Il programma di Hilbert

Quando, come abbiamo visto, Hilbert aveva ripreso ad occuparsi dei fondamenti nel 1917, con l'articolo sul pensiero assiomatico, aveva indicato i temi di una nuova disciplina, per sviluppare la quale "dobbiamo fare del concetto stesso di dimostrazione specificamente matematica un oggetto di indagine"[1], aveva aggiunto: "L'esecuzione di questo programma è certamente un problema oggi irrisolto".

Hilbert era intenzionato tuttavia a occuparsene a fondo; nel 1917 assunse come assistente Paul Bernays (1888-1977), che sarà il suo collaboratore più fedele, efficiente e riservato; e nel 1917-18 tenne egli stesso un corso su "Principi di matematica e logica".

Il motivo a quanto pare decisivo per la decisione di Hilbert era stato quello della crescente influenza di Bruwer e delle sue idee. La conferenza "Neubegründung der Mathematik" del 1922 iniziava proprio con l'affermazione che, di fronte all'interesse attuale per i fondamenti della matematica, la soluzione proposta da "matematici autorevoli, e altamente benemeriti, Weyl e Brouwer" era suo parere sbagliata[2].

Il lusinghiero giudizio relativo a Weyl e Brouwer non è formale; Hilbert scrisse una lettera di raccomandazione per Brouwer per il primo posto di professore straordinario che ebbe ad Amsterdam nel 1912; nel 1919 gli offrì un posto a Göttingen; Weyl si era dottorato con lui sulle serie di Fourier, e Hilbert cercò ripetutamente di averlo come collega a Göttingen, fino a riuscirci. Quando li menziona, mette sempre Weyl al primo posto, ma era Brouwer a cui Weyl si ispirava e di cui subiva l'influenza[3].

Luitzen E. J. Brouwer ebbe una brillante carriera e occupò un posto importante nella matematica del tempo, soprattutto come topologo, per i

[1] "Axiomatisches Denken", cit., trad. it. p. 188.

[2] D. Hilbert, "Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung", *Abhandlungen aus dem Mathematichen Seminar der Hamburgischen Universität*, 1 (1922), pp. 157-77; trad. it. in *Scritti sui fondamenti della matematica*, cit., pp. 189-213.

[3] Per queste e altre notizie si veda C. Smoriński, "Hilbert's Programme", *CWI Quarterly*, 1 (1988), pp. 3-59, di cui seguiamo la dettagliata ricostruzione della genesi del programma di Hilbert. Una valutazione teorica del programma è stata compiuta da Georg Kreisel in "Hilbert's Programme", *Dialectica*, 12 (1958), pp. 346-72, ristampato in P. Benacerraf e H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964, pp. 157-80; trad. it. in C. Cellucci (a cura di), *La filosofia della matematica*, Laterza, Bari, 1967, pp. 185-221.

lavori sulla dimensione e per il teorema del punto fisso. Conseguì il dottorato nel 1907, divenne libero docente nel 1909, professore straordinario nel 1912, ordinario nel 1913; entrò nella redazione del *Mathematische Annalen* nel 1915[4].

La tesi del 1907 era ricca di contenuto filosofico, con venature misticheggianti, in parte ridotto su pressione del relatore D. J. Korteweg; in essa erano già presenti espliciti riferimenti a Hilbert e alla sua proposta del 1904. La posizione di Brouwer era assolutamente opposta: "Operare uno studio matematico di simboli linguistici [...] non ci può insegnare nulla sulla matematica".

Nel 1908 Brouwer pubblicò due articoli; uno era dedicato alle cardinalità infinite e al continuo. Sul metodo diagonale, che permette di ottenere potenze superiori al numerabile, sosteneva che si tratta solo di un metodo per estendere insiemi numerabili, ad esempio di ordinali, e che non fornisce un insieme compiuto, ma al massimo prova che l'insieme (degli ordinali numerabili) non esiste. Il continuo si presenta come formato da cammini in un albero binario infinito. L'albero contiene solo una infinità numerabile di nodi, e possono esistere singoli cammini, ma non la loro totalità. La collezione di tutti i cammini è da intendersi come una matrice, nella quale si collocano oggetti.

Nel secondo articolo, intitolato "L'inaffidabilità dei principi logici", Brouwer suggeriva che il principio del terzo escluso non si potesse estendere agli insiemi infiniti: per affermare $\varphi \vee \neg\varphi$ si deve avere o una costruzione che esegue il compito descritto da φ o una costruzione che blocca ogni processo di esecuzione di tale compito; non è detto che si dia sempre una tale situazione[5].

La concezione della matematica di Brouwer era che una asserzione matematica, per essere vera o falsa, doveva essere conosciuta come vera o falsa, quindi dimostrata, o costruita. Il principio del terzo escluso non era falso nel senso che $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ fosse vera, cioè che fosse dimostrabile l'assurdità di $\varphi \vee \neg\varphi$; la disgiunzione è accettabile per esempio nei domini finiti. Il principio al massimo semplicemente non era contraddittorio, cioè $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ era accettabile; a parole si potrebbe dire che una doppia negazione $\neg\neg A$ significa

[4]Le opere di Brouwer sono pubblicate in inglese in due volumi di *Collected Works*, North Holland, Amsterdam, 1975-76, il primo dedicato a *Philosophy and Foundations of Mathematics*, a cura di A. Heyting. Sulla vita, si veda D. van Dalen, *Mystic, Geometer, and Intuitionist*, 2 voll., Clarendon Press, Oxford, 1999-2005.

