Corso interno di Matematica
compitino del 04.02.10

1. Si risolva il sistema
$$\begin{cases} z\,\bar{w}^2 &= 1 \\ z^3 - w &= 0 \end{cases}$$

   Soluzione: Dalla prima equazione si ha $z = 1/\bar{w}^2$; sostituendo nella seconda otteniamo:
$$w = \left(1/\bar{w}^2\right)^3 \quad \Leftrightarrow \quad w\,\bar{w}^6 = |w|^2\,\bar{w}^5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |w| = 1 \quad \text{e} \quad w^5 = 1$$
   D'altra parte
$$z = \frac{1}{\bar{w}^2} = \frac{w^2}{|w|^4} = w^2$$
   e quindi le soluzioni del sistema sono date da
$$z_k = \varepsilon_k^2, \quad w_k = \varepsilon_k \qquad (k = 0, \ldots, 4)$$
   dove ε_k sono le radici quinte dell'unità.

2. Si calcoli il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \left(\cos |x|^{1/2}\right)^{\frac{1}{x}} .$$
   Si dica inoltre se tale funzione ammette limite per $x \to 0$.

   Soluzione:
$$\lim_{x\to 0^+} \left(\cos |x|^{1/2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} \log\cos x}$$
   Ma
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \log\cos x = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\,x\,\cos(x)} = -\frac{1}{2}$$
   e quindi il limite è $\mathrm{e}^{-1/2}$.
   Si vede facilmente che il limite sinistro è $-\mathrm{e}^{-1/2}$ e quindi non esiste il limite.

3. Data la funzione $f(x) = \log(\mathrm{e}^x - x)$, se ne determini il campo di esistenza, il segno, i limiti a $\pm\infty$, eventuali asintoti.
Si completi lo studio determinando gli intervalli di crescenza e di concavità. Questo può richiedere uno studio di tipo qualitativo per determinare numero e posizione degli zeri di $f'(x)$ e di $f''(x)$.

Soluzione: La funzione $\mathrm{e}^x - x$ tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$, e la sua derivata $\mathrm{e}^x - 1$ è negativa fino a 0, positiva dopo 0. Quindi $\mathrm{e}^x - x \geq \mathrm{e}^0 - 0 = 1$ e il campo di esistenza di $f(x)$ è tutto $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\log x} + \log(1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x})}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \log(1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x})}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \log(1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x}) = 0$$

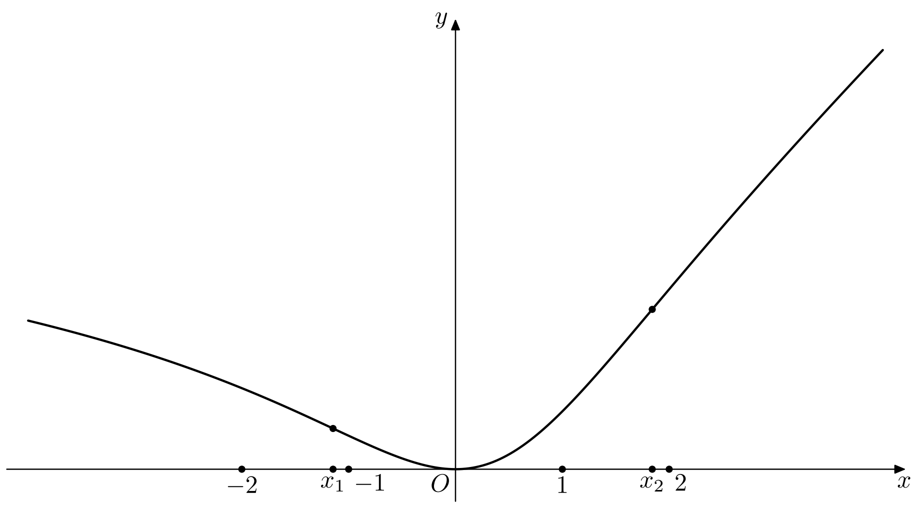
Mentre

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\log(\mathrm{e}^x - x)}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} \log(\mathrm{e}^x - x) = +\infty$$

Si ha:
$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}\,, \qquad f''(x) = \frac{(2-x)\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x - x)^2}\,.$$

Ne segue che $f(x)$ è decrescente per $x < 0$, ha minimo 0 per $x = 0$ ed è crescente sulle x positive.
$f''(x) > 0$ se e solo se è positivo il numeratore $(2-x)\mathrm{e}^x - 1$ e questo accade per le x per cui si ha $2 - x > \mathrm{e}^{-x}$ o anche $2 - x - \mathrm{e}^{-x} > 0$. La funzione $h(x) = 2 - x - \mathrm{e}^{-x}$ tende a $-\infty$ per $x \to \pm\infty$ e vale 1 in 0; la sua derivata $h'(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$ è positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 0$. La funzione $h(x)$ assume valori di segni opposto sugli estremi dell'intervallo $[-2, -1]$ e $[1, 2]$, per cui $f''(x) = 0$ ha due soluzioni, $x_1 \in (-2, -1)$ e $x_2 \in (-1, -2)$ e la funzione è convessa fra x_1 e x_2, concava fuori.

Il grafico risultante è



4. Si dimostri che la funzione

$$f(x) = 1/e^{\log^2 x}$$

è integrabile in senso generalizzato su $[1, +\infty)$; se ne deduca che lo stesso accade per la funzione $g(x) = f(x)\frac{\log x}{x}$ e si calcoli

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx\,.$$

Soluzione: Da $1/e^{\log^2 x} = 1/x^{\log x}$ otteniamo che per $x \geq e^2$ si ha $f(x) \leq 1/x^2$ e quindi la funzione è integrabile su $[1, +\infty)$. Oppure:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\log^2 x}} \;=\; \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{e^{t^2}} \;=\; \lim_{t\to+\infty} e^{t(\alpha-t)} \;=\; 0$$

per qualunque α, anche maggiore di 1.
Dato che $\log x < x$, $g(x) < f(x)$ e quindi è integrabile.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{\log^2 x}} \frac{\log x}{x}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{\log^2 x}} \frac{d}{dx}\log^2 x\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^t}\,dt \;=\; \frac{1}{2}$$