

*Previsione, incertezza e rischio:
le regole matematiche delle
scommesse e della finanza*

Stefano Marmi

<http://homepage.sns.it/marmi/>

<http://alfaobeta.blogspot.com>

Scuola Normale Superiore

70° Corso di Orientamento Universitario

San Miniato , 5 settembre 2010

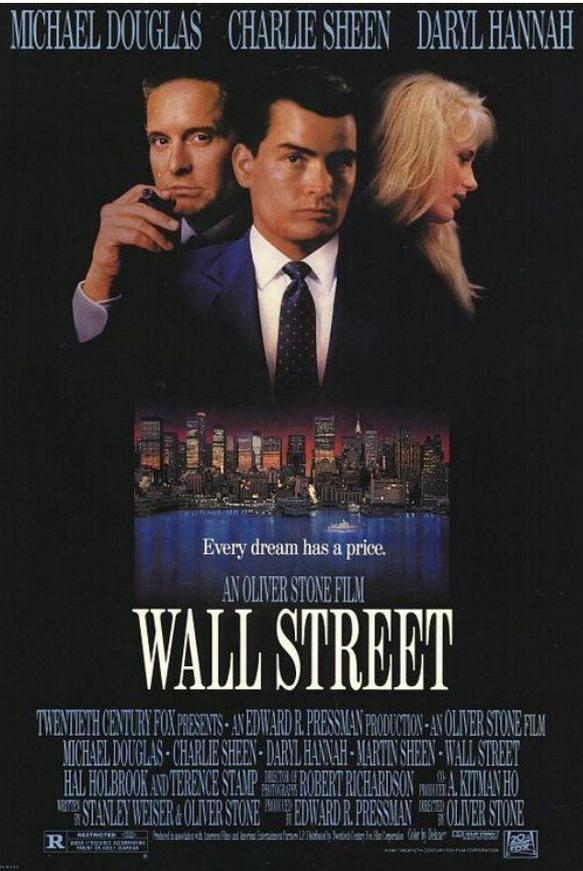
Come agire quando si può fare una scommessa vantaggiosa?

- Supponete di giocare una serie di scommesse in cui si lancia una moneta:
 - testa e croce hanno la stessa probabilità = $\frac{1}{2}$
 - testa = vinco 2 euro per ogni euro scommesso dunque ho 3 euro per ogni euro scommesso
 - croce = perdo il capitale scommesso
- Che frazione del capitale dovrei rischiare ogni volta??

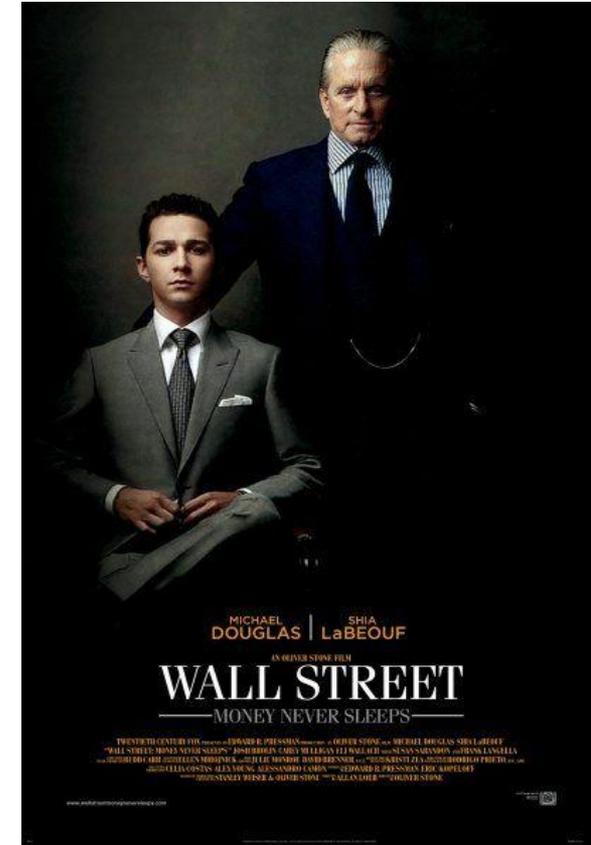
E' un gioco molto vantaggioso ma se scommetto tutto ogni volta finirò sicuramente in bancarotta, se scommetto troppo poco perderò un'occasione di guadagno.

Abbiamo almeno quattro possibili strategie

1. Mi lascio trascinare dall'avidità?



The point is, ladies and gentleman, that greed -- for lack of a better word -- is good. Greed is right. Greed works. Greed clarifies, cuts through, and captures the essence of the evolutionary spirit. Greed, in all of its forms -- greed for life, for money, for love, knowledge -- has marked the upward surge of mankind. And greed -- you mark my words -- will not only save Teldar Paper, but that other malfunctioning corporation called the USA.



