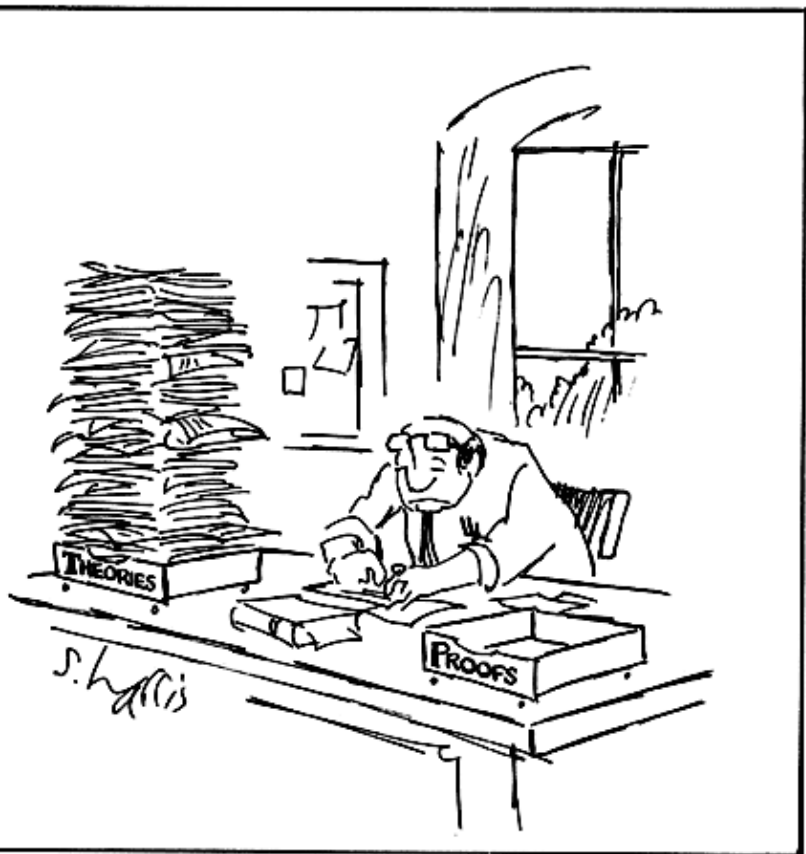


***Dal mediocristan
all'extremistan, da Gauss a
Mandelbrot:
la finanza vista dai matematici***

S. Marmi - Scuola Normale
Superiore

**56° Corso di Orientamento Universitario . Cortona – 4 luglio
2008**

La matematica



- I matematici hanno **certezze assolute**.
- Un **sistema chiuso**: i principi fondamentali sono enunciati una volta per tutte, includendo persino le regole formali del ragionamento logico-deduttivo.
- La fonte della verità in matematica è nella **coerenza logica**, nelle scienze naturali e nelle scienze sociali è nell'**esperienza**.

Una logica impeccabile



Tutti gli oggetti matematici devono avere **definizioni precise**. Una dimostrazione dovrebbe poter essere trasformata in un codice binario verificabile su un calcolatore.

Oltre la logica: la matematica e la legge di Franklin

- “nulla è certo, a parte la morte e le tasse”
- L’economia e il diritto sono da sempre attratte dalle certezze matematiche e dall’approccio logico-deduttivo
- Una vera rivoluzione può venire dall’uso della matematica dell’incertezza. La finanza è diventata “quantitativa” e oggi il suo peso è circa 13 volte superiore al peso dell’economia “reale”

L'ipotesi dei mercati efficienti

- Formulazione DEBOLE: i prezzi delle azioni riflettono in ogni istante l'informazione disponibile dalle serie storiche. L'analisi tecnica non ha valore predittivo.
- Formulazione SEMI-FORTE: i prezzi sono determinati da tutta l'informazione pubblicamente disponibile. I modelli macroeconomici e l'analisi fondamentale non hanno valore predittivo
- Formulazione FORTE: i prezzi delle azioni riflettono in ogni istante tutta la l'informazione disponibile, sia pubblicamente che privatamente. Neppure gli *insiders* hanno un vantaggio.

I prezzi e la loro evoluzione temporale

- È bene sottolineare che l'IME non richiede che il prezzo di mercato sia uguale al valore in ogni istante: semplicemente gli errori di valutazione del mercato non obbediscono ad alcuna logica, sono completamente casuali, non correlati con altri indicatori (tecnici o fondamentali) e in ogni istante c'è la stessa probabilità che un titolo sia sottovalutato o sopravvalutato dal mercato.
- Burton Malkiel "A Random Walk Down Wall Street" (Norton, 9th Edition, 2007), Dimson e Mussavian "A brief history of market efficiency", *European Financial Management* vol. 4, n. 1 (1998).

1900: Louis Bachelier e la teoria della speculazione



THÉORIE DE LA SPÉCULATION,

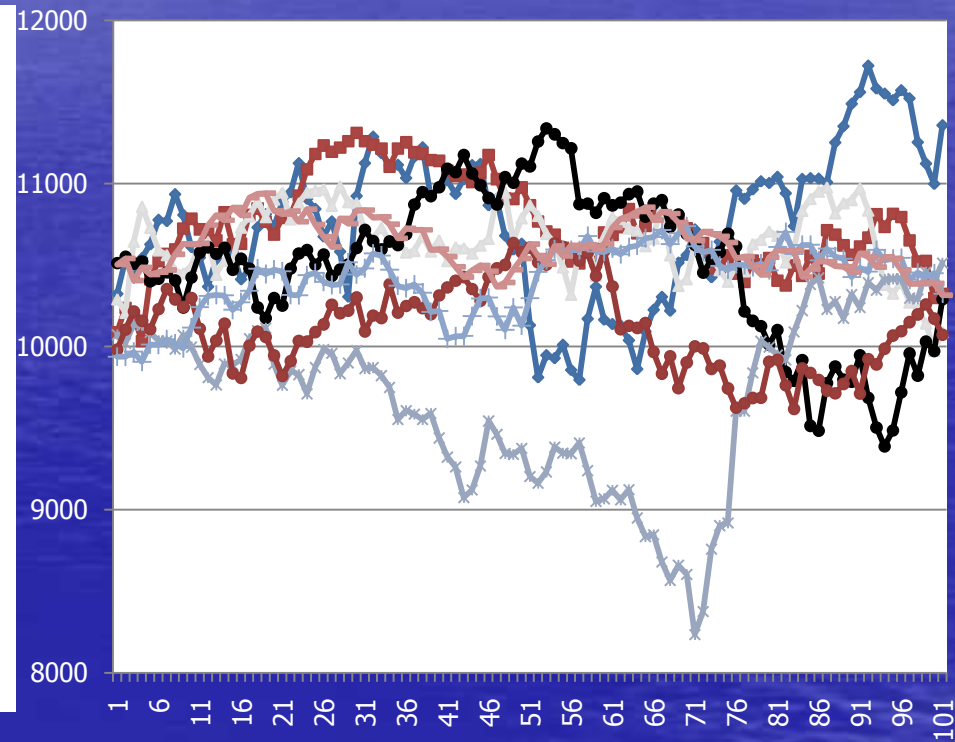
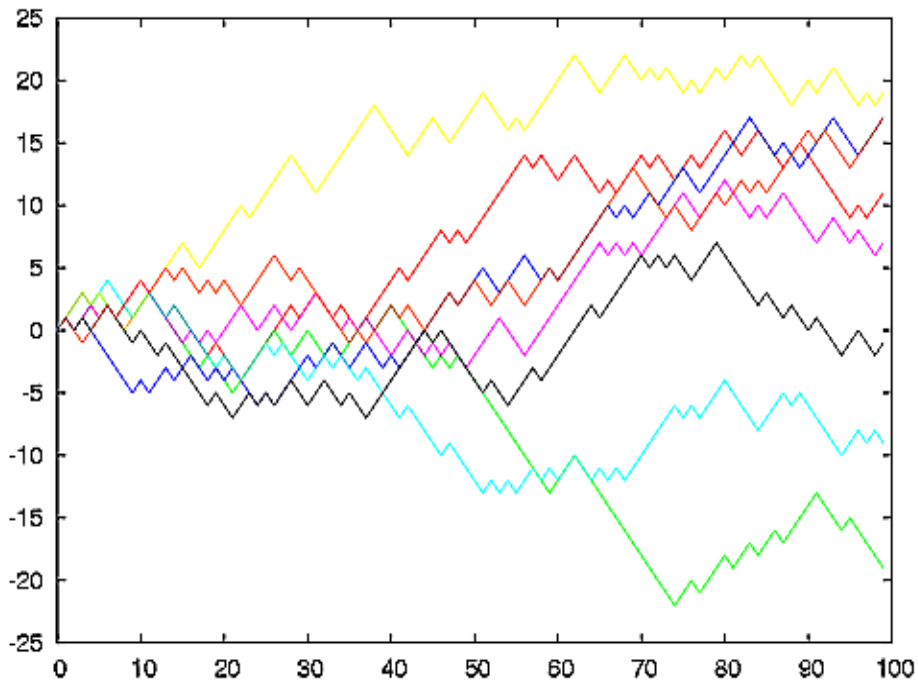
PAR M. L. BACHELIER.

