Insiemistica, logica, principio di induzione ed altro

1. Data l'operazione logica $p \uparrow q$ definita da $\neg(p \wedge q)$, scriverne la tabella di verità.
   Dimostrare poi che le espressioni $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \implies q$, $p \equiv q$ possono essere scritte usando il solo operatore $\uparrow$ e parentesi di raggruppamento.

2. Verificare che
$$A \subset B \iff A \cap B = A$$
$$A \subset B \iff A \cup B = B$$

3. Verificare le identità:
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
   Determinare (nel modo più rapido possibile) che relazione c'è tra gli insiemi $A \cap (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cup (A \cap C \cap B^c)$?

4. Trovare le condizioni più semplici sull'insieme X affinché valga la relazione
$$A \cup (B \cap X) = (A \cup B) \cap X$$
   Si consiglia di indicare con $\phi_H(x)$ la funzione che vale 1 se $x \in H$ e 0 altrimenti (la *funzione caratteristica* dell'insieme H), ricavare le espressioni per $\phi_{H \cup K}$ e $\phi_{H \cap K}$ e . . . farne buon uso.

5. La differenza simmetrica tra due insiemi è definita come $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
   Verificare le identità:
$$(A \triangle B)^c = A^c \triangle B = A \triangle B^c\,,$$
$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)\,, A \cup (B \triangle C) = (A \cup B) \triangle (A^c \cap C)$$
$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C = (A \triangle C) \triangle B\,.$$

6. Mostrare che l'insieme $\mathcal{P}(E)$ con l'operazione $\triangle$ è un gruppo commutativo (l'associatività è stata provata nell'esercizio precedente).

7. Risolvere l'equazione insiemistica
$$(A \cup X) \triangle B \;=\; A \triangle (B \cup X)\,.$$

8. Dimostrare l'identità:
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

9. Sia $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi **finiti** di $\mathbb{N}$; appartengono a tale insieme ad esempio gli insiemi $\{1, 2, 10, 1000\}$ e $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 1.000.000.000\}$, ma non l'insieme di tutti i numeri pari o dei numeri che sono cubi di un intero. Costruire una funzione iniettiva $\psi : \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ e dedurne che tale insieme ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$. Può essere **molto** utile pensare ai numeri primi ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, . . .) e al fatto che i numeri interi si fattorizzano in maniera unica.

10. Provare *per induzione* che per ogni $n \geq 1$ il polinomio $x^{2n} - 1$ è divisibile per $x^2 - 1$.

11. Nella tabella seguente, a sinistra del triangolo di Tartaglia, sono riportate in colonna le somme dei numeri che stanno sulle diagonali crescenti:

1	$=$	1	1						
1	$=$	1	1	1					
				$\nearrow$					
$1+1$	$=$	2	1	2	1				
				$\nearrow$	$\nearrow$				
$1+2$	$=$	3	1	3	3	1			
				$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$			
$1+3+1$	$=$	5	1	4	6	4	1		
				$\nearrow$	$\nearrow$				
$1+4+3$	$=$	8	1	5	10	10	5	1	
				$\nearrow$					
$1+5+6+1$	$=$	13	1	6	15	20	15	6	1

Si nota che i numeri nella seconda colonna, $\{1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13\ \}$ sono i primi termini della successione di Fibonacci, definita ricorsivamente come: $f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ per $n \geq 2$. Provare per induzione che questo non è un caso.

12. Dimostrare per induzione che due termini consecutivi della successione di Fibonacci, definita da $f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ per $n \geq 2$.

13. Sia data $f :]-\infty, +\infty[\to]-\infty, +\infty[$; tradurre in espressioni logiche le affermazioni
    (a) f è una funzione decrescente;
    (b) f è una funzione monotona (è crescente o decrescente);
    (c) f è una funzione iniettiva;
    (d) f è una funzione surgettiva;
    (e) f è una funzione limitata;
    (f) il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse delle y;
    (g) il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine degli assi;
    (h) f è una funzione periodica di periodo $2\,\pi$;
    (i) f è una funzione periodica;

14. Dimostrare per induzione la seguente identità

$$\sum_{h=1}^{2\,n} \frac{(-1)^{h+1}}{n} = \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{n+h}\,.$$

15. Dimostrare per induzione le seguenti identità:

- $(1-\frac{1}{2})\,(1-\frac{1}{3})\,(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$
- $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
- $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n\cdot(n+1) = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}$
- $1\cdot(1!) + 2\cdot(2!) + 3\cdot(3!) + \cdots n\cdot(n!) = (n+1)! - 1$
- $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + n\cdot(n+1)\cdot(n+2) = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{4}$

16. Sono dati n insiemi A_1,A_2, ..., A_n e $k \leq n$, $k \in \mathbb{N}$. Dimostrare che l'unione di tutte le intersezioni di k insiemi scelti tra gli A_i è uguale alla intersezione di tutte le unioni di $n-k+1$ insiemi scelti tra gli A_i.

17. Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi. Dimostrare che

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

18. Dati A e $B \subset \mathbb{R}$ si definisce $A+B$ come l'insieme $\{x \mid \exists a\, \exists b:\ a \in A \wedge b \in B \wedge a+b=x\}$. Se A e B sono insiemi limitati, dimostrare che

$$\sup(A+B) \;=\; \sup A \;+\; \sup B\;, \qquad \inf(A+B) \;=\; \inf A \;+\; \inf B$$

19. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata(l'immagine è un limitato di $\mathbb{R}$), si indica con $\inf_A f$, $\sup_A f$ l'estremo inferiore e superiore di $f(A)$. Dimostrare che, date due funzioni limitate,

$$\sup_A(f+g) \;\leq\; \sup_A f \;+\; \sup_A g\;, \qquad \inf_A(f+g) \;\leq\; \inf_A f \;+\; \inf_A g\;,$$

Provare con un controesempio che in generale non vale l'uguaglianza.

20. Provare che valgono le due diseguaglianze

$$\sup_A(f+g) \;\geq\; \sup_A f \;+\; \inf_A g\;, \qquad \sup_A(f+g) \;\geq\; \inf_A f \;+\; \sup_A g\;,$$

e le diseguaglianza analoghe per $\inf_A(f+g)$.

21. Dire il numero di tutti gli anagrammi per le parole ALBE e ERRORE.

22. Verificare che $\mathbb{Z}$ con l'operazione definita da $m \diamond n = m+n-3$ è un gruppo commutativo. Trovare una applicazione $\phi : (\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Z},\diamond)$ tale che

$$\phi(m+n) \;=\; \phi(m) \diamond \phi(n)\;.$$

23. Verificare che i seguenti insiemi sono limitati e calcolarne estremo superiore e inferiore.

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{1 - \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \\ A_2 &= \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \\ A_3 &= \left\{\cos\frac{n\,\pi}{8} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \end{aligned}$$

24. Algoritmo di Euclide per il massimo comun divisore.

25. Dimostrare per induzione le seguenti affermazioni:

$$n! \;\geq\; 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \;=\; 2 - \frac{n+1}{2^n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4\,k^2-1} \;=\; \frac{n}{2\,n+1}$$

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1+x^{2^k}\right) \;=\; (1+x)\,(1+x^2)\,\cdots\,\left(1+x^{2^n}\right) \;=\; \frac{1+x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\,(k+3) \;=\; \frac{n\,(n+1)\,(n+5)}{3}$$

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right) \;=\; \frac{1+n}{2\,n}$$

26. Provare la successione di numeri $\sqrt{1+\sqrt{1}}$, $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$, $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$, ... , definita induttivamente da $\alpha_1 = \sqrt{1+\sqrt{1}}$ e $\alpha_{n+1} = \sqrt{1+\alpha_n}$ per $n \geq 1$, consiste di numeri non appartenenti a $\mathbb{Q}$.

27. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$s_n \;=\; \sum_{h=1}^{n} \frac{(-1)^{h+1}}{h} \;\geq\; 0\,.$$

Si consiglia di dimostrare la tesi separatamente per le successioni $s_{2\,n}$ e $s_{2\,n-1}$; verificare poi che la prima successione è crescente, che la seconda è decrescente e che gli insiemi $\{s_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $\{s_{2n-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sono separati e contigui.

28. Per quali valori di n la proposizione $2^n > n^2$ risulta induttiva? E per quali n vale?

29. Dimostrare per induzione che se l'insieme A ha n elementi, il numero dei suoi sottoinsiemi è dato da 2^n, e quindi $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$ per ogni A finito.
Mostrare poi che l'insieme $\mathbf{2}^A = \{f : A \to \{0,1\}\}$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathcal{P}(A$ e quindi che $\#\mathbf{2}^A = 2^{\#A}$.

30. Data la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_1 & = \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} & = \quad \dfrac{1}{2}\,(a_n^2-3) \qquad\qquad \text{per } n \geq 1 \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che se $\alpha = -1, 3$ la successione è costante; è crescente per $\alpha > 3$ e per $\alpha < -1$; è decrescente se $-1 < \alpha < 3$. Per quali valori di α la successione a_n è limitata?

31. Provare che per ogni $n \geq 0$ intero il numero $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ è divisibile per 11.

32. Provare che la proposizione $2^n + 4^n \leq 5^n$ è induttiva per ogni $n \geq 1$; per quali n vale?

33. Provare che

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{h}} \;\geq\; \sqrt{n}\,.$$

34. Dimostrare per induzione che

$$a^n - b^b = (a-b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 + \cdots + a\,b^{n-2} + b^{n-1})$$

35. Provare che la relazione $A \subset B$ definita per $A,\ B \in \mathcal{P}(E)$ è un ordinamento. Dire sotto quali ipotesi tale ordinamento è totale.

36. Provare che sull'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ la relazione $(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2)$ che vale se e soltanto se $z_1\,n_2 = z_2\,n_1$ è una relazione di equivalenza. Provare che i due sottoinsiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ dati da $[(z_1, n_1)] = \{(z, n) \mid (z, n) \sim (z_1, n_1)\}$ e $[(z_2, n_2)] = \{(z, n) \mid (z, n) \sim (z_2, n_2)\}$ (le *classi di equivalenza* rispettivamente di (z_1, n_1) e (z_2, n_2)) sono disgiunti oppure coincidono. Con quale insieme noto sono in corrispondenza biunivoca le classi di equivalenza di $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$?

37. Sia a un numero reale maggiore di 1. Dimostrare che per ogni n si ha che $a^{1/n} > 1$ e che, se $n \geq m$ allora $a^{1/n} \leq a^{1/m}$. Trovare l'estremo inferiore di $A = \{a^{1/n} \mid n \geq 1\}$. Analoghe domande nel caso che sia $0 < a < 1$.