Insiemistica, logica, principio di induzione

1. Verificare le identità:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

   Che relazione c'è tra gli insiemi $A \cap (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cup (A \cap C \cap B^c)$?

2. La differenza simmetrica tra due insiemi è definita come $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

   Verificare le identità:

$$\begin{aligned}
&(A\Delta B)^c = A^c \Delta B = A \Delta B^c\,,\\
&A \cap (B \Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)\,, A \cup (B\Delta C) = (A \cup B)\Delta(A^c \cap C)\\
&A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C = (A\Delta C)\Delta B\,.
\end{aligned}$$

3. Dimostrare l'identità:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. Provare *per induzione* che per ogni $n \geq 1$ il polinomio $x^{2n} - 1$ è divisibile per $x^2 - 1$.

5. La successione di Fibonacci $\{1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots\}$ è definita ricorsivamente come: $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ per $n \geq 2$.

   Dimostrare che se nel triangolo di Tartaglia

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 \\
1 & & 1 \\
 & \nearrow \\
1 & & 2 & & 1 \\
 & \nearrow & & \nearrow \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & \nearrow & & \nearrow \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & \nearrow \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & & \binom{n}{2} & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \binom{n}{n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

   si sommano i numeri sulle diagonali che da un 1 nella colonna di sinistra salgono verso destra, si ottengono i numeri della successione di Fibonacci.

6. Da un fagiolo magico germoglia una piantina alta un centimetro che ogni giorno cresce di 1/30 della sua altezza. Dimostrare che dopo un anno la piantina avrà superato i 40 metri di altezza.

7. Sia $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$; appartengono a tale insieme ad esempio gli insiemi $\{1, 2, 10, 1000\}$ e $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 1.000.000.000\}$, ma non l'insieme di tutti i numeri pari o dei numeri che sono cubi di un intero. Costruite una funzione iniettiva $\psi : \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ e deducetene che tale insieme ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$. Può essere molto utile pensare ai numeri primi ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $\ldots$) e al fatto che i numeri interi si fattorizzano in maniera unica.

8. Sia data $f :]-\infty, +\infty[\to]-\infty, +\infty[$; tradurre in espressioni logiche le affermazioni
   (a) f è una funzione decrescente;
   (b) f è una funzione monotona (è crescente o decrescente);
   (c) f è una funzione iniettiva;
   (d) f è una funzione surgettiva;
   (e) f è una funzione limitata;
   (f) il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse delle y;
   (g) il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine degli assi;
   (h) f è una funzione periodica di periodo 2π;
   (i) f è una funzione periodica;

9. Risolvere l'equazione insiemistica

$$A \cup (B \cap X) = (A \cup B) \cap X$$

   Si consiglia di indicare con $\phi_H(x)$ la funzione che vale 1 se $x \in H$ e 0 altrimenti, ricavare le espressioni per $\phi_{H\cup K}$ e $\phi_{H\cap K}$ e ... farne buon uso.