**Corso interno di Matematica**
**compito scritto del 4.07.05**

1. Dire se la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}$$
converge e giustificare la risposta.

   Soluzione: Il criterio della radice o del rapporto falliscono; proviamo col confronto diretto; il termine generale della serie è $1/n^{[(n+1)/n]}$ e se lo dividiamo per $1/n$ otteniamo $1/n^{1/n}$, che tende a 1; ne segue che le due serie sono asintoticamente equivalenti e dunque la prima diverge come la seconda, che è la serie armonica.

2. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} n^{-3/2} \sum_{j=1}^{6\,n} \sqrt{j}\,.$$

   Soluzione: Possiamo scrivere il termine della successione come
$$\sum_{j=1}^{6\,n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{j}{n}}\,,$$
che si rivela essere una somma di Riemann per la funzione $\sqrt{x}$ sull'intervallo $[0,6]$; la funzione è integrabile, e quindi si avrà
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{6\,n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{j}{n}} = \int_0^6 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\,6^{3/2}\,.$$

3. Determinare il parallelepipedo di volume massimo (a facce parallele ai piani coordinati) che può essere inscritto nell'ellissoide di equazione cartesiana
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

   Soluzione: Si può esplicitare $z$ e studiare max e minimi liberi, oppure max e min vincolati; la seconda è più corta.
   Cerchiamo il massimo della funzione $f(x,y,z)$ sul vincolo dato da $x^2/4+y^2/9+z^2/16-1=0$. Per questo cerchiamo i punti stazionari liberi della funzione
$$G(x,y,z,\lambda) = x\,y\,z - \lambda\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1\right)$$
risolvendo il sistema
$$\begin{cases} y\,z & = \lambda\,\frac{2\,x}{4} \\ x\,z & = \lambda\,\frac{2\,y}{9} \\ x\,y & = \lambda\,\frac{2\,z}{16} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1 & = 0 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per $x$, la seconda per $y$, la terza per $z$ e sommando (tenuto conto anche della quarta equazione) otteniamo

$$3\,x\,y\,z = 2\,\lambda\,(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}) = 2\,\lambda$$

da cui $\lambda = 3\,x\,y\,z/2$. Sostituendo nuovamente si ha

$$\begin{cases} y\,z &= \lambda\,\frac{2\,x}{4} = \frac{6\,x^2\,y\,z}{8} \\ x\,z &= \lambda\,\frac{2\,y}{9} = \frac{6\,x\,y^2\,z}{18} \\ \\ x\,y &= \lambda\,\frac{2\,z}{16} = \frac{6\,x\,y\,z^2}{32} \end{cases}$$

da cui (su $x = 0$, $y = 0$ o $z = 0$ non si hanno certamente massimi per il volume del parallelepipedo inscritto)

$$\begin{cases} x^2 &= \frac{4}{3} \\ \\ y^2 &= \frac{9}{3} \\ \\ z^2 &= \frac{16}{3} \end{cases}$$

per cui il punto di massimo è dato da $(2/\sqrt{3}, 3/\sqrt{3}, 4/\sqrt{3})$ e il valore massimo è $8/\sqrt{3}$.

4. Trovare l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} x' - 4\,x - y &= 36\,t\ , \\ \\ y' + 2\,x - y &= 2\,e^t\ . \end{cases}$$

Si consiglia di studiare per prima cosa il sistema omogeneo associato e determinarne (in un qualche modo) una base $\{u_1 \equiv (x_1(t), y_1(t)), u_2 \equiv (x_2(t), y_2(t))\}$; trovare poi due funzioni scalari incognite $c_1$ e $c_2$ tali che $c_1\,u_1 + c_2\,u_2$ risolva il sistema completo.

