Esercizi

Misti iniziali

1. Data la funzione
$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x - \int_0^x e^{t^2}\, dt$$
se ne studino massimi, minimi, flessi, limiti a $\pm\infty$.

2. Provare che
$$F(x) = \int_0^x \big((1+t)\ \mathrm{arctg}\, t - t - t^2\big)\ dt = o(x^3)\ .$$

Più variabili

3. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-1/(x^2+y^2)}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\log(1 + x\,y)}{x}$

4. Dire per quali valori di α esiste il limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{1/(\alpha\, x^2 - y^2)}$$

5. Se una funzione $f(xy)$ non è definita in un punto (x_0, y_0) ma è possibile definirla in modo da renderla continua, si dice che $f(x, y)$ ha in (x_0, y_0) una *discontinuità eliminabile.* Trovare in quali punti le funzioni seguenti hanno una discontinuità eliminabile.

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2-y^2}$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}\, y}{x^2 - y^2}$

   (c) $f(x,y) = x\,y\, \ln(x\,y)$

   (d) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

   (e) $f(x,y) = \mathrm{sen}\, \dfrac{y}{x}$

6. Le seguenti funzioni sono differenziabili in $(0, 0)$?

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} x + y\,, & x > 0 \\ x + y\, e^{-x^2}\,, & x \le 0 \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

   (c) $f(x,y) = (\mathrm{arctg}(y+1))^{x+1}\,,$

   (d) $f(x,y) = \log_{y+1}(x+1)\,.$

7. Dire se la funzione
$$f(x,y)=\begin{cases} 3\,x+4\,y & \text{se } x\ge 0 \\ 3\,x+4\,y\,\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x^2} & \text{se } x<0 \end{cases}$$
è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

8. Dire se la funzione
$$f(x,y)=\begin{cases} 2\,x-y & \text{se } x\le 0 \\ 2\,x-y\,(x^2\,\log x+1) & \text{se } x>0 \end{cases}$$
è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. (Fino a quale ordine è differenziabile?)

9. Data la funzione
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{x-y}-1}{x-y} & \text{se } x\ne y \\ 1 & \text{se } x=y \end{cases}$$
si discuta la continuità, derivabilità e differenziabilità di $f(x,y)$ dimostrando che $f(x,y)$ ammette derivate parziali continue di ogni ordine.
Si calcoli la derivata direzionale $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ dove v è la direzione della retta $y=\frac{x}{2}$.
Si determini l'equazione del piano tangente alla superficie $z=f(x,y)$ nel punto $(0,0,1)$.

10. Calcolare il limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x-e^{\sin y}}{x-\sin y}\,.$$

11. Provare che i piani tangenti alla superficie di equazione $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ nell'insieme $\{(x,y,z)\ :\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$ individuano lungo i tre assi coordinati 3 segmenti aventi un estremo nell'origine, la cui lunghezza ha somma costante.

   Suggerimento: si espliciti z come funzione di x e y, e si ricordi quale è l'equazione del piano tangente al grafico di $z=f(x,y)$ in un punto (x_0,y_0) con $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{a}$; oppure, ci si ricordi che il piano tangente alla superficie di equazione $\varphi(x,y,z)=0$ nel punto (x_0,y_0,z_0) è perpendicolare al vettore gradiente
$$\nabla\varphi(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right).$$

12. Si formuli il teorema del valor medio per una funzione di più variabili.
Suggerimento. Sia $f:A\to\mathbb{R}$, dotata di derivate prime continue in A e dunque anche differenziabile; siano x_0 e $x_1\in A$, e il segmento che li congiunge è interno ad A; si consideri la funzione
$$t\longrightarrow F(t)=f((1-t)\,x_0+t\,x_1)\,,\qquad \text{sull'intervallo } [0,1]\,,$$

13. Se $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$, dimostrare che
$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\ \le\ \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\,.$$

14. Se $f(x,y)$, definita su $\{(x,y)\ :\ x^2+y^2<1\}$, verifica $\operatorname{grad} f(x,y)\equiv 0$ su tutto il cerchio, provare che $f(x,y)$ è costante.