INTRODUCTION.

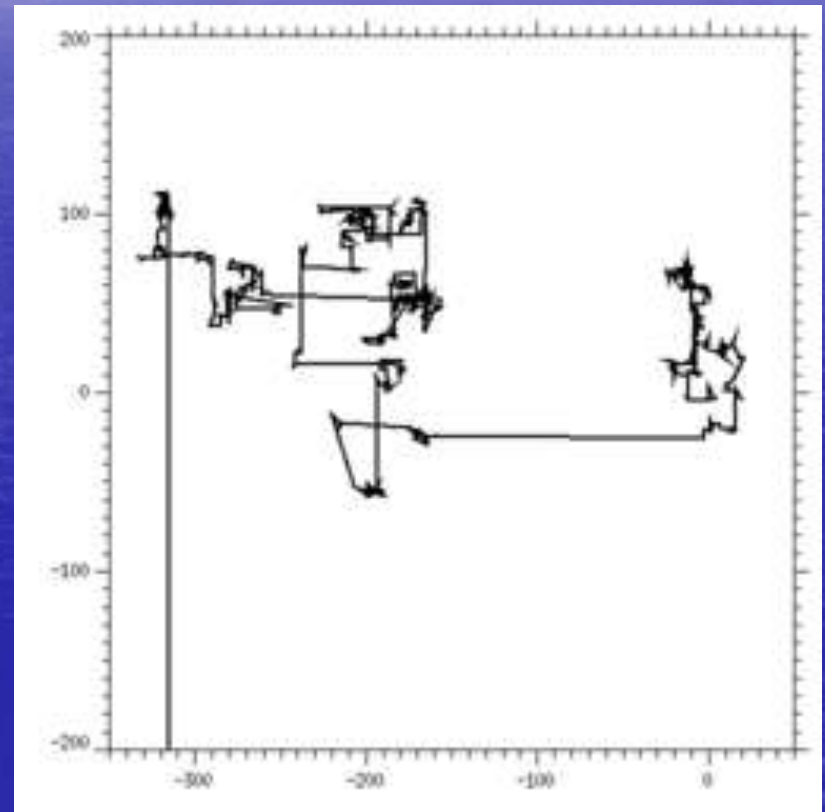
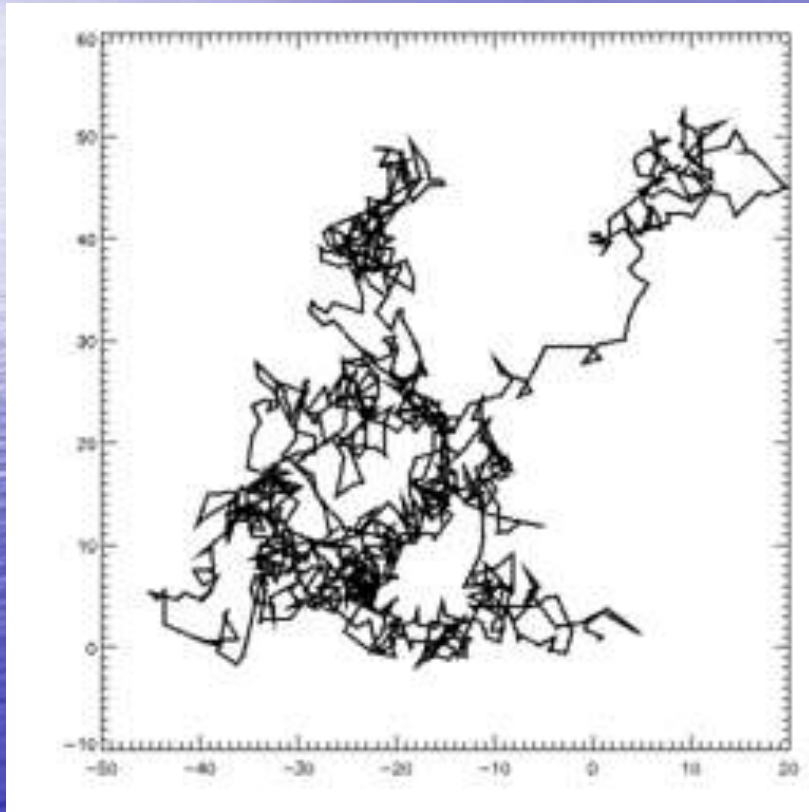
Les influences qui déterminent les mouvements de la Bourse sont innombrables, des événements passés, actuels ou même escomptables, ne présentant souvent aucun rapport apparent avec ses variations, se répercutent sur son cours.

A côté des causes en quelque sorte naturelles des variations, interviennent aussi des causes factices : la Bourse agit sur elle-même et le mouvement actuel est fonction, non seulement des mouvements antérieurs, mais aussi de la position de place.

Una passeggiata aleatoria?



Come il polline o come un terremoto??



Una passeggiata aleatoria?

- In un famosissimo articolo Paul Samuelson ("Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly", *Industrial Management Review*, 6:2, 41-49 (1965)) diede una dimostrazione matematica di questo fatto. Tutti gli argomenti rigorosi devono fondarsi su assiomi e definizioni e su impiegare una logica impeccabile, che certamente approssima ma non incarna l'esperienza quotidiana dei mercati. Scrive lo stesso Samuelson nelle conclusioni dell'articolo: "Non si dovrebbero dedurre troppe conseguenze dal teorema che ho appena dimostrato. In particolare non ne segue che i mercati competitivi reali funzionino bene."

Il modello di Black-Scholes

- L'evoluzione temporale del (logaritmo del) prezzo P di un titolo azionario segue l'equazione stocastica
 - $dP/P = \mu dt + \sigma dz$
- dz è un *processo di Wiener* (distribuzione normale)
- $\mu \Delta t$ è il rendimento atteso nell'intervallo di tempo Δt
- $\sigma^2 \Delta t$ è la *varianza*
- σ è quindi una misura dell'imprevedibilità della serie temporale $P(t)$ dei prezzi ed è chiamata *volatilità*

