Esercizi preparati e in parte svolti martedì 20.

1. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$$
al variare di $\alpha > 0$

Soluzione: Per $\alpha = 1$ il limite è e; se $\alpha \neq 1$ osserviamo che da $2 \leq (1+1/n)^n <$ e segue che
$$2^{n^{\alpha-1}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{n^{\alpha-1}} < \mathrm{e}^{n^{\alpha-1}}$$
Per $\alpha > 1$ le successioni $\mathrm{e}^{n^{\alpha-1}}$ e $2^{n^{\alpha-1}}$ tendono a $+\infty$, e questo è il limite cercato; per $\alpha > 1$ le due successioni hanno un esponente che tende a 0, ed entrambe hanno limite 1, e il limite è 1.

2. Calcolare la parte principale ripetto a x per $x \to 0^+$ di $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} - 2$.

Soluzione: Usare direttamente il limite notevole non funziona; notando che
$$\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} - 2 = \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,(\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} + 1 - 2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}) = \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,(\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - 1)^2 = \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\right)^2 x$$
otteniamo che la parte principale di $f(x)$ è x.

3. Studiare la successione definita per ricorrenza da
$$\begin{cases} a_0 &= \alpha > 0 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2+a_n} \qquad \text{per } n \geq 0 \end{cases}$$

Soluzione: Da $\alpha > 0$ segue per induzione che $a_n > 0$ per ogni n.
Studiamo la monotonia, cercando condizioni affinché sia $a_n < a_{n+1}$.
$$a_n < \frac{1}{2+a_n} \Longleftrightarrow a_n^2 + 2\,a_n - 1 < 0$$
e
$$a_n^2 + 2\,a_n - 1 = 0 \Longleftrightarrow a_n = -1-\sqrt{2} \quad \text{o} \quad a_n = -1+\sqrt{2}$$
da cui
$$a_n < a_{n+1} \Longleftrightarrow 0 < a_n < \sqrt{2}-1$$
Cerchiamo di vedere se
$$a_n < \sqrt{2}-1 \Longrightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2+a_n} < \sqrt{2}-1$$
Quindi
$$\frac{1}{2+a_n} < \sqrt{2}-1 \Longleftrightarrow (\sqrt{2}-1)\,a_n > 3-2\sqrt{2} \Longleftrightarrow a_n > \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}-1$$
per cui i termini della successione (per $\alpha > 0$ diversa da $\sqrt{2}-1$) sono alternativamente maggiori e minori di $\sqrt{2}-1$; ne segue che se $a_0 = \alpha$ è minore di tale valore, tutti i termini di indici pari saranno minori. Scriviamo la relazione ricorrente che produce la successione $b_n = a_{2\,n}$ dei termini di posto pari:
$$\begin{cases} b_0 &= \alpha > 0 \\ b_{n+1} &= \dfrac{1}{2+\frac{1}{2+b_n}} = \dfrac{2+b_n}{5+2\,b_n} \end{cases}$$
Monotonia:
$$b_n < \frac{2+b_n}{5+2\,b_n} \Longleftrightarrow 2\,b_n^2 + 4\,b_n - 2 < 0$$

e

$$b_n^2 + 2\,b_n - 1 = 0 \Longleftrightarrow b_n = -1 - \sqrt{2} \quad \text{o} \quad b_n = -1 + \sqrt{2}$$

da cui

$$b_n < b_{n+1} \Longleftrightarrow 0 < b_n < \sqrt{2} - 1$$

Cerchiamo di vedere se

$$b_n < \sqrt{2} - 1 \Longrightarrow b_{n+1} = \frac{2 + b_n}{5 + 2\,b_n} < \sqrt{2} - 1$$

Quindi

$$\frac{2 + b_n}{5 + 2\,b_n} < \sqrt{2} - 1 \Longleftrightarrow (2\,\sqrt{2} - 3)\,b_n > 7 - 5\,\sqrt{2} \Longleftrightarrow (3 - 2\,\sqrt{2})\,b_n < 5\,\sqrt{2} - 7$$

che equivale a

$$b_n < \frac{5\,\sqrt{2} - 7}{3 - 2\,\sqrt{2}} = (5\,\sqrt{2} - 7)\,(3 + 2\,\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$$

