

Esercizi

1. Discutere la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{x^{2/3}}{1+x^3} dx$$

2. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\sqrt{n}}.$$

Che cosa si può dire della regolarità della funzione somma?

3. Studiare la convergenza della serie di potenze $\sum_1^{\infty} a_n x^n$ dove i coefficienti a_n sono definiti da

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \log(1 + a_n). \end{cases}$$

4. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2}$$

determinare l'insieme $\{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$; trovare i punti di massimo e minimo relativi e decidere se sono anche punti di massimo o minimo assoluti. Dire infine se esiste il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y)$$

Può risultare utile studiare preliminarmente le successioni $a_n = (n, n)$, $b_n = (n, 2n)$, $c_n = (n/(n+1), (1-n)/n)$, $d_n = (1/n, n)$ verificando quali di queste hanno per limite ∞ per $n \rightarrow \infty$.

5. Determinare il massimo e il minimo di $f(x, y) = x^3 y^2$ sull'insieme

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x^2 - 2x + 1\}.$$

6. Verificare che il luogo di zeri di $f(x, y) = x^2 y + \log(2x - y^2) + y - 2$ contiene il punto $(1, 1)$. Dire se nell'intorno di tale punto il luogo di zeri è grafico di una funzione della variabile x (o della variabile y). Calcolare la derivata in 1 di tale funzione/di tali funzioni.

7. Determinare il massimo e il minimo del volume di un parallelepipedo inscritto nell'ellissoide di equazione $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 36$.

8. Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ dove i coefficienti a_n sono definiti da

$$\begin{cases} a_0 &= \alpha \geq 0 \\ a_{n+1} &= \frac{a_n^3}{1+a_n^2}. \end{cases}$$

9. Data la successione definita da

$$\begin{cases} a_1 &= 4 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2} a_n + (-1)^n, \end{cases}$$

calcolare il limite di a_{2n} e di a_{2n+1} e dedurne il raggio di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

10. Trovare gli insiemi di convergenza e di convergenza assoluta per la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(x - (-1)^n \frac{1}{5} \right)^n ;$$

calcolarne anche la somma.

11. Dimostrare che

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \dots$$

Suggerimento: sfruttare l'identità $x^x = e^{x \log x}$, usare la serie dell'esponenziale e integrare per parti.

12. Verificare che l'equazione $f(x, y) = x^2 + y^3 + y = 0$ in un intorno del punto $(0, 0)$ definisce y come funzione di x . Determinare lo sviluppo di Taylor al 2. ordine di $y(x)$.

Suggerimento: dal fatto che

$$y'(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))}$$

possiamo calcolare le derivate successive di $y(x)$ derivando l'espressione a secondo membro.

13. Calcolare massimi e minimi relativi, estremo superiore ed inferiore per la funzione $f(x, y) = x^3 + y^2 + 2xy$.

14. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}$$

15. Calcolare il massimo e il minimo assoluto di $f(x, y) = \sin^2 x \cos y$ sull'insieme $[-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2]$.

16. Studiare la convergenza per la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x \cos \frac{x}{n} \right)^n$$

e dire su quali sottoinsiemi tale convergenza è uniforme.

17. Dimostrare che la funzione $f(x, y)$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x + 4y & x \geq 0 \\ 3x + 4y \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} & x < 0 \end{cases}$$

è differenziabile su tutto \mathbb{R}^2 .

18. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} \bar{z}^2 w = 2\mathbf{i} \\ z^2 + 2\mathbf{i}\bar{w} \end{cases}$$

19. Studiare la convergenza e calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\text{sen } x)^n}{n}.$$

20. Determinare i punti di massimo e minimo relativi ed assoluti per

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

sull'insieme

$$A = \{(x, y) \mid y \geq 0, y + x \leq 10, y - x \leq 10\}$$

21. Studiare l'insieme di convergenza e determinare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}.$$

22. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{|x|^\alpha (x^2 + 4y^2)}{x^2 + y^2}$$

trovare per quali valori di α essa è limitata in un intorno di $(0, 0)$ e per quali ammette limite quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

23. Calcolare massimo e minimo per $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sulla retta di equazione $x + 3y - 2 = 0$.

24. Calcolare i punti di massimo e di minimo relativo per

$$f(x, y) = x^3 y^2 (1 - x - y).$$

25. Determinare il massimo volume di un parallelepipedo rettangolo i cui spigoli hanno una somma fissata $x + y + z = 3a$.