Polinomio di Taylor; Formula di Taylor con resto in forma di Peano

Come abbiamo visto, una funzione $f(x)$ derivabile in x_0 è anche differenziabile in x_0: vale cioè la relazione

$$f(x) \ = \ f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)\ .$$

È quindi possibile approssimare $f(x)$ con un polinomio di primo grado del tipo $a_0 + a_1\,(x - x_0)$ in modo che per lo scarto $r(x) = f(x) - (a_0 + a_1\,(x - x_0))$ valga la relazione

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0\,.$$

Ci poniamo il problema di determinare un polinomio che approssimi la funzione ancora meglio per $x \to x_0$; vogliamo un polinomio $p(x)$ tale che

$$f(x) - P(x - x_0) = \mathrm{o}((x - x_0)^n), \qquad \text{cioè tale che} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x - x_0)}{(x - x_0)^n} = 0\,.$$

Questa condizione, per $n \geq 1$, implica solo che la $f(x)$ è continua e derivabile in x_0. Supponiamo però di sapere anche che la funzione $f(x)$ è derivabile in x_0 fino all'ordine n. Vedremo che sotto queste ipotesi un polinomio con le proprietà richieste esiste e, se richiediamo che il grado sia minore o uguale a n, esso è anche unico.
A tale scopo proviamo un risultato preliminare

Lemma 0.1 *Sia $h(x)$ una funzione continua dotata di derivate continue fino all'ordine n; allora*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad h(x_0) = h'(x_0) = h''(x_0) = \ldots = h^{(n)}(x_0) = 0$$

Dimostrazione Iniziamo col dimostrare la freccia "$\Leftarrow$". Proviamo cioè che se la funzione e le sue derivate fino all'ordine n sono nulle, allora $h(x)$ è infinitesima di ordine superiore a n per $x \to x_0$.
Numeratore e denominatore nei rapporti

$$\frac{h(x)}{(x - x_0)^n}\,, \qquad \frac{h^{(h)}(x)}{\mathrm{D}^h (x - x_0)^n} \quad (h = 1, 2, \ldots (n - 2))$$

verificano le ipotesi del teorema di De l'Hôpital (teorema **??**); per $h = n - 1$ il rapporto diventa

$$\frac{h^{(n-1)}(x)}{\mathrm{D}^{n-1}(x - x_0)^n} = \frac{h^{(n-1)}(x) - h^{(n-1)}(x_0)}{n!\,(x - x_0)}$$

e tende a $h^{(n)}(x_0) = 0$.
Il teorema **??** ci assicura quindi che

$$0 = h^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{h^{(h)}(x)}{\mathrm{D}^h (x - x_0)^n} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{h(x - x_0)^n}$$

e questo conclude la dimostrazione della parte "$\Leftarrow$".
Passiamo ora alla freccia "$\Rightarrow$": dal fatto che $h(x)$ è infinitesima di ordine superiore a n rispetto a x_0 dimostriamo per induzione (finita) che $f(x)$ e tutte le sue derivate fino all'ordine n si annullano in x_0.

Da $h(x) = \mathrm{o}((x-x_0)^n)$ segue anche che $h(x) = \mathrm{o}((x-x_0)^k)$ per ogni k fra 0 e n perché

$$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{(x-x_0)^k} \;=\; \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{(x-x_0)^n}\,(x-x_0)^{n-k} \;=\; 0$$

e quindi, in particolare, abbiamo che $h(x_0) = 0$.
Facciamo vedere che se per un intero $0 \le k < n$ risulta $h(x_0) = h'(x_0) = \ldots = h^{(k)}(x_0) = 0$, allora è anche $h^{(k+1)}(x_0) = 0$ (passo induttivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$)
Usando ancora il teorema dell'Hôpital otteniamo che

$$\frac{h^{(k)}(x_0)}{k!} = \lim_{x\to x_0} \frac{h^{(k-1)}(x)}{k!(x-x_0)} = \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{h(x-x_0)^k} = 0\;.$$

Questo chiude la dimostrazione del passo induttivo e di tutto il lemma. ∎

Torniamo al problema iniziale di determinare un polinomio $P(x-x_0) = \sum_{h=0}^{n} a_h\,(x-x_0)^h$ per cui $f(x) - P(x-x_0) = \mathrm{o}((x-x_0)^n)$; in base al lemma 0.1 è necessario e sufficiente che per ogni $0 \le k \le n$ sia

$$\big[D^k(f(x) - P(x-x_0)\big]_{x=x_0} = 0$$

e cioè

$$f^{(k)}(x_0) \;=\; \left[\sum_{h=k}^{n} h(h-1)(h-2)\ldots(h-k+1)\,a_h\,(x-x_0)^h\right]_{x=x_0} \;=\; k!\,a_k\;;$$

per ogni k fra 0 e n deve quindi essere $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$; con questa scelta (univocamente determinata) dei coefficienti, la differenza $f(x) - P(x-x_0)$ ha derivate fino all'ordine n che si annullano in x_0 e quindi, sempre per il lemma 0.1, è infinitesima di ordine superiore a n. Possiamo quindi scrivere la formula di Taylor con resto in forma di Peano:

$$f(x) \;=\; \sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}\,(x-x_0)^h \;+\; \mathrm{o}((x-x_0)^n)\;.$$

Formula di Taylor con resto in forma di Lagrange

Punto di partenza è il teorema di Cauchy, di cui richiamiamo l'enunciato.

