Corso interno di Matematica
prova scritta del 19.07.07

1. Sia V l'insieme dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti reali:

$$V = \{a_0 + a_1\,X + a_2\,X^2 \;\;:\;\; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}\ .$$

Sia L l'applicazione che al polinomio $p(X)$ associa il polinomio $p(2\,X+1) - 2\,p(X)$.

(a) Dimostrare che $L(V) \subset V$ e che $L : V \to V$ è lineare.

(b) Scrivere la matrice di L rispetto alla base di V data da 1, X, $X + X^2$.

(c) Determinare la dimensione dell'immagine di L.

(d) Determinare una base per il nucleo Ker$L$.

(e) Sia M l'applicazione lineare da V in V che manda $p(X)$ in $p(X+1)$. Dimostrare che $L \circ M$ e $M \circ L$ sono applicazioni distinte.

Soluzione: Se $p_1(X) = a_0 + a_1\,X + a_2\,X^2$ e $p_2(X) = b_0 + b_1\,X + b_2\,X^2$, verifichiamo che $L(p_1) + L(p_2) = L(p_1 + p_2)$. Infatti

$$\begin{aligned}
L(p_1) + L(p_2) &= p_1(2\,X+1) - 2\,p_1(X) + p_2(2\,X+1) - 2\,p_2(X) \;= \\
&= a_0 + a_1\,(2\,X+1) + a_2\,(2\,X+1)^2 - 2\,a_0 - 2\,a_1\,X - 2\,a_2\,X^2 + \\
&\quad + b_0 + b_1\,(2\,X+1) + b_2\,(2\,X+1)^2 - 2\,b_0 - 2\,b_1\,X - 2\,b_2\,X^2 \;= \\
&= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)\,(2\,X+1) + (a_2+b_2)\,(2\,X+1)^2 - \\
&\quad -2\,(a_0+b_0) - 2\,(a_1+b_1)\,X - 2\,(a_2+b_2)\,X^2 \;= \\
&= L(p_1+p_2)
\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
\alpha\,L(p) &= \alpha\,(p(2\,X+1) - 2\,p(X)) \;= \\
&= \alpha\,(a_0 + a_1\,(2\,X+1) + a_2\,(2\,X+1)^2 \\
&\quad -2\,a_0 - 2\,a_1\,X - 2\,a_2\,X^2) \;= \\
&= \alpha\,a_0 + \alpha\,a_1\,(2\,X+1) + \alpha\,a_2\,(2\,X+1)^2 - \\
&\quad -2\,\alpha\,a_0 - 2\,\alpha\,a_1\,X - 2\,\alpha\,a_2\,X^2 \;= \\
&= L(\alpha\,p)
\end{aligned}$$

Quindi L è lineare; d'altra parte è chiaro che il grado di $L(p)$ è uguale al grado di p e quindi L manda V in se stesso.

Indichiamo con $v_1(X)$, $v_2(X)$ e $v_3(X)$ rispettivamente i polinomi 1, X, $X+X^2$.

$$\begin{aligned} L(v_1(X)) &= 1-2\cdot 1 \;=\; -1 \;=\; -v_1(X) \\ L(v_2(X)) &= 1\cdot(2\,X+1)-2\cdot X \;=\; 1 \;=\; v_1(X) \\ L(v_3(X)) &= 1\cdot(2\,X+1)^2-2\cdot X^2 \;=\; 1+4\,x+2\,X^2 \;= \\ &= 1+2\,x+2\,(X+X^2) \;=\; v_1(X)+2\,v_2(X)+2\,v_3(X) \end{aligned}$$

Di conseguenza, nella base proposta l'applicazione L viene rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 perchè prima e seconda colonna sono linearmente dipendenti, mentre seconda e terza sono linearmente indipendenti e quindi l'immagine ha dimensione 2. Risolviamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1+c_2+c_3 \\ 2\,c_3 \\ 2\,c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il nucleo è generato dal vettore $v_1(X)+v_2(X)=1+X$.
Se $M(p(X))=p(X+1)$ verifichiamo che M e L non commutano, nel modo più *pigro* possibile, esibendo un vettore $\xi\in V$ tale che $L\circ M(\xi)$ e $M\circ L(\xi)$ siano diversi. Come ξ prendiamo un generatore del nucleo di L, ad esempio $1+X$ come visto in precedenza. Sarà $M\circ L(\xi)=M(0)=0$; d'altra parte $M(\xi)=1+(X+1)=2\,v_1+v_2$ e $L(2\,v_1+v_2)=-1\neq 0$.

2. Dire se la funzione $f(x)=e^{-\sqrt{|x|}}$ è integrabile in senso generalizzato su tutto $\mathbb{R}$ e in tal caso calcolare il valore dell'integrale.

