Esercizi

1. $\lim_{n\to\infty} n - \sqrt{(n+1)(n-3)}$

   $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+n^2-3\,n}{1+4\,n\sqrt{n^2-1}}$

   $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2-n+2\,n^3}{3\,n^2\sqrt[3]{(n^2+1)(n+2)}}$

2. Data la successione $\{a_n\}$ definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \log(1+a_n) \end{cases}$$

   si calcoli il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n\ .$$

3. Si calcoli il limite della successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 &= \alpha > 0 \\ a_{n+1} &= \dfrac{3\,a_n+2}{a_n+2} \qquad \text{per } n > 0 \end{cases}$$

4. Studiare la successione

$$\begin{cases} a_1 &= \alpha \\ a_{n+1} &= \frac{a_n^2}{1+a_n} \end{cases}$$

   Dimostrare che

   (a) a_n ha limite 0;

   (b) che per ogni $c > 1$ si ha $a_n \cdot c^n \to 0$.

5. Determinare la funzione generatrice della successione

$$\begin{cases} a_0 &= 1\,, \\ a_1 &= 3\,, \\ a_n &= 3\,a_{n-1} - 2\,a_{n-2} \qquad n \geq 2 \end{cases}$$

   calcolare il raggio di convergenza e determinare gli a_n.

6. Provare che la serie $\sum a_n$ con $\{a_n\}$ definita da

$$\begin{cases} a_1 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & \dfrac{a_n}{2+a_n} \end{cases}$$

è convergente. Provare che $\{a_n\}$ è definita da

$$\begin{cases} a_1 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & \dfrac{a_n}{1+a_n} \end{cases}$$

la serie relativa è divergente.

7. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2-2n} .$$

8. Studiare la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_1 & = & \alpha > 0 \\ a_{n+1} & = & \frac{a_n^2}{1+a_n} \end{cases}$$

e dimostrare che $a_n \to 0$ e che per ogni $c > 1$ si ha ancora $c^n\, a_n \to 0$; dimostrare che esiste n_0 tale che $a_{n_0} < 1$ e

$$a_n \leq (a_{n_0})^{2^{n-n_0}}$$

9. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{2^n}}{n!} = +\infty .$$

10. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n} .$$

11. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{2^{n^\alpha}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

12. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} a^{n/(1+n^2)} \qquad\qquad (a > 0) .$$

13. Studiare, al variare di $\alpha > 0$, il comportamento di $\{a_n\}$ definita da

$$a_n \;=\; \left(\frac{\alpha\, n^2 + 5\, n + 3}{n^2 + n + 1}\right)^n \;.$$

14. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n+1]{n+1} \cdots \sqrt[2n]{2\, n} \;.$$

15. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 - n + 2\, n^3}{3\, n^2 \sqrt{(n^2+1)\,(n+2)}} \;.$$

16. Studiare il comportamento delle successioni definite per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}\, a_n + a_n^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 &= \frac{1}{2} \\ a_{n+1} &= a_n \log^2(1 + a_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 &= -\frac{1}{2} \\ a_{n+1} &= a_n^3 - a_n \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 &= \frac{3}{2} \\ a_{n+1} &= a_n^2 - 2\, a + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 &= 0 \\ a_{n+1} &= 1 - \frac{1}{a_n + 2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 &= \alpha > 0 \\ a_{n+1} &= \sqrt[n]{a_n + 1} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \log(1 + a_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 &= 5 \\ a_{n+1} &= \frac{a_n^2 - a_n + 4}{a_n} \end{cases}$$

17. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n^2 + 2\, n} \;.$$

18. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n} \;.$$

19. Calcolare il limite di $\{a_n\}$ definita da

$$\begin{aligned} a_1 &> 0\,, \\ a_{n+1} &= \sqrt[n]{a_n + 1} - 1\,. \end{aligned}$$

20. Calcolare il limite di $\{a_n\}$ definita da

$$\begin{aligned} a_1 &> 0\,, \\ a_{n+1} &= \sqrt[n]{a_n + 1} - 1\,. \end{aligned}$$