La distribuzione normale



$$\varphi_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

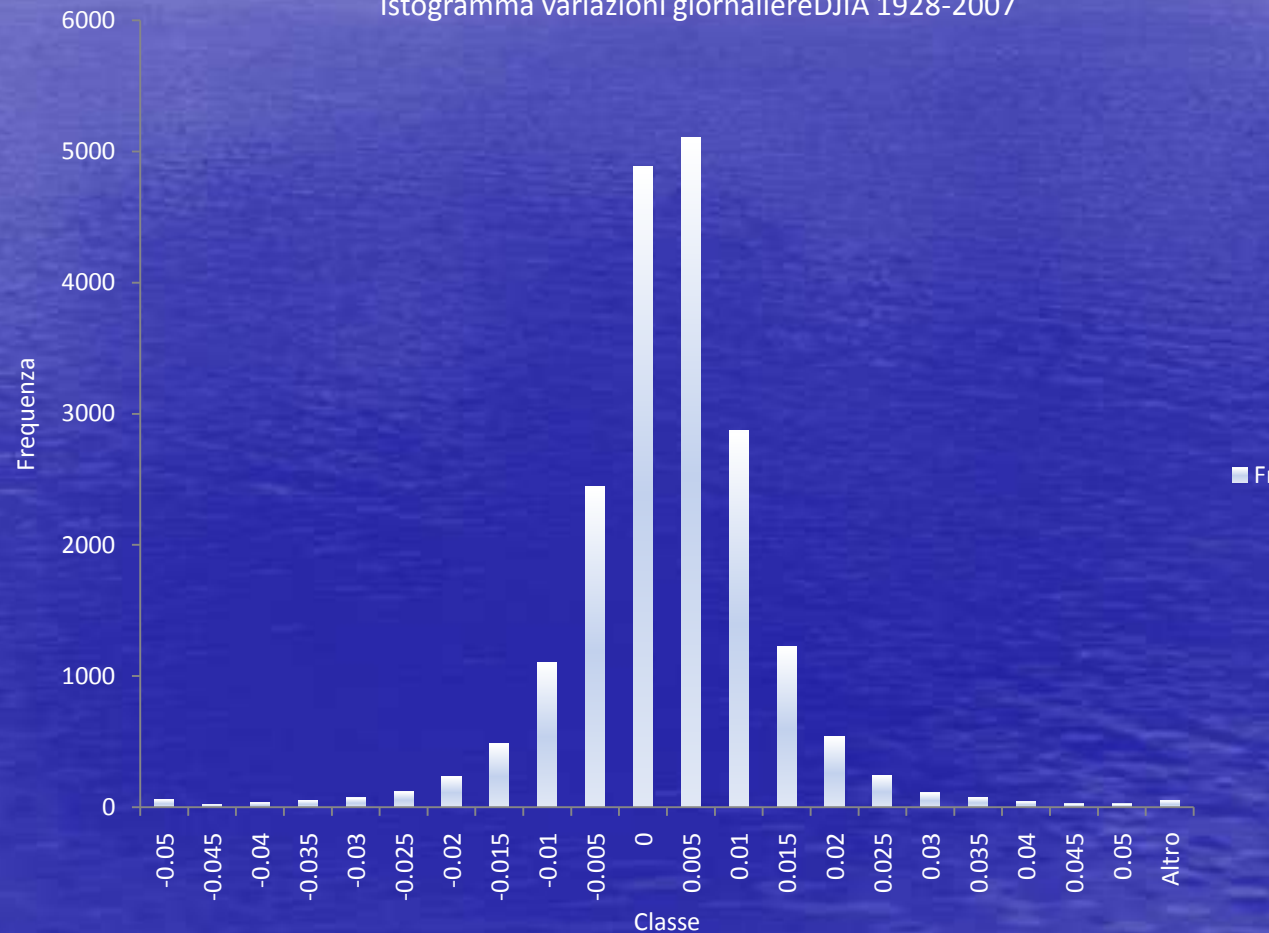
$$\varphi_{0,t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right), \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{0,t}(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_{0,t}(x).$$

La distribuzione dei rendimenti azionari



Media	0.000269377
Errore standard	8.03887E-05
Mediana	0.000410872
Moda	0
Deviazione standard	0.011325963
Varianza campionaria	0.000128277
Curtosi	22.51489948
Asimmetria	-0.219112014
Intervallo	0.379519468
Minimo	-0.226101935
Massimo	0.153417533

Istogramma variazioni giornaliere DJIA 1928-2007

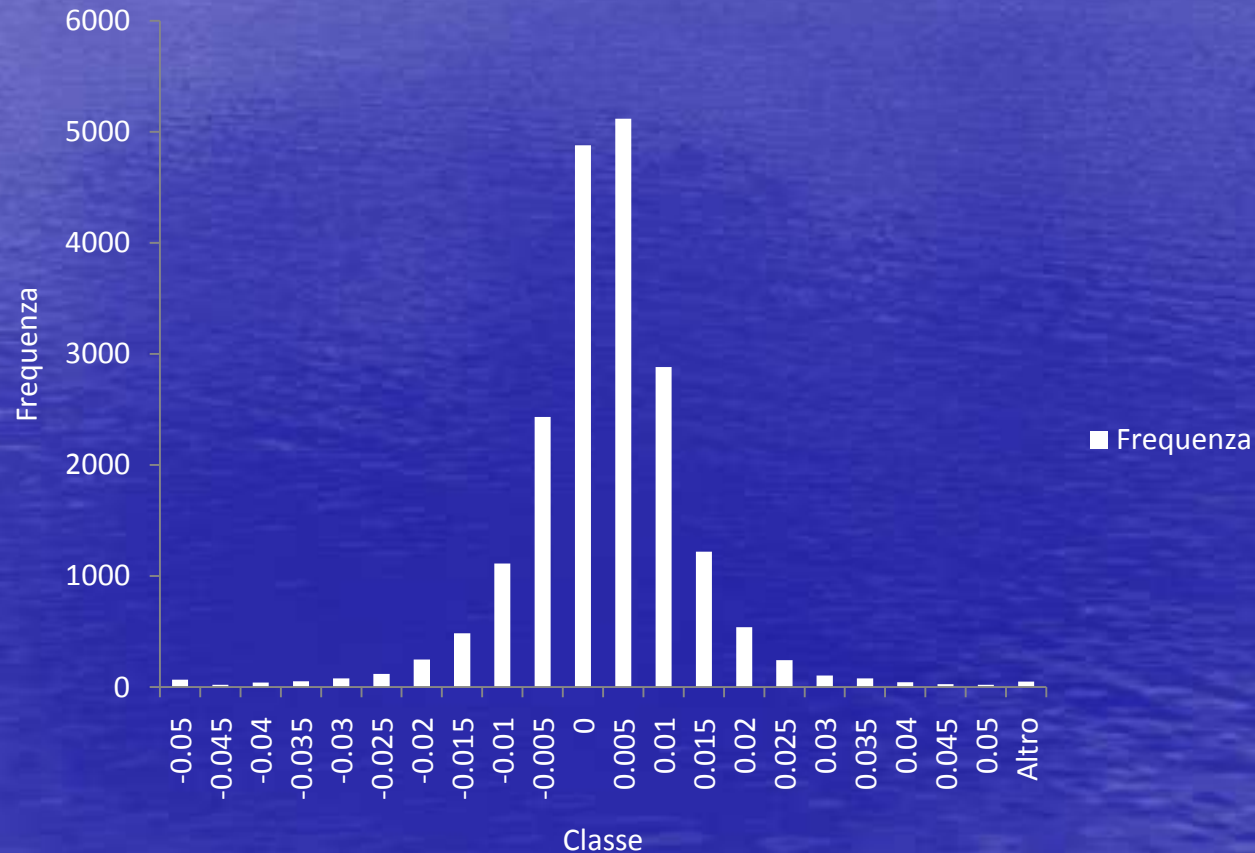


La distribuzione dei logaritmi dei rendimenti azionari



Media	0.000204
Errore standard	8.06E-05
Mediana	0.000411
Moda	0
Deviazione standard	0.011355
Varianza campionaria	0.000129
Curtosi	26.84192
Asimmetria	-0.67021
Intervallo	0.399044
Minimo	-0.25632
Massimo	0.142729
Somma	4.058169
Conteggio	19848

Istogramma variazioni giornaliere DJIA 1928-2007 (logaritmi)



Una distribuzione normale?



Numero di deviazioni standard	Probabilità
≥ 1	1/6.3
≥ 2	1/44
≥ 3	1/740
≥ 4	1/32000
≥ 5	1/3 500 000
≥ 6	1/1 000 000 000
≥ 7	1/780 000 000 000
≥ 8	1/1 600 000 000 000 000
≥ 9	1/8 900 000 000 000 000 000

Nella distribuzione normale le deviazioni dalla "norma" diventano sempre più rare (i matematici direbbero "esponenzialmente") quanto più ce ne allontaniamo. La nozione centrale è quella di "deviazione standard". Nel caso dei rendimenti azionari la deviazione standard coincide con la volatilità del mercato (se ci riferiamo ad un indice) o del titolo azionario analizzato ed è la misura del rischio più comunemente accettata.

Una distribuzione normale?



