Suggerimento: gli esercizi su convergenza puntuale/convergenza uniforme, e anche qualcuno di quelli su integrazione o derivazione per serie, sono a volte difficili, se non viene rapidamente una idea è opportuno saltarli.

1. Dimostrare che l'equazione
$$2\,x^2 + y + x\,e^{x+y} = 1 + e\,x$$
definisce implicitamente una e una sola funzione $y = y(x)$ in un intorno di $x = 0$. Dimostrare inoltre che tale funzione $y(x)$ ha un massimo locale in $x = 0$

2. Data la successione di funzioni
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2 nx}{n\,x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
dire dove tale successione converge puntualmente e dove è convergente uniformemente.

(Suggerimento: Considerare prima che cosa succede su un intervallo chiuso che non contiene 0)

3. Fra i parallelepipedi rettangoli (degeneri e non degeneri) con facce parallele ai piani coordinati e inscritti nell'ellissoide
$$x^2 + 4\,y^2 + 9\,z^2 = 36$$
trovare quelli di volume massimo e minimo.

4. Il segmento $[0, 1]$ viene suddiviso in n parti, x_1, x_2, …, x_n.

   (a) Provare che
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \;\geq\; \frac{1}{n}\,.$$

   (b) Dire quanto è il massimo di
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2\,.$$

5. Sia
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i(1 - x_i)\,.$$
Determinare i massimi e minimi della funzione f vincolate alla porzione di iperpiano
$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\;,\; x_i > 0\}\,.$$

6. Studiare al variare del parametro $x \geq 0$ la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} - 1 \right) \left(\frac{1 + 2\,x}{1 + x^2} \right)^n \,.$$

7. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione
$$z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9 \;=\; 0$$
e rappresentare graficamente le soluzioni trovate.

8. Discutere e calcolare il seguente integrale:
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$$

9. Discutere e calcolare il seguente integrale:
$$\int_2^{3} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$$

10. Discutere e calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{x}}\, dx$$

11. Dire quale è l'insieme di convergenza per la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} .$$

Dire inoltre su quali sottoinsiemi $A \subset \mathbb{R}$ la convergenza è uniforme.

N.B. questo fatto è implicato dalla convergenza di

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big\| \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \Big\|_{\infty, A} .$$

12. Studiare il comportamento della successione di funzioni definite da

$$f_n(x) = x^{n^2} e^{-nx} ,$$

determinando gli insiemi dove la successione converge puntualmente e quelli dove tale convergenza è uniforme.

13. Determinare su quali intervalli $I \subset \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \operatorname{arctg}(x)/x$ è integrabile; provare che

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} .$$

14. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x\, e^{-n x^3}$$

e calcolarne la somma.

15. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, (\operatorname{sen} x)^n$$

e calcolarne la somma sull'insieme di convergenza.

16. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos x)^{-n}}{(n+2)!}$$

e calcolarne la somma sull'insieme di convergenza.

17. Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = y - x - \frac{1}{x-\frac{1}{4}} + \frac{1}{y+\frac{1}{2}}$$

sull'insieme

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 0\,,\;\; 0 \le y \;\le 2|x|\big\} .$$

18. Verificare che il luogo di zeri

$$Z = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + 2\,x\,y + y^4 = 4\big\}$$

non ha punti singolari; determinare l'equazione della retta tangente a Z in $(1,1)$; provare che in un intorno di $(1,1)$ l'insieme Z è grafico di una funzione $y = g(x)$ e determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine per g in un intorno di $x = 1$.

19. Per quali $\alpha > 0$ esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha}{x^2 + y^4} \ ?$$

20. Calcolare massimo e minimo della funzione

$$f(x, y, z) = x\, e^y \, \log z$$

sull'insieme

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 1/2\,,\ x + y + z \leq 1\right\}\ .$$

21. Siano date due rette r, r' di $\mathbb{R}^n$ di equazioni parametriche

$$r\ :\quad \underline{x} = \underline{v}_0 + t\,\underline{v}\ ,\ \ t \in \mathbb{R} \qquad\qquad r'\ :\quad \underline{x} = \underline{w}_0 + s\,\underline{w}\ ,\ \ s \in \mathbb{R}$$

dove $\underline{v}_0$, $\underline{v}$, $\underline{w}_0$, $\underline{v}$ sono vettori fissati di $\mathbb{R}^n$, con $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\| = 1$. Determinare la distanza fra le rette r e r', cioè il numero

$$\inf\{\|\underline{x} - \underline{x}'\| \ : \ \underline{x} \in r\ ,\ \ \underline{x}' \in r'\}\ .$$

22. Descrivere il comportamento della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^{3n}}{n+1}$$

e calcolarne la somma nell'insieme di convergenza.

23. Determinare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y) = (xy)^{x+y}$$

sull'insieme

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2\,e^4\, x\, y \geq 1\ ,\ \ 0 \leq x + y \leq 2\,e^{-2}\right\}\ .$$

24. Sia $f(x)$ la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(x^n)}{n!}\ .$$

Dire dove è definita $f(x)$, se e dove è derivabile, quanto vale $f'(2)$.

25. Dimostrare che la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(x-y)}{x-y} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

è differenziabile su tutto il piano.

26. Dimostrare che l'equazione

$$y^3 - e^{xy} = 0$$

definisce inplicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno del punto $(0, 1)$; scriverne lo sviluppo di Taylor di centro $x_0 = 0$ e ordine 2.

27. Calcolare massimo e minimo di $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2/4)}$ sul cerchio centrato nell'origine e raggio 1.

28. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x-y^2)}{x-y^2} & \text{se } x \neq y^2 \\ 1 & \text{se } x = y^2 \end{cases}$$

29. Dire se la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\log(1 + x^2) - \log(1 + y^2)} \qquad (\,|x| \neq |y|\,)$$

può essere estesa con continuità a tutto $\mathbb{R}^2$.

30. Tenendo conto dello sviluppo di Taylor in 0 di $t \to e^t$ e di $t \to \cos t$, scrivere lo sviluppo di Taylor al quarto ordine in $(0,0)$ della funzione
$$f(x,y) = e^{xy} \cos(x + y^3)\ .$$

31. Studiare i massimi e minimi relativi e assoluti di
$$f(x,y) = \int_x^y \sin(t^2)\, dt$$
sull'insieme
$$\{(x,y)\ :\ |x| \le \sqrt{\pi}\,,\ |y| \le \sqrt{\pi}\}\ .$$

32. Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x,y,z,t) = x+y-z-t$ sull'insieme $x^2+y^2+z^2+2\,t^2 = 1$.

33. Trovare massimi e minimi relativi ed assoluti di $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\,x - 12\,y + 20$ sull'insieme
$$\{(x,y)\ :\ y \ge 0\,,\ y + x \le 10\,,\ y - x \le 10\}\ .$$

34. Studiare la differenziabilità della funzione
$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}\ \operatorname{arcsen}(x - y)\ .$$

35. Trovare massimi e minimi (se esistono) della funzione
$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$$
sulla curva $x\,y + x + y + 4 = 0$.

36. Data la funzione $f(x,y) = (x-y) - tg(x-y)/2$, dire se l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce y come funzione implicita della x in un intorno del punto $(0,0)$. In caso affermativo, calcolare $y'(0)$ e $y''(0)$.