Quindi, se $\alpha < \sqrt{2} - 1$ si ha per ogni n

$$\alpha < \cdots < b_n = a_{2\,n} < b_{n+1} = a_{2\,n+2} < \cdots < \sqrt{2} - 1$$

la successione b_n è crescente e ha un limite ℓ finito, che verifica

$$\ell = \frac{2 + \ell}{5 + 2\,\ell}$$

per cui $\ell = \sqrt{2} - 1$; d'altra parte

$$\lim_{n\to\infty} a_{2\,n+1} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 + b_n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \;=\; \sqrt{2} - 1$$

e quindi $a_n \to \sqrt{2} - 1$; analogamente se $\alpha > \sqrt{2} - 1$.

4. Calcolare la parte principale rispetto a x per $x \to 0$ di $\operatorname{sen}^2 x + 1 - \cos x$.

   Soluzione: La parte principale di $\operatorname{sen}^2 x$ è x^2, la parte principale di $1 - \cos x$ è $\frac{1}{2}\,x^2$. Non c'è cancellazione, e quindi la risposta è $\frac{3}{2}\,x^2$.

5. Trovare la parte principale di $f(x) = 2^{3\,\operatorname{sen} x} - 2^{\operatorname{sen}(3x)}$.

   Soluzione:

$$f(x) = 2^{\operatorname{sen}(3\,x)}\,(2^{3\,\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3\,x)} - 1) = 2^{\operatorname{sen}(3\,x)}\,\frac{2^{3\,\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3\,x)} - 1}{3\,\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3\,x)}\,(3\,\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3\,x))$$

Il primo fattore tende a 1; per il secondo si ha

$$\frac{2^{3\,\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3\,x)} - 1}{3\,\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3\,x)} = \frac{\mathrm{e}^{\log 2\,(3\,\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3\,x))} - 1}{\log 2\,(3\,\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3\,x))}\,\log 2$$

che tende a $\log 2$. Per il terzo fattore si ha

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(3\,x) &= \operatorname{sen} x\,\cos(2\,x) + \cos(x)\,\operatorname{sen}(2\,x) = \\
&= \operatorname{sen} x\,\cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x + 2\,\operatorname{sen} x\,\cos^2 x = \\
&= 3\,\operatorname{sen} x\,\cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x = 3\,\operatorname{sen} x - 4\,\operatorname{sen}^3 x
\end{aligned}$$

da cui

$$3\,\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3\,x) = 4\,\operatorname{sen}^3 x = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}\,4\,x^3$$

per cui la parte principale di $f(x)$ è data da $4\,\log 2\,x^3$.

6. Data la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 & = & \alpha \\ a_1 & = & \beta \\ a_{n+2} & = & \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) \qquad \text{per } n \geq 0 \end{cases}$$

dimostrare che a_n è limitata e che converge; determinarne il limite.

Soluzione: Prima osservazione: se sommiamo c ad α e a β la successione che otteniamo si ottiene dalla precedente per una traslazione di c; possiamo ridurci al caso con $\alpha = 0$ e $\beta = \beta - \alpha$. Notiamo che

$$a_n < a_{n+1} \Longrightarrow a_n < a_{n+2} < a_{n+1} \Longrightarrow a_n < a_{n+2} < a_{n+3} < a_{n+1}$$

e che

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) - a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$$

per cui

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}(a_1 - a_0)$$

e quindi $a_{n+1} - a_n \to 0$.
Se $a_0 = 0 < a_1 = \beta$ avremo

$$a_{2n} < a_{2n+1}\,, \quad a_{2n} < a_{2n+2}\,, \quad a_{2n+3} < a_{2n+1}$$

per cui la successione è limitata, la sottosuccessione degli indici pari cresce ed ha un limite finito ℓ mentre la sottosuccessione degli indici dispari decresce ed ha un limite finito che coincide con ℓ per quanto visto sopra. Se $a_0 = 0 > a_1 = \beta$, la successione a_{2n} sarà decrescente e la successione a_{2n+1} sarà crescente, e convergeranno allo stesso limite. Per calcolare il limite, notiamo che

$$a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_0 + \sum_{h=0}^{n-1}(a_{h+1} - a_h) = a_0 + (a_1 - a_0)\sum_{h=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^h$$