<i>Classe</i>	<i>Frequenza</i>	Frequenza teorica		
$x < -0.05$	67	0.093902	Media	0.000204
$-0.05 < x < -0.045$	19	0.567355	Errore	
$-0.045 < x < -0.04$	41	3.207188	standard	8.06E-05
$-0.04 < x < 0.035$	51	14.9652	Mediana	0.000411
$-0.035 < x < -0.03$	78	57.64526	Moda	0
$-0.03 < x < -0.025$	117	183.3153	Deviazione	
$-0.025 < x < -0.02$	247	481.2993	standard	0.011355
$-0.02 < x < -0.015$	484	1043.367	Varianza	
$-0.015 < x < -0.01$	1111	1867.6	campionari	
$-0.01 < x < -0.005$	2433	2760.391	a	0.000129
$-0.05 < x < 0$	4879	3369.05	Curtosi	26.84192
$0 < x < 0.005$	5119	3395.468		
$0.005 < x < 0.01$	2881	2825.84	Asimmetria	-0.67021
$0.001 < x < 0.015$	1219	1941.987	Intervallo	0.399044
$0.015 < x < 0.02$	539	1102.011	Minimo	-0.25632
$0.02 < x < 0.025$	241	516.3589	Massimo	0.142729
$0.025 < x < 0.03$	105	199.7674	Somma	4.058169
$0.03 < x < 0.035$	77	63.8089	Conteggio	19848
$0.035 < x < 0.04$	43	16.82651		
$0.04 < x < 0.045$	27	3.662964		
$0.045 < x < 0.05$	20	0.658208		
$x > 0.05$	50	0.110887		

Frequenza teorica e osservata delle grandi variazioni in 15 mercati

Exhibit 4: Outliers – Expected and Observed

This exhibit shows, for the indexes and sample periods in Exhibit 2, the expected (Exp) and observed (Obs) number of daily returns three standard deviations (SD) below and above the arithmetic mean return (AM); the ratio between the number of these observed and expected returns; and the total number of expected (TE) and observed (TO) returns more than three SDs away from the mean. 'Exp' figures are rounded to the nearest integer.

Market	Lower Tail				Upper Tail				TE	TO	Ratio
	AM-3-SD	Exp	Obs	Ratio	AM+3-SD	Exp	Obs	Ratio			
Australia	-2.46%	17	73	4.4	2.52%	17	53	3.2	33	126	3.8
Canada	-2.48%	11	73	6.9	2.55%	11	43	4.1	21	116	5.5
France	-3.11%	13	79	6.2	3.19%	13	61	4.8	25	140	5.5
Germany	-3.51%	16	85	5.3	3.57%	16	76	4.8	32	161	5.1
Hong Kong	-5.53%	12	77	6.2	5.67%	12	80	6.5	25	157	6.4
Italy	-3.82%	12	71	6.0	3.91%	12	48	4.0	24	119	5.0
Japan	-3.12%	19	132	6.8	3.19%	19	112	5.8	39	244	6.3
New Zealand	-2.51%	12	61	4.9	2.56%	12	57	4.6	25	118	4.7
Singapore	-3.12%	14	90	6.4	3.18%	14	86	6.1	28	176	6.3
Spain	-3.22%	11	52	4.8	3.31%	11	61	5.6	22	113	5.2
Switzerland	-2.74%	13	101	7.9	2.79%	13	62	4.8	26	163	6.4
Taiwan	-4.55%	15	103	6.8	4.65%	15	81	5.3	30	184	6.0
Thailand	-4.40%	10	62	6.0	4.48%	10	81	7.8	21	143	6.9
UK	-3.00%	13	69	5.3	3.07%	13	60	4.6	26	129	5.0
USA	-3.35%	28	180	6.4	3.40%	28	173	6.1	56	353	6.3
Average	-3.39%	14	87	6.0	3.47%	14	76	5.2	29	163	5.6

Javier Estrada: "Black Swans and Market Timing: How Not To Generate Alpha "
Electronic copy available at: <http://ssrn.com/abstract=1032962>

THE MANDELBROTIAN

Let us, by comparison, look at the odds of having a millionaire in, say, Europe, assuming that wealth is scalable, i.e., Mandelbrotian. The next table explains the scalable.

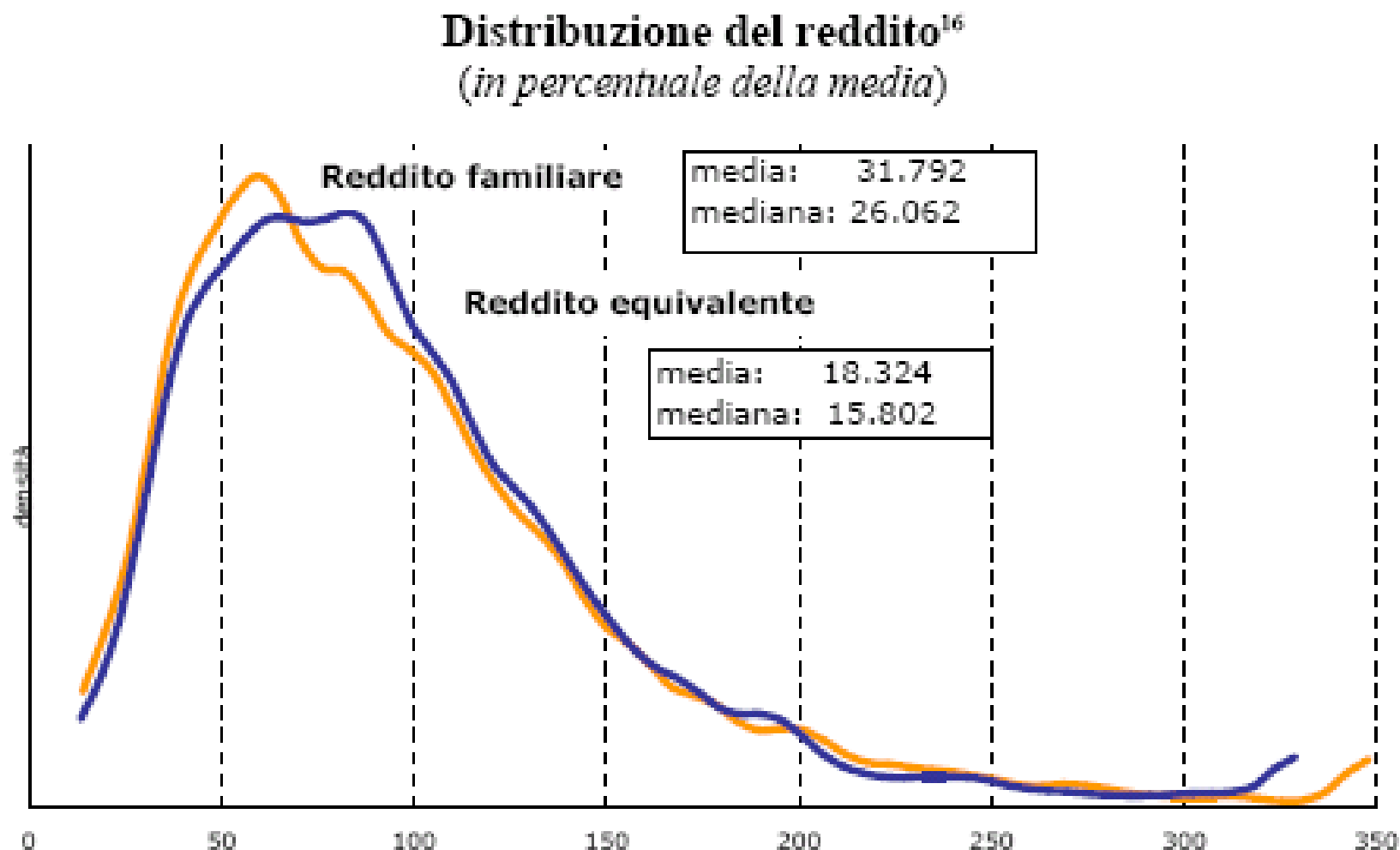
Richer than 1 million: 1 in 62.5
Richer than 2 million: 1 in 250
Richer than 4 million: 1 in 1,000
Richer than 8 million: 1 in 4,000
Richer than 16 million: 1 in 16,000
Richer than 32 million: 1 in 64,000
Richer than 320 million: 1 in 6,400,000

If wealth were Gaussian, we would observe the following divergence away from one million.