[5]Il concetto di negazione $\neg\varphi$ nella logica intuizionistica è variamente espresso come "è dimostrabile che φ è impossibile", o "è dimostrabile che φ è assurdo".

che è impossibile dimostrare che è indimostrabile A, o che A è assurdo; nel caso del terzo escluso questo segue dal fatto che nel caso finito vale..

Brouwer distingueva tra verità dimostrabili e non-contraddizioni dimostrabili. La semplice non contraddittorietà di una teoria o di una asserzione non aveva un significato matematico, idea che Hilbert non riusciva a recepire. Hilbert non aveva ancora elaborato una giustificazione convincente per la sua insistenza sulla non contraddittorietà dei sistemi assiomatici con i quali aggirava il metodo genetico. Egli si limitava a ripetere che

> Se otteniamo questa dimostrazione [della non contraddittorietà degli assiomi dell'analisi], allora con essa avremo stabilito che gli enunciati matematici sono realmente verità incontestabili e definitive[6].

D'altra parte Brouwer collegava il principio del terzo escluso alla questione se possano esistere problemi matematici insolubili, negando che tale eventualità fosse stata esclusa da alcuna dimostrazione. Per Brouwer il passaggio dalla non contraddittorietà all'esistenza poteva essere espresso dalla legge della doppia negazione $\neg\neg A \to A$, che è equivalente al principio del terzo escluso. Per questo motivo Brouwer sosterrà sempre che Hilbert continuava ad assumere il principio della risolubilità di tutti i problemi, perché Brouwer lo identificava con il *tertium non datur*.

Dopo un periodo di impegno in lavori di topologia, Brouwer tornò ai fondamenti nel 1918 con un lavoro sulla "Fondazione della teoria degli insiemi indipendente dal principio del terzo escluso", nel quale iniziava a costruire in modo sistematico la matematica intuizionistica, prima presentata in modo frammentario. In un commento pubblicato a parte, Brouwer esplicitava meglio le posizioni di fondo, anche in relazione ad "Axiomatisches Denken" di Hilbert 1917. Negava l'ammissibilità degli assiomi di Zermelo e dichiarava l'equivalenza del principio del terzo escluso con l'assioma della risolubilità di tutti i problemi. Per Brouwer quest'ultimo era falso, anche se non contraddittorio. Nel 1920 Brouwer rincarava la dose in una conferenza, pubblicata l'anno successivo sui *Mathematisce Annalen*, dove rispondeva negativamente alla questione della esistenza di una espansione decimale per ogni numero reale.

Nello stesso periodo, anche se Brouwer taceva, Weyl si era schierato dalla sua parte. Hermann Weyl, professore a Zurigo, lavorava sia in matematica

[6] 1922, p. 195.

pura che in fisica matematica. Nel 1918 aveva pubblicato una breve monografia[7] nella quale cercava di ricostruire l'analisi senza usare definizioni impredicative. Benché ammettesse che nessuna contraddizione si era scoperta in analisi per l'uso di queste, tuttavia temeva il circolo vizioso. Se le si vietavano, restava valida la convergenza delle successioni di Cauchy, e il teorema del valor medio, ma non il teorema di Bolzano-Weierstrass. Anche la definizione dei naturali di Dedekind appariva circolare. Dopo aver subito l'influenza di Poincaré aveva scoperto Brouwer. In particolare in una serie di conferenze del 1920 a Zurigo, Weyl annunciava di abbandonare il proprio progetto e di essere diventato un seguace di Brouwer; esaltava Brouwer per il suo rifiuto del principio del terzo escluso e per la sua soluzione del problema del continuo, come il portatore di una rivoluzione. Il continuo non era un insieme di punti, ma un "medium di divenire libero".

Per quel che riguardava la logica, alla quale Weyl aveva dato un importante contributo proponendo la fissazione dei costrutti ammissibili, anche i quantificatori dovevano essere reinterpretati; una asserzione esistenziale era una sorta di "Pagherò", un pezzo di carta che offriva un tesoro senza dire dove si trovasse[8].

A Göttingen erano seguite con molta attenzione queste manifestazioni del pensiero di Weyl e Brouwer. Bernays e Richard Courant parlarono delle conferenze di Weyl al colloquio matematico, altri le esposero e commentarono. Hilbert ruppe gli indugi nel 1921 con una serie di conferenze sue, di cui la più importante fu quella di Amburgo pubblicata nel 1922[9], concepita come risposta a Weyl.

Amburgo 1921

Hilbert attaccava con forza la posizione di Weyl e Brouwer mirante a mutilare la matematica riproponendo immotivate esigenze costruttive alla Kronecker.

> Credo che, come Kronecker non riuscì ad abolire il numero irrazionale – peraltro, Weyl e Brouwer permettono di conservarne

[7] *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Veit, Leipzig, 1918; trad. il. *Il continuo*, Bibliopolis, Napoli, 1977.

[8] Weyl comne vedremo finì per dare ragione all'impostazione di Hilbert, al fine di salvare la matematica necessaria per le applicazioni fisiche; in seguito rimase affascinato dalla filosofia di Edmund Husserl. Si veda G. Lolli, *Filosofia della matematica*, il Mulino, Bologna, 2002, pp. 173-6.