Un lunedì davvero speciale

Il 19 ottobre 1987, pochi giorni dopo l'uscita del film Wall Street di Oliver Stone, l'indice Dow Jones ebbe un crollo del 22,6% in una sola seduta. Il crollo del Dow innescò una serie di perdite nei mercati finanziari di tutto il mondo: nel giro di una settimana o poco più di un quarto della capitalizzazione delle borse mondiali era andata in fumo. Dal 1928 ad oggi la deviazione standard della distribuzione dei rendimenti giornalieri del Dow Jones è circa l'uno per cento. Dunque il crollo del 19 ottobre 1987 non avrebbe mai dovuto verificarsi poiché avrebbe avuto, in teoria, una probabilità di verificarsi pari a 1 contro un googol, che è un 1 seguito da 100 zeri! E' la stessa probabilità che avete di fare sempre testa lanciando una moneta per 332 volte di fila oppure di lanciare un dado e ottenere 6 per 129 volte consecutive. Se vi sembra facile pensate che fare un sei al superenalotto è un po' meno difficile che fare sempre testa lanciando una moneta per 30 volte di fila.

E spero di essere davvero molto fortunato?

- Se volete speculare sulle coincidenze e siete superstiziosi:
Wall Street: il denaro non dorme mai (*Wall Street: Money Never Sleeps*) è un film del 2010 diretto da Oliver Stone e interpretato da Michael Douglas e Shia LaBeouf, seguito del film *Wall Street* del 1987. Il film uscirà nelle sale cinematografiche di tutto il mondo il 24 settembre 2010 mentre in Italia verrà distribuito il 22 ottobre dello stesso anno. Compriamo un'opzione put *deep out of the money* con scadenza 31 ottobre 2010?

Gordon Gekko: greed is good! Si scommette tutto il capitale disponibile ogni volta. Se inizio con un euro e sono fortunato dopo 10 scommesse posso avere 59049 euro ! **MA la probabilità di farcela è 2^{-10} , una su 1024. Nei rimanenti 1023 casi il capitale finale è zero!**

Con questa strategia massimizzo la media aritmetica del capitale:

- il valore atteso della ricchezza finale è = 57.67 ...ma...
- il valore mediano è = 0 (il valore atteso è completamente determinato da un unico caso favorevole su 1024)

2. Mi affido a un oracolo?



Ma nessun oracolo è perfetto

Lista delle predizioni [\[modifica\]](#)

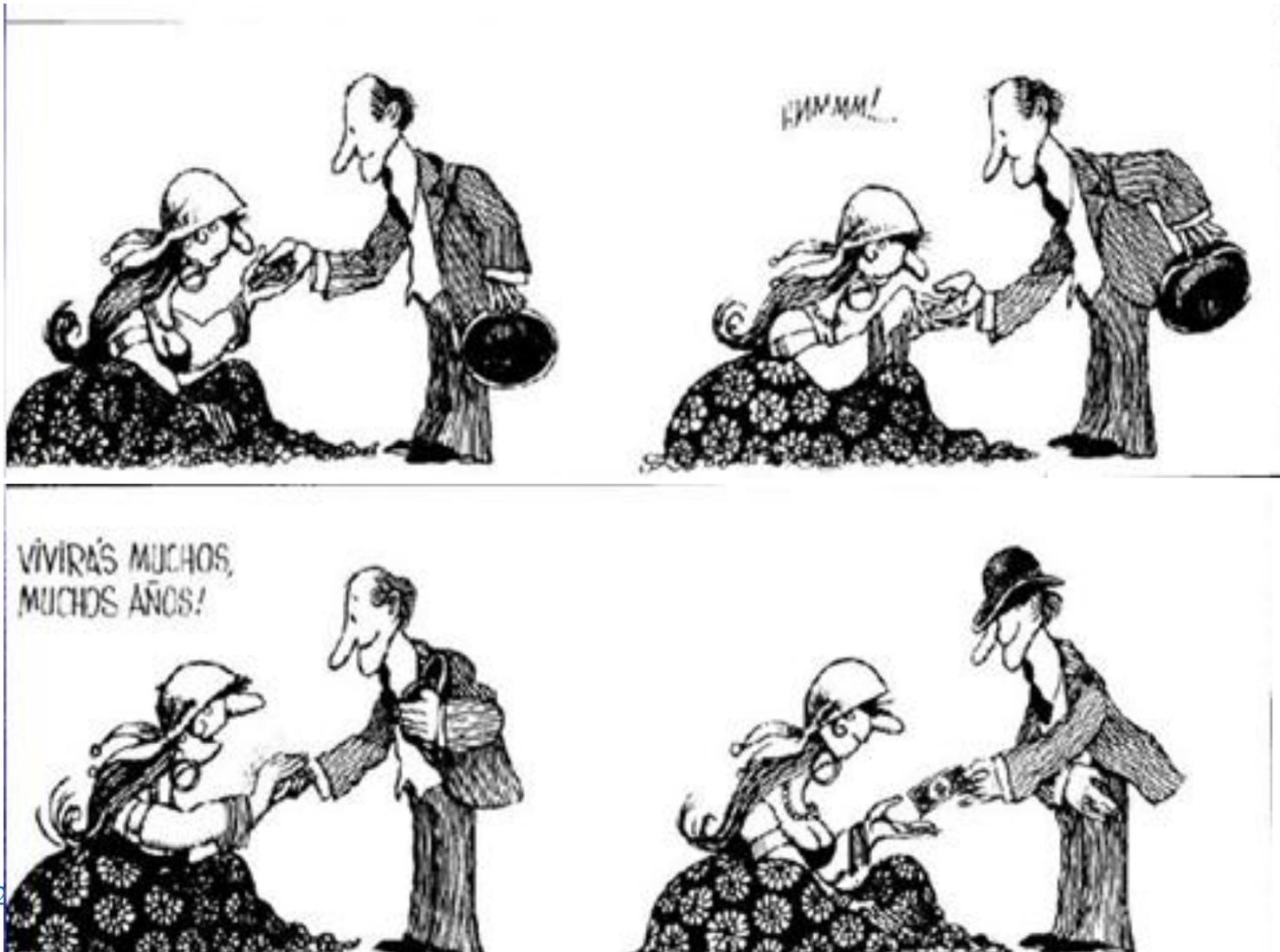
Risultati che hanno interessato la Germania [\[modifica\]](#)