Soluzione: Cominciamo col determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato:

$$\begin{cases} x' &= 4\,x + y \\ \\ y' &= -2\,x + y\ . \end{cases}$$

Determiniamo l'equazione del secondo ordine soddisfatta dalla fuzione $x(t)$ se la coppia di funzioni $(x(y), y(t))$ è soluzione del sistema omogeneo;

$$x'' = 4\,x' + y' = 4\,x' + (-2\,x + y) = 4\,x' - 2\,x + (x' - 4\,x)$$

da cui

$$x'' - 5\,x' + 6\,x = 0$$

L'equazione caratteristica è quindi $\lambda^2 - 5\,\lambda + 6 = 0$ ed ha per soluzioni $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 5$; le corrispondenti soluzioni per l'equazione di secondo ordine sono $x_1 = e^{2\,t}$ e $x_2 = e^{5\,t}$; possiamo ricavare dalla prima equazione del sistema le funzioni $y_1$ e $y_2$ corrispondenti:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1' - 4\,x_1 = 2\,e^{2\,t} - 4\,e^{2\,t} = -2\,e^{2\,t} \\ y_2 &= x_2' - 4\,x_2 = 3\,e^{3\,t} - 4\,e^{3\,t} = -e^{3\,t} \end{aligned}$$

Dunque le soluzioni del sistema omogeneo sono generate dalle combinazioni lineari di

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -2\,e^{2t} \end{pmatrix} \qquad u_2(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix}$$

Usiamo il metodo della variazione delle costanti; cerchiamo $c_1(t)$, $c_2(t)$ in modo che $x = c_1\, e^{2\,t} + c_2\, e^{3\,t}$ e $y = -2\, c_1\, e^{2\,t} - c_2\, e^{3\,t}$ risolvano il sistema completo.
Sostituendo otteniamo:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & x' - 4\,x - y - 36\,t \\ & = & c_1'\, e^{2\,t} + c_2'\, e^{3\,t} + 2\,c_1\, e^{2\,t} + 3\,c_2\, e^{3\,t} - 4\,c_1\, e^{2\,t} - 4\,c_2\, e^{3\,t} + 2\,c_1\, e^{2\,t} + c_2\, e^{3\,t} - 36\,t \\ & = & c_1'\, e^{2\,t} + c_2'\, e^{3\,t} - 36\,t \\ \\ 0 & = & y' + 2\,x - y - 2\,e^t \\ & = & -2\,c_1'\, e^{2\,t} - c_2'\, e^{3\,t} - 4\,c_1\, e^{2\,t} - 3\,c_2\, e^{3\,t} + 2\,c_1\, e^{2\,t} + 2\,c_2\, e^{3\,t} + 2\,c_1\, e^{2\,t} + c_2\, e^{3\,t} - 2\,e^t \\ & = & -2\,c_1'\, e^{2\,t} - c_2'\, e^{3\,t} - 2\,e^t \end{array}\right.$$

e quindi

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_1'\, e^{2\,t} + c_2'\, e^{3\,t} & = & 36\,t \\ 2\,c_1'\, e^{2\,t} + c_2'\, e^{3\,t} & = & -2\,e^t \end{array}\right.$$

da cui

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_1'\, e^{2\,t} & = & -2\,e^t - 36\,t \\ c_2'\, e^{3\,t} & = & 72t + 2\,e^t \end{array}\right. \quad \text{cioè} \quad \left\{\begin{array}{rcl} c_1' & = & -2\,e^{-t} - 36\,t\,e^{-2\,t} \\ c_2' & = & 72t\,e^{-3\,t} + 2\,e^{-2\,t} \end{array}\right.$$

Integrando otteniamo che

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_1 & = & 2\,e^{-t} + 18\,te^{-2\,t} - 9e^{-2\,t} \\ c_2 & = & -24t\,e^{-3\,t} - 8e^{-3\,t} - e^{-2\,t} \end{array}\right.$$

5. Sia $A$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $K$ e siano $v_1, \ldots, v_n$ autovettori di A con rispettivi autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, tutti fra loro distinti. Dimostrare che $v_1, \ldots, v_n$ formano una base di $K^n$.

