

1. Trovare l'integrale generale per le seguenti equazioni del primo ordine (eventualmente attraverso un cambiamento di variabile)

(a) $y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{x}$;

(b) $x y y' = x^2 + y^2$;

(c) $x y' - y = y^3$;

(d) $(x^2 y - y) y' + x y^2 + x = 0$;

(e) $(4x + 6y - 5) y' + (2x + 3y - 1) = 0$;

Traccia: l'equazione si può scrivere nella forma

$$y' = -\frac{2x + 3y - 1}{4x + 6y - 5} ;$$

una sostituzione che può aiutare è porre

$$u = 2x + 3y - 1$$

che porta a

$$y = \frac{1}{3}(u - 2x + 1)$$

da cui

$$\frac{1}{3}(u' - 2) = -\frac{2x + 3y - 1}{4x + 6y - 5} = -\frac{u}{2u - 3} \dots$$

(f) $(4x - 2y + 3) y' + (2x - y) = 0$;

(g) $y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$;

(h) $y' = \frac{4}{x} y + x\sqrt{y}$;

(i) $y' + \frac{2y}{x} = x^3$;

(j) $2xy y' - y^2 + x = 0$;

2. Trovare l'integrale generale per le seguenti equazioni del secondo ordine

(a) $y'' - 5y' + 6y = 0$;

(b) $y'' + 2y' + y = 0$;

(c) $y'' + ky = 0$ ($k \neq 0$) ;

(d) $y'' + 4y' + 13y = 0$;

(e) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$;

(f) $y'' + 9y = \cos 2x$;

- (g) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$;
 (h) $y'' + y' = \sin^2 x$;
 (i) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$;
 (j) $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x}$;
 (k) $y'' + 2y = 2x \cos x \cos 2x$ (ricordare $\cos(\alpha \pm \beta) = \dots$) ;
 (l) $y'' + y = \tan x$ (variazione delle costanti) ;
 (m) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ (variazione delle costanti) ;
 (n) $y'' - 2y' + y = \frac{1}{\sin x}$ (variazione delle costanti) ;

3. Trovare l'integrale generale per le seguenti equazioni lineari a coefficienti costanti o di Eulero:

- (a) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$;
 (b) $y''' + y = 0$;
 (c) $y^{(4)} + a^4 y = 0$;
 (d) $y^{(n)} + \binom{n}{1}y^{(n-1)} + \binom{n}{2}y^{(n-2)} + \dots + \binom{n}{n-1}y' + y = 0$;
 (e) $y''' + y = 0$;
 (f) $y''' + y'' + y' + y = x e^x$;
 (g) $x^2 y'' + 3x y' + y = 0$;
 (h) $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$;
 (i) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6x y' - 6y = 0$;
 (j) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6x y' - 6y = 0$;
 (k) $x^2 y'' - 3x y' + 4y = x^3$;

4. Trovare l'integrale generale dei seguenti sistemi (metodo di eliminazione e/o riduzione a forma canonica):

- (a)
$$\begin{cases} x' + 2x + 4y = 1 + 4t, \\ y' + x - y = \frac{3}{2}t^2; \end{cases}$$
- (b)
$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x + y + y; \end{cases}$$
- (c)
$$\begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = -x - 3y; \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x' + 2x + y = \sin t, \\ y' - 4x - 2y = \cos t; \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x' = -3x - y, \\ y' = x - y; \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = x; \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x' - 4x - y + 36t = 0, \\ y' + 2x - y + 2e^t = 0; \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} x' + y = 1, \\ z' + \frac{2}{t^2}x = t; \end{cases}$$

... continua ...