Avversario	Competizione	Fase	Data	Predizione di Paul	Risultato	Esito
 Polonia	Campionato europeo di calcio 2008	a gironi	8 giugno 2008	Germania	2-0	corretto
 Croazia	Campionato europeo di calcio 2008	a gironi	12 giugno 2008	Germania	1-2	errato
 Austria	Campionato europeo di calcio 2008	a gironi	16 giugno 2008	Germania	1-0	corretto
 Portogallo	Campionato europeo di calcio 2008	quarti di finale	19 giugno 2008	Germania	3-2	corretto
 Turchia	Campionato europeo di calcio 2008	semifinale	25 giugno 2008	Germania	3-2	corretto
 Spagna	Campionato europeo di calcio 2008	finale	29 giugno 2008	Germania	0-1	errato
 Australia	Mondiale 2010	a gironi	13 giugno 2010	Germania	4-0	corretto
 Serbia	Mondiale 2010	a gironi	18 giugno 2010	Serbia	0-1	corretto
 Ghana	Mondiale 2010	a gironi	23 giugno 2010	Germania	1-0	corretto
 Inghilterra	Mondiale 2010	ottavi di finale	27 giugno 2010	Germania	4-1	corretto
 Argentina	Mondiale 2010	quarti di finale	3 luglio 2010	Germania	4-0	corretto
 Spagna	Mondiale 2010	semifinale	7 luglio 2010	Spagna	0-1	corretto
 Uruguay	Mondiale 2010	terzo e quarto posto	10 luglio 2010	Germania	3-2	corretto

Risultati che non hanno interessato la Germania [\[modifica\]](#)

Incontro	Competizione	Fase	Data	Predizione di Paul	Risultato	Esito
 Olanda -  Spagna	Mondiale 2010	finale	11 luglio 2010	Spagna	0-1	corretto

Attenzione agli oracoli in conflitto di interessi





¡DIOS MÍO, CÓMO PASA EL TIEMPO!



3. Mi affido a un gestore professionista?



- Warren Buffett, l'oracolo di Omaha
- Il terzo uomo più ricco del mondo (dopo Carlos Slim Helù e Bill Gates)
- Il campionato dei **coin flippers**

Il villaggio dei value investors

- "I would like you to imagine a national coin-flipping contest." Let's imagine all 268 million people in the United States are asked to wager one dollar on their ability to call the flip of a coin. "If they call correctly, they win a dollar from those who called wrong." After each flip the losers drop out, and on the subsequent flip the stakes multiply. Each person has a 50-50 chance of calling each flip and approximately half of the people will lose and drop out each round. After ten flips there would be approximately 260,000 people that had successfully called ten consecutive coin flips. After 20 flips, based purely on chance, there would be approximately 250 people that had called 20 consecutive coin flips - a seemingly miraculous feat.
- The surviving callers would have over one million dollars each at that point. Press coverage and inquiries about their coin calling ability would increase with each successive flip. Several callers might even attempt to profit from their good fortune by writing books on coin calling, setting up 900 phone lines, or by sending mass mailings or spam Email solicitations offering to share their secrets with intrigued members of the public.
- As with winners of the lottery, it's obvious that those remaining would have been blessed with good luck. But what if a large percentage of remaining coin flippers had a common characteristic or trait. What if a disproportionate number had come from one town or had been educated by one "patriarch." Would this signify that more than luck was involved in calling coin flips?
- "I submit to you that there are ways of defining an origin other than geography. In addition to geographic origins, there can be what I call an intellectual origin. I think you will find that a disproportionate number of successful coin-flippers in the investment world came from a very small intellectual village that could be called Graham-and-Doddsville."

