori, colpevoli secondo lui di averlo dimenticato e tradito.

Nel 1988 ricevette il Crafoord prize dell'Accademia Reale delle Scienze svedese, con Deligne, che rifiutò.

Nel 1991 si ritirò in una località sconosciuta, scrivendo su argomenti di mistica, sul libero arbitrio, l'esistenza del male, rifiutando quasi qualunque contatto umano.

È morto il 13 novembre 2014.

La caratteristica fondamentale di Grothendieck la capacità di trovare l'astrazione "giusta". Lui non era interessato a risolvere problemi, ma a scoprire dei mondi matematici. I problemi lo interessavano solo quando questi parevano indicare l'esistenza di strutture profonde e nascoste. Secondo Deligne "Lui mirava a scoprire e creare l'ambiente che costituiva l'habitat naturale del problema. Questo lo interessava, più che risolverlo".

In *Récoltes et Semailles* Grothendieck descrive il suo approccio come segue. Supponiamo di volere aprire una noce particolarmente dura. Un approccio è con martello e cesello: colpisci, in più punti diversi, finché il guscio non si spacca. Un altro è di immergerla in liquido ammorbidente, sfregando ogni tanto perché il liquido penetri meglio. Dopo qualche settimana, o mese, quando l'ora è arrivata, basta stringere con la mano, e la noce si apre come un avocado perfettamente maturo.

Grothendieck è stato descritto a molti come incredibilmente ingenuo, onesto ed idealista nella vita. Questa caratteristica è stata per lui estremamente produttiva in matematica, molto meno nella vita.

Il problema che forse ha avuto più importanza per Grothendieck è stato quello delle congetture di Weil. Lo strumento fondamentale è la coomologia étale, da lui introdotta, e sviluppata assieme a Michael Artin. Grothendieck formulò una serie di congetture le "congetture standard", che avrebbero consentito di dimostrare le congetture in modo naturale. Le congetture di Weil furono dimostrate da Deligne 1973 con un approccio di tipo "martello e cesello"; le congetture standard sono tuttora intoccate.

Da *Récoltes et Semailles*:

E ogni scienza, quando la intendiamo non come uno strumento di potere e dominio, ma come un'avventura nella conoscenza perseguita dalla nostra specie attraverso i tempi, altro non è che questa armonia, più o meno vasta e più o meno ricca da un'epoca all'altra, che si svolge nel corso delle generazioni e dei secoli, per il delicato contrappunto di tutti i temi che appaiono di volta in volta, come evocati dal vuoto.

http://www.grothendieckcircle.org/