Per cui

$$a_n = \beta\,\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\,\beta\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}\,\beta \qquad \text{oppure} \quad \alpha + \frac{2}{3}(\beta - \alpha) \ \text{ se } \alpha \neq 0$$

7. Calcolare massimo e minimo limite di $f(x) = \arccos(\cos\frac{1}{x^2})$ per $x \to 0$.

Soluzione: La funzione $\arccos x$ assume valori in $[0, \pi]$; vale 0 quando il suo argomento vale 1 e dunque quando

$$\frac{1}{x^2} = 2\,k\,\pi\,, \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2\,k\,\pi}}$$

per k intero non nullo, e vale π quando il suo argomento vale -1 e dunque quando

$$\frac{1}{x^2} = (2\,k + 1)\,\pi\,, \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{(2\,k+1)\,\pi}}$$

Quindi su ogni intorno di 0 il massimo di $f(x)$ è π e il minimo è 0 e dumque

$$\operatorname*{maxlim}_{x\to 0}\ f(x) = \pi\,, \qquad \operatorname*{minlim}_{x\to 0}\ f(x) = 0$$

8. Sappiamo che se $a_n \to \ell_1$ e $b_n \to \ell_2$ allora anche le successioni $a_n + b_n$ e $a_n\,b_n$ convergono (e i limiti sono rispettivamente $\ell_1 + \ell_2$ e $\ell_1\,\ell_2$).
Possiamo dire che se $a_n + b_n$ e $a_n\,b_n$ convergono allora convergono anche a_n e b_n? E se si sa che $a_n \leq b_n$?

Soluzione: Sia $a_n = (-1)^n$ e $b_n = (-1)^{n+1}$; la somma è identicamente 0 e il prodotto è sempre -1, per cui tali limiti esistono mentre le successioni a_n e b_n non hanno limite.
Chiamiamo $s_n = a_n + b_n$ e $p_n = a_n\, b_n$; allora

$$\{a_n, b_n\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - s_n\, x + p_n = 0\} = \left\{ \frac{s_n \pm \sqrt{s_n^2 - 4\, p_n}}{2} \right\}$$

Con la condizione aggiuntiva che $a_n \le b_n$ otteniamo che

$$a_n = \frac{s_n - \sqrt{s_n^2 - 4\, p_n}}{2} \ , \quad b_n = \frac{s_n + \sqrt{s_n^2 - 4\, p_n}}{2}$$

dove $s_n^2 - 4\, p_n = (a_n + b_n)^2 - 4\, a_n\, b_n = (a_n - b_n)^2 \ge 0$, per cui se $s_n \to S$ e $p_n \to P$, sarà ancora $S^2 - 4\, P \ge 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4\, P}}{2} \ , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4\, P}}{2}$$

9. Dire se esiste il limite per $x \to +\infty$ di $f(x) = (x - [x])^{[x]}$, e in caso contrario calcolare il massimo e il minimo limite. Si determinino poi due successioni s_n e t_n in modo che

$$f(s_n) \to \operatorname*{minlim}_{x\to+\infty} f(x) \ , \quad f(t_n) \to \operatorname*{maxlim}_{x\to+\infty} f(x)$$

Soluzione: La funzione assume valori in $[0, 1)$; su ogni intervallo $[n, n+1)$ la funzione è monotona crescente, assume il minimo, 0, nel primo estremo e tende ad 1 per $x \to n+1$. Quindi l'estremo superiore su ogni semiretta $[a, +\infty)$ è 1 e l'estremo inferiore, che è anche minimo, è 0, per cui

$$\operatorname*{minlim}_{x\to+\infty} f(x) = 0 \ , \quad \operatorname*{maxlim}_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

Nei termini della successione $s_n = n$ la funzione assume il valore del minimo limite; per trovare $t_n \in [n, n+1)$ prendo $t_n = n + 1 - \frac{1}{n^\alpha}$ in modo che $[t_n] = n$ e

$$f(t_n) = \left(n + 1 - \frac{1}{n^\alpha} - n\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)^n \to 1$$

e per questo è necessario e sufficiente che sia $\alpha > 1$, per esempio $\alpha = 2$.