Incertezza, rischio e previsione:

© Original Artist
Reproduction rights obtainable from
www.CartoonStock.com



Le considerazioni svolte finora condizionano l'attività economica (banche, VaR, Basilea 2 e 3, TFR, fondi, ...)

L'importanza dell'analisi statistica e della modellizzazione matematica nelle scelte economiche e finanziarie è cresciuta costantemente negli ultimi 30 anni

"How do you want it—the crystal mumbo-jumbo or statistical probability?"

5/09/2010

Previsione, incertezza e rischio: le regole matematiche delle scommesse e della finanza
- Stefano Marmi, S.N.S.

12

Imparare a vivere con il rischio e l'incertezza



Gerd Gigerenzer:
Quando i numeri ingannano (2003)

Rischio = incertezza quantificabile

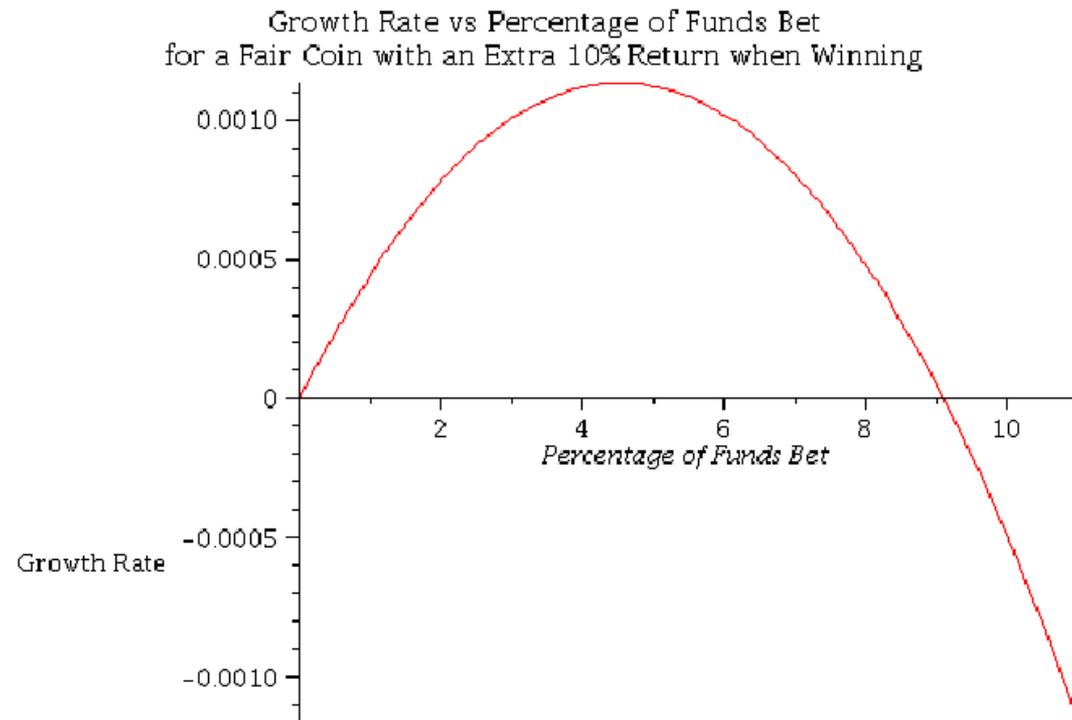
Oltre ai problemi quantitativi che abbiamo visto e che vedremo tra poco ci sono anche importanti problemi cognitivi:

- illusione della certezza
- ignoranza del rischio
- comunicazione scorretta
- pensiero annebbiato: incapacità di elaborare l'informazione

Supponiamo di scommettere \$1 su una moneta *fair*,
ma che il bookmaker restituisca \$2.10 quando
viene testa (perdiamo tutto se viene croce)