15. Se $f(x,y)$ è differenziabile in un aperto connesso e $\operatorname{grad} f(x,y)\equiv 0$ allora $f(x,y)$ è costante su tutto l'aperto.

16. Si determini un piano tangente all'ellissoide
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
in un punto del primo ottante $\{(x,y,z)\ :\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$ in modo che il volume delimitato da tale piano e dai piani coordinati sia minimo.

17. Determinare i massimi e i minimi relativi delle funzioni

    (a) $2\ln(2+x^2+y^2)-x\,y$,
    (b) $\ln(2+x^2+y^2)-x\,y$,
    (c) $(\frac{1}{3}\,x-y)\,(4\,x^2+12\,y^2-3)$
    (d) $(x-3\,y)\,(3\,x^2+9\,y^2-4)$

18. Data la funzione $f(x,y)=(x+3\,y)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$, se ne determinino i punti di massimo e minimo relativo e se ne deducano valori e punti di minimo e massimo assoluti.

19. Trovare massimo e minimo per la funzione $f(x,y)=\operatorname{sen}^2 x\,\cos y$ sull'insieme $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

20. Trovare massimi e minimi relativi, estremo superiore ed inferiore per i valori della funzione $f(x,y)=x^3+y^2+2\,x\,y$.

21. Determinare il massimo e il minimo di $f(x,y)=|y|\,\operatorname{arctg}(x\,\mathrm{e}^y)$ sull'insieme $A=[-1,1]\times[-1,1]$.

22. Determinare il massimo e il minimo di $f(x,y)=x^2-y^2$ sul triangolo di vertici $(0,0)$, $(3,1)$, $(1,3)$. Per i valori massimi e minimi sul bordo, si può usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per i massimi e minimi vincolati, o parametrizzare esplicitamente i lati del triangolo.

23. Siano α, β, γ gli angoli di un triangolo. Si provi che l'espressione

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}+\frac{\operatorname{sen}\beta}{\beta}+\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\gamma}$$

    è massima per il triangolo equilatero. Suggerimento: esplicitare γ e studiare l'espressione come funzione delle variabili α e β; oppure, vedere il problema come ricerca di punti stazionari vincolati, essendo $\alpha+\beta+\gamma-\pi=0$ il vincolo.

Esercizi su serie

24. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche

    (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+2}}$
    (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$
    (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,\log\left(1+\frac{1}{\log n}\right)$

25. Studiare la convergenza, assoluta e semplice, della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x\,\cos\frac{x}{n}\right)^2 .$$

26. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n\,x^n$,
    (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}3^n\,x^n$,
    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+3}\,\left(\frac{x}{3}\right)^n$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, x^n$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1+(-2)^n)\, x^n$ e calcolarne la somma,

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n}$,

27. Dimostrare che se $\sum a_n$ è una serie convergente, allora la serie di potenze $\sum a_n\, x_n$ ha raggio di convergenza maggiore o uguale a 1.

28. Individuare quale fra le seguenti serie ha il massimo raggio di convergenza e calcolarlo. E' preferibile decidere *prima* quale è il più grande, rispetto a calcolarli tutti e tre.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{n\,\pi}{2}\right) \frac{x^n}{2^n} \; ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3\, x^n}{(3\,n)!} \; ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3\, x^{n^2}}{(3\,n)!} \; ;$$

29. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

converge uniformemente su ogni intervallo chiuso contenuto in $(-1,1)$ e che ha per somma $\ln(1+x)$. Suggerimento: si osservi che

$$\frac{x^n}{n} \;=\; \int_0^x t^{n-1}\, dt$$

e . . .

30. Trovare una serie di potenze che in un opportuno intervallo centrato in 0 converga ed abbia per somma la funzione $\ln(1+x-2\,x^2)$.

