

## Esercizi

### Misti iniziali

1. Data la funzione

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x - \int_0^x e^{t^2} dt$$

se ne studino massimi, minimi, flessi, limiti a  $\pm\infty$ .

2. Provare che

$$F(x) = \int_0^x ((1+t) \operatorname{arctg} t - t - t^2) dt = o(x^3).$$

### Più variabili

3. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

(b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-1/(x^2+y^2)}$

(c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$

(d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} \frac{\log(1 + xy)}{x}$

4. Dire per quali valori di  $\alpha$  esiste il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{1/(\alpha x^2 - y^2)}$$

5. Se una funzione  $f(xy)$  non è definita in un punto  $(x_0, y_0)$  ma è possibile definirla in modo da renderla continua, si dice che  $f(x, y)$  ha in  $(x_0, y_0)$  una *discontinuità eliminabile*. Trovare in quali punti le funzioni seguenti hanno una discontinuità eliminabile.

(a)  $f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 - y^2}$

(b)  $f(x, y) = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x^2 - y^2}$

(c)  $f(x, y) = xy \ln(xy)$

(d)  $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

(e)  $f(x, y) = \operatorname{sen} \frac{y}{x}$

6. Le seguenti funzioni sono differenziabili in  $(0, 0)$ ?

(a)  $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & x > 0 \\ x + ye^{-x^2}, & x \leq 0 \end{cases}$

(b)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c)  $f(x, y) = (\operatorname{arctg}(y + 1))^{x+1}$ ,

(d)  $f(x, y) = \log_{y+1}(x + 1)$ .

7. Dire se la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x + 4y & \text{se } x \geq 0 \\ 3x + 4y \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è differenziabile su tutto  $\mathbb{R}^2$ .

8. Dire se la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x - y & \text{se } x \leq 0 \\ 2x - y(x^2 \log x + 1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è differenziabile su tutto  $\mathbb{R}^2$ . (Fino a quale ordine è differenziabile?)

9. Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x-y} - 1}{x-y} & \text{se } x \neq y \\ 1 & \text{se } x = y \end{cases}$$

si discuta la continuità, derivabilità e differenziabilità di  $f(x, y)$  dimostrando che  $f(x, y)$  ammette derivate parziali continue di ogni ordine.

Si calcoli la derivata direzionale  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$  dove  $v$  è la direzione della retta  $y = \frac{x}{2}$ .

Si determini l'equazione del piano tangente alla superficie  $z = f(x, y)$  nel punto  $(0, 0, 1)$ .

10. Calcolare il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^x - e^{\sin y}}{x - \sin y}.$$

11. Provare che i piani tangenti alla superficie di equazione  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  nell'insieme  $\{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$  individuano lungo i tre assi coordinati 3 segmenti aventi un estremo nell'origine, la cui lunghezza ha somma costante.

Suggerimento: si espliciti  $z$  come funzione di  $x$  e  $y$ , e si ricordi quale è l'equazione del piano tangente al grafico di  $z = f(x, y)$  in un punto  $(x_0, y_0)$  con  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{a}$ ; oppure, ci si ricordi che il piano tangente alla superficie di equazione  $\varphi(x, y, z) = 0$  nel punto  $(x_0, y_0, z_0)$  è perpendicolare al vettore gradiente

$$\nabla \varphi(x_0, y_0, z_0) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right).$$

12. Si formuli il teorema del valor medio per una funzione di più variabili.

Suggerimento. Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , dotata di derivate prime continue in  $A$  e dunque anche differenziabile; siano  $x_0$  e  $x_1 \in A$ , e il segmento che li congiunge è interno ad  $A$ ; si consideri la funzione

$$t \longrightarrow F(t) = f((1-t)x_0 + tx_1), \quad \text{sull'intervallo } [0, 1],$$

13. Se  $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ , dimostrare che

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

14. Se  $f(x, y)$ , definita su  $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ , verifica  $\text{grad } f(x, y) \equiv 0$  su tutto il cerchio, provare che  $f(x, y)$  è costante.

15. Se  $f(x, y)$  è differenziabile in un aperto connesso e  $\text{grad } f(x, y) \equiv 0$  allora  $f(x, y)$  è costante su tutto l'aperto.

16. Si determini un piano tangente all'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

in un punto del primo ottante  $\{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$  in modo che il volume delimitato da tale piano e dai piani coordinati sia minimo.

