Corso interno di Matematica
prova scritta del 6.07.09

1. Siano dati i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \{(x, y, w, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0\},$$

$$U = \{(x, y, w, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - w = 0\}$$

e si consideri in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard (prodotto interno).

i) Mostrare che W e U sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ e determinare la loro dimensione.

ii) Determinare la dimensione di $U \cap W$.

iii) Determinare una base ortonormale di $U \cap W$.

iv) Completare la base di $U \cap W$ trovata ad una base ortogonale di W.

v) Determinare un sottospazio vettoriale $Z \subset \mathbb{R}^4$ della stessa dimensione di U con $Z \neq U$ e $Z \cap W = U \cap W$.

2. Sia $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2 e consideriamo su V il prodotto scalare definito da

$$< p(x), q(x) > \;=\; \int_0^1 p(x)q(x)dx, \;\; \forall p(x), q(x) \in V.$$

Determinare una base ortogonale di V.

3. Dimostrare che la funzione

$$f(x) \;=\; \frac{3}{x^4 + 5\,x^2 + 4}$$

è integrabile in senso generalizzato su tutto $\mathbb{R}$ e calcolarne l'integrale.

Soluzione:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{|x|^4}} \;=\; 1$$

per cui la funzione è integrabile in senso generalizzato.
Le soluzioni di $x^4 + 5\,x^2 + 4 = 0$ sono le radici quadrate di -1 e di -4, e quindi $\pm$i e $\pm$2i; il polinomio si fattorizza come $(1 + x^2)\,(4 + x^2)$, e si ha che

$$\frac{3}{x^4 + 5\,x^2 + 4} \;=\; \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{4 + x^2}$$

La prima funzione è integrabile su $\mathbb{R}$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = \pi\;;$$

per la seconda,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4 + x^2}\,dx \;=\; 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{4 + x^2}\,dx \;=\; 2\lim_{c\to+\infty} \frac{1}{4}\int_0^c \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}\,2\,d\frac{x}{2} \;=$$

$$=\; \lim_{c\to+\infty} \int_0^{c/2} \frac{1}{1 + t^2}\,dt \;=\; \frac{\pi}{2}$$

Il valore dell'integrale proposto è quindi $\pi/2$.

4. Sia data la funzione definita da

$$f(x, y) \;=\; \frac{\cos x + \cos y - 2\,\cos(x - y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \text{ e } f(0, 0) = 0.$$

Dire se la funzione è continua in $(0, 0)$. Dire per quali $\alpha > 0$ la funzione

$$\frac{f(x, y)}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}}$$

è limitata in un intorno di $(0,0)$ e per quali ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$.

Soluzione: Per $(x,y) \to (0,0)$ si ha che $x \to 0$, $y \to 0$ e $x-y \to 0$; possiamo usare lo sviluppo di Taylor – anche in una variabile – e ottenere che

$$\begin{aligned}
\cos x + \cos y \quad - \quad 2\,\cos(x-y) &= \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2) + 1 - \tfrac{1}{2}y^2 + o(y^2) - 2\,(1 - \tfrac{1}{2}(x-y)^2 + o((x-y)^2) = \\
&= -\tfrac{1}{2}\,x^2 - \tfrac{1}{2}\,y^2 + x^2 - 2\,x\,y + y^2 + o(x^2+y^2) = \\
&= \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{2}\,y^2 - 2\,x\,y + o(x^2+y^2)
\end{aligned}$$

da cui

$$f(x,y) \;=\; \frac{x^2/2 - 2\,x\,y + y^2/2 + o(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

e di conseguenza $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$; per $0 \le \alpha < 1$ avremo anche che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} \;=\; 0$$

mentre se $\alpha = 1$

$$\frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^{1/2}} \;=\; \frac{x^2/2 - 2\,x\,y + y^2/2 + o(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

è limitata in un intorno di $(0,0)$ ma non ammette limite perchè

$$\frac{x^2/2 - 2\,x\,y + y^2/2}{x^2+y^2} = \frac{\cos^2\theta - 4\,\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{2} = \frac{1}{2}\,(1 - 2\,\operatorname{sen}(2\theta))$$

assume tutti i valori fra il minimo e il massimo su qualunque intorno di $(0,0)$ e dunque non ha limite per $\rho \to 0$.