31. Determinare raggio di convergenza e somma delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,(n+1)}$,

Esercizi su Teorema del Dini e massimi e minimi vincolati

32. Disegnare l'insieme $A = \{(x,y) \;:\; x\,\mathrm{e}^y - y = -1\}$. Dire in quali punti $(x,y) \in A$ si può esprimere localmente la y in funzione della x. Si provi che in $(0,1)$ ciò è possibile, e si verifichi che lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di $y(x)$ è dato dal polinomio

$$1 - \mathrm{e}\,x + \mathrm{e}^2\,x^2 \,.$$

Suggerimento: si ricordi che

$$\frac{d}{dx} y(x) \;=\; -\frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x,y(x))}{\frac{\partial}{\partial y} f(x,y(x))}$$

e dunque tale espressione può essere ulteriormente derivata rispetto a x come composizione di

$$x \longrightarrow (x,y(x)) \quad \text{e} \quad (x,y) \longrightarrow \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)}{\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)} \,.$$

33. Data la funzione

$$f(x,y) = 8\,x\,y^2 + \log(x^2 + 3\,y) - 5\,y + 1$$

provare che il punto $P = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ appartiene all'insieme $G = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$ e che G in un intorno di P è grafico di $y = y(x)$ oppure di $x = x(y)$; trovare, di tale funzione, lo sviluppo di Taylor al secondo ordine.

34. Data la funzione

$$f(x,y) = x^2\,y + \log(2\,x - y^2) + y - 2$$

provare che il punto $P = \{(1,1)$ appartiene al luogo di zeri di $f(x,y)$ e che $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente in un intorno di P una funzione $y = y(x)$ oppure $x = x(y)$; trovare, di tale funzione, lo sviluppo di Taylor al secondo ordine.

35. Verificare che in un intorno di $(0,0)$ l'equazione $x^2 + y^3 + y = 0$ definisce implicitamente una funzione continua $y = y(x)$ tale che $y(0) = 0$. Trovare lo sviluppo di Taylor in 0 di $y(x)$ fino al secondo ordine.

36. Verificare che in un intorno di $(x_0, y_0) = (0, \sqrt{\log \pi})$ l'equazione $\mathrm{e}^{x^2+y^2} - \pi = 0$ definisce implicitamente una funzione continua $y = y(x)$, e determinarne lo sviluppo di Taylor in 0 fino al secondo ordine.

37. Trovare massimo e minimo di $f(x,y) = 4\,x^2 + 3\,y^2 + 2\sqrt{2}\,x\,y$ sull'insieme

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 4,\; x \geq 0,\; y \geq 0\right\}\;.$$

38. Trovare massimo e minimo di $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{-(x^2-y+z^2)}$ sull'insieme

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \frac{x^2}{4} + y^2 + 3\,z^2 \;\leq\; 1\right\}\;.$$

39. Determinare

$$\max\{a\,b^2\,c^3 \;:\; a,\; b,\; c > 0,\; a + b + c \;=\; 6\}\;.$$

40. Determinare il minimo di $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ sotto la condizione $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \;=\; 1$, dove $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0$

41. Trovare il massimo di $(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2$ sotto la condizione $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \;=\; 1$.

42. Trovare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = x\,y + y\,z + z\,x$$

sulla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, e si determinino tutti i pounti in cui vengono assunti.

43. Trovare massimo e minimo assoluti (e i punti dove vengono assunti) per la funzione $f(x,y) = x^3\,y^2$ su

$$\left\{(x,y) \;:\; x^2 + y^2 \leq 1,\; y - x^2 + 2\,x - 1 \geq 0\right\}\;.$$

Ancora miscellanea

44. Determinare insieme di convergenza e somma per la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{\frac{1}{2}\,x^2 + x + 1}\right)^n\;.$$

45. Determinare l'insieme di convergenza per la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \log x)^n}{1 - x^n}\,, \quad x \neq 1\,.$$

46. Posto

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^k \sin(y-x^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

dire (al variare di $k \geq 0$) se la funzione in $(0,0)$ è limitata, continua, differenziabile.