[9] Cit. sopra.

> ancora un mozzicone –, così neanche Weyl e Brouwer prevarranno oggi; no, Brouwer non è, come sostiene Weyl, la rivoluzione bensì solo la ripetizione con vecchi metodi di un tentativo di putsch che a suo tempo, pur essendo stato intrapreso con maggiore risolutezza, fallì miseramente e che adesso è condannato in partenza all'insuccesso poiché il potere statale è stato così ben armato e rafforzato da Frege, Dedekind e Cantor.

La conferenza di Amburgo, alla fine della quale Hilbert riconosceva esplicitamente il contributo di Bernays, è importante per la presentazione ufficiale del programma di Hilbert. Il punto di partenza è simile a quello del 1904, con una differenza di sfumatura; allora Hilbert pensava di sviluppare insieme logica e matematica, usando a ogni stadio quello che era stato dimostrato coerente allo stadio precedente; ne risultava poca chiarezza sugli strumenti disponibili a ogni stadio, e in definitiva una loro debolezza. Ora la "inseparabilità delle verità aritmetiche e di quelle logiche" si rivela in una diversa luce, nella formalizzazione delle teorie matematiche, quando sia la parte matematica sia quella logica sono ridotte a segni.

> Le formule di questo complesso [una teoria formalizzata] si distinguono dalle ordinarie formule della matematica soltanto perché vi compaiono, oltre ai segni matematici, anche il segno $\rightarrow$, l'universale e i segni per enunciati.

Ciascun segno è soggetto ai suoi specifici assiomi.

Sempre da evitare era comunque "l'operare astratto con estensioni e contenuti concettuali" che era risultato difettose e insicuro; bisognava fondarsi sul concreto.

> Anzi, come prerequisito per l'uso delle inferenze logiche e per il funzionamento delle operazioni logiche, ci deve essere dato già qualcosa nell'immaginazione: certi oggetti discreti extralogici, che esistono intuitivamente come esperienze immediate prima di ogni pensiero. Se il ragionamento logico deve essere sicuro, questi oggetti devono essere completamente dominabili in tutte le loro parti e, insieme con gli oggetti, pure la loro esibizione, la loro distinzione, il loro susseguirsi ci sono dati in modo immediatamente intuitivo come qualcosa che non è riconducibile ancora a

> qualcos'altro. Assumendo questa posizione, per me – in netta opposizione a Frege e Dedekind – gli oggetti della teoria dei numeri sono proprio i segni, la cui forma può essere da noi riconosciuta universalmente e sicuramente, indipendentemente dallo spazio e dal tempo e dalle condizioni particolari della costituzione del segno cosi come da insignificanti differenze nell'esecuzione [...] "In principio c'è il segno", questo è il motto [in generale, per ogni tipo di pensiero][10].

Nel 1904 Hilbert aveva parlato di *cose mentali*, 1 e =, e successioni finite di queste. Ma i segni di cui parla ora sono indipendenti dallo spazio, dal tempo e della loro rappresentazione, sono dati nell'intuizione, e quindi sono cose mentali, anche se Hilbert non usa più questo termine[11].

In modo ancora più esplicito, nel 1925 Hilbert ripetendosi aggiungerà un riferimento a Kant, sia pure con un altro tipo di intuizione primaria.

> Nel riconoscere che esistono tali precondizioni e che di esse si deve tener conto, noi ci troviamo d'accordo con i filosofi, in particolare con Kant. Già Kant aveva insegnato – e ciò costituisce una parte integrante della sua teoria – che la matematica dispone di un contenuto assicurato indipendentemente da ogni logica e quindi non può mai essere fondata mediante la sola logica [...] Anzi, come precondizione per l'uso di inferenze logiche e per l'effettuazione di operazioni logiche, deve essere già dato qualcosa nella rappresentazione: certi oggetti concreti extra-logici, che esistono

[10] 1922, pp. 195-96.

[11] Nel 1900 (in *Mathematische Probleme*, cit.) Hilbert aveva presentato un'altra concezione dei segni matematici, quando aveva detto che

> A nuovi concetti corrispondono, necessariamente, nuovi segni. Noi li scegliamo in modo tale che essi ci ricordino i fenomeni che furono l'occasione della formazione dei nuovi concetti. Così le figure geometriche sono segni o simboli mnemonici di intuizioni spaziali e come tali sono usati da tutti i matematici. [...] L'uso di segni geometrici come strumento di dimostrazione rigorosa presuppone la conoscenza esatta e la padronanza completa degli assiomi che soggiacciono a quelle figure; e affinché queste figure geometriche possano essere incorporate nel tesoro generale dei segni matematici è necessario un rigoroso studio assiomatico del loro contenuto concettuale.

. Questi segni sono indispensabili per l'intuizione ma sono un prodotto dell'attività logica.

> intuitivamente come qualcosa di immediato, prima di ogni pensiero. Se il ragionamento logico deve essere sicuro, questi oggetti devono lasciarsi pienamente dominare in tutte le loro parti; e, insieme agli oggetti, la loro esibizione, la loro distinzione, il loro susseguirsi, il loro essere l'uno accanto all'altro, deve essere dato intuitivamente come qualcosa che non si lascia ridurre ancora a qualcos'altro e che non richiede una riduzione[12].