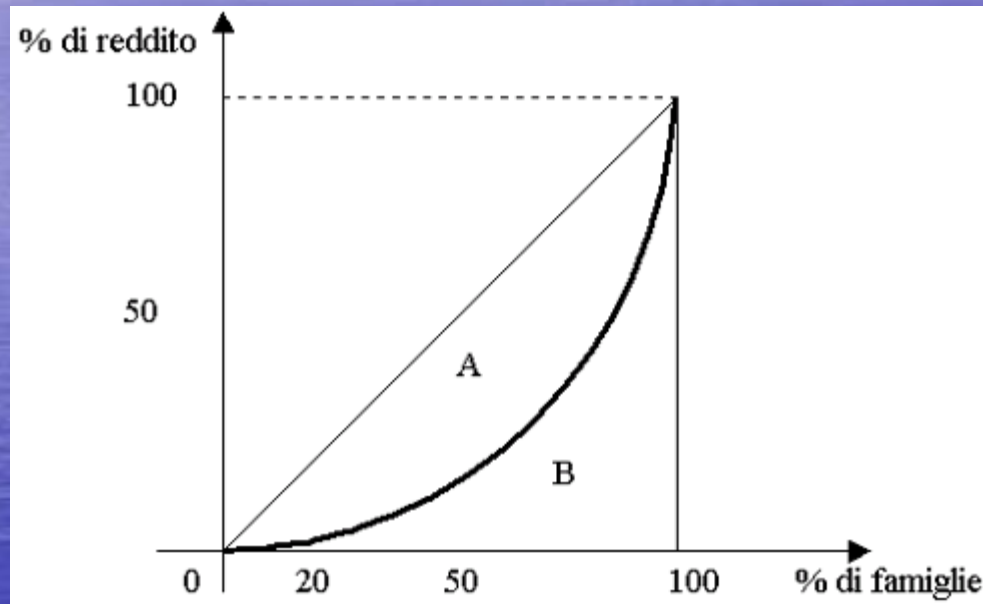
Richer than 1 million: 1 in 63
Richer than 2 million: 1 in 127,000
Richer than 3 million: 1 in 14,000,000,000
Richer than 4 million: 1 in 886,000,000,000,000,000
Richer than 8 million: 1 in
16,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000

Richer than 16 million: 1 in ... *none of my computers is capable of handling the computation.*

La distribuzione del reddito in Italia



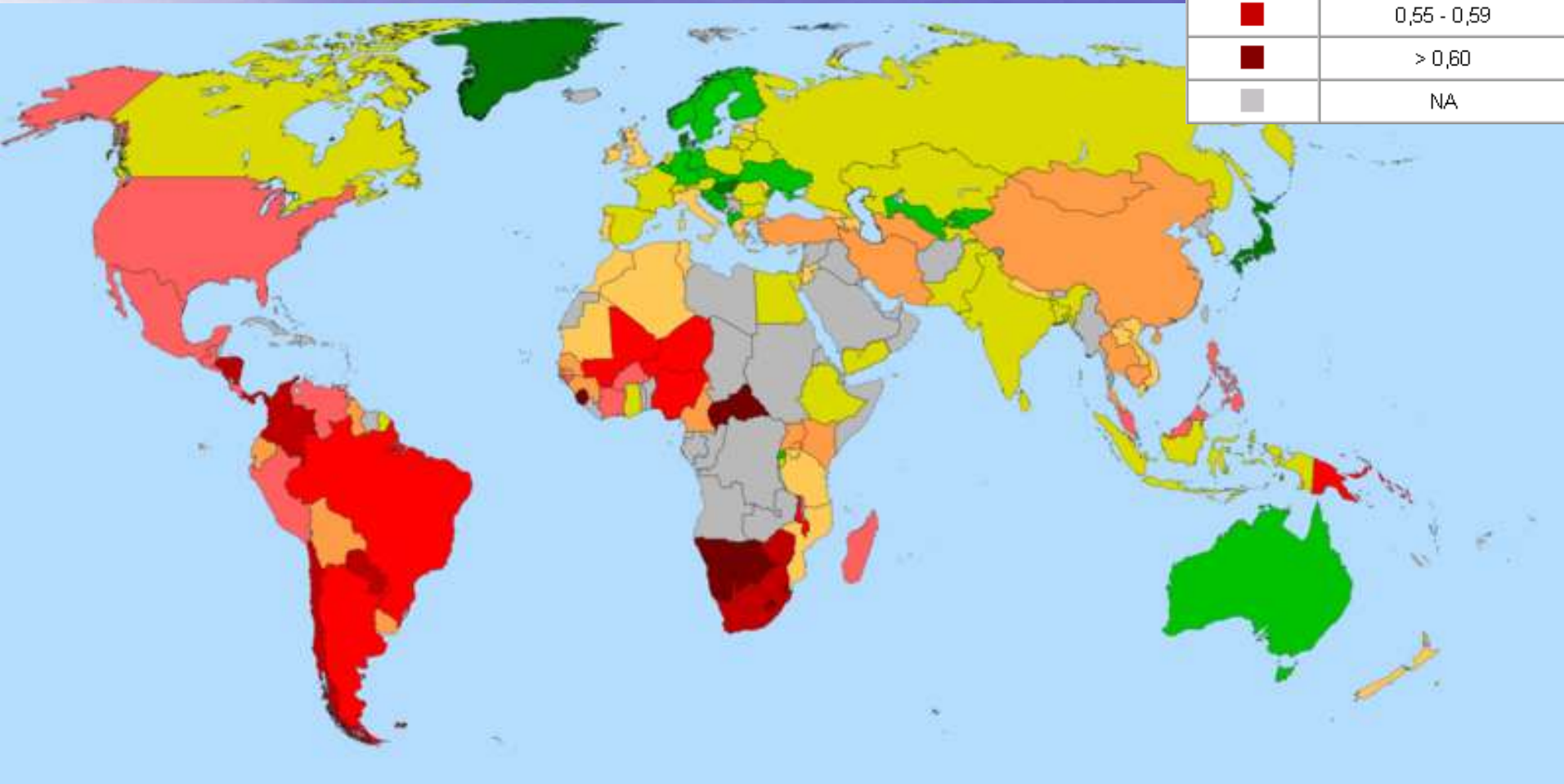
Il coefficiente di Gini



$$G = A/(A+B) = 2A = 1 - 2 \int L(x)dx$$

La diseguaglianza nel mondo

Color	Gini coefficient
	< 0,25
	0,25 - 0,29
	0,30 - 0,34
	0,35 - 0,39
	0,40 - 0,44
	0,45 - 0,49
	0,50 - 0,54
	0,55 - 0,59
	> 0,60
	NA



Un lunedì davvero speciale

Venerdì 19 ottobre 2007 la borsa statunitense ha celebrato con una sostanziosa perdita del 2,6% il ventesimo anniversario del terribile "lunedì nero": il 19 ottobre 1987, l'indice Dow Jones ebbe un crollo del 22,6% in una sola seduta. Il crollo del Dow innescò una serie di perdite nei mercati finanziari di tutto il mondo: nel giro di una settimana o poco più di un quarto della capitalizzazione delle borse mondiali era andata in fumo. Dal 1928 ad oggi la deviazione standard della distribuzione dei rendimenti giornalieri del Dow Jones è circa l'uno per cento. Dunque il crollo del 19 ottobre 1987 non avrebbe mai dovuto verificarsi poiché avrebbe avuto, in teoria, una probabilità di verificarsi pari a 1 contro un googol, che è un 1 seguito da 100 zeri! E' la stessa probabilità che avete di fare sempre testa lanciando una moneta per 332 volte di fila oppure di lanciare un dado e ottenere 6 per 129 volte consecutive. Se vi sembra facile pensate che fare un sei al superenalotto è un po' meno difficile che fare sempre testa lanciando una moneta per 30 volte di fila.

