Lista esercizi su serie di potenze, funzioni di più variabili e non solo

1. Si determini il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2 - n^3 \sin\frac{1}{n}\right)^n .$$

2. Si trovi insieme di convergenza e somma per la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n .$$

3. Si trovi l'insieme di convergenza per la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\log(1+\frac{2}{n})\,(1-|x|)^n .$$

4. Data la funzione $f(x)$, si determini una serie di potenze centrata in 0 con raggio di convergenza $R > 0$ che abbia come somma $f(x$ per $|x| < R$ se

   (a) $f(x,) = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^k}$ (suggerimento: moltiplicare e dividere per $(1-x)$;

   (b) $f(x) = \frac{1}{x^2-5\,x+6}$.

5. Si determini il raggio di convergenza e linsieme di convergenza (e la somma ?) della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}\,\frac{x^{3n}}{3^n} .$$

6. Data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-(-1)^n}{2+(-1)^n}x^n$$

   se ne determini il dominio di convergenza e se ne calcoli la funzione somma.

7. Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi/4}(-1)^n\,x^{2n}\ \operatorname{arctg} x\,dx$$

   giustificando con precisione tutti i passaggi.

8. Si determini il raggio di convergenza (e la somma ?) della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sin n\,x^n .$$

9. Si determini il raggio di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^2+3^n)\,x^n .$$

10. Si determini, se esiste, il
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{}{x^2+y^4}\ .$$

Soluzione:

Si noti che, se $x = 0$, la funzione è identicamente 0; fuori dall'asse x si ha che
$$\frac{x^2\,y^2}{x^2+y^4} \;=\; \frac{y^2}{1+(y^2/x)^2} \;\leq\; y^2$$
per cui, quando (x, y) tende a $(0, 0)$ il limite esiste e vale 0 sia per f ristretta all'insieme $\{(x, y) \mid x = 0\}$, sia per f ristretta all'insieme complementare $\{(x, y) \mid x \neq 0\}$; quindi il limite proposto esiste ed è 0.

11. Si determini se esiste il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ per le seguenti funzioni:¡

    (a) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$;

    (b) $f(x,y) = x\,y\,\log(x^2+y^2)$;

    (c) $f(x,y) = \frac{x^3-2\,x,y+y^2}{x^2+y^2}$;

    (d) $f(x,y) = \frac{y^4}{x^2+y^4}$;

    (e) $f(x,y) = \frac{x\,\sin(x\,y)}{x^2+y^2}$;

    (f) $f(x,y) = \frac{x^3\,y}{x^4+y^2}$;

    (g) $f(x,y) = \frac{x\,y^3}{x^4+y^2}$;

    (h) $f(x,y) = \frac{1-\mathbf{e}^{x\,y^2}}{>}\sqrt{x^4+y^4}$;

    (i) $f(x.y) = \frac{1-\cos(x\,y)}{\log(1+x^2+y^2}$.

12. Si determini, se esiste, il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ delle funzioni, il cui dominio ha $(0, 0)$ come punto di accumulazione,
$$\frac{x^2+y^2}{y}\ , \qquad \frac{\sin(x\,y)}{x^2+y^2}\ .$$

13. Si studi al variare di α la continuità e la differenziabilità di
$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^\alpha & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

14. Siano $\beta > 1$, $\mathbf{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e si consideri la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{\beta-1}y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Al variare di $\beta > 1$ si determini se esiste $\partial f/\partial\mathbf{v}(0, 0)$ e in caso positivo la si calcoli.

15. Per le seguenti funzioni e i punti indicati si dica se il grafico della funzione f ammetta nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ piano tangente e lo si determini.

    (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $\quad (x_0, y_0) = (-2, 1)$;

    (b) $f(x,y) = \cos(x/y)$, $\quad (x_0, y_0) = (\pi, 4)$;

    (c) $f(x,y) = y\,\mathbf{e}^{-x^2}$, $\quad (x_0, y_0) = (0, 1)$;

    (d) $f(x,y) = \sqrt{1+x^2\,y^3}$, $\quad (x_0, y_0) = (1, 2)$;

16. Si determinino i piani orizzontali tangenti al grafico $z = f(x,y) = x^2-4\,x\,y-2\,y^2+12\,x+12\,y-1$ e i relativi punti di tangenza.

17. Si determini un vettore normale e l'equazzione del piano tangente al grafico di $z = \sin x\,y$ per $x = \pi/3$, $y = 1$.

18. Per le seguenti funzioni si determinino i punti critici (o stazionari) e si determini se sono punto di minimo relativo, massimo relativo o altro.

(a) $f(x,y) = x\,y\,\mathbf{e}^{(x^2+y^2)/2}$;

(b) $f(x,y) = x/y + 8/y - y$;

(c) $f(x,y) = x\,\sin y$;

(d) $f(x,y) = (1+1/x)\,(1+1/y)\,(1/x+1/y)$;

(e) $f(x,y) = x^2 + 2\,y^2 - 4\,x + 4\,y$.

19. Per le seguenti funzioni si determinino i punti critici (o stazionari) e si determini se sono punto di minimo relativo, massimo relativo o altro.

(a) $f(x,y) = x^2\,y + x^2 - 2\,y$;

(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 + x\,y$;

(c) $f(x,y) = \log(1 + x^2\,y^2)$;

(d) $f(x,y) = \sqrt{(1 + x^2 + y^2)}$;

(e) $f(x,y) = \mathbf{e}^{-(x^2+y^2)}$;

(f) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+2\,y^2}$.

20. Si provi che se $f(t)$ è una funzione differenziabile su tutto $\mathbb{R}$, la funzione $g(x,y) = f(y/x)$ è differenziabile su $\{(x,y) \mid x \neq 0\}$ e verifica la seguente identità (equazione differenziale)

$$x\,\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \;+\; y\,\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \;=\; 0\,.$$

21. Si dimostri che non esiste alcuna funzione $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$f_x(x,y) = x\,\sin y\,, \qquad f_y(x,y) = y\,\cos x\,.$$

(si ricorda che la derivata parziale di f rispetto a x si può indicare anche come f_x)

22. Si determini lo sviluppo di Taylor di secondo grado centrato nell'origine delle seguenti funzioni:

(a) $f(xy) = \sin x\,\sin y$,

(b) $f(x,y) = x\,\mathbf{e}^{x\,y}$,

(c) $f(x,y) = x^2\,\sin y^2$.

23. Data la funzione

$$f(x,y) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2\,y}\,,$$

si verifichi che non è differenziabile in $(1,0)$ e si calcolino le sue derivate direzionali in tale punto, per ogni vettore.