Numeri complessi

1. Calcolare

$$\Re z\,,\ \Im z \quad \text{se} \quad z=\frac{\mathbf{i}-4}{2\,\mathbf{i}-3}\,, \qquad |z|\,,\ \bar{z}\,,\ |w|\,,\ \bar{w} \quad \text{se} \quad z=(1+\mathbf{i})^6\,,\ w=\mathbf{i}^{17}$$

2. Scrivere in forma *algebrica* i numeri $\mathbf{i}^5+i+1$ e $3+3\,\mathbf{i})^8$.

3. Scrivere in forma *trigonometrica* e *esponenziale* i numeri 8, $6\,\mathbf{i}$, $(\cos(\pi/3)-\mathbf{i}\,\sin(\pi/3))^7$.

4. Scrivere in forma *algebrica* i numeri $\mathbf{e}^{-2\pi\mathbf{i}/3}$, $12\,\mathbf{e}^{\pi\,\mathbf{i}/6}$, $\mathbf{e}^{2\pi\mathbf{i}/3}+\mathbf{e}^{4\pi\mathbf{i}/3}+\mathbf{e}^{6\pi\mathbf{i}/3}$.

5. Calcolare le radici quadrate del numero $5+12\,\mathbf{i}$.

6. Risolvere le equazioni $\;|z|\bar{z}\;=\;2\,\mathbf{i}\,,\;\; z^4=\bar{z}^3\,,\;\; z^3=\mathbf{i}\,z\,\bar{z}$.

7. Calcolare

$$\frac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}-(1+2\,\mathbf{i})\,(2+2\,\mathbf{i})+\frac{3-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\,, \qquad 2\,\mathbf{i}\,(\mathbf{i}-1)+\left(\sqrt{3}+\mathbf{i}\right)^3+(1+\mathbf{i})\,\overline{(1+\mathbf{i})}\,.$$

8. Calcolare le radici quadrate di $-1-\mathbf{i}$ e le radici cubiche di -8;

9. Determinare i numeri $z\in\mathbb{C}$ tali che

$$\bar{z}=\mathbf{i}\,(z-1)\,, \quad z^2\,\bar{z}=z\,, \quad |z+3\,\mathbf{i}|=3\,|z|\,, \quad |z|-z=\mathbf{i}\,.$$

10. Trovare il più piccolo n intero positivo per cui $(\sqrt{3}+\mathbf{i})^n$ è a) reale; b) immaginario puro.

11. Calcolare il complesso coniugato di

$$z\;=\;\left(\frac{a+\mathbf{i}\,b}{a-\mathbf{i}\,b}\right)^2+\left(\frac{a-\mathbf{i}\,b}{a+\mathbf{i}\,b}\right)^2$$

12. Se n è un intero positivo e z è un complesso di modulo 1 tale che $z^{2\,n}\neq-1$ allora

$$\frac{z^n}{1+z^{2\,n}}$$

è reale (facendo i conti attraverso la forma polare).

13. Dimostrare che le tre radici cubiche di 1 possono essere espresse nella forma 1, ω, ω^2. Dal fatto che $\omega^3=1$ dedurne che $1+\omega+\omega^2=0$. Usare questi fatti per semplificare le seguenti espressioni:

(a) $(1+\omega)^7$ (b) $(1-\omega)\,(1-\omega^2)$

(c) $\dfrac{\omega^5}{1+\omega}$ (d) $((1-\omega+\omega^2)^4$

(e) $(\omega-\omega^2)^5$ (f) $\dfrac{(1+\omega^2)\,(1-\omega)}{1+\omega}$

14. Trovare $a\in\mathbb{R}$ tale che $P(-\mathbf{i})=0$, dove $P(z)=z^3-z^2+z+1+a$. Per questo valore di a trovare la scomposizione di $P(z)$ in fattori a coefficienti reali e in fattori a coefficienti in$\mathbb{C}$.

15. Trovare $z\in\mathbb{C}$ per cui

(a) $\mathbf{i}\, z^2$ è un numero reale positivo;

(b) $\Re\left((1+\mathbf{i})\, z\right) + z\,\bar{z} = 0$;

(c) $\Re(z^2) + \mathbf{i}\,\Im(\bar{z}\,(1+2\,\mathbf{i})) = -3$;

(d) $\Im((2-\mathbf{i})\, z) = 1$.

16. Verificare se la successione

$$z_n \;=\; \sum_{h=0}^{n} \left(\frac{2\,\mathbf{i}}{3}\right)^h$$

è limitata in $\mathbb{C}$ (il che significa che $|z_n|$ è una successione reale limitata, o anche che lo sono le successioni $\Re z_n$ e $\Im z_n$). In tale caso studiare i limiti di $\Re z_n$ e $\Im z_n$ per $n \to \infty$.

17. Stesse domande per

$$z_n \;=\; \sum_{h=0}^{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathbf{i}\right)^h, \qquad z_n \;=\; \sum_{h=0}^{n} \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\,\mathbf{i}\right)^h.$$

18. Dire per quali valori di $w \in \mathbb{C}$ la successione

$$z_n \;=\; \sum_{h=0}^{n} \left(\frac{\bar{w}-1}{1+w}\right)^h$$

è limitata in $\mathbb{C}$. In tale caso studiare l'esistenza dei limiti di $\Re z_n$ e $\Im z_n$ per $n \to \infty$.

19. Avendo definito la funzione esponenziale per $z \in \mathbb{C}$ come

$$z \mapsto \mathbf{e}^z \;=\; \mathbf{e}^{\Re z}\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\,\Im z} \;=\; \mathbf{e}^{\Re z}\,(\cos(\Im z) + \mathbf{i}\,\sin(\Im z))$$

dimostrare che $|\mathbf{e}^z| = \mathbf{e}^{\Re z}$; disegnare l'insieme di punti di $\mathbb{C}$ con $\Re z = 2$ e l'insieme dei relativi punti $\mathbf{e}^z$; dire per quali punti z si ha $\mathbf{e}^z = \mathbf{e}$ e per quale vale invece $\mathbf{e}^z = -\mathbf{e}$;

20. Provare che se n è un intero positivo, allora $(1+\mathbf{i})^{4n} - (1-\mathbf{i})^{4n} = 0$.

21. Risolvere l'equazione $(z+1)^4 + 4\,(z-1)^4 = 0$.

22. Dato il numero complesso $\omega = \cos(2\,\pi/5) + \mathbf{i}\,\sin(2\,\pi/5)$ calcolare ω^5 e provare che $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$; semplificare l'espressione $(\omega + \omega^4)\,(\omega^2 + \omega^3)$. Determinare una equazione di secondo grado a coefficienti interi che abbia per radici $\omega + \omega^4$ e $\omega^2 + \omega^3$ e provare quindi che

$$\cos\frac{2\,\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

23. Studiare l'insieme $R = \{w \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} \;:\; w^n = 1\}$, e dimostrare che dati due numeri complessi $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\,\theta_1}$ e $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\,\theta_2}$ con $\theta_1 < \theta_2$, esiste sempre uno $z = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\,\phi} \in R$ con $\theta_1 < \phi < \theta_2$.
Che cosa si può dire dell'insieme $R_\alpha = \{w \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} \;:\; w^n = \alpha\}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ fissato?.