

Corso interno di Matematica
prova scritta del 15.07.08

1. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice $m \times n$. Supponiamo che, per un certo $\underline{b}_0 \in \mathbb{R}^m$, il sistema

$$A\underline{x} = \underline{b}_0$$

abbia una sola soluzione $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Mostrare che $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^m$ il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ non può avere infinite soluzioni e che vale $n \leq m$.
- (b) Supponendo $n < m$ (disuguaglianza stretta), è possibile trovare $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ tale che il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ non abbia soluzioni?

2. Si determinino generatori per un piano (sottospazio 2-dimensionale) di \mathbb{R}^3 che non contenga alcuno dei vettori: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

3. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \frac{x+2}{x^3+4x^2+3x}$$

è integrabile in senso generalizzato su $[1, +\infty)$; calcolare $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ e determinare la parte principale dell'infinitesimo $\int_x^{+\infty} f(t) dt$ per $x \rightarrow +\infty$ rispetto all'infinitesimo $1/x$.

4. Determinare l'insieme di convergenza e di convergenza assoluta per la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - \cos x)^n}{n}$$

e calcolarne la funzione somma (per x nell'insieme di convergenza assoluta).

5. Dimostrare che la funzione

$$f(x, y) = (x + y) e^{-x^2 - 4y^2}$$

è limitata su \mathbb{R}^2 e determinarne massimi e minimi.

6. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ la funzione

$$f(x, y) = \frac{e^{-x^2} + e^{-y^2} - 2 \cos(x + y)}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}}$$

è limitata in un intorno di $(0, 0)$ e per quali valori di α esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$