Il cigno nero



N. Taleb The Black Swan, 2007

le eccezioni sono tra noi, pronte a sorprenderci e a cambiare la nostra visione del mondo

“mediocristan” vs. “extremistan”

Mediocristan tipico delle grandezze fisiche (altezza, peso, ecc)

Extremistan tipico dei fenomeni sociali e storici

Probabilità, statistica e il problema dell'induzione

- La probabilità di un evento (se esiste) è quasi sempre inaccessibile
- L'unica base di partenza sono le frequenze con le quali gli eventi si presentano
- Il problema dell'ergodicità: da un'unica serie di osservazioni vorrei poter indurre la probabilità
- Il pollo di Bertrand Russell (tacchino nella versione USA)

Imparare a vivere con il rischio e con l'incertezza



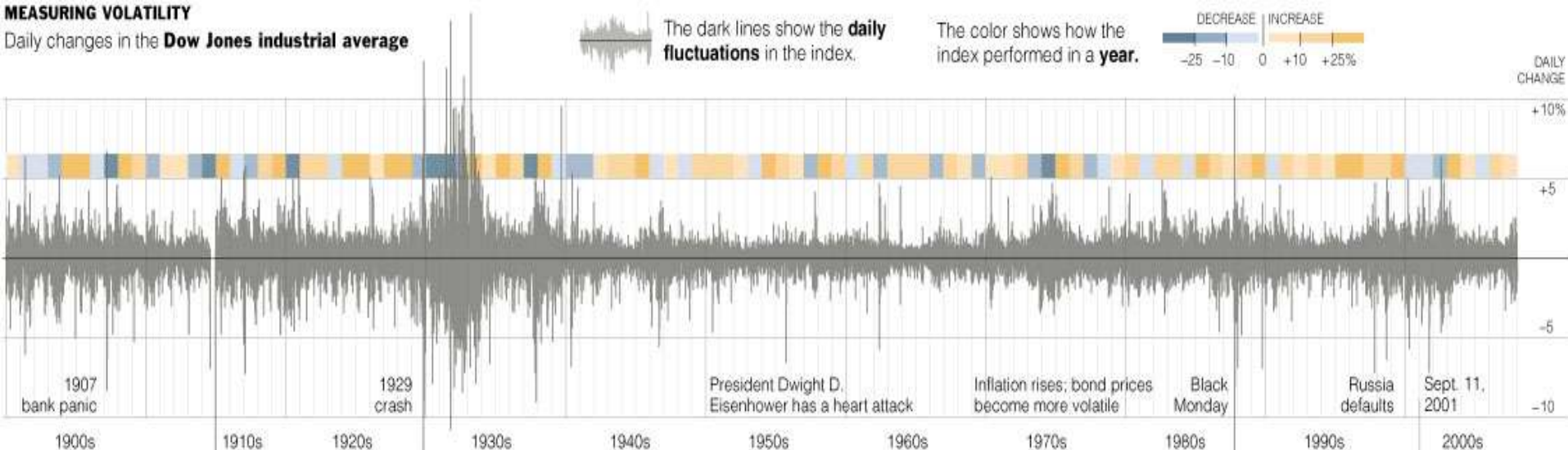
Gerd Gigerenzer
Quando i numeri ingannano
(2003)

rischio = incertezza quantificabile

- illusione della certezza
- ignoranza del rischio
- comunicazione scorretta
- pensiero annebbiato: incapacità di elaborare l'informazione

MEASURING VOLATILITY

Daily changes in the **Dow Jones industrial average**



Overall volatility — and economic uncertainty — peak during the Great Depression

Market reopens after closing during part of World War I

The Pulse of Uncertainty

There is no question that volatility on Wall Street increased last year, and many analysts expect the rockiness to continue in 2008.

But 2007 may have seemed especially tumultuous only because the years before it were remarkably calm.

There was only one day from 2004 to 2006 when the Dow Jones industrial average moved up or down by more than 2 percent. Last year, amid concerns about the subprime mortgage sector and credit markets in general, swings that large occurred 14 times.

Historically, though, 14 times is not exceptional: that total ranks about average over the last 10 years and slightly less than that over the last 20. The Standard & Poor's

volatility index, or VIX, which measures expectations of future volatility based on the prices of options, also ended the year near its 10-year average.

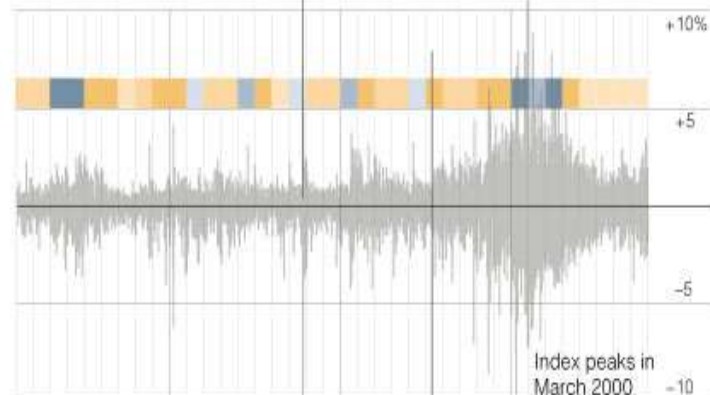
Taken another way, if the Dow's daily changes — the dark lines in the chart — were stacked end to end, they would stretch about 110 percentage points from July to December of last year. That compares with nearly 200 percentage points in the second half of 2002, when the market was shaken by corporate scandals.

In 2007, some of the most volatile stocks in the S.&P. 500 were **E*Trade Financial**, **Countrywide Financial** and **MBIA**, a company that specializes in guaranteeing the financial health of others.

Among stocks that gained value, **MEMC**

Nasdaq composite

In its early years, the Nasdaq was often used as a proxy for the movement of smaller stocks. But it became dominated by technology stocks, and its volatility accelerated in the late 1990s.



Electronic Materials, whose silicon wafers are used by semiconductor and solar cell producers, and **Amazon.com** had the most drastic swings.

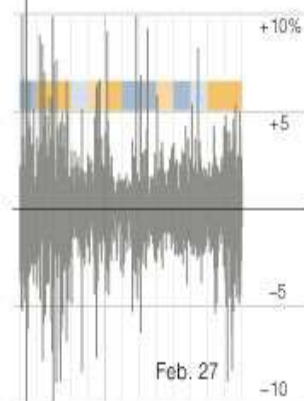
"Internationally and domestically, there are things that are a little unsettling," said G. William Schwert, a finance professor at the University of Rochester. "But in the scope of things, it's not that unusual."

Mr. Schwert has studied why volatility changes over time. His answers include bank panics, wars and recessions.