La costruzione dell'aritmetica sulla base dei segni concreti partiva nel 1922 dai segni 1 e +, che sono segni senza significato[13], e dalle loro successioni, che venivano chiamati nell'insieme segni numerici. Ma "oltre a questi segni, usiamo anche altri segni, che invece significano qualcosa e che servono per la comunicazione; ad es., il segno 2 come abbreviazione del segno numerico 1+1" o i segni = e <:

> Così, $2 + 3 = 3 + 2$ non è una formula ma serve solo per la comunicazione del fatto che $2 + 3$ e $3 + 2$ sono, tenuto conto delle abbreviazioni usate, lo stesso segno numerico, e cioè il segno $1 + 1 + 1 + 1 + 1$[14].

Per la comunicazione di fatti generali Hilbert usava $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ per segni numerici; affermazioni come $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ allora hanno quella che Hilbert chiamava verità contenutistica, *inhaltlich*, verità che può essere verificata con manipolazioni di segni, o pensieri su manipolazioni di segni.

> In una teoria dei numeri svolta in questo modo non ci sono assiomi e non ci possono in alcun modo essere contraddizioni. Come oggetti abbiamo sempre segni concreti, con essi operiamo e su di essi facciamo enunciati contenutistici ...

Ma questi pensieri su manipolazioni di segni sono diversi dal principio di induzione perché riguardano e si basano semplicemente sulla composizione e scomposizione di un segno supposto dato. Per esempio per dimostrare $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, supponendo $\mathbf{b} > \mathbf{a}$ si scompone $\mathbf{b}$ in $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ e si passa a successioni più corte $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{c} + \mathbf{a}$. Tale procedimento è "basato meramente

[12] "Über das Unendliche" (1925), *Mathematische Annalen*, 95 (1926), pp. 161-90; trad. it. in *Scritti sui fondamenti della matermatica*, cit. pp. 233-66; cit. pp. 243-44.

[13] In seguito, anche per evitare polemiche sollevate dalla dizione "segni senza significato", li chiamerà "cifre".

[14] 1922, pp. 196-97

sulla composizione e decomposizione dei segni numerici ed è essenzialmente diverso da quel principio che come principio di induzione completa [...] svolge un ruolo così eminente nell'aritmetica superiore". La risposta definitiva a Poincaré, alla cui critica sull'uso dell'induzione nel 1904 è trasparente il riferimento, su questa questione sarà data nel 1927, come vedremo.

> Ma con questo modo non si può certamente ottenere l'intera matematica. Il procedimento viene meno già quando si passa al punto di vista dell'aritmetica e dell'algebra superiori, ad esempio, quando si vogliano ottenere asserzioni su infiniti numeri o funzioni [...] non possiamo sviscerare l'essenza dell'analisi solo mediante quel tipo di comunicazioni contenutistiche ma dobbiamo usare piuttosto per la sua costruzione vere e proprie formule.
>
> Ma una posizione analoga la possiamo ottenere ponendoci a un livello superiore di trattazione, dal quale divengono oggetto di indagine contenutistica gli assiomi, le formule e le dimostrazioni della teoria matematica. A questo fine però, come prima cosa le consuete argomentazioni contenutistiche della teoria matematica devono venir riprodotte mediante formalismi; cioè deve essere eseguita una rigorosa formalizzazione delle teorie matematiche nella loro interezza, comprese le loro dimostrazioni, cosicché – secondo il modello del calcolo logico – le inferenze e i concetti matematici vengono inseriti nell'edificio della matematica come componenti formali. Gli assiomi, le formule e le dimostrazioni che costituiscono questo edificio formale sono precisamente ciò che erano i segni numerici nella costruzione prima tratteggiata della teoria elementare dei numeri; e soltanto con essi vengono svolte, cosi come con i segni numerici della teoria dei numeri, argomentazioni contenutistiche, cioè si esercita il pensiero vero e proprio. Con ciò le argomentazioni contenutistiche, che evidentemente non possono mai venir del tutto evitate né eliminate, vengono collocate in altro luogo, in un certo senso a un livello superiore; e contemporaneamente diventa possibile, nella matematica, una rigorosa e sistematica separazione tra formule e dimostrazioni formali da un lato e argomentazioni contenutistiche dall'altro[15].

[15] 1922, pp. 197-98.

Hilbert distingueva quindi due tipi di matematica, quella propria (*eigentlich*) o attuale, e la metamatematica. La matematica propria, quella fatta dei matematici, è astratta, infinitaria e non ha un significato empirico; l'unico controllo della sua validità è la non contraddittorietà. La metamatematica è invece intuitiva e dotata di contenuto; è lo studio combinatorio dei segni e delle loro combinazioni. Si tratta della nuova disciplina annunciata nel 1917, e chiamata teoria della dimostrazione (*Beweistheorie*).

> A questa matematica vera e propria si aggiunge una matematica in un certo senso nuova, una *metamatematica*, che serve per dare sicurezza a quella, proteggendola sia dal terrore dei divieti non necessari che dal travaglio dei paradossi. In questa metamatematica, contrariamente ai metodi puramente formali delle inferenze della matematica vera e propria, viene usato il ragionamento contenutistico, e precisamente per la dimostrazione della non contradditttorietà degli assiomi[16].

