Esercizi

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$, e siano A e B due applicazioni di V in sé che commutano: $AB = BA$. Dimostrare che se v è un autovettore di A relativo all'autovalore λ e $Bv \neq 0$, allora anche Bv è autovettore relativo a λ.

2. Determinare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici e trovarne autovalori ed autovettori nel campo complesso:
$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2\,\mathrm{i} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Sia A una delle matrici
$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$
Dimostrare che A non può essere diagonalizzata se $a \neq 0$ (cioè, che non esiste B invertibile tale che $B^{-1}AB$ sia diagonale).

4. Dimostrare che una matrice A $n \times n$ ha certamente un autovalore reale se n è dispari.

5. Sia A una matrice quadrata. Dimostrare che gli autovalori della matrice ${}^tA$ sono uguali a quelli della matrice A; gli autovettori di ${}^tA$ sono uguali a quelli di A?

6. Determinare gli autovalori su $\mathbb{C}$ della matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(e anche gli autovettori?)

7. Nello spazio di funzioni V generato su $\mathbb{R}$ da $\sin x$ e $\cos x$ l'operatore $\frac{d}{dx}$ ha autovettori non nulli? In caso affermativo, determinarli. E su $\mathbb{C}$, che cosa cambia?

8. Determinare autovalori ed autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e dimostrare che lo spazio generato dagli autovettori ha dimensione 1.

9. Determinare autovalori ed autovettori delle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$