AMANDA COX

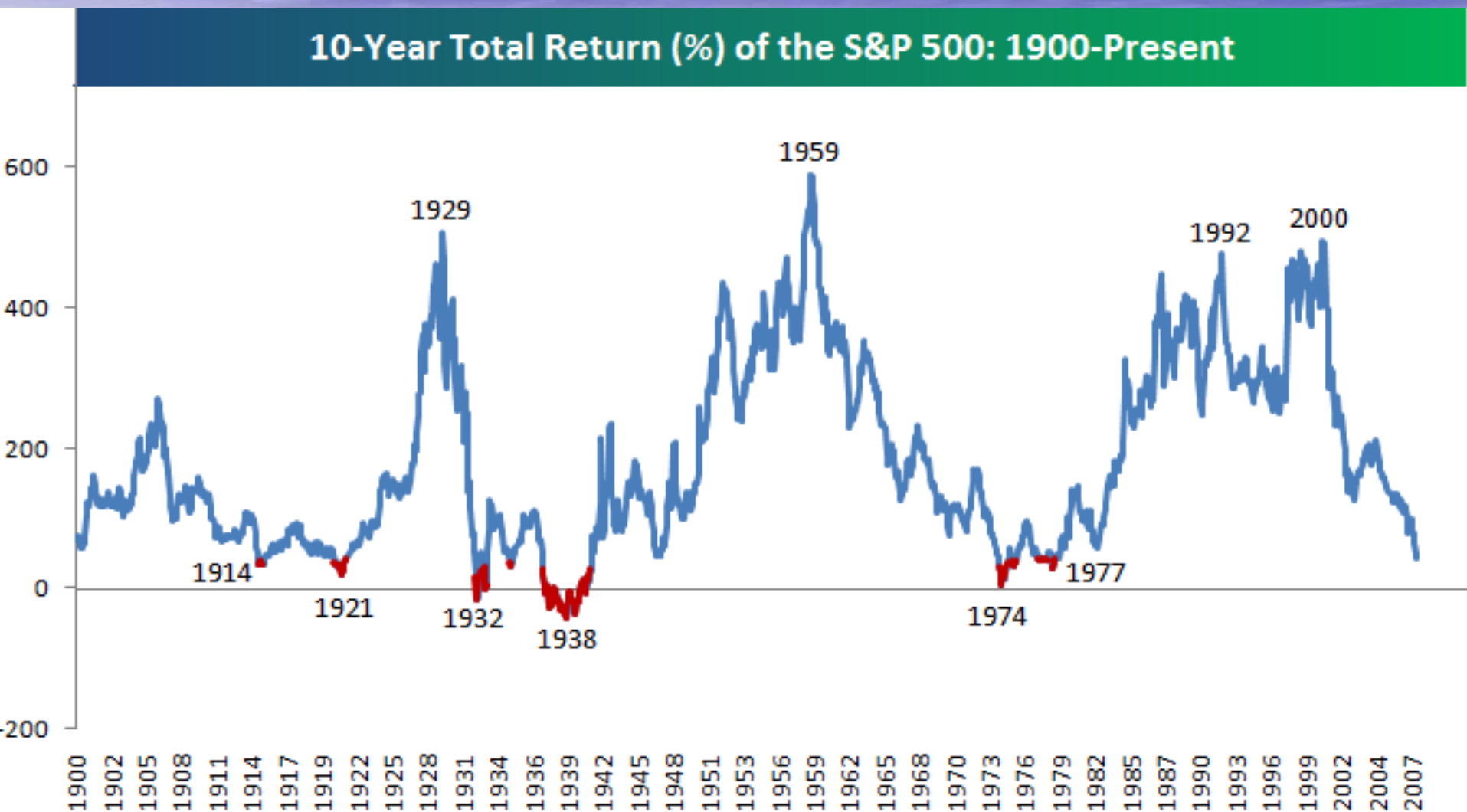
Shanghai composite

Last February, an investing scare in China sent markets tumbling around the world. But it was only a temporary setback — one of several last year. Shares in Shanghai fell by at least 1.5 percent once a week, on average, but they still ended the year up nearly 100 percent.



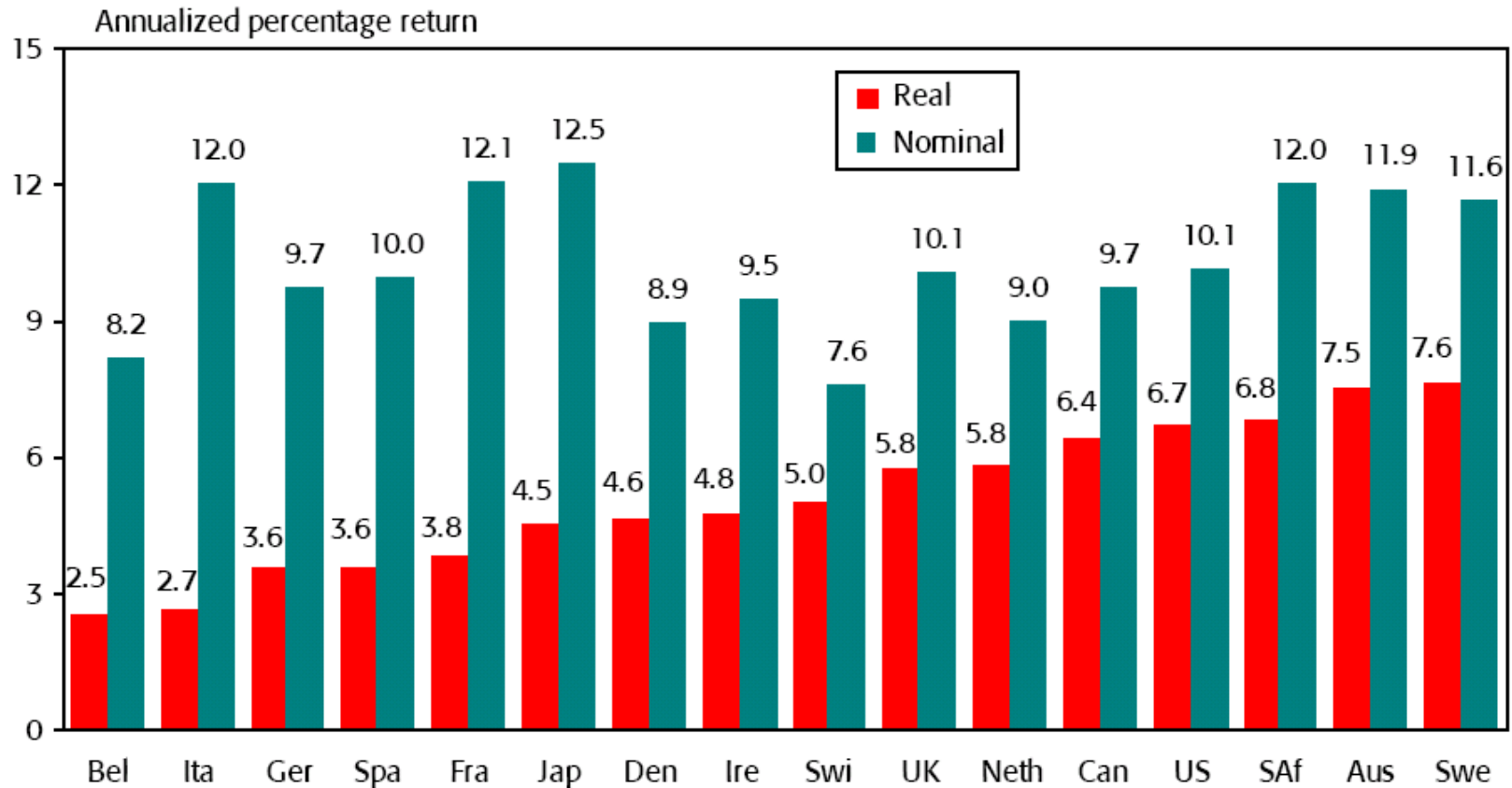
GRAPHIC ESSAY

L'effetto della volatilità sui rendimenti



Il trionfo degli ottimisti

Figure 4-5: Nominal and real equity returns around the world, 1900–2000



Analisi di altri mercati finanziari

Exhibit 2: Data

This exhibit describes the data, including the markets in the sample; the index representing each market; the numbers of years and days in the sample of each market; and the first day in each market (Start). P10, P20, and P100 are the proportions that 10, 20, and 100 days represent relative to the total number of days in the sample of each market. All data through Dec/31/2006.

Market	Index	Years	Days	P10	P20	P100	Start
Australia	ASX All Ordinaries	49	12,317	0.08%	0.16%	0.81%	12/31/1957
Canada	S&P/TSX-300 Composite	31	7,810	0.13%	0.26%	1.28%	12/31/1975
France	SBF-250	38	9,425	0.11%	0.21%	1.06%	12/31/1968
Germany	DAX-30	47	11,786	0.08%	0.17%	0.85%	12/31/1959
Hong Kong	Hang Seng Composite	37	9,129	0.11%	0.22%	1.10%	12/31/1969
Italy	BCI Global Price	34	8,805	0.11%	0.23%	1.14%	12/31/1972
Japan	Nikkei-225	52	14,377	0.07%	0.14%	0.70%	12/31/1954
New Zealand	All Share Capital	37	9,202	0.11%	0.22%	1.09%	12/31/1969
Singapore	SES All Share	41	10,396	0.10%	0.19%	0.96%	12/31/1965
Spain	Madrid SE General	35	8,017	0.12%	0.25%	1.25%	12/30/1971
Switzerland	Switzerland Price	38	9,501	0.11%	0.21%	1.05%	12/27/1968
Taiwan	Taiwan SE Cap Weighted	40	11,272	0.09%	0.18%	0.89%	01/05/1967
Thailand	SET General	31	7,710	0.13%	0.26%	1.30%	12/31/1975
UK	FTSE All Share	38	9,613	0.10%	0.21%	1.04%	12/31/1968
USA	S&P-500 Composite	79	20,918	0.05%	0.10%	0.48%	12/31/1927
Average		42	10,685	0.10%	0.20%	1.00%	

Black Swans and Market Timing: How Not To Generate Alpha

Javier Estrada, preprint SSRN (2007) <http://ssrn.com/abstract=1032962>

Analisi di altri mercati finanziari

Exhibit 3: Summary Statistics

This exhibit shows, for the indexes and sample periods in Exhibit 2, summary statistics for the series of daily returns, including minimum (Min) and maximum (Max) return; arithmetic (AM) and geometric (GM) mean return; standard deviation (SD); coefficients of skewness (Skw) and kurtosis (Krt); and coefficients of standardized skewness (SSkw) and standardized kurtosis (SKrt).

