Corso interno di Matematica
esame del 12.07.10

1. Dire se la funzione
$$f(x) \;=\; \frac{x+\sin x}{\sqrt{x-\sin x}}$$
è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo $[0,\pi/2]$

   Soluzione: $x+\sin x = 2\,x + o(x)$; $x - \sin x = \frac{1}{6}\,x^3 + o(x^3)$ per cui
$$\frac{x+\sin x}{\sqrt{x-\sin x}} \sim \frac{2\,x}{\sqrt{\frac{1}{6}\,x^3}} \sim \frac{2\sqrt{6}}{x^{1/2}}$$
l'esponente è minore di 1 e l'integrale converge.

2. Data la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+1}\,\operatorname{tg}^{2\,n+1}(x)$$
dire per quali $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ la serie converge e per quali converge assolutamente; dire su quali sottoinsiemi di $(-\pi/2,\pi/2)$ si ha convergenza uniforme; determinare l'espressione della funzione somma.

   Soluzione: Usando il criterio del rapporto, abbiamo che
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \;=\; \frac{2\,n+1}{2\,n+3}\,|\operatorname{tg}(x)|^2 \to |\operatorname{tg}(x)|^2$$
e quindi la serie sarà assolutamente convergente se $|\operatorname{tg}(x)|^2 < 1$ e dunque se $-\pi/4 < x < \pi/4$ (sull'intervallo considerato). Dove $|\operatorname{tg}(x)|^2 > 1$ il termine generale non è infinitesimo, e quindi non si può avere neppure convergenza semplice. Per $x = \pi/4$ e per $x = -\pi/4$ la serie diventa rispettivamente
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+1}\,, \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+1}\,(-1)^{2\,n+1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\,n+1}$$

entrambe convergenti per il criterio di Leibniz.
La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+1}\, t^{2\,n+1}$$

ha raggio di convergenza 1 e converge uniformemente su ogni intervallo chiuso contenuti in $(-1,1)$; la serie proposta converge uniformenente su ogni intervallo $[\alpha,\beta]$ con $-\pi/4 < \alpha < \beta < \pi/4$.
La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+1}\, t^{2\,n+1}$$

su ogni compatto contenuto in $(-1,1)$ è limite uniforme delle sue somme parziali e si ha

$$\sum_{h0}^{n} \frac{(-1)^h}{2\,h+1}\, t^{2\,h+1} \;=\; \sum_{h=0}^{n} \int_0^t (-1)^h\, s^{2\,h}\, ds \;=\; \int_0^t \sum_{h=0}^{n} (-1)^h\, s^{2\,h}\, ds$$

La funzione integranda converge uniformemente alla somma della serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} (-s^2)^h = \frac{1}{1+s^2}$$

e quindi si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+1}\, t^{2\,n+1} \;=\; \int_0^t \frac{1}{1+s^2}\, ds \;=\; \operatorname{arctg} t$$

e quindi la somma della serie è data da $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)) = x$, su tutto l'intervallo $(-\pi/4, \pi/4)$.

3. Dimostrare che la funzione

$$f(x,y) \;=\; \frac{3\,x+y}{1+x^2+y^2}$$

è definita, continua e differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è limitata. Calcolarne il massimo e il minimo.

Soluzione: Derivabile parzialmente con continuità: quindi è differenziabile (infinite volte). Determiniamo i punti stazionari

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-3\,x^2-2\,x\,y+3\,y^2+3}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2-6\,x\,y-y^2+1}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} -3\,x^2-2\,x\,y+3\,y^2+3 = 0 & * \\ x^2-6\,x\,y-y^2+1 = 0 & ** \end{cases}$$

Sommando alla prima equazione la seconda moltiplicata per 3 otteniamo che

$$-20\,x\,y+6 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{10\,x}$$

Sostituendo nella (**) otteniamo:

$$x^2 - \frac{18}{10} - \frac{9}{100\,x^2} + 1 = 0$$

da cui

$$x^4 - \frac{4}{5}\,x^2 - \frac{9}{100} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25}+\frac{9}{100}} = \frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{2}{5} \pm \frac{1}{2}$$

Dal valore positivo $x^2 = \frac{9}{10}$ otteniamo che deve essere $x = \frac{3}{\sqrt{10}}$ con $y = \frac{3}{10\,x} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ (e la funzione vale $\frac{5}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$) oppure $x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ con $y = \frac{3}{10\,x} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ (e la funzione vale $-\frac{5}{\sqrt{10}}$)

La funzione è continua, è infinitesima per $(x,y) \to \infty$ e ha solo due punti stazionari dove assume due valori di segno opposto: non servono ulteriori indagini.

4. Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-2\,x\,y+4\,y^2}$ sull'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Soluzione:

$$H(x,y,\lambda) = \mathrm{e}^{x^2-2\,x\,y+4\,y^2} - \lambda\,(\frac{x^2}{4}+y^2-1)$$

Il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} f(x,y)\,(2\,x-2\,y) = 2\lambda\frac{x}{4} \\ f(x,y)\,(-2\,x+8\,y) = 2\lambda\,y \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \frac{\lambda}{f(x,y)} = \frac{2\,(2\,x-2\,y)}{x} \\ \frac{\lambda}{f(x,y)} = \frac{-2\,x+8\,y}{2\,y} \end{cases}$$

e ancora

$$\frac{2\,(2\,x-2\,y)}{x} \;=\; \frac{-2\,x+8\,y}{2\,y}$$ da cui $4\,x\,y - 4\,y^2 \;=\; -x^2 + 4\,x\,y$ e ancora $x^2 = 4\,y^2$

Sostituendo nel vincolo otteniamo che i punti stazionari vincolati sono 4 $(\pm\sqrt{2}, \frac{\pm 1}{\sqrt{2}})$; nei due punti nel primo e terzo quadrante viene assunto il minimo (e^2), negli altri due è assunto il massimo (e^6).