Teorema 0.2 (di Cauchy) *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue sull'intervallo chiuso $[a,b]$ e derivabili sull'intervallo aperto (a,b); supponiamo inoltre che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Allora esiste un punto $\xi \in (a,b)$ per cui*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \;=\; \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\;.$$

Siamo ora in condizione di enunciare e dimostrare il teorema.

Teorema 0.3 (Formula di Taylor con resto di Lagrange) *Sia $f(x)$ una funzione definita e derivabile $n+1$ volte in un intorno del punto x_0. Per ogni x nell'intorno esiste un punto $\bar{x}$ fra x e x_0 per cui*

$$f(x) \;=\; T_n(x) \;+\; \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$$

dove

$$T_n(x) = \sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}\,(x-x_0)^h$$

è il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$ nel punto x_0.

Dimostrazione Dobbiamo verificare che per ogni x nell'intorno esiste un punto $\bar{x}$ fra x e x_0 per cui

$$\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}\ .$$

Calcoliamo le derivate di $T_n(x)$:

$$\begin{array}{rclcl}
T_n'(x) & = & \displaystyle\sum_{h=1}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}\,h\,(x-x_0)^{h-1} & = & \displaystyle\sum_{h=1}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{(h-1)!}\,(x-x_0)^{h-1} \\
T_n''(x) & = & \displaystyle\sum_{h=2}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{(h-1)!}\,(h-1)\,(x-x_0)^{h-2} & = & \displaystyle\sum_{h=2}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{(h-2)!}\,(x-x_0)^{h-2} \\
\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
T_n^{(k)}(x) & = & \displaystyle\sum_{h=k}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{(h-k+1)!}\,(h-k+1)\,(x-x_0)^{h-k} & = & \displaystyle\sum_{h=k}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{(h-k)!}\,(x-x_0)^{h-k} \\
\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots
\end{array}$$

da cui $T_n^{(h)}(x_0) = f^{(h)}(x_0)$ per $h = 0, 1, \ldots, n$. Posto $F(x) = f(x) - T_n(x)$ abbiamo che $F^{(h)}(x_0) = 0$ per $h = 0, 1, \ldots, n$ e $F^{(n+1)}(x_0) = f^{(n+1)}(x_0)$.
La funzione $F(x)$ è continua e derivabile sull'intervallo $[x_0, x]$ (oppure su $[x, x_0]$) e vale 0 per $x = x_0$; la funzione $(x-x_0)^{n+1}$ è continua e derivabile e la sua derivata non è mai nulla per $x \neq x_0$.
Possiamo quindi applicare il teorema di Cauchy (teorema 0.2) al rapporto $F(x)/(x-x_0)^{n+1}$ e otteniamo che esiste un punto x_1 fra x_0 e x per cui si ha

$$\frac{F(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{F(x)-F(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} = \frac{F'(x_1)}{(n+1)\,(x_1-x_0)^n}\ .$$

Ma la funzione $F'(x)$ è continua e derivabile in un intorno di x_0 e vale 0 per $x = x_0$; la funzione $(n+1)\,(x-x_0)^n$ è continua e derivabile e la sua derivata non è mai nulla per $x \neq x_0$.
per cui possiamo applicare ancora il teorema di Cauchy al rapporto $F'(x_1)/(x_1-x_0)^{n+1}$ e otteniamo che esiste un punto x_2 fra x_0 e x_1 per cui si ha

$$\frac{F'(x_1)}{(n+1)\,(x_1-x_0)^n} = \frac{F'(x_1)-F'(x_0)}{(n+1)\,(x_1-x_0)^n-(n+1)\,(x_0-x_0)^n} = \frac{F''(x_2)}{(n+1)\,n\,(x_2-x_0)^{n-1}}\ .$$

Il ragionamento si ripete; esisterà un punto x_3 fra x_2 e x_0, un punto x_4 fra x_3 e x_0, un punto x_5 fra x_4 e x_0, ..., un punto x_n fra x_{n-1} e x_0 per cui vale la catena di uguaglianze

$$\begin{aligned}
\frac{F(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{F'(x_1)}{(n+1)\,(x_1-x_0)^n} = \frac{F''(x_2)}{(n+1)\,n\,(x_2-x_0)^{n-1}} = \dots \\
&= \frac{F^{(h)}(x_h)}{(n+1)\,n\,\dots\,(n-h+1)\,(x_h-x_0)^{n-h}} = \dots \\
&= \frac{F^{(n)}(x_n)}{(n+1)\,n\,\dots\,\cdot 2\cdot 1\,(x_n-x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_n)-f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!\,(x_n-x_0)}\,.
\end{aligned}$$

Per l'ultimo rapporto il teorema di Lagrange afferma l'esistenza di un punto $\bar{x}$ fra x_n e x_0 per cui

$$\frac{f^{(n)}(x_n)-f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!\,(x_n-x_0)} = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}$$

il che conclude la dimostrazione. $\blacksquare$