5. Dimostrare che la funzione

$$f(x,y) \;=\; \frac{2\,x - y}{1 + x^2 + y^2}$$

è limitata su tutto il piano, e determinarne valori e punti di massimo e di minimo.

Soluzione: La funzione è continua ed è dotata di derivate parziali di ogni ordine; calcoliamo il limite a ∞; per $(x,y) \neq (0,0)$ si ha

$$\left|\frac{2\,x - y}{1 + x^2 + y^2}\right| \;=\; \left|\frac{\rho\,(2\,\cos\theta - \sin\theta)}{1+\rho^2}\right| \;\le\; \frac{3}{\rho} \;\longrightarrow \qquad \text{quando } \rho \to +\infty$$

Troviamo i punti stazionari, dove $\operatorname{grad} f = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \;=\; \dfrac{2 - 2\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,x\,y}{(1+x^2+y^2)^2} \;=\; 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \;=\; -\dfrac{1 + x^2 - y^2 + 4\,x\,y}{(1+x^2+y^2)^2} \;=\; 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 - 2\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,x\,y \;=\; 0 \\[2ex] 1 + x^2 - y^2 + 4\,x\,y \;=\; 0 \end{cases}$$

Sommando alla prima equazione la seconda moltiplicata per 2 otteniamo

$$10\,x\,y + 4 \;=\; 0 \quad \text{da cui} \quad y \;=\; -\frac{2}{5\,x}$$

e sostituendo nella seconda:

$$1 + x^2 - \left(-\frac{2}{5\,x}\right)^2 + 4\,x\,\left(-\frac{2}{5\,x}\right) \;=\; 0 \quad \text{da cui} \quad x^4 - \frac{3}{5}\,x^2 - \frac{4}{25} \;=\; 0$$

Risolviamo l'equazione ausiliaria

$$t^2 - \frac{3}{5}\,t - \frac{4}{25} \;=\; 0 \qquad t_1 = -\frac{1}{5}\;, \quad t_2 = \frac{4}{5}$$

I punti stazionari sono quindi

$$x_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\;, y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\;, y_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

I valori assunti sono $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{\sqrt{5}}{2}$, rispettivamente minimo e massimo di $f(x,y)$. Non serve studiare la matrice Hessiana nei punti stazionari.

6. Determinare l'insieme di convergenza e di convergenza assoluta per la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{x^n}$$

e calcolarne la funzione somma (per x nell'insieme di convergenza assoluta).

Soluzione: Per studiare la convergenza assoluta applico il criterio del rapporto alla serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{|x|^n}$$

e ottengo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{|x|^{n+1}} \cdot \frac{|x|^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|}$$

per cui si ha convergenza assoluta nei punti con $|x| > 1$ (e uniforme su $|x| \geq c$ per ogni $c > 1$). In nessun altro punto c'è convergenza semplice.
Calcoliamo la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^2\, t^n$ per $|t| < 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n^2\, t^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, t^n = \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)\cdot n - n]\, t^n = \\
&= t \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\cdot n \cdot t^{n-1} - t \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot t^{n-1} = \\
&= t\, \frac{d^2}{dt^2} \sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1} - t\, \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \\
&= t\, \frac{d^2}{dt^2} \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+2} - t\, \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} = \\
&= t\, \frac{d^2}{dt^2} \left(t^2 \sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) - t\, \frac{d}{dt} \left(t \sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) = \\
&= t\, \frac{d^2}{dt^2} \frac{t^2}{1-t} - t\, \frac{d}{dt} \frac{t}{1-t} = \\
&= t\, \frac{2}{(1-t)^3} - t\, \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{t^2+t}{(1-t)^3}
\end{aligned}$$

La funzione somma cercata è quindi data (per $|x| > 1$) da

$$\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}{(1-\frac{1}{x})^3} = \frac{x + x^2}{(x-1)^3}$$