47. Data

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{\log(1+x^2) - \log(1+y^2)} \quad \text{se } x \neq y$$

dire se è possibile estenderla ad una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^2$; discutere poi le proprietà di derivabilità di tale estensione.

Suggerimento: gli esercizi su convergenza puntuale/convergenza uniforme, e anche qualcuno di quelli su integrazione o derivazione per serie, sono a volte difficili, se non viene rapidamente una idea è opportuno saltarli.

48. Dimostrare che l'equazione

$$2\,x^2 + y + x\,e^{x+y} = 1 + e\,x$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $y = y(x)$ in un intorno di $x = 0$. Dimostrare inoltre che tale funzione $y(x)$ ha un massimo locale in $x = 0$

49. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2 nx}{n\,x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

dire dove tale successione converge puntualmente e dove è convergente uniformemente.

(Suggerimento: Considerare prima che cosa succede su un intervallo chiuso che non contiene 0)

50. Fra i parallelepipedi rettangoli (degeneri e non degeneri) con facce parallele ai piani coordinati e inscritti nell'ellissoide

$$x^2 + 4\,y^2 + 9\,z^2 = 36$$

trovare quelli di volume massimo e minimo.

51. Il segmento $[0,1]$ viene suddiviso in n parti, x_1, x_2, ..., x_n.

(a) Provare che

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \;\geq\; \frac{1}{n}\,.$$

(b) Dire quanto è il massimo di

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2\,.$$

52. Sia

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i(1-x_i)\,.$$

Determinare i massimi e minimi della funzione f vincolate alla porzione di iperpiano

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\,,\; x_i > 0\}\,.$$

53. Studiare al variare del parametro $x \geq 0$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} - 1 \right) \left(\frac{1 + 2\,x}{1 + x^2} \right)^n .$$

54. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9 \;=\; 0$$

e rappresentare graficamente le soluzioni trovate.

55. Discutere e calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$$

56. Discutere e calcolare il seguente integrale:

$$\int_2^{3} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 4}}\, dx$$

57. Discutere e calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{1} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dx$$

58. Dire quale è l'insieme di convergenza per la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^n} .$$

Dire inoltre su quali sottoinsiemi $A \subset \mathbb{R}$ la convergenza è uniforme.

N.B. questo fatto è implicato dalla convergenza di

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big\| \frac{x^2}{(1 + x^2)^n} \Big\|_{\infty, A} .$$

59. Studiare il comportamento della successione di funzioni definite da

$$f_n(x) = x^{n^2} e^{-nx} ,$$

determinando gli insiemi dove la successione converge puntualmente e quelli dove tale convergenza è uniforme.

60. Determinare su quali intervalli $I \subset \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \operatorname{arctg}(x)/x$ è integrabile; provare che

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)^2} .$$

61. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x\, e^{-nx^3}$$

e calcolarne la somma.

62. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(\operatorname{sen} x)^n$$

e calcolarne la somma sull'insieme di convergenza.

63. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos x)^{-n}}{(n+2)!}$$

e calcolarne la somma sull'insieme di convergenza.

64. Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = y - x - \frac{1}{x-\frac{1}{4}} + \frac{1}{y+\frac{1}{2}}$$

sull'insieme

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 0\,,\quad 0 \le y \ \le 2|x|\right\}\ .$$

65. Verificare che il luogo di zeri

$$Z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + 2\,x\,y + y^4 = 4\right\}$$

non ha punti singolari; determinare l'equazione della retta tangente a Z in $(1,1)$; provare che in un intorno di $(1,1)$ l'insieme Z è grafico di una funzione $y = g(x)$ e determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine per g in un intorno di $x = 1$.

