

1. Dimostrare che se  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  è continua e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  esistono finiti, allora  $f$  è uniformemente continua su  $]a, b[$ .

Stesso problema:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è continua ed esistono finiti  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_2$ . Provare che  $f(x)$  è uniformemente continua o fornire un controesempio.

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1+x}{\operatorname{arctg}(1-x^2)}$$

3. Dimostrare che la funzione  $f(x) = 2x + \cos x$  è invertibile da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  e, detta  $x = g(y)$  la funzione inversa, calcolare  $g'(\pi)$ . (Si determini prima per quale  $x_0$  è  $f(x_0) = \pi$ )

4. Determinare sul grafico di  $y = 1/(1+x^2)$  i punti nei quali la retta tangente al grafico forma con l'asse  $x$  l'angolo più grande possibile (in valore assoluto).

5. Tracciare il grafico di

$$\arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; \quad \sqrt[5]{x(x^2 - 1)^2}$$

6. Calcolare due numeri  $A, B \in \mathbb{R}$  tali che

$$\frac{1}{1+2x^2} = 1 + Ax + Bx^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

7. Calcolare

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{2x-1}} dx.$$

8. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} [1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p], \quad p > -1.$$

9. Calcolare, al variare di  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , il limite

$$L(a, b) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^b} \int_{\frac{ax}{x+a}}^x (5^s - 1) ds$$

10. Calcolare il limite

$$I = \lim_{b \rightarrow 2^-} \int_0^b \frac{[x+1] - x}{\sqrt{(2-x)^3}} dx.$$

11. Dire se è convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt[3]{x - \sin x}} dx.$$