Modelli di dinamica dei rendimenti. S. MARMI, Feb 2010

(1) Random Walk $Y_t = \mu + Y_{t-1} + \varepsilon_t$ μ = drift

ε_t i.i.d. con media nulla e $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$ serialmente indip.

$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0 \quad \forall k$

$Y_t = [$ ln Prezzo di un'azione $]$

$\langle Y_t \rangle = \mu$

$Var(Y_t) = t\sigma^2$

NON E' STAZIONARIO

(2) Modelli autoregressivi AR(1) ($\alpha = 1$ Random Walk)

$$Y_t = \mu + \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$|\alpha| < 1$

ε_t come sopra

$Y_t = [$ logaritmo del tasso di interesse (empiricamente si osserva che sono mean reverting) $]$

Valore stazionario $\langle Y_t \rangle = \frac{\mu}{1-\alpha}$

$Var(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$

Talvolta si assume che σ dipenda dal tempo: e.g.

$\sigma_t = k Y_{t-1}^{\gamma}$ $\gamma = 1/2$ CIR (Cox-Ingersoll-Ross)

(3) stazionarietà e funzione di autocorrelazione.

$\{x_t\}$ $E[x_t] = \mu \quad \forall t$

$Cov(x_t, x_{t-k}) = E[(x_t - \mu)(x_{t-k} - \mu)] = \gamma_k \quad \forall t \, \forall k$

se il processo è stazionario, ACF

$$\rho_k = \frac{Cov(x_t, x_{t-k})}{\sqrt{Var(x_t) Var(x_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \qquad k \geq 0$$

si pone $\rho_{-k} = \rho_k$

Per il random walk $\quad Cov(Y_t, Y_{t-k}) = (t-k)\sigma^2$

$$\rho_{k,t} = \frac{(t-k)\sigma^2}{\sqrt{t(t-k)\sigma^2}} = \sqrt{\frac{t-k}{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$$

- Per modelli le innovazioni ε_t dovrebbero essere non correlate

$$\rho_k = 0 \qquad k > 0$$

- Nel modello AR(1) $\quad \rho_k(Y_t) = \alpha^k \quad$ (decadimento esponenziale)

VOLATILITÀ: i rendimenti non sono correlati ma non sono indip. per via del volatility clustering

- modelli GARCH
- modelli a volatilità stocastica (più difficili da usare, con difficoltà di stima)

GARCH(1,1) Bollerslev Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity
J. of Econometrics 31 307-327 (1986)

$$Y_t = \mu + \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + a\,\varepsilon_{t-1}^2 + b\,\sigma_{t-1}^2 \qquad 0 \le a \le 1$$

$$0 \le b \le 1$$

$$\eta = a + b \le 1$$

stazionario se $a+b<1$

$$\langle \sigma_t^2 \rangle = \frac{a_0}{1-a-b}$$

persistenza = quanto lentamente uno shock viene dimenticato

$$E(\sigma_k^2 | \sigma_0^2) = a_0 \frac{1-\eta^k}{1-\eta} + \eta^k \sigma_0^2$$

per $\eta \to 1$ ci vuole molto tempo per ritornare

Portafoglio: analisi monoperiodale

$a_1 \dots a_N$ assets $\qquad \theta_1 \dots \theta_N$ # contratti

$P_1 \dots P_N(t)$ valori al tempo (t) $\qquad t=0$, $t=T$

$w_1 \dots w_N$ peso dell'asset nel portafoglio al tempo $t=0$

$$w_i = \frac{\theta_i P_i(0)}{\sum_1^N \theta_j P_j(0)} \qquad \sum w_i = 1$$

$w_i \geq 0$ no short-selling

$w_i \leq 1$ no leverage

$w_i \in \mathbb{R}$ caso generale

rendimenti $R_1 \dots R_N$ $\qquad (R_i+1)P_i(0) = P_i(T)$

sono variabili aleatorie $\mu_i, \sigma_i^2 = Var(R_i)$, $\mu_i = E(R_i)$

rendimento del portafoglio $R = \sum_{i=1}^N w_i R_i$ $\qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}$

$$E(R) = \mu = \sum_1^N w_i \mu_i$$

rischio del portafoglio

$$\sigma^2 = Var\left(\sum_1^N w_i R_i\right) = \underline{w}^T \underline{\underline{C}}\, w$$

$$\underline{\underline{C}} = \left(Cov(R_i, R_j)\right), \quad Cov(R_i,R_j) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

- RISCHIO SISTEMATICO – mercato, macroeconomia, terrorismo, ecc. complessivamente
- ASISTEMATICO – specifico di un (gruppo di) asset

Principio generale: la diversificazione consente di (liberarsi) minimizzare il rischio asistematico

OMBRELLI / OMBRELLONI
SPA SPA

$\rho = -1$

			1/2 1/2
SOLE	+100%	-50%	+25%
PIOGGIA	-50%	+100%	+25%

il portafoglio equipesato ha un rend del 25%

2-asset $\quad 0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \,,\ \rho = \rho_{12}$

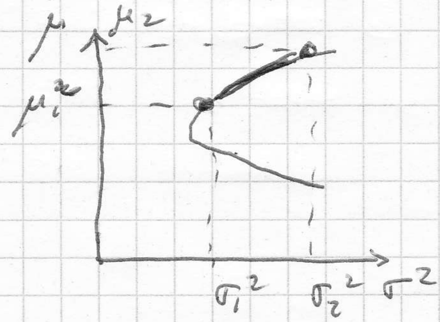
$$\mu = w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2$$
$$\sigma^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \rho \sigma_1 \sigma_2$$

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$w_1 = s \,,\ w_2 = 1 - s$

$$\mu = (\mu_2 - \mu_1) s + \mu_1$$
$$\sigma^2 = \underbrace{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)}_{\substack{\vee \\ 0}\ (\rho<1)} s^2 - 2\sigma_1(\sigma_1 - \rho\sigma_2) s + \sigma_1^2$$

PARABOLA



qui il
rischio minimo
richiede uno short

$$\frac{d}{ds}\sigma^2 = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) s - 2\sigma_1(\sigma_1 - \rho\sigma_2)$$

$$s_{min} = \frac{\sigma_1(\sigma_1 - \rho\sigma_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

$$\sigma^2(s_{min}) = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \leq \min(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$$

$$\mu_{min} = (\mu_2 - \mu_1) s_{min} + \mu_1$$

<u>no short selling:</u> $\quad 0 < s_{min} < 1 \iff -1 \leq \rho < \sigma_1/\sigma_2$

N.B. $\sigma^2(s_{min}) = 0 \iff \rho = -1$.