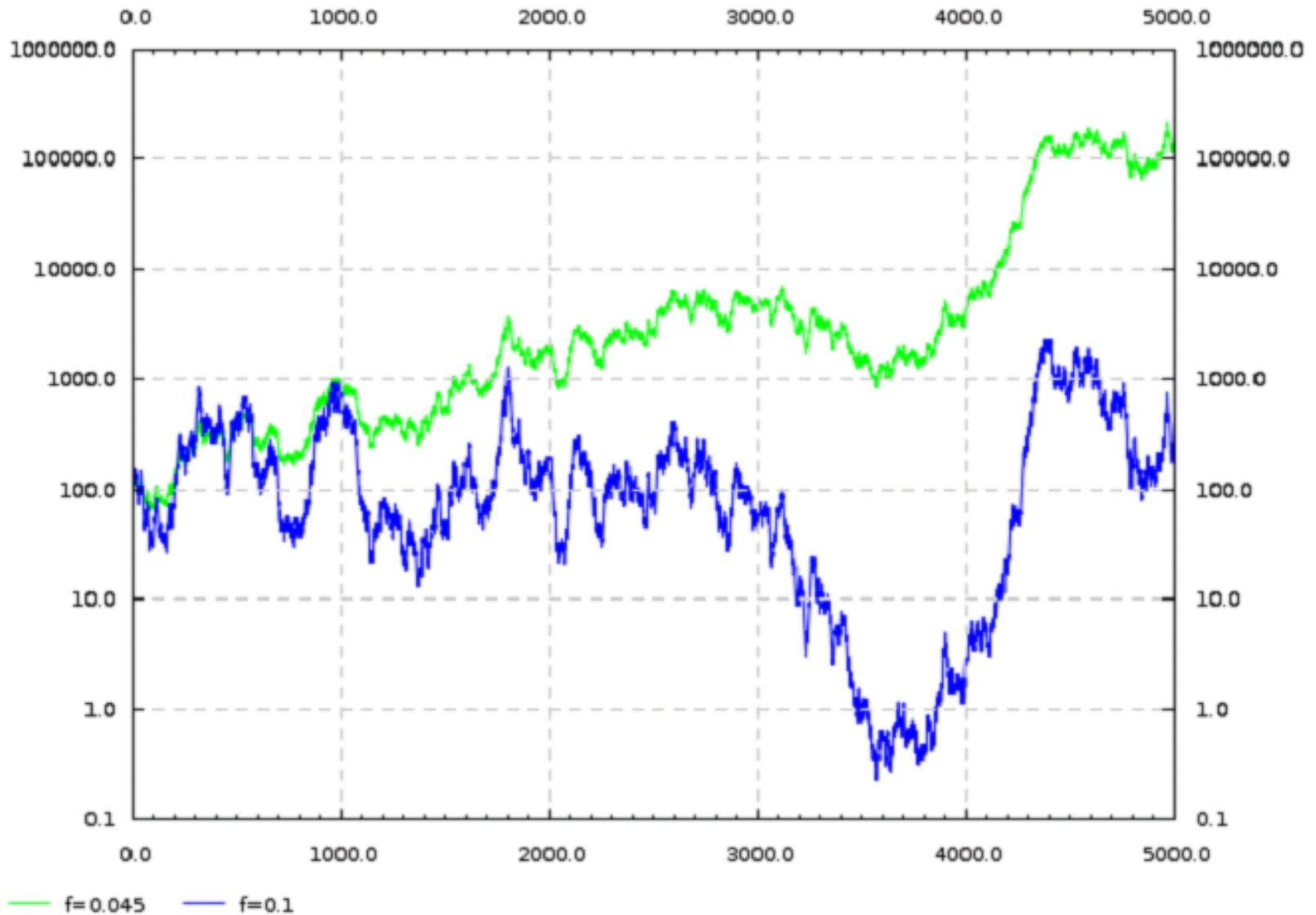
Quale frazione del capitale è giusto rischiare ogni
volta?

Se si scommette troppo si
finisce con perdere il
capitale anche se la
scommessa è favorevole
!!!!!!!!!!!!



<http://www.cse.ust.hk/~skiena/510/lectures/lecture25.pdf>

Simulation of Betting on a Fair Coin with an Extra 10% Return when Winning

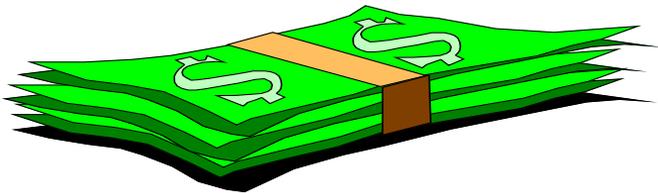
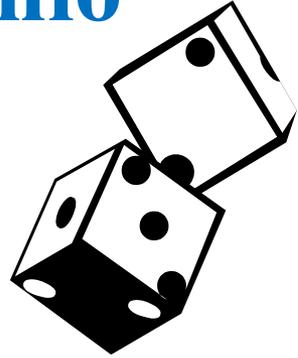