10. Data una successione x_n reale tale che $x_{n+2} - x_n \to 0$, dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{n} = 0 \ .$$

Soluzione: Applichiamo il teorema di Cesaro nella forma

$$\text{Se } \lim_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n = \ell \text{ allora } \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \ell \ .$$

separatamente alle successioni x_{2n} e x_{2n+1}. L'ipotesi dice che

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+2} - x_{2n} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n}}{n} = 0 \ , \qquad \lim_{n\to\infty} x_{2n+3} - x_{2n+1} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n+1}}{n} = 0$$

e quindi ne deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n}}{2\, n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n+1}}{2\, n + 1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{n} = 0$$

11. Ordinare in modo crescente rispetto all'ordine i seguenti infiniti (per $x \to +\infty$)

$$3^x\ ,\quad x^2\ ,\quad 2^x\ ,\quad 2^{x^2}\ ,\quad x^x$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} \;=\; +\infty$$

per ogni $\alpha > 1$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$; quindi x^2 ha ordine inferiore a 2^x che ha ordine inferiore a 3^x che ha ordine inferiore a x^x.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{x^2}}{x^x} \;=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{(2^x)^x}{x^x} \;=\; \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2^x}{x}\right)^x \;=\; +\infty$$

perché la base tende a $+\infty$ ed è quindi definitivamente maggiore di 2; quindi gli infiniti in ordine crescente sono

$$x^2\ ,\quad 2^x\ ,\quad 3^x\ ,\quad x^x\ ,\quad 2^{x^2}$$

12. Ordinare in modo crescente rispetto all'ordine i seguenti infinitesimi (per $x \to 0^+$)

$$x\,\log x\ ,\quad \frac{x}{\log^2 x}\ ,\quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\ ,\quad \log\cos^2 x\ ,\quad x^{1/2}$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen}(\frac{x}{1+x^2})}{x} \;=\; \lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen}(\frac{x}{1+x^2})}{\frac{x}{1+x^2}}\,\frac{\frac{x}{1+x^2}}{x} \;=\; \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{x}{1+x^2}}{x} \;=\; 1$$

per cui $\operatorname{sen}(\frac{x}{1+x^2})$ è infinitesima dello stesso ordine di x.

$$\log\cos^2 x \;=\; 2\,\log\cos x \;=\; -2\,\frac{\log(1+\cos x-1)}{\cos x-1}\,\frac{1-\cos x}{x^2}\,x^2$$

e quindi $\log\cos^2 x$ ha come parte principale $-x^2$.

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x\,\log x}{x} \;=\; \lim_{x\to0^+} \log(x) \;=\; -\infty$$

per cui $x\,\log x$ ha ordine inferiore ad x, mentre

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{x}{\log^2 x}}{x} \;=\; \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\log^2 x} \;=\; 0$$

per cui $x/\log^2 x$ ha ordine superiore a x. Confrontando $x\,\log x$ con $x^{1/2}$ si ha

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x\,\log x}{x^{1/2}} \;=\; \lim_{x\to0^+} x^{1/2}\,\log x \;=\; \lim_{y\to0^+} y\,\log(y^2) \;=\; \lim_{y\to0^+} 2\,y\,\log(y) \;=\; 0$$

e quindi $x^{1/2}$ ha l'ordine più basso. Per confrontare $\frac{x}{\log^2 x}$ con $\log\cos^2 x$ posso confrontarlo con x^2:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{x}{\log^2 x}}{x^2} \;=\; \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x\,\log^2 x} \;=\; 0$$

e quindi x^2 (e dunque $\log\cos^2 x$) ha ordine maggiore.
Quindi, in ordine di infinitesimo crescente, abbiamo

$$x^{1/2}\ ,\quad x\,\log x\ ,\quad \operatorname{sen}\frac{x}{1+x^2}\ ,\quad \frac{x}{\log^2 x}\ ,\quad \log\cos^2 x$$

13. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^4}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

Soluzione: Da

$$2 \;<\; \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;<\; \mathrm{e}$$

per ogni n segue che

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^4}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} \;=\; \frac{\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{n^2}}{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{n}} \;>\; \frac{2^{n^2}}{\mathrm{e}^n} \;=\; \left(\frac{2^n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

e quindi il limite proposto è $+\infty$.

14. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\,\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x^{3/2} - \log(1+x^2) + x\sqrt{x}}{\operatorname{arctg} x^{3/2} + x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+2\,\mathrm{e}^x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

Soluzione: Per il primo limite: la funzione $\operatorname{sen}(1/x)$ è limitata; la parte principale di $1-\cos x$ è $x^2/2$ e il limite è 0. Per il secondo limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x^{3/2} - \log(1+x^2) + x\sqrt{x}}{\operatorname{arctg} x^{3/2} + x^2} \;=\; \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x^{3/2} + x\sqrt{x}}{x^{3/2}}\,\frac{x^{3/2}}{\operatorname{arctg} x^{3/2}} \;=\; 2$$

Per il terzo: per $x\to-\infty$ il numeratore è limitato e il denominatore tende a $+\infty$ per cui la funzione tende a 0. Invece

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+2\,\mathrm{e}^x)}{\sqrt{1+x^2}} \;=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\mathrm{e}^x) + \log(\mathrm{e}^{-x}+2))}{x\sqrt{1+1/x^2}} \;=\; 1$$

e esistono i limiti a $+\infty$ e a $-\infty$ ma non quello per $x\to\infty$.

15. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\,\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\,x)\,.$$

Soluzione: Cambiamento di variabile: $x = 1-t$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} (1-x)\,\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\,x) \;&=\; \lim_{t\to 0^+} t\,\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\,t\right) \;=\; \lim_{t\to 0^+} t\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\,t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\,t\right)} \;=\\ &=\; \lim_{t\to 0^+} t\,\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\,t)}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\,t)} \;=\; \lim_{t\to 0^+} \cos(\frac{\pi}{2}\,t)\frac{\frac{\pi}{2}\,t}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\,t)}\,\frac{2}{\pi} \;=\; \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

16. Calcolare la parte principale rispetto a $x-\pi/4$ degli infinitesimi

$$\sqrt{2} - \operatorname{sen} x - \cos x\,, \qquad \log(\operatorname{sen} 2x)$$

Soluzione: La parte principale di $\sqrt{2}-\operatorname{sen} x-\cos x$ per $x\to\frac{\pi}{4}$ è $k\,\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^\alpha$ se e solo se $k\neq 0$ e

$$\begin{aligned}1 \;&=\; \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}-\operatorname{sen} x-\cos x}{k\,\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^\alpha} \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2}-\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{k\,t^\alpha} \;=\\ &=\; \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos t}{k\,t^\alpha} \;=\; \lim_{t\to 0} \sqrt{2}\,\frac{1-\cos t}{k\,t^\alpha}\end{aligned}$$

per cui $\alpha = 2$ e $k = 1/\sqrt{2}$.

La parte principale di $\log \operatorname{sen}(2\,x)$ per $x \to \frac{\pi}{4}$ è $k\,\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{\alpha}$ se e solo se $k \neq 0$ e

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\log \operatorname{sen}(2\,x)}{k\,\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{\alpha}} = \lim_{t \to 0} \frac{\log \operatorname{sen}\left(2\,t + \frac{\pi}{2}\right)}{k\,t^{\alpha}} = \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\log \cos(2\,t)}{k\,t^{\alpha}} = \lim_{t \to 0} \frac{\log\left(1 + (\cos(2\,t) - 1)\right)}{\cos(2\,t) - 1}\,\frac{\cos(2\,t) - 1}{k\,t^{\alpha}} = \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\cos(2\,t) - 1}{k\,t^{\alpha}} = \lim_{s \to 0} -\frac{1 - \cos s}{k\,\left(\frac{s}{2}\right)^{\alpha}}
\end{aligned}$$

Per $\alpha = 2$ si ha

$$\lim_{s \to 0} -\frac{1 - \cos s}{k\,\frac{s^2}{4}} = \lim_{s \to 0} -\frac{1 - \cos s}{s^2\,\frac{k}{4}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{k}{4}} = -\frac{2}{k}$$

e quindi $k = -2$.