1. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \quad a_n + b_n \quad &= S \in \mathbb{R} \\ \lim_{n\to\infty} \quad a_n \cdot b_n \quad &= P \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   Dimostrare che le due successioni convergono o trovare un controesempio esplicito.

   Dire che cosa cambia se si assume anche l'ipotesi $a_n \le b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Sia $\{a_n\}$ una successione per cui valga

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{3n} = \lim_{n\to\infty} a_{5n} = L \in \mathbb{R}$$

   Dire se è vero che $a_n \to L$; in caso contrario costruire un controesempio.

3. Studiare la successione

$$\begin{cases} a_0 & = \quad 2 \\ a_{n+1} & = \quad \sqrt{1+a_n}, \qquad \text{per } n \ge 0 \end{cases}$$

4. Provare che se la serie a termini non negativi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora convergono anche le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n/n \,.$$

   Si ricorda la diseguaglianza $a\,b \le (a^2+b^2)/2$.

5. Usando la definizione, si provi che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2\,n+3}{(n+1)\,(n+2)}$$

   converge e che la somma è 1.

6. Usando la definizione, si provi che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\,(n+3)} = \frac{1}{4}\,.$$

7. Sia $a > 0$. Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$$

   converge per $0 < a < 1$.

8. Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\,n}{2\,n+1} - \frac{2\,n-1}{2\,n} \right)$$

   converge (e vedere se ne può calcolare la somma).