66. Per quali $\alpha > 0$ esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha}{x^2+y^4}\ ?$$

67. Calcolare massimo e minimo della funzione

$$f(x,y,z) = x\,e^y\,\log z$$

sull'insieme

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x \ge 0\,,\ y \ge 0\,,\ z \ge 1/2\,,\ x+y+z \le 1\right\}\ .$$

68. Siano date due rette r, r' di $\mathbb{R}^n$ di equazioni parametriche

$$r\ :\quad \underline{x} = \underline{v}_0 + t\,\underline{v}\ ,\quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad r'\ :\quad \underline{x} = \underline{w}_0 + s\,\underline{w}\ ,\quad s \in \mathbb{R}$$

dove $\underline{v}_0$, $\underline{v}$, $\underline{w}_0$, $\underline{v}$ sono vettori fissati di $\mathbb{R}^n$, con $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\| = 1$. Determinare la distanza fra le rette r e r', cioè il numero

$$\inf\{\|\underline{x} - \underline{x}'\|\ :\ \underline{x} \in r\ ,\quad \underline{x}' \in r'\}\ .$$

69. Descrivere il comportamento della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^{3n}}{n+1}$$

e calcolarne la somma nell'insieme di convergenza.

70. Determinare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x,y) = (xy)^{x+y}$$

sull'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 2\,e^4\,x\,y \ge 1\,,\quad 0 \le x+y \le 2\,e^{-2}\right\}\ .$$

71. Sia $f(x)$ la somma della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(x^n)}{n!} \; .$$
Dire dove è definita $f(x)$, se e dove è derivabile, quanto vale $f'(2)$.

72. Dimostrare che la funzione definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos(x-y)-1}{x-y} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$
è differenziabile su tutto il piano.

73. Dimostrare che l'equazione
$$y^3 - e^{xy} = 0$$
definisce inplicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno del punto $(0,1)$; scriverne lo sviluppo di Taylor di centro $x_0 = 0$ e ordine 2.

74. Calcolare massimo e minimo di $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2/4)}$ sul cerchio centrato nell'origine e raggio 1.

75. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x-y^2)}{x-y^2} & \text{se } x \neq y^2 \\ 1 & \text{se } x = y^2 \end{cases}$$

76. Dire se la funzione
$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{\log(1+x^2) - \log(1+y^2)} \qquad (\,|x| \neq |y|\,)$$
può essere estesa con continuità a tutto $\mathbb{R}^2$.

77. Tenendo conto dello sviluppo di Taylor in 0 di $t \to e^t$ e di $t \to \cos t$, scrivere lo sviluppo di Taylor al quarto ordine in $(0,0)$ della funzione
$$f(x,y) = e^{xy} \cos(x + y^3) \; .$$

78. Studiare i massimi e minimi relativi e assoluti di
$$f(x,y) = \int_x^y \sin(t^2)\, dt$$
sull'insieme
$$\{(x,y) \;:\; |x| \leq \sqrt{\pi}\,,\; |y| \leq \sqrt{\pi}\} \; .$$

79. Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x,y,z,t) = x+y-z-t$ sull'insieme $x^2+y^2+z^2+2\,t^2 = 1$.

80. Trovare massimi e minimi relativi ed assoluti di $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\,x - 12\,y + 20$ sull'insieme
$$\{(x,y) \;:\; y \geq 0\,,\; y + x \leq 10\,,\; y - x \leq 10\} \; .$$

81. Studiare la differenziabilità della funzione
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\, \operatorname{arcsen}(x-y) \; .$$

82. Trovare massimi e minimi (se esistono) della funzione
$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$$
sulla curva $x\,y + x + y + 4 = 0$.

83. Data la funzione $f(x,y) = (x-y) - \operatorname{tg}(x-y)/2$, dire se l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce y come funzione implicita della x in un intorno del punto $(0,0)$. In caso affermativo, calcolare $y'(0)$ e $y''(0)$.