La necessità del rigore imponeva la presentazione assiomatica della matematica attuale, ma ora in più Hilbert richiedeva la sua formalizzazione, cioè che essa venisse rimpiazzata da sistemi formali la cui non contraddittorietà potesse essere dimostrata nella metamatematica.

La formalizzazione, come appare dalla citazione di sopra relativa alla comparsa dei segni $\rightarrow$ e $\forall$, non sembrava a Hilbert una operazione che sfigurasse la matematica propria. I verbi usati da Hilbert sono ambigui: "la matematica in senso stretto *diviene* un complesso di formule dimostrabili"[17]. Non è mai detto esplicitamente che la formalizzazione sia eseguita solo ai fini della indagine metamatematica; anzi i sostenitori della interpretazione formalista di Hilbert si possono basare su affermazioni come la seguente, che riguarda lo sviluppo della scienza matematica e non solo la sua messa in sicurezza:

> Perciò, lo sviluppo della scienza matematica avviene in due modi che si alternano continuamente: il conseguimento di nuove "formule dimostrabili" dagli assiomi mediante un ragionamento formale, e l'introduzione di nuovi assiomi unitamente alla dimostrazione della loro non contraddittorietà mediante un ragionamento contenutistico[18].

[16] 1922, p. 210.
[17] Corsivo nostro.
[18] 1922, p. 210.

D'altra parte si trovano anche affermazioni più caute, che prese alla lettera lo potrebbero qualificare come non formalista.

> Gli assiomi e le proposizioni dimostrabili, ossia le formule ottenute in questo interscambio, sono le *copie*[19] delle idee che costituiscono il comune procedimento della matematica ordinaria [...][20].

Hilbert era convinto che i metodi della metamatematica potessero essere accettabili da Weyl e Brouwer[21], e nello stesso tempo offrissero una risposta alla critica di Poincaré sull'uso dell'induzione. L'induzione metamatematica, in considerazione delle proprietà alle quali si applicava, doveva essere di un genere più semplice del principio di induzione non ristretto.

Come esempio del suo metodo Hilbert presentava nella conferenza di Amburgo un sistema di assiomi per l'aritmetica, con il *modus ponens* come unica regola di inferenza.

Hilbert dimostrava quindi il

> ... teorema:
>
> *Il sistema di assiomi costituito dai cinque assiomi*
>
> 1. $a = a$
> 3. $a = b \to a + 1 = b + 1$
> 4. $a + 1 = b + 1 \to a = b$
> 5. $a = c \to (b = c \to a = b)$
> 6. $a + 1 \neq 1$
>
> *è non contraddittorio.*

attraverso due lemmi:

[19] Corsivo nostro.

[20] "Die logische Grundlagen der Mathematik", *Mathematische Annalen*, 88 (1923), pp. 151-65; trad. it pp. 215-31; cit. p. 217. La citazione continua: "ma non sono esse le verità in senso assoluto. Come verità assolute devono piuttosto venir considerati i risultati che si ottengono con la mia teoria della dimostrazione a proposito della dimostrabilità e della non-contraddittorietà di tali sistemi di formule".

[21] Vedremo che questo è vero per Weyl; Brouwer avrebbe voluto che gli fosse riconosciuto il merito di aver messo in evidenza quello che Hilbert chiama ragionamento contenutistico, e comunque il suo uso per le dimostrazioni di non contraddittorietà gli sembrava futile.

> Lemma. Una formula dimostrabile può contenere il segno $\rightarrow$ al massimo due volte.
>
> ...
>
> Lemma. Una formula $a = b$ è dimostrabile se e solo se a e b sono lo stesso segno[22].

La dimostrazione del primo lemma suppone che venga presentata una dimostrazione di una formula che contiene più di due occorrenze di $\rightarrow$. "Allora percorriamo questa dimostrazione fino a una formula che per prima abbia questa proprietà [...] Questa formula non può essere stata ottenuta mediante sostituzione direttamente da un assioma [...] Ma quella formula non può neanche comparire come formula finale di una inferenza, perché allora la seconda premessa $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{T}$ di questa inferenza sarebbe una formula precedente che ha più di due segni $\rightarrow$".

La dimostrazione del secondo si svolge supponendo che sia data una dimostrazione di $a = b$ con a diverso da b; si considera il primo punto in cui occorre nella dimostrazione una simile equazione con i due membri diversi tra loro. Trattato, ed escluso, il caso banale degli assiomi, tale formula deve essere ottenuta per *modus ponens* da una precedente $S \rightarrow a = b$. S o è un assioma o è a sua volta derivata. I vari casi si escludono o perché ci sarebbe prima un'equazione con i due membri diversi, o perché ci sarebbe una formula con più di due implicazioni.

Su questa base la dimostrazione che $a \neq a$ non è dimostrabile è facile. È la prima dimostrazione della nuova teoria, rappresentativa del tipo di argomentazioni che saranno svolte, in modo naturalmente più complicato, in teoria della dimostrazione.

