Esercizi preparati e in parte svolti martedì 20.

1. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$$
al variare di $\alpha > 0$

2. Calcolare la parte principale ripetto a x per $x \to 0^+$ di $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} - 2$.

3. Studiare la successione definita per ricorrenza da
$$\begin{cases} a_0 & = \alpha > 0 \\ a_{n+1} & = \frac{1}{2+a_n} \qquad \text{per } n \geq 0 \end{cases}$$

4. Calcolare la parte principale rispetto a x per $x \to 0$ di $\operatorname{sen}^2 x + 1 - \cos x$.

5. Trovare la parte principale di $f(x) = 2^{3\operatorname{sen} x} - 2^{\operatorname{sen}(3x)}$.

6. Data la successione definita per ricorrenza da
$$\begin{cases} a_0 & = \alpha \\ a_1 & = \beta \\ a_{n+2} & = \frac{1}{2}\left(a_n + a_{n+1}\right) \qquad \text{per } n \geq 0 \end{cases}$$
dimostrare che a_n è limitata e che converge; determinarne il limite.

7. Calcolare massimo e minimo limite di $f(x) = \arccos(\cos\frac{1}{x^2})$ per $x \to 0$.

8. Sappiamo che se $a_n \to \ell_1$ e $b_n \to \ell_2$ allora anche le successioni $a_n + b_n$ e $a_n\, b_n$ convergono (e i limiti sono rispettivamente $\ell_1 + \ell_2$ e $\ell_1\, \ell_2$).
Possiamo dire che se $a_n + b_n$ e $a_n\, b_n$ convergono allora convergono anche a_n e b_n? E se si sa che $a_n \leq b_n$?

9. Dire se esiste il limite per $x \to +\infty$ di $f(x) = (x - [x])^{[x]}$, e in caso contrario calcolare il massimo e il minimo limite. Si determinino poi due successioni s_n e t_n in modo che
$$f(s_n) \to \operatorname*{minlim}_{x\to+\infty} f(x)\ , \quad f(t_n) \to \operatorname*{maxlim}_{x\to+\infty} f(x)$$

10. Data una successione x_n reale tale che $x_{n+2} - x_n \to 0$, dimostrare che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{n} = 0\ .$$

11. Ordinare in modo crescente rispetto all'ordine i seguenti infiniti (per $x \to +\infty$)
$$3^x\ , \quad x^2\ , \quad 2^x\ , \quad 2^{x^2}\ , \quad x^x$$

12. Ordinare in modo crescente rispetto all'ordine i seguenti infinitesimi (per $x \to 0^+$)
$$x\,\log x\ , \quad \frac{x}{\log^2 x}\ , \quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\ , \quad \log\cos^2 x\ , \quad x^{1/2}$$

13. Calcolare il limite
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^4}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

14. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\ \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x^{3/2} - \log(1+x^2) + x\sqrt{x}}{\operatorname{arctg} x^{3/2} + x^2}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\log(1+2\,\mathrm{e}^x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

15. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\ \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\,x)\ .$$

16. Calcolare la parte principale rispetto a $x-\pi/4$ degli infinitesimi

$$\sqrt{2} - \operatorname{sen} x - \cos x\ , \qquad \log(\operatorname{sen} 2x)$$