<http://www.cse.ust.hk/~skiena/510/lectures/lecture25.pdf>

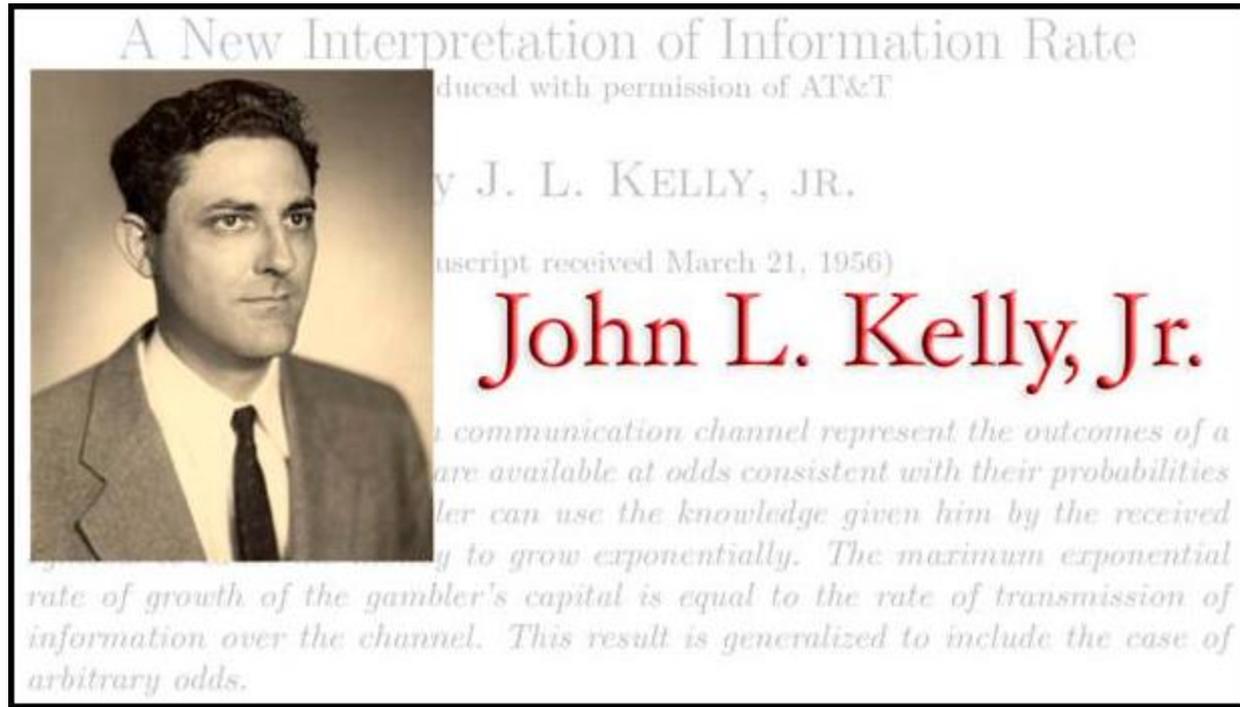
La teoria dell'informazione e il rischio



Claude Elwood Shannon (1916-2001)



John Larry Kelly Jr.
(1923-1965)



4. Il criterio di Kelly: un approccio quantitativo alle scommesse vantaggiose

- C.E. Shannon “A Mathematical Theory of Communications” Bell Tech. J. (1948)
- J. L. Kelly “A New Interpretation of Information Rate” Bell. Tech. J. (1956)
- W. Poundstone “Fortune’s Formula: The Untold Story of the Scientific Betting System That Beat the Casinos and Wall Street” Hill and Wang, New York, 2005, 400 pages

L'articolo di Kelly

« ... If the input symbols to a communication channel represent the outcomes of a chance event on which bets are available at odds consistent with their probabilities (i.e., "fair" odds), a gambler can use the knowledge given him by the received symbols to cause his money to grow exponentially. *The maximum exponential rate of growth of the gambler's capital is equal to the rate of transmission of information over the channel. This result is generalized to include the case of arbitrary odds.*

THE GAMBLER WITH A PRIVATE WIRE

Let us consider a communication channel which is used to transmit the results of a chance situation before those results become common knowledge, so that a gambler may still place bets at the original odds.