17. Determinare i massimi e i minimi relativi delle funzioni

(a)  $2 \ln(2 + x^2 + y^2) - xy$ ,

(b)  $\ln(2 + x^2 + y^2) - xy$ ,

(c)  $\left(\frac{1}{3}x - y\right)(4x^2 + 12y^2 - 3)$

(d)  $(x - 3y)(3x^2 + 9y^2 - 4)$

18. Data la funzione  $f(x, y) = (x + 3y)e^{-x^2 - y^2}$ , se ne determinino i punti di massimo e minimo relativo e se ne deducano valori e punti di minimo e massimo assoluti.

19. Trovare massimo e minimo per la funzione  $f(x, y) = \sin^2 x \cos y$  sull'insieme  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

20. Trovare massimi e minimi relativi, estremo superiore ed inferiore per i valori della funzione  $f(x, y) = x^3 + y^2 + 2xy$ .

21. Determinare il massimo e il minimo di  $f(x, y) = |y| \arctg(xe^y)$  sull'insieme  $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ .

22. Determinare il massimo e il minimo di  $f(x, y) = x^2 - y^2$  sul triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(1, 3)$ . Per i valori massimi e minimi sul bordo, si può usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per i massimi e minimi vincolati, o parametrizzare esplicitamente i lati del triangolo.

23. Siano  $\alpha, \beta, \gamma$  gli angoli di un triangolo. Si provi che l'espressione

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{\sin \beta}{\beta} + \frac{\sin \gamma}{\gamma}$$

è massima per il triangolo equilatero. Suggerimento: esplicitare  $\gamma$  e studiare l'espressione come funzione delle variabili  $\alpha$  e  $\beta$ ; oppure, vedere il problema come ricerca di punti stazionari vincolati, essendo  $\alpha + \beta + \gamma - \pi = 0$  il vincolo.

### Esercizi su serie

24. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n + 2}}$

(b)  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n + 3} - \sqrt{n})$

(c)  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \log\left(1 + \frac{1}{\log n}\right)$

25. Studiare la convergenza, assoluta e semplice, della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x \cos \frac{x}{n}\right)^2.$$

26. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ ,

(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ ,

(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+3} \left(\frac{x}{3}\right)^n$ ,

$$(d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n,$$

$$(e) \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-2)^n) x^n \quad \text{e calcolarne la somma,}$$

$$(f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n},$$

27. Dimostrare che se  $\sum a_n$  è una serie convergente, allora la serie di potenze  $\sum a_n x^n$  ha raggio di convergenza maggiore o uguale a 1.
28. Individuare quale fra le seguenti serie ha il massimo raggio di convergenza e calcolarlo. E' preferibile decidere *prima* quale è il più grande, rispetto a calcolarli tutti e tre.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right) \frac{x^n}{2^n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3 x^n}{(3n)!}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3 x^{n^2}}{(3n)!};$$

29. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

converge uniformemente su ogni intervallo chiuso contenuto in  $(-1, 1)$  e che ha per somma  $\ln(1+x)$ .  
Suggerimento: si osservi che

$$\frac{x^n}{n} = \int_0^x t^{n-1} dt$$

e ...

30. Trovare una serie di potenze che in un opportuno intervallo centrato in 0 converga ed abbia per somma la funzione  $\ln(1+x-2x^2)$ .
31. Determinare raggio di convergenza e somma delle serie

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)},$$

## Esercizi su Teorema del Dini e massimi e minimi vincolati

32. Disegnare l'insieme  $A = \{(x, y) : xe^y - y = -1\}$ . Dire in quali punti  $(x, y) \in A$  si può esprimere localmente la  $y$  in funzione della  $x$ . Si provi che in  $(0, 1)$  ciò è possibile, e si verifichi che lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di  $y(x)$  è dato dal polinomio

$$1 - ex + e^2 x^2.$$

Suggerimento: si ricordi che

$$\frac{d}{dx} y(x) = - \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, y(x))}{\frac{\partial}{\partial y} f(x, y(x))}$$

e dunque tale espressione può essere ulteriormente derivata rispetto a  $x$  come composizione di

$$x \longrightarrow (x, y(x)) \quad \text{e} \quad (x, y) \longrightarrow \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)}{\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)}.$$

33. Data la funzione

$$f(x, y) = 8xy^2 + \log(x^2 + 3y) - 5y + 1$$

provare che il punto  $P = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})\}$  appartiene all'insieme  $G = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$  e che  $G$  in un intorno di  $P$  è grafico di  $y = y(x)$  oppure di  $x = x(y)$ ; trovare, di tale funzione, lo sviluppo di Taylor al secondo ordine.

34. Data la funzione

$$f(x, y) = x^2y + \log(2x - y^2) + y - 2$$

provare che il punto  $P = \{(1, 1)\}$  appartiene al luogo di zeri di  $f(x, y)$  e che  $f(x, y) = 0$  definisce implicitamente in un intorno di  $P$  una funzione  $y = y(x)$  oppure  $x = x(y)$ ; trovare, di tale funzione, lo sviluppo di Taylor al secondo ordine.