Market	Min	Max	AM	GM	SD	Skw	Krt	SSkw	SKrt
Australia	-24.99%	7.27%	0.03%	0.03%	0.83%	-2.5	74.7	-113.2	1693.5
Canada	-11.13%	9.03%	0.04%	0.03%	0.84%	-0.8	12.5	-27.7	225.0
France	-12.93%	7.68%	0.04%	0.03%	1.05%	-0.4	7.9	-16.3	156.3
Germany	-12.81%	12.75%	0.03%	0.02%	1.18%	-0.1	7.7	-2.5	170.9
Hong Kong	-33.33%	18.82%	0.07%	0.05%	1.87%	-0.6	20.4	-23.7	397.9
Italy	-11.20%	11.56%	0.04%	0.03%	1.29%	-0.2	6.6	-9.3	126.0
Japan	-14.90%	13.24%	0.03%	0.03%	1.05%	-0.2	10.0	-7.5	244.0
New Zealand	-13.45%	9.61%	0.03%	0.02%	0.85%	-0.9	20.4	-35.8	398.9
Singapore	-14.90%	10.76%	0.03%	0.03%	1.05%	-0.3	14.8	-12.0	308.2
Spain	-9.28%	8.36%	0.04%	0.04%	1.09%	-0.1	5.2	-3.5	94.6
Switzerland	-10.82%	6.54%	0.03%	0.02%	0.92%	-0.7	9.9	-27.3	196.5
Taiwan	-7.88%	9.38%	0.05%	0.04%	1.53%	-0.1	2.9	-3.3	62.3
Thailand	-14.84%	12.02%	0.04%	0.03%	1.48%	0.2	9.1	8.6	162.8
UK	-11.23%	9.36%	0.04%	0.03%	1.01%	-0.2	7.7	-6.1	154.2
USA	-20.47%	16.60%	0.03%	0.02%	1.13%	-0.1	18.4	-5.6	543.3
Average	-14.94%	10.87%	0.04%	0.03%	1.14%	-0.5	15.2	-19.0	329.0

Analisi di altri mercati finanziari

Panel C: Mean Annual Compound Returns

(Dividendi esclusi)

Market	TV100	-Best10	-Best20	-Best100	-Worst10	-Worst20	-Worst100
Australia	8.0%	6.7%	5.8%	1.5%	10.0%	11.1%	16.3%
Canada	8.8%	7.1%	5.9%	-0.4%	11.3%	12.7%	21.0%
France	8.7%	7.0%	5.6%	-1.4%	10.9%	12.4%	21.0%
Germany	6.0%	4.3%	2.9%	-3.8%	8.0%	9.4%	17.6%
Hong Kong	14.0%	10.2%	7.6%	-5.8%	19.2%	22.3%	40.4%
Italy	9.2%	6.8%	5.1%	-3.7%	12.1%	14.4%	26.7%
Japan	7.7%	6.2%	5.1%	-0.8%	9.4%	10.5%	17.6%
New Zealand	6.3%	4.8%	3.7%	-2.0%	8.7%	9.9%	16.4%
Singapore	7.5%	5.5%	4.0%	-3.4%	9.9%	11.6%	20.3%
Spain	8.8%	7.0%	5.6%	-2.2%	11.0%	12.6%	21.4%
Switzerland	5.9%	4.4%	3.3%	-2.7%	8.0%	9.5%	17.6%
Taiwan	11.7%	9.9%	8.1%	-2.1%	13.7%	15.6%	29.2%
Thailand	7.0%	3.7%	1.1%	-11.1%	10.3%	13.0%	28.0%
UK	8.0%	6.2%	4.8%	-2.0%	10.1%	11.4%	19.3%
USA	5.7%	4.4%	3.4%	-1.8%	7.2%	8.2%	14.2%
Average	8.2%	6.3%	4.8%	-2.8%	10.7%	12.3%	21.8%

Volatility clustering: effetto dei giorni migliori e peggiori sul rendimento

15-year period 1984-1998 S&P500
CAGR was 17.89 percent—
one of the most bullish periods
in market history.

<http://worldbeta.blogspot.com>

# Of Trading Days Missed	Best	Worst	Both
10 days	14.24%	24.17%	20.31%
20 days	11.99%	27.04%	20.68%
30 days	10.01%	29.45%	20.80%
40 days	8.23%	31.66%	20.87%

Incertezza, rischio e previsione:

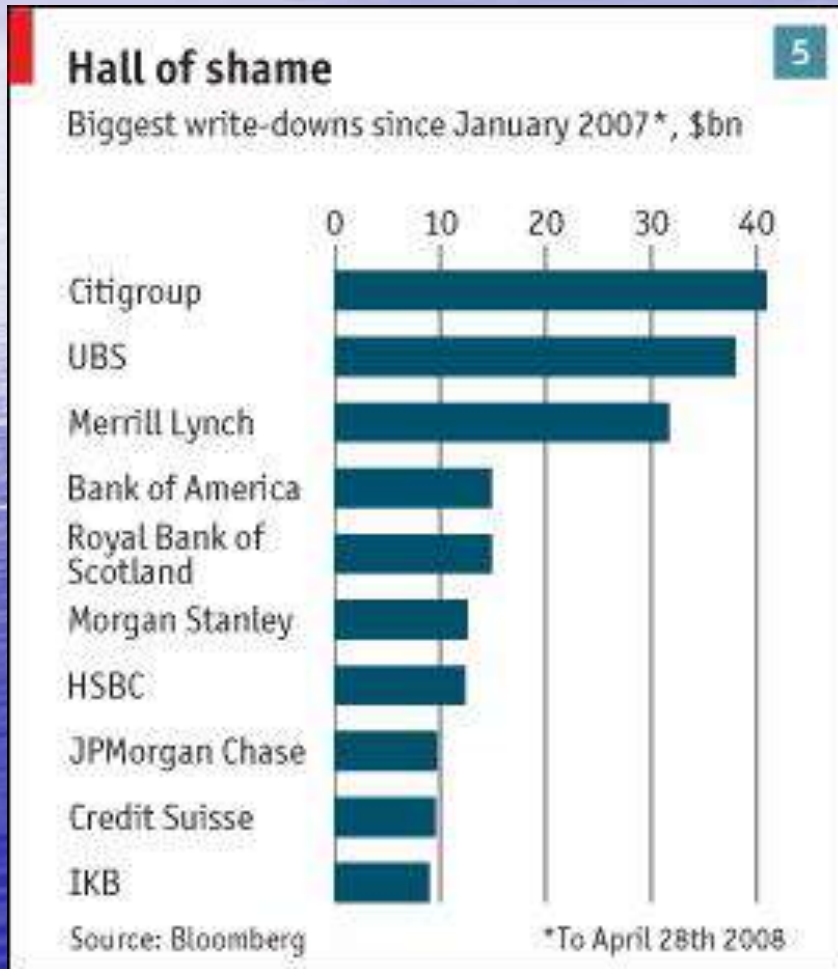


"How do you want it—the crystal mumbo-jumbo or statistical probability?"

Le considerazioni svolte finora condizionano l'attività economica (banche, VaR, Basilea 2, TFR, fondi pensione, ...)

L'importanza dell'analisi statistica e della modellizzazione matematica nelle scelte di investimento è cresciuta costantemente negli ultimi 20-30 anni

La crisi dei mutui subprime



18 marzo: la Federal Reserve Bank ha organizzato il salvataggio di Bear Stearns (comprata da JP Morgan) per scongiurare un effetto domino

L'origine della crisi: un cigno nero (grigio?) e la leva finanziaria

31 marzo: Paulson (U.S. Treasury Secretary) propone una riforma dei regolamenti dell'industria finanziaria



VIVIRÁS MUCHOS,
MUCHOS AÑOS!





¡DIOS MÍO, CÓMO PASA EL TIEMPO!



The background is a deep blue gradient. On the left side, there is a bright, glowing sun that creates a horizontal lens flare across the middle of the image. The sun's light fades into the blue background. A thin, straight white line representing the horizon is visible, separating the darker blue sky from the lighter blue water below. The water surface is covered in small, gentle ripples.

GRAZIE!