Qualche perplessità desta la scelta del sistema usato da Hilbert come esempio. Pare ad esempio difficile dimostrare in esso proposizioni come $3 \neq 2$ senza usare una forma di ragionamento per assurdo (da $3 = 2$ si scende con l'assioma 4. a $1 + 1 = 1$ che contraddice 6.). Ma nulla è detto sulle inferenze proposizionali ammissibili Nel resto della conferenza Hilbert presentava un più dettagliato sistema di aritmetica, utilizzando funzioni, come il predecessore, per realizzare affermazioni esistenziali, e regole di inferenza per l'implicazione; la negazione restava trattata solo nella forma "positiva" $\neq$, cioè come una relazione primitiva, mossa che peraltro Hilbert considerava molto interessante al fine di chiarire il significato della negazione.

[22] 1922, pp. 205-06.

Lipsia 1922

Una seconda conferenza tenuta a Lipsia nel 1922 e pubblicata l'anno successivo conteneva alcune ripetizioni ma anche diverse precisazioni.

Innanzi tutto Hilbert introduceva un termine nuovo per indicare il carattere dei metodi della metamatematica, quello di *finit*, un neologismo in tedesco che disponeva già di *endlich* per "finito". Il termine è variamente reso in italiano con "finitista" o "finitario" (in inglese *finitistic*, *finitary*).

Il termine veniva introdotto insieme a un tentativo di demarcazione dei metodi finitisti stessi. Mentre ad Amburgo aveva detto che la metamatematica era intuitiva e non aveva assiomi, quindi non poteva essere contraddittoria, a Lipsia Hilbert propose un sistema assiomatico per l'aritmetica della metamatematica.

Esso è costituito dagli assiomi

I. *Assiomi dell'implicazione*

1. $A \to (B \to A)$
   (introduzione di una premessa)
2. $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$
   (eliminazione di una premessa)
3. $(A \to (B \to C)) \to (B \to (C \to A))$
   (scambio delle premesse)
4. $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
   (eliminazione di un enunciato)

II. *Assiomi della negazione*

5. $A \to (\neg A \to B)$
   (principio della contraddizione)
6. $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$
   (principio del *tertium non datur*)

III. *Assiomi dell'uguaglianza*

7. $a = a$
8. $a = b \to (A(a) \to A(b))$

IV. *Assiomi del numero*

9. $a + 1 \neq 0$
10. $\delta(a + 1) = a$[23]

Hilbert mostrava qui di prestare attenzione ai dettagli della logica, e alla sua definizione, essendosi convinto di non potersi appoggiare al *Principia Mathematica*; aggiunse la negazione, prima non usata esplicitamente come connettivo. Gli assiomi sono organizzati in gruppi, per ciascun segno logico, secondo l'esperienza fatta da Hilbert con la geometria. Il sistema sarà il riferimento per i lavori di Ackermann.

> Sulla base degli assiomi 1.-10. otteniamo facilmente i numeri interi positivi e le equazioni numeriche valide per essi. Partendo da questi elementi iniziali si può ottenere per mezzo di una logica "finitaria" con considerazioni puramente intuitive, fra le quali si collocano anche la ricorsione e l'induzione intuitiva per una data totalità finita, anche la teoria elementare dei numeri, senza alcun ricorso a procedimenti dubbi o problematici.
>
> Le formule dimostrabili ottenute in questo modo hanno tutte il carattere finitario, cioè le idee di cui esse sono le copie possono anche essere ottenute senza assiomi, contenutisticamente e in modo diretto attraverso la considerazione di totalità finite[24].

In una nota Hilbert precisava che nella sua teoria definitiva la teoria elementare dei numeri sarebbe dovuta essere presentata nel suo sviluppo formale da assiomi, e "qui, solo per brevità, faccio ricorso alla fondazione diretta intuitiva"[25].

---

[23] L'assioma per il predecessore non pare sufficiente; occorre anche $a \neq 0 \rightarrow \delta(a) + 1 = a$, che pure era stato indicato nella conferenza di Amburgo, come pure un valore convenzionale per $\delta(0)$, di solito 0.

[24] [Questa osservazione è pertinente alla discussione sulla legittimità e tipo di processi induttivi nella metamatematica, su cui torneremo.]

[25] La difficoltà non ancora chiarita, che rinviava la presentazione formale, riguardava l'assioma di induzione, ed era collegata alle forme di ricorsione ammissibili. Ma nel 1922 l'argomento non era ancora stato studiato. Lo stava facendo Skolem, e la sua proposta del 1923 sarà quella alla fine accettata. Si veda la nota precedente.

> Nella nostra teoria della dimostrazione vogliamo tuttavia andare oltre questo ambito della logica finitaria e ottenere formule dimostrabili che siano copie di proposizioni transfinite[26] della matematica usuale. La vera forza e la convalida della nostra teoria della dimostrazione le ritroveremo proprio nel fatto che, introdotti certi altri assiomi transfiniti, riusciremo a dimostrare la loro non contraddittorietà. Dove avviene il primo passaggio oltre il concretamente intuitivo, oltre il finitario? Chiaramente già nell'uso dei concetti "ogni" ed "esiste".

Il quantificatore universale è pensato come una congiunzione, quello esistenziale come una disgiunzione. Le relazioni tra i quantificatori $\forall$ e $\exists$ sono allora una generalizzazione delle leggi di De Morgan[27]. Ma l'estensione al caso di domini infiniti può essere fonte di errori, "come [in analisi] l'estensione alle somme e prodotti infiniti dei teoremi validi per le somme e i prodotti finiti".