35. Verificare che in un intorno di  $(0, 0)$  l'equazione  $x^2 + y^3 + y = 0$  definisce implicitamente una funzione continua  $y = y(x)$  tale che  $y(0) = 0$ . Trovare lo sviluppo di Taylor in 0 di  $y(x)$  fino al secondo ordine.

36. Verificare che in un intorno di  $(x_0, y_0) = (0, \sqrt{\log \pi})$  l'equazione  $e^{x^2+y^2} - \pi = 0$  definisce implicitamente una funzione continua  $y = y(x)$ , e determinarne lo sviluppo di Taylor in 0 fino al secondo ordine.

37. Trovare massimo e minimo di  $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy$  sull'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\} .$$

38. Trovare massimo e minimo di  $f(x, y, z) = e^{-(x^2-y+z^2)}$  sull'insieme

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + 3z^2 \leq 1 \right\} .$$

39. Determinare

$$\max\{ab^2c^3 : a, b, c > 0, a + b + c = 6\} .$$

40. Determinare il minimo di  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  sotto la condizione  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 1$ , dove  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$

41. Trovare il massimo di  $(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)^2$  sotto la condizione  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ .

42. Trovare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx$$

sulla sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , e si determinino tutti i punti in cui vengono assunti.

43. Trovare massimo e minimo assoluti (e i punti dove vengono assunti) per la funzione  $f(x, y) = x^3y^2$  su

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y - x^2 + 2x - 1 \geq 0\} .$$

## Ancora miscellanea

44. Determinare insieme di convergenza e somma per la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x+1}{\frac{1}{2}x^2 + x + 1} \right)^n .$$

45. Determinare l'insieme di convergenza per la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \log x)^n}{1 - x^n}, \quad x \neq 1 .$$

46. Posto

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^k \sin(y - x^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

dire (al variare di  $k \geq 0$ ) se la funzione in  $(0, 0)$  è limitata, continua, differenziabile.

47. Data

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\log(1 + x^2) - \log(1 + y^2)} \quad \text{se } x \neq y$$

dire se è possibile estenderla ad una funzione continua su tutto  $\mathbb{R}^2$ ; discutere poi le proprietà di derivabilità di tale estensione.

Suggerimento: gli esercizi su convergenza puntuale/convergenza uniforme, e anche qualcuno di quelli su integrazione o derivazione per serie, sono a volte difficili, se non viene rapidamente una idea è opportuno saltarli.

48. Dimostrare che l'equazione

$$2x^2 + y + xe^{x+y} = 1 + ex$$

definisce implicitamente una e una sola funzione  $y = y(x)$  in un intorno di  $x = 0$ . Dimostrare inoltre che tale funzione  $y(x)$  ha un massimo locale in  $x = 0$

49. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 nx}{nx} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

dire dove tale successione converge puntualmente e dove è convergente uniformemente.

(Suggerimento: Considerare prima che cosa succede su un intervallo chiuso che non contiene 0)

50. Fra i parallelepipedi rettangoli (degeneri e non degeneri) con facce parallele ai piani coordinati e inscritti nell'ellissoide

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$$

trovare quelli di volume massimo e minimo.

51. Il segmento  $[0, 1]$  viene suddiviso in  $n$  parti,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

(a) Provare che

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{1}{n}.$$

(b) Dire quanto è il massimo di

$$\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

52. Sia

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i(1 - x_i).$$

Determinare i massimi e minimi della funzione  $f$  vincolate alla porzione di iperpiano

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i > 0\}.$$

53. Studiare al variare del parametro  $x \geq 0$  la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} - 1 \right) \left( \frac{1+2x}{1+x^2} \right)^n .$$

54. Risolvere in  $\mathbb{C}$  l'equazione

$$z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9 = 0$$

e rappresentare graficamente le soluzioni trovate.

55. Discutere e calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx$$

56. Discutere e calcolare il seguente integrale:

$$\int_2^3 \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 4}} dx$$

57. Discutere e calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx$$

58. Dire quale è l'insieme di convergenza per la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} .$$

Dire inoltre su quali sottoinsiemi  $A \subset \mathbb{R}$  la convergenza è uniforme.

N.B. questo fatto è implicato dalla convergenza di

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \right\|_{\infty, A} .$$

59. Studiare il comportamento della successione di funzioni definite da

$$f_n(x) = x^{n^2} e^{-nx} ,$$

determinando gli insiemi dove la successione converge puntualmente e quelli dove tale convergenza è uniforme.

