Corso interno di Matematica
compito scritto del 14.07.06

1. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che

$$\begin{array}{lcl} \lim_{n\to\infty} & a_n + b_n & = S \in \mathbb{R} \\ \lim_{n\to\infty} & a_n \cdot b_n & = P \in \mathbb{R} \end{array}$$

   Dimostrare che le due successioni convergono o trovare un controesempio esplicito.

   Dire che cosa cambia se si assume anche l'ipotesi $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Trovare le soluzioni di

$$z^2\,|\,\mathrm{Im}\,z| = \mathbf{i}\,|z|^2\ .$$

3. Dimostrare che l'integrale generalizzato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{|x|}} + e^{-\sqrt{|x|}}}\,dx$$

   è convergente e che il suo valore non supera 4.

4. Dire per quali valori del parametro α la funzione

$$f(x,y) = \frac{y\sin x - x\sin y}{x\,y\,(x^2+y^2)^\alpha}$$

   è limitata in un intorno di $(0,0)$ e per quali esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

   e in tal caso calcolarlo.

5. Trovare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x,y) = x\,e^{x^2+y^2}$ sull'insieme $D = \{(x,y)\,|\,x^2 + y^2/4 \leq 1\}$.

6. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2\,y}{x-1} = \dfrac{1}{x^3-1} \\ y(2) = a \end{cases}$$

   e verificare che esiste un solo valore di a per cui $\lim_{x\to 1^+} y(x)$ esiste finito. In tal caso, calcolare il limite.

7. Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = y - x^2 \\ y' = 4\,x - y - 3 \end{cases}$$

   trovare i punti critici, scrivere i corrispondenti sistemi linearizzati e, se possibile, studiare il comportamento delle orbite in un intorno dei punti critici.