Hilbert sull'argomento concedeva molto alla posizione intuizionistica:

> Nel caso di infiniti oggetti, la negazione del giudizio universale $\forall a A(a)$ non ha a tutta prima un contenuto preciso [...] D'altra parte, queste negazioni possono talvolta acquisire un senso, e precisamente quando l'asserzione $\forall a A(a)$ è contraddetta da un controesempio, o quando dall'assunzione $\forall a A(a)$ – o, ris. $\exists a A(a)$ – si deriva una contraddizione. Questi casi, però, non si contrappongono contraddittoriamente [...]

Per ovviare alle difficoltà, sono introdotti allora altri gruppi di assiomi "che sono espressioni di procedimenti inferenziali infiniti. Utilizzo l'idea che sta alla base del principio di scelta, introducendo una funzione logica $\tau(A)$ o $\tau a(A(a))$ che a ogni predicato $A(a)$, cioè a un enunciato con una variabile a, assegna un determinato oggetto $\tau(A)$", con

V. *Assioma transfinito*

11. $A(\tau A) \rightarrow A(a)$

[26][Come si chiarirà sotto, le formule transfinite sono quelle che contengono quantificatori su domini infiniti.]

[27]$\neg\forall a A(a) \leftrightarrow \exists a \neg A(a)$ e $\neg\exists a A(a) \leftrightarrow \forall a \neg A(a)$.

> Questo assioma dice, nel linguaggio comune, che se un predicato A vale dell'oggetto τA allora esso vale di tutti gli oggetti a [...] Per visualizzarci il suo contenuto, prendiamo per A il predicato "essere corrotto": allora con τA dobbiamo intendere un determinato uomo che possegga un senso della giustizia talmente incrollabile che, se egli stesso dovesse risultare corrotto, allora tutti gli uomini devono essere senz'altro corrotti[28].

Dall'assioma transfinito, con cui Hilbert pensava di aver mostrato il carattere logico del postulato di Zermelo, e da

VI. *Assiomi definitori dell'universale e dell'esistenziale*

$A(\tau A) \to \forall a A(a)$

$\forall a A(a) \to A(\tau A)$

$A(\tau\neg A) \to \exists a A(a)$

$\exists a A(a) \to A(\tau\neg A)$

seguono tutte le leggi classiche dei quantificatori[29]

$\forall a A(a) \to A(a)$	(principio di Aristotele)
$A(a) \to \exists a A(a)$	(principio dell'esistenziale)
$\neg\forall a A(a) \to \exists z \neg A(a)$	
$\neg\exists a A(a) \to \forall a \neg A(a)$	
$\forall a \neg A(a) \to \neg\exists a A(a)$	
$\exists a \neg A(a) \to \neg\forall a A(a)$.	

La verifica è molto semplice. La prima, se si sostituisce $\forall a A(a)$ con la sua definizione, diventa l'assioma 11.; per la seconda, dall'assioma 11. si ha

$$\neg A(\tau(\neg A)) \to \neg A(a),$$

dalla quale per contrapposizione classica $A(a) \to A(\tau(\neg A))$, che in base alla definizione è $A(a) \to \exists a A(a)$.

Per dimostrare la terza, si osservi che $\neg\forall a A(a)$ è $\neg A(\tau A))$; si vuole che se ne deduca $\neg A(\tau(\neg\neg A))$, il che è vero se $A(\tau(\neg\neg A)) \to A(\tau A)$. Ora $A(\tau(\neg\neg A)) \to$

[28] 1922, p. 221. In seguito Hilbert utilizzerà una diverso simbolo di scelta ε con l'assioma transfinito $A(a) \to A(\varepsilon A)$, che sarà ancora adottato da Bourbaki.

[29] Il risultato è dovuto a Bernays, per riconoscimento di Hilbert.

$\neg\neg A(\tau(\neg\neg A))$; il conseguente per definizione è $\forall a \neg\neg A(a)$ da cui $\neg\neg A(a)$ quindi per la legge della negazione classica $A(a)$ e quindi $A(\tau A)$.

Le altre si dimostrano nello stesso modo.

Le leggi logiche proposizionali classiche sono tutte derivabili dagli assiomi proposti. Ad esempio

$$\neg\neg A \to A$$

si dimostra con la derivazione

$A \to (\neg\neg A \to A)$	assioma 1.
$\neg A \to (\neg\neg A \to A)$	assioma 5.
$\neg\neg A \to A$	per *modus ponens* dai precedenti e assioma 6.

In modo analogo, sfruttando in modo decisivo l'assioma 6. si dimostra anche la contrapposizione: ammesso $A \to B$) si osservi che $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ per 4.; assumendo A, da $A \to B$ si ha B; ma $B \to (\neg B \to \neg A)$ per 5., quindi $A \to (\neg B \to \neg A)$ e una nuova applicazione di 6. dà la conclusione voluta.

Non viene affermato che il sistema di logica proposizionale sia completo, ma il risultato era noto a Bernays, e questo sistema di assiomi è stato scelto evidentemente tendo presente tale requisito.

Dopo aver dimostrato la non contraddittorietà degli assiomi I-V, Hilbert potrà affermare:

> Nella mia teoria della dimostrazione non viene perciò affermato che può sempre essere compiuto il ritrovamento di un oggetto tra un'infinità di oggetti, ma che tuttavia, senza rischi di errori, coi si può comportare sempre *come se* la scelta fosse stata compiuta.

