1. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(n) = \begin{cases} n^2 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ n\,(n+1) & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

   Si dica se $f(x)$ è surgettiva o iniettiva.

2. Si consideri la funzione $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{se } |x-y| \leq 1 \\ 100 & \text{se } |x-y| > 1 \end{cases}$$

   Si dica se $d(x,y)$ verifica le proprietà di una distanza: $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$; $d(x,y) = d(y,x)$; $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

   In tal caso, si descrivano gli insiemi $B(0,\delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,0) \leq \delta\}$ al variare di δ.

3. Dimostrare che

$$A \subseteq B \setminus C \;\Rightarrow\; B^c \cup C \subseteq A^c \cup C$$

   Dire se è vera anche l'implicazione inversa.

4. Dimostrare che l'insieme $\{\sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ è superiormente limitato ed inferiormente limitato; se ne determini l'insieme inferiore. (Si noti che 1 è un minorante e si dimostri che è il più grande possibile).

5. Si studi l'insieme $\{x = (1 + \frac{(-1)^n}{n}) \cos \frac{n\pi}{3} \mid n \in \mathbb{N}\}$, se ne determinino estremo superiore ed estremo inferiore e si dica se sono rispettivamente massimo e minimo.

6. Verificare con la definizione "$\varepsilon - \delta$" che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1$$

7. Si studi l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ definito nel seguente modo:

$$\begin{cases} 1 \in A \\ x \in A \;\Leftrightarrow\; \exists\, y \in A \;\left(x = \frac{y}{3} \;\vee\; x = \frac{1-y}{3}\right) \end{cases}$$

   In particolare si dimostri che 1 è un punto di accumulazione e si determini se ve ne sono altri e dove sono collocati.

   Cosa cambierebbe se al denominatore 3 fosse sostituito con 2?

8. (dalle note sulla completezza) Assunto che valga la proprietà "ogni famiglia di intervalli chiusi inscatolati ha intersezione non vuota", dedurne che ogni coppia di insiemi separati ammette un elemento separatore.

9. (dalle note sulla completezza) Assunto che valga la proprietà "ogni successione di Cauchy a valori in $\mathbb{R}$ è convergente", dedurne che ogni coppia di insiemi separati ammette un elemento separatore (o una qualunque delle altre formulazioni equivalenti).