60. Determinare su quali intervalli  $I \subset \mathbb{R}$  la funzione  $f(x) = \arctg(x)/x$  è integrabile; provare che

$$\int_0^1 \frac{\arctg x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} .$$

61. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x e^{-nx^3}$$

e calcolarne la somma.

62. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (\sin x)^n$$

e calcolarne la somma sull'insieme di convergenza.

63. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos x)^{-n}}{(n+2)!}$$

e calcolarne la somma sull'insieme di convergenza.

64. Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) = y - x - \frac{1}{x - \frac{1}{4}} + \frac{1}{y + \frac{1}{2}}$$

sull'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2|x|\} .$$

65. Verificare che il luogo di zeri

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + 2xy + y^4 = 4\}$$

non ha punti singolari; determinare l'equazione della retta tangente a  $Z$  in  $(1, 1)$ ; provare che in un intorno di  $(1, 1)$  l'insieme  $Z$  è grafico di una funzione  $y = g(x)$  e determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine per  $g$  in un intorno di  $x = 1$ .

66. Per quali  $\alpha > 0$  esiste il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^\alpha}{x^2 + y^4} ?$$

67. Calcolare massimo e minimo della funzione

$$f(x, y, z) = x e^y \log z$$

sull'insieme

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 1/2, x + y + z \leq 1\} .$$

68. Siano date due rette  $r, r'$  di  $\mathbb{R}^n$  di equazioni parametriche

$$r : \underline{x} = \underline{v}_0 + t \underline{v}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad r' : \underline{x} = \underline{w}_0 + s \underline{w}, \quad s \in \mathbb{R}$$

dove  $\underline{v}_0, \underline{v}, \underline{w}_0, \underline{w}$  sono vettori fissati di  $\mathbb{R}^n$ , con  $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\| = 1$ . Determinare la distanza fra le rette  $r$  e  $r'$ , cioè il numero

$$\inf\{\|\underline{x} - \underline{x}'\| : \underline{x} \in r, \underline{x}' \in r'\} .$$

69. Descrivere il comportamento della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{3n}}{n+1}$$

e calcolarne la somma nell'insieme di convergenza.

70. Determinare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y) = (xy)^{x+y}$$

sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2e^4 xy \geq 1, 0 \leq x + y \leq 2e^{-2}\} .$$



71. Sia  $f(x)$  la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(x^n)}{n!}.$$

Dire dove è definita  $f(x)$ , se e dove è derivabile, quanto vale  $f'(2)$ .

72. Dimostrare che la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(x-y)-1}{x-y} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

è differenziabile su tutto il piano.

73. Dimostrare che l'equazione

$$y^3 - e^{xy} = 0$$

definisce implicitamente una funzione  $y = y(x)$  in un intorno del punto  $(0, 1)$ ; scriverne lo sviluppo di Taylor di centro  $x_0 = 0$  e ordine 2.

74. Calcolare massimo e minimo di  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2/4)}$  sul cerchio centrato nell'origine e raggio 1.

75. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x-y^2)}{x-y^2} & \text{se } x \neq y^2 \\ 1 & \text{se } x = y^2 \end{cases}$$

76. Dire se la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\log(1+x^2) - \log(1+y^2)} \quad (|x| \neq |y|)$$

può essere estesa con continuità a tutto  $\mathbb{R}^2$ .

77. Tenendo conto dello sviluppo di Taylor in 0 di  $t \rightarrow e^t$  e di  $t \rightarrow \cos t$ , scrivere lo sviluppo di Taylor al quarto ordine in  $(0, 0)$  della funzione

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y^3).$$

78. Studiare i massimi e minimi relativi e assoluti di

$$f(x, y) = \int_x^y \sin(t^2) dt$$

sull'insieme

$$\{(x, y) : |x| \leq \sqrt{\pi}, |y| \leq \sqrt{\pi}\}.$$

79. Determinare il massimo e il minimo assoluto di  $f(x, y, z, t) = x + y - z - t$  sull'insieme  $x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 = 1$ .

80. Trovare massimi e minimi relativi ed assoluti di  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$  sull'insieme

$$\{(x, y) : y \geq 0, y + x \leq 10, y - x \leq 10\}.$$

81. Studiare la differenziabilità della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \arcsen(x - y).$$

82. Trovare massimi e minimi (se esistono) della funzione

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$$

sulla curva  $xy + x + y + 4 = 0$ .

83. Data la funzione  $f(x, y) = (x - y) - \operatorname{tg}(x - y)/2$ , dire se l'equazione  $f(x, y) = 0$  definisce  $y$  come funzione implicita della  $x$  in un intorno del punto  $(0, 0)$ . In caso affermativo, calcolare  $y'(0)$  e  $y''(0)$ .