Without noise the gambler would bet all his capital each time, but what is the optimal fraction of capital to bet when the channel is noisy? ... »

Il criterio di Kelly

« ... You don't even have to know what a logarithm is to use the so-called **Kelly formula**. You should wager this fraction of your bankroll on a favorable bet: *edge/odds*

The *edge* is how much you expect to win, on the average, assuming you could make this wager over and over with the same probabilities. It is a fraction because the profit is always in proportion to how much you wager. At a racetrack, the edge is diminished by the track take. **When your edge is zero or negative, the Kelly criterion says not to bet.**

Odds means the public or tote-board odds. It measures the profit *if* you win. The odds will be something like 8:1, meaning that a winning wager receives 8 times the amount wagered plus return of the wager itself. ... »

<http://home.williampondstone.net/Kelly/Kelly.html>

Il criterio di Kelly

« ... In the Kelly formula, *odds* is not necessarily a good measure of probability. Odds are set by market forces, by everyone else's beliefs about the chance of winning. These beliefs may be wrong. In fact, they have to be wrong for the Kelly gambler to have an edge. The odds do not factor in the Kelly gambler's inside tips.

Example: The tote board odds for Seabiscuit are 5:1. Odds are a fraction -- 5:1 means 5/1 or 5. The 5 is all you need.

The tips convince you that Seabiscuit actually has a 1 in 3 chance of winning. Then by betting \$100 on Seabiscuit you stand a 1/3 chance of ending up with \$600. On the average, that is worth \$200, a net profit of \$100. The edge is the \$100 profit divided by the \$100 wager, or simply 1.

The Kelly formula, *edge/odds*, is 1/5. This means that you should bet one-fifth of your bankroll on Seabiscuit. ... »

<http://home.williampondstone.net/Kelly/Kelly.html>

Walt Disney

PAPERINO

e l'affare in alto mare





DOOD DOOD



Il criterio di Kelly per una scommessa semplice

Consideriamo una serie di scommesse nelle quali per ogni euro di capitale scommesso (capitale di rischio) se ne guadagnano W in caso di vincita e se ne perdono L in caso di perdita

Indichiamo con f la frazione del capitale disponibile che viene puntata ogni volta. Se la probabilità di vincere è p e quella di perdere è $q=1-p$ il valore atteso del rapporto tra il capitale finale e quello iniziale è

$$G = (1 + fW)^p * (1 - fL)^q$$

Massimizzare la media geometrica delle vincite

G coincide con la media geometrica del capitale nel caso di un numero infinito di scommesse ripetute: infatti se $n=w+l$, w =numero di scommesse vinte, l =numero di scommesse perse

$$G = \lim_{n \rightarrow \infty} ((1 + fW)^{w/n} * (1 - fL)^{l/n})$$
$$= (1 + fW)^p * (1 - fL)^q$$

poichè $w/n \rightarrow p$, $l/n \rightarrow q$

Mi aspetto dunque che un capitale iniziale B diventi dopo n scommesse

$$B_n = G^n * B$$

Il criterio di Kelly

G è massimo scegliendo

$$f = (pW - qL)/WL = p/L - q/W$$

Questo è il criterio di Kelly per questo tipo di scommessa

Se $p=q$ e $L=W$ allora $f=0$ (non scommettere)

Se invece $p=q$ ma $L < W$ allora conviene scommettere! *Se addirittura $L \rightarrow 0$ allora si può avere $f \rightarrow \infty$ dunque conviene indebitarsi illimitatamente e scommettere ...*

...chissà se lo sapevano i *risk manager* di Bear Stearns, Lehman Brothers, American Insurance Group, Freddie Mac, ecc. ecc...?

Kelly come criterio di risk management

- Nel caso più favorevole originario ($W = 2$, $p = 1/2$, $L=1$) il criterio di Kelly prescrive di scommettere ogni volta solo una frazione del capitale disponibile pari a

$$f = .5 - .5 / 2 = .25$$

Assicurando un tasso di crescita del capitale $G = 1.0607$

Così dopo 10 scommesse (supponendo $B = 1$)

- il valore atteso della ricchezza finale è = 3.25
- il valore mediano è = 1.80

Se invece si scommette tutto il capitale disponibile ogni volta ($f = 1$), come farebbe Gordon Gekko, dopo 10 scommesse si ha

- il valore atteso della ricchezza finale è = 57.67 ... **MA**
- il valore mediano è = 0 (la probabilità di farcela è 2^{-10})

Una domanda fondamentale: come mai (a volte) ci sono scommesse vantaggiose?

- Com'è possibile trovare scommesse vantaggiose?
- I bookmakers sono pigri?
- Ci sono modi illegali (informazioni riservate, insider trading, manipolazioni di mercato)...
- ...ma ci sono anche modi legali, che sfruttano le inefficienze dei mercati (arbitraggio statistico)

Cos'è un mercato efficiente (borsa, sala corse, ecc)?

Un mercato è efficiente quando è efficiente nell'elaborazione delle informazioni: i prezzi dei beni (azioni, quote del bookmaker, obbligazioni, materie prime, ecc) osservati in ogni istante di tempo sono il risultato di una valutazione “corretta” di tutta l'informazione disponibile al momento. I prezzi “riflettono pienamente” tutta l'informazione disponibile, sono sempre “fair”, cioè buone indicazioni dei valori in gioco.