   Soluzione: La tesi segue dal fatto che un qualunque sistema di $r \leq n$ autovettori $v_1, \ldots, v_r$ relativi da autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sono linearmente indipendenti se gli autovalori sono a due a due distinti.
   La dimostrazione è per induzione: nel caso $n = 1$ non c'è niente da dimostrare; per $n = 2$, supponiamo che $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, e che $\alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2 = 0$; avremo quindi che $A(\alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2) = \alpha_1\, \lambda_1\, v_1 + \alpha_2\, \lambda_2\, v_2 = 0$. Sottraendo da questa equazione la precedente moltiplicata per $\lambda_2$ otteniamo che $\alpha_1\, (\lambda_1 - \lambda_2)\, v_1 = 0$ e simmetricamente che $\alpha_2\, (\lambda_2 - \lambda_1)\, v_2 = 0$. Deve quindi essere $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
   Vediamo ora il passo induttivo. Vogliamo mostrare che se gli autovalori sono distinti e una combinazione lineare $\alpha_1\, v_1 + \ldots + \alpha_r\, v_r = 0$ allora è necessariamente $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$. Per ipotesi suppoinamo che ciò sia vero per qualunque sistema di meno di 2, 3, …, $r - 1$ autovettori; in particolare ne segue che $\alpha_r \neq 0$ o il sistema dei primi $r - 1$ autovettori non sarebbe linearmente indipendente. Applicando la matrice $A$ avremo che $A(\alpha_1\, v_1 + \ldots + \alpha_r\, v_r) = \alpha_1\, \lambda_1\, v_1 + \ldots + \alpha_r\, \lambda_r\, v_r = 0$. Se sottraiamo a questa equazione la precedente moltiplicata per $\lambda_r$, otteniamo

$$\alpha_1\, (\lambda_1 - \lambda_r)\, v_1 + \ldots + \alpha_{r-1}\, (\lambda_{r-1} - \lambda_r)\, v_{r-1} = 0\ .$$

   Per ipotesi induttiva, tutti i coefficienti debbono essere nulli, e dato che per ipotesi $\lambda_r \neq \lambda_i$ per $i = 1, \ldots, r - 1$, sono i coefficienti $\alpha_i$ che si annullano, il che è assurdo.

6. Sia $W$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado 3 a coefficienti reali:

$$W = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,\ a_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 0, 1, 2, 3\},$$

e $T : W \to W$ l'applicazione definita da $T : p(x) \mapsto p(x+1)$.
a) Verificare che T è lineare.
b) Scrivere la matrice di $T$ rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$.
c) Scrivere la matrice di $T$ rispetto alla base $\{1, x+1, x^2+1, x^3+1\}$.

Soluzione: Per il punto (a), siano $p(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3$ e $q(x) = b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + b_3\,x^3$; avremo quindi $T(p+q)(x) = T((a_0+b_0) + (a_1+b_1)\,x + (a_2+b_2)\,x^2 + (a_3+b_3)\,x^3) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)\,(x+1) + (a_2+b_2)\,(x+1)^2 + (a_3+b_3)\,(x+1)^3 = (a_0 + a_1\,(x+1) + a_2\,(x+1)^2 + a_3\,(x+1)^3) + (b_0 + b_1\,(x+1) + b_2\,(x+1)^2 + b_3\,(x+1)^3) = Tp(x) + Tq(x)$
Per il punto (b), la matrice $A$ che rappresenta $T$ rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$ avrà per colonne i coefficienti (rispetto alla base) dei vettori $T\,1 = 1$, $T\,x = 1 + x$, $T\,x^2 = 1 + 2\,x + x^2$ e $T\,x^3 = 1 + 3\,x + 3\,x^2 + x^3$; avremo quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per il punto (c) (determinare la matrice $B$ che rappresenta $T$ rispetto alla seconda base) potrei trovare la matrice $R$ del cambiamento di base e ottenere la matrice che ci interessa come coniugata di $A$ rispetto ad $R$ ( $B = R^{-1}\,A\,R$ ); la matrice $R$ ha per colonne i coefficienti che esprimono i vettori di $\{1, x+1, x^2+1, x^3+1\}$ in termini di quelli di $\{1, x, x^2, x^3\}$, ed è quindi

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Devo ora trovare la matrice inversa $R^{-1}$ e comporre.
Forse è più comodo rifare il calcolo:
indichiamo con $v_1, v_2, v_3, v_4$ i vettori $\{1, x+1, x^2+1, x^3+1\}$.
$T\,v_1 = T\,u_1 = v_1$
$T\,v_2 = T\,(x+1) = (x+1) + 1 = x + 2 = v_2 + v_1$
$T\,v_3 = T\,(x^2+1) = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2\,x + 2 = (x^2+1) + 2\,x + 1 = v_3 + 2\,(x+1) - 1 = v_3 + 2\,v_2 - v_1$
$T\,v_4 = T\,(x^3+1) = (x+1)^3 + 1 = x^3 + 3\,x^2 + 3\,x + 2 = (x^3+1) + 3\,(x^2+1) + 3\,(x+1) + 2 - 1 - 3 - 3 = v_4 + 3\,v_3 + 3\,v_2 - 5\,v_1$
e quindi

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Dato il sistema del primo ordine

$$\begin{cases} x' &= \sin y \\ y' &= \sin x \end{cases}$$

se ne disegni approssivamente il campo di direzioni; se ne studino i punti stazionari discutendo la stabilità; si cerchino eventuali traiettorie rettilinee; si determini infine un integrale primo e se ne deduca che tutte le orbite non costanti o rettilinee sono periodiche.