   Soluzione: La funzione f è pari; di conseguenza è integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$ se e solo se lo è su $[0,+\infty)$. E' facile vedere che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|x|}}}{1/(1+x^2)} \;=\; 0$$

   e quindi che esiste $M>0$ tale che $f(x)<1/(1+x^2)$ per $x>M$, e la funzione maggiorante è integrabile. Oppure possiamo direttamente cercare una primitiva e verificare l'integrabilità dalla definizione. Ponendo $\sqrt{x}=y$

otteniamo che

$$\begin{aligned}\int e^{-\sqrt{x}}\,dx &= \int e^{-y}\,2y\,dy \;=\; -2\,y\,e^{-y}+\int 2\,e^{-y} \;=\\ &= -(2\,y+2)\,e^{-y}+c \;=\; -(2\sqrt{x}+2)\,e^{-\sqrt{x}}+c\end{aligned}$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{|x|}}\,dx \;=\; 2\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx \;=\; 2\lim_{M\to+\infty}\left[-(2\sqrt{x}+2)\,e^{-\sqrt{x}}\right]_0^M \;=\; 4$$

3. Determinare l'insieme di convergenza e di convergenza assoluta per la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^n x}{n}\,.$$

Calcolare poi, per ogni punto dell'insieme di convergenza assoluta, la somma della serie

Soluzione: La condizione necessaria per la convergenza, che

$$a_n \;=\; \frac{\cos^n x}{n}\to 0\,,$$

è sempre verificata, dato che $|\cos x|\le 1$; se $|\cos x|<1$, cioè se $x\neq k\,\pi$, per il criterio della radice la serie risulta assoutamente convergente. Se $x=(2\,k+1)\pi$ risulta $a_n=(-1)^n/n$ e la serie converge ma non assolutamente; se $x=2\,k\,\pi$ si ha $a_n=1/n$ e la serie diverge. Indicato con A l'insieme $\{x\in\mathbb{R}\;:\;x\neq k\,\pi\}$, per trovare la somma della serie possiamo notare che

$$x\in A\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^n x}{n} \;=\; F(\cos x)$$

dove

$$t\in(-1,1)\mapsto F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\,.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t s^n\,ds \;=\; \int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}s^n\,ds \;=\\ &= \int_0^t\frac{1}{1-s}\,ds \;=\; -\log|1-t|\end{aligned}$$

e quindi la somma della serie si può esprimere come

$$-\log|1-\cos x|\,.$$

4. Studiare insieme di definizione, continuità e differenziabilità della funzione

$$f(x,y) \;=\; \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-x\,y}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Soluzione: L'insieme di definizione è dato da $\{(x,y) \,:\, x\,y \neq 1\}$, e quindi il complementare dell'iperbole equilatera. Sul suo insieme di definizione la funzione è composizione di funzioni infinitamente differenziabili. Scriviamone le derivate parziali:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-x\,y}\right)^2}\,\frac{(1-x\,y)+y\,(x+y)}{(1-x\,y)^2} = \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1-x\,y)^2}{(1-x\,y)^2+(x+y)^2}\,\frac{(1-x\,y)+y\,(x+y)}{(1-x\,y)^2} = \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1-x\,y)+y\,(x+y)}{(1-x\,y)^2+(x+y)^2} = \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{1-2\,x\,y+x^2y^2+x^2+2\,x\,y+y^2} = \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1+x^2)\,(1+y^2)} = 0
\end{aligned}$$

e analogamente per la derivata parziale rispetto a y. Ne segue che in A la funzione ha gradiente nullo, e dunque è costante sulle componenti connesse. La funzione assume 3 valori distinti:

$$\begin{aligned}
&f(0,0) = 0 \\
&f(\sqrt{3},\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{2\pi}{3} - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \pi \\
&f(-\sqrt{3},-\sqrt{3}) = \ldots = -\pi
\end{aligned}$$

5. Data la funzione $\varphi(x,y) = x^4 + y^4 - 8\,(x^2+y^2)$, provare che

$$A \;=\; \{(x,y) \;:\; \varphi(x,y) = 0\}$$

è un insieme limitato del piano, che $(0,0)$ è un punto isolato di A, che in ogni punto di $A \setminus (0,0)$ la relazione $\varphi(x,y) = 0$ definisce implicitamente y come funzione differenziabile di x (o viceversa) e determinare i punti di A per cui è massimo o minimo il valore di y.

Soluzione:

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \varphi(x,y) \;=\; +\infty$$

garantisce che A è limitato.

I punti *cattivi* sono i punti di A che verificano il sistema

$$\begin{cases} \varphi_x &= \quad 4\,x\,(x^2-4) \quad = \quad 0 \\ \\ \varphi_y &= \quad 4\,y\,(y^2-4) \quad = \quad 0\,. \end{cases}$$

Fra le soluzioni del sistema $(0,0)$, $(\pm 2,0)$, $(0,\pm 2)$, $(\pm 2,\pm 2)$ solo l'origine appartiene ad A ed è un punto isolato; quindi il teorema del Dini si applica a qualunque punto di $A \setminus (0,0)$. I punti dove la y è massima o minima sono da cercare fra quelli per cui y è funzione implicita di x e

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} \;=\; 0$$

e quindi dove $x = 0, \pm 2$. Se $x = 0$, si ha che $y^2\,(y^2-8) = 0$, da cui $y = 0$ o $y = \pm 2\sqrt{2}$; se $x = \pm 2$ deve essere

$$y^4 - 8\,y^2 + x^4 - 8\,x^2 = y^4 - 8\,y^2 - 16 = 0$$

da cui

$$y^2 \;=\; 4 \pm \sqrt{16+16} = 4\,(1 \pm \sqrt{2})$$

che ha come soluzioni reali $y = \pm 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$; quindi $y = 2\sqrt{2}$ è un minimo locale e $2\sqrt{1+\sqrt{2}}$ è il massimo assoluto e $y = -2\sqrt{2}$ è un massimo locale e $-2\sqrt{1+\sqrt{2}}$ è il minimo assoluto.