Bachelier (1900) scrive che “Les influences qui déterminent les mouvements de la Bourse sont innombrables, des événements passés, actuels ou même escomptables, ne présentant souvent aucun rapport apparent avec ses variations, se répercutent sur son cours”
...”Si le marché, en effet, ne prévoit pas les mouvements, il les considère comme étant plus ou moins probables, et cette probabilité peut s'évaluer mathématiquement.”

Efficienza forte e debole

Un mercato è efficiente rispetto a un “insieme” di informazioni Θ_t se i prezzi non cambierebbero rivelando queste informazioni a tutti gli agenti \rightarrow non è possibile fare profitti utilizzando Θ_t per il trading

La **forma debole** dell'ipotesi dei mercati efficienti richiede che i prezzi rispecchino pienamente l'informazione implicita nella successione dei prezzi passati. La forma **semi-forte** asserisce che i prezzi rispecchiano tutta l'informazione pubblicamente disponibile mentre nella **forma forte** i prezzi riflettono anche l'informazione non pubblicamente disponibile ma conosciuta da almeno un agente.



“However, we might define an efficient market as one in which price is within a factor of 2 of value, i.e. the price is more than half of value and less than twice value. The factor of 2 is arbitrary, of course. Intuitively, though, it seems reasonable to me, in the light of sources of uncertainty about value and the strength of the forces tending to cause price to return to value. By this definition, I think almost all markets are efficient almost all of the time. ‘Almost all’ means at least 90% “

F. Black, Noise, Journal of Finance (1986) p. 533.

Fischer Sheffey Black ([January 11, 1938](#) – [August 30, 1995](#)) was an [American economist](#), best known as one of the authors of the famous [Black-Scholes](#) equation.

Noise

FISCHER BLACK*

ABSTRACT

The effects of noise on the world, and on our views of the world, are profound. Noise in the sense of a large number of small events is often a causal factor much more powerful than a small number of large events can be. Noise makes trading in financial markets possible, and thus allows us to observe prices for financial assets. Noise causes markets to be somewhat inefficient, but often prevents us from taking advantage of inefficiencies. Noise in the form of uncertainty about future tastes and technology by sector causes business cycles, and makes them highly resistant to improvement through government intervention. Noise in the form of expectations that need not follow rational rules causes inflation to be what it is, at least in the absence of a gold standard or fixed exchange rates. Noise in the form of uncertainty about what relative prices would be with other exchange rates makes us think incorrectly that changes in exchange rates or inflation rates cause changes in trade or investment flows or economic activity. Most generally, noise makes it very difficult to test either practical or academic theories about the way that financial or economic markets work. We are forced to act largely in the dark.

Shannon sfrutta Bachelier con la benedizione di Black

Claude Shannon ebbe l'idea di utilizzare il criterio di Kelly per guadagnare da una variazione aleatoria dei prezzi delle azioni

Supponiamo che il valore di un'azione segua un moto Browniano “geometrico”: alla fine di ogni giorno

- Se “vinciamo” $W = 1$ cioè il prezzo raddoppia
- Se “perdiamo” $L = \frac{1}{2}$ cioè l'azione dimezza il suo valore

Secondo Black questo tipo di oscillazioni è compatibile con un mercato normalmente efficiente.

Shannon e il cassetista

Supponiamo $p = \frac{1}{2}$, $W = 1$, $L = 0.5$. Allora $f = p/L - (1-p)/W = 1 - 0.5 = 0.5$ e $G = 1.0607$

Iniziamo con $B = 100$. Seguiamo il consiglio di Shannon e:

- scommessa 1: puntiamo 50 e perdiamo (25). B ora vale 75
- scommessa 2: puntiamo $\frac{1}{2}$ del nuovo capitale B cioè 37.50. Vinciamo. B diventa $37.50 + 2 * 37.50 = 112.50$

Se invece seguiamo una strategia da “cassetista” (buy and hold) puntando costantemente l'intero capitale a disposizione

- dopo la scommessa 1, B sarebbe uguale a 50
- dopo la scommessa 2, B sarebbe 100

Shannon e i mercati oscillanti

Se il primo giorno l'azione raddoppia e il secondo l'azione si dimezza, un investitore “cassettista” che semplicemente è rimasto pienamente investito tutto il tempo non avrebbe nè guadagnato nè perso

Shannon invece guadagna: dopo due giorni il suo capitale iniziale di 100 è diventato 112.50

Anche nel caso di un mercato “range bound” nel quale le quotazioni semplicemente oscillano intorno a un valore, seguendo un moto browniano geometrico senza drift, in n giorni il guadagno atteso seguendo la strategia di Shannon è $(1.0607)^n$

GRAZIE!