

**Esercizio 1** Dimostrare per induzione:

1.  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}, \quad \forall n \geq 1$
2.  $n! \geq 2^{n-1}, \quad \forall n \geq 1$
3.  $(1-a)^n \geq 1-na, \quad \forall n \geq 1 \text{ se } 0 < a < 1.$

**Esercizio 2** Dire per quali  $n \in \mathbb{N}$  è vera la maggiorazione

$$2^n + 4^n \leq 5^n.$$

**Esercizio 3** Dire per quali  $n \in \mathbb{N}$  è vera la maggiorazione

$$3^n \geq n2^n.$$

**Esercizio 4** Se  $f$  è una applicazione  $A \rightarrow B$  e  $X, Y$  sono due sottoinsiemi di  $B$ , provare che

1.  $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
2.  $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$
3.  $f^{-1}(X - Y) = f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)$

**Esercizio 5**  $f$  è una applicazione  $A \rightarrow B$ ,  $X$  è un sottoinsieme di  $A$ ,  $Y$  è un sottoinsieme di  $B$ . Si hanno le relazioni

1.  $f^{-1}(Y) = f^{-1}(Y \cap f(A))$
2.  $f^{-1}(f(X)) \supset X$
3.  $f(f^{-1}(Y)) = Y \cap f(A)$

**Esercizio 6** Se  $f : A \rightarrow B$  è una applicazione iniettiva e  $X, Y$  sono due sottoinsiemi di  $B$ , allora

$$f^{-1}(f(X)) = X; \quad f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$$

**Esercizio 7** Se  $f : A \rightarrow B$  è una applicazione surgettiva e  $Y$  è un sottoinsieme di  $B$ , allora

$$f(f^{-1}(Y)) = Y.$$

**Esercizio 8** Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \frac{x+1}{x+2}.$$

Si trovi l'immagine inversa dell'intervallo  $Y = \{y : 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$ .

**Esercizio 9** Sia  $A = \{x : x \in \mathbb{R} \quad x > 1\}$ , e siano  $f$  e  $g$  due funzioni definite in questo modo

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow \mathbb{R}^+, & f(x) &= \frac{x+2}{x+1} \\ g : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &= \sqrt[4]{x}. \end{aligned}$$

- (i<sub>1</sub>) Trovare l'immagine di  $g \circ f$ ;  
 (i<sub>2</sub>) Dimostrare che  $g \circ f$  è iniettiva.

**Esercizio 10** Siano  $A, B, C$  tre insiemi e  $f$  e  $g$  due applicazioni tali che

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C.$$

Se  $f$  e  $g$  sono invertibili anche  $g \circ f$  è invertibile e

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

**Esercizio 11** Dire per quali  $x$  reali è vera la disuguaglianza:

1.  $\frac{x}{x-1} > 2$ ;
2.  $\frac{1}{2} < \sqrt{x|x|+1} < 2$ ;
3.  $\frac{|x|-3}{\sqrt{x-1}} > \sqrt{x}$ ;
4.  $\frac{x-2}{|-x^2+x|} < 2$ ;

**Esercizio 12** Trovare i numeri  $z \in \mathbb{C}$  per i quali  $\frac{z\mathbf{i}}{-z}$  è reale negativo.

**Esercizio 13** Risolvere le equazioni

1.  $|z|\bar{z} = 2\mathbf{i}$ ;
2.  $((z - \bar{z})^3 = \mathbf{i}$ ;
3.  $z^2 + (\mathbf{i} - 1)z - \mathbf{i} = 0$ ;
4.  $z^4 = \bar{z}^3$ ;
5.  $z^4 - (2\mathbf{i} + 1)z^2 + 2\mathbf{i} = 0$ ;

**Esercizio 14** Sia  $A$  un insieme e  $f$  una funzione reale definita su  $A$  e limitata. Sia  $L = \sup_A f$  e  $\ell = \inf_A f$ . Consideriamo la funzione reale  $F(x, y) = f(x) - f(y)$  definita in  $A \times A$ . Si dimostri che

$$\sup_{A \times A} F = L - \ell \qquad \inf_{A \times A} F = \ell - L$$

**Esercizio 15** Calcolare massimo e minimo limite delle successioni

1.  $\left\{ \frac{(-1)^n}{n+1\sqrt{n+1}} \right\}$ ;
2.  $\left\{ (-1)^n \sin \frac{n\pi}{2} \right\}$ ;
3.  $\{(-1)^n \sqrt[n]{n}\}$ ;

**Esercizio 16** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione periodica di periodo  $T$ :

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che  $f$  ha limite per  $x \rightarrow +\infty$  se e solo se  $f$  è costante.

**Esercizio 17** La funzione  $x \rightarrow (x^5 + \operatorname{sen}^3 x \sqrt{x})$ , definita per  $x \geq 0$ , è infinitesima per  $x \rightarrow 0$ . Determinare l'ordine di infinitesimo rispetto all'infinitesimo  $x \rightarrow \sqrt{x}$ .

**Esercizio 19** Calcolare i seguenti limiti

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^3 \cos x \operatorname{sen}^2 x}{x + x \operatorname{tang} x + \operatorname{sen} x \operatorname{tang}^2 x}$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \left( 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \right)$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + x + x^2)}{\operatorname{sen} x^2}$ ;
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x(x-2)} - \sqrt{x} \right]$ ;
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{\operatorname{tang} x}$ ;
6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\beta}$ , se  $a > 1$  e  $\beta > 0$  (partendo dal limite notevole  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^\beta} = +\infty$ );
7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen}(e^{-x})$ ;
8.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{x}$  (usando la definizione di arcotangente);