1. Trovare le soluzioni costanti dell'equazione differenziale

$$x' = x \sin x ,$$

dire quali di queste sono stabili e quali instabili; tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni.

2. Studiare la natura del punto critico $(0,0)$ per i sistemi lineari seguenti e tracciarne approssivamente le orbite (richiede la diagonalizzazione):

(a) $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = -\frac{1}{4}y \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4x - y . \end{cases}$

3. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = a\,x + b\,y \\ y' = c\,x + d\,y \end{cases}$$

con $ad - bc = 0$; si provi che si verifica una delle seguenti situazioni:

(a) vi è una intera retta di punti critici, le orbite sono rettilinee e si avvicinano oppure si allontanano da essa per $t \to +\infty$;

(b) vi è una intera retta di punti critici, le orbite sono rettilinee e sono parallele a tale retta;

(c) ogni punto del piano è punto critico.

4. Trovare i punti critici dei seguenti sistemi, scriverne i corrispondenti sistemi linearizzati e, quando possibile, studiarne il comportamentedelle orbite in un intorno dei punti critici:

(a) $\begin{cases} x' = y - 3 \\ y' = 2x + 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x - y \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = -x + y^2 \\ y' = y^2 - 2y \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' = 2x - y^2 \\ y' = -y + xy . \end{cases}$

5. Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = -x - \dfrac{y}{\ln\sqrt{x^2+y^2}} \\ y' = -y + \dfrac{x}{\ln\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

(dove le funzioni a secondo membro sono entrambe definite come 0 nell'origine), dimostrare che l'origine ne è l'unico punto critico, che il sistema linearizzato ha in $(0,0)$ un nodo stabile con traiettorie rettilinee; passando a coordinate polari determinare il comportamento delle soluzioni del sistema di partenza per $t \to +\infty$.

6. Determinare e classificare i punti critici del sistema

$$\begin{cases} x' &= 2\,x + x^2 \\ y' &= -y + x\,y\ . \end{cases}$$

Discutere il comportamento qualitativo delle orbite.

7. Integrando per separazione di variabili l'equazione $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x,y)}{f(x,y)}$ (oppure l'equazione $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$) determinare gli integrali primi per i sistemi seguenti

(a) $\begin{cases} x' &= x\,(1+y) \\ y' &= -y\,(1+x) \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' &= x\,(x\,e^y - \cos y) \\ y' &= \sin y - 2\,x\,e^y \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' &= y - x^2\,y - y^3 \\ y' &= x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' &= 2\,x^2\,y \\ y' &= x\,(y^2+1)\ , \end{cases}$

e cercare di disegnarne le orbite.

8. Determinare le orbite periodiche del sistema

$$\begin{cases} x' &= -y\,(x^2+y^2-4) \\ y' &= 4\,(x-1)\,(x^2+y^2-4)\ . \end{cases}$$