Soluzione: Punti critici sono quelli per cui $\sin(y) = \sin(x) = 0$, e dunque tutti i punti del piano del tipo $(h\,\pi, k\,\pi)$. Determiniamo il sistema linearizzato in $(0,0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ e $(\pi, \pi)$, che sono rappresentativi di ogni altro punto critico, che si ottiene da uno di questi per traslazione di multipli di $2\,\pi$ in entrambe le direzioni. In $(0,0)$ è

$$\begin{cases} x' &= & y \\ \\ y' &= & x \end{cases}$$

o ancora

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dove la matrice ha autovalori 1 e -1 con relativi autovettori $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.
Per il sistema linearizzato, $(0,0)$ è un punto di sella.
In $(\pi, 0)$ è

$$\begin{cases} x' &= & y \\ \\ y' &= & -x \end{cases}$$

o ancora

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Per il sistema linearizzato il punto $(\pi, 0)$ è un centro.
Analogamente, in $(0, \pi)$ è

$$\begin{cases} x' &= & -y \\ \\ y' &= & x \end{cases}$$

o ancora

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

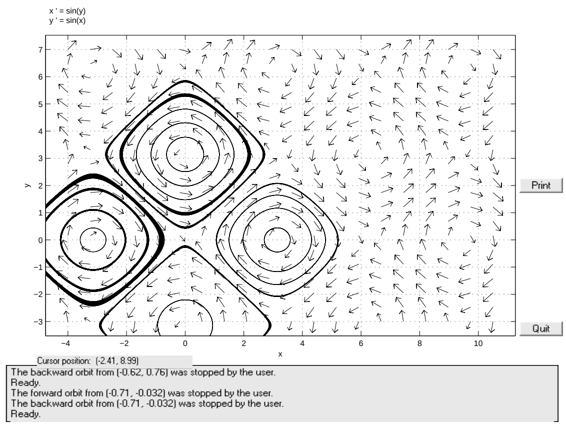
Per il sistema linearizzato il punto $(0, \pi)$ è un centro.
In $(\pi, \pi)$ il sistema linearizzato è

$$\begin{cases} x' &= & -y \\ \\ y' &= & -x \end{cases}$$

e dunque il punto critico è una sella. Traiettorie rettilinee: a okkio, si vede che l'insieme $x \pm y = k\,\pi$ non solo contiene tutti i punti critici, ma che la traiettoria di ogni altro punto che vi giace è rettilinea.
Per determinare l'integrale primo:
Per una curva soluzione che esce da un punto $(x_0, y_0)$ con $x_0 \neq k\,\pi$ la $x$ è localmente funzione invertibile del tempo, e dunque possiamo cercare di determinare $y$ come funzione di $x$. Dividendo la seconda equazione per la prima si ha:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{\sin y} \qquad \text{o anche} \qquad \sin y \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

che è a variabili separabili, ed ha come soluzioni $\cos x + \cos y = c$; fissato un valore di $c$ fra $-2$ e 2, la curva definita implicitamente contiene punti critici se e solo se il suo gradiente $(-\sin x, -\sin y)$ si annulla, e dunque se contiene punti $(h\,\pi, k\,\pi)$. Per $c = 2$ e $c = -2$ la "curva" è fatta d punti isolati; per $c = 0$, la curva è data dall'unione delle due schiere di rette $x \pm y = h\,\pi$; tranne che per questi valori, le curve di livello definiscono orbite periodiche.


x ' = sin(y)
y ' = sin(x)
y
x
Print
Quit
Cursor position: (-2.41, 8.99)
The backward orbit from (-0.62, 0.76) was stopped by the user.
Ready.
The forward orbit from (-0.71, -0.032) was stopped by the user.
The backward orbit from (-0.71, -0.032) was stopped by the user.
Ready.