Allora a Hilbert viene in mente una analogia, per spiegare il rapporto tra matematica contenutistica e matematica formale, quella degli elementi ideali.

> Come nella teoria dei numeri complessi vengono aggiunti ai reali gli elementi immaginari, e come nella geometria vengono aggiunte alle figure reali le figure ideali, allo stesso modo nella mia teoria della dimostrazione agli assiomi finitari vengono aggiunti gli assiomi e le formule transfinite. E anche il movente di tale introduzione e il risultato del procedimento sono, nella mia teoria della dimostrazione, gli stessi che negli esempi sopra citati: infatti gli

assiomi transfiniti sono aggiunti per semplificare e completare la teoria[30].

Presto questa nuova idea sarà sviluppata fino ad essere più di una metafora. Hilbert penserà di ottenere in questo modo sia una giustificazione della sua metamatematica sia una spiegazione della natura e del ruolo dell'infinito nella matematica.

La dimostrazione della non contraddittorietà del sistema con gli assiomi 1.-10., per ora, senza il V, è presentata da Hilbert nel modo seguente.

Data un derivazione, cioè una successione di formule in cui ogni elemento o è un caso particolare di un assioma o si ottiene da due precedenti per mezzo della regola di *modus ponens*, alcune trasformazioni preliminari la modificano in modo da eliminare formule, tranne l'ultima, che non siano premesse della regola, e in modo che ogni formula occorra soltanto una volta come premessa, eventualmente ripetendo quelle che servono più di una volta; quindi ogni variabile è sostituita da 0, e i termini chiusi sono trasformati in numerali, in modo che ogni formula sia una combinazione proposizionale di equazioni. Hilbert allude senza precisare a una forma normale. Ora ogni formula può essere controllata rispetto alla sua correttezza; le equazioni richiedono solo di contare la lunghezza dei numerali nei due membri, e l'accenno alla forma nomale allude forse qualche procedimento di logica proposizionale (Bernays era affezionato alle forme normali disgiuntive e congiuntive).

Per induzione si può dimostrare che ogni formula della derivazione è corretta, e quindi non può terminare con un $\neg 0 = 0$.

Hilbert insiste che, una volta messi in presenza di una derivazione da controllare, l'induzione che si deve usare è soltanto finita.

Per quel che riguarda il sistema completo, Hilbert non poteva affermare di avere una dimostrazione di non contraddittorietà, ma si limitava a presentare il caso più semplice, quello basato invece che sull'assioma 11. sull'assioma

A12. $f(\tau(f)) = 0 \to f(a) = 0$

dove $\tau(f) = \tau_a(f(a) = 0)$ per una variabile funzionale f.

Si assegna a $\tau(f)$ il valore 0; da 12. potrebbe risultare un $f(0) = 0 \to f(z) = 0$ per qualche numerale z; se queste formule sono corrette, si conclude come sopra; altrimenti se una di queste non è corretta si torna alla derivazione sostituendo z a $\tau(f)$; tutti i casi particolari di A12 sono ora implicazioni con antecedente falso, e sono quindi corrette.

Le difficoltà del caso generale dipendevano dall'annidamento dei τ; su di esse lavorerà Ackermann. Nella tesi di dottorato del 1924 egli credette di aver ottenuto

[30] 1923, p. 226.

la dimostrazione, ma in seguito scoprì un errore e ridusse il suo risultato a quello della non contradditorietà solo di un frammento dell'aritmetica transfinita.

Alla fine della conferenza, Hilbert mostrava come utilizzando τ si potevano risolvere problemi che Brouwer e Weyl ritenevano impossibili. A Brouwer replicava che si poteva parlare dell'espansione decimale di qualunque numero, anche senza essere in grado di calcolare neppure la prima cifra: per esempio si poteva definire

$$F(n) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{se } n^{\sqrt{n}} \text{ razionale} \\ 1 & \text{se } n^{\sqrt{n}} \text{ irrazionale} \end{cases}$$

e quindi considerare il numero

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n+2)}{2^{n+1}}.$$

A Weyl faceva vedere in dettaglio come usando τ si poteva dimostrare l'esistenza dell'estremo superiore di ogni insieme limitato superiormente.

Il botta e risposta tra Brouwer e Hilbert intanto continuava; nel settembre del 1923 Brouwer parlò alla DMV sul ruolo del terzo escluso in matematica; nel 1924 di nuovo sull'intuizionismo a Göttingen. Gli rispondevano Bernays e Ackermann. Hilbert commentava la conferenza di Göttingen affermando che con i metodi di Brouwer la maggior parte dei risultati della matematica moderna si sarebbero dovuti abbandonare, mentre il problema per lui era di aver più risultati, non meno.

Hilbert aveva purtroppo scoperto la causa del suo cattivo stato di salute, con segni di invecchiamento precoce, in una diagnosi di anemia perniciosa, allora incurabile.

Intanto i rapporti con Brouwer si deterioravano per ragioni politiche. Benché olandese, Brouwer era schierato con i matematici tedeschi nella protesta contro l'ostracismo nei loro confronti dichiarato dalla comunità occidentale seguito alla Grande Guerra, e mostra senza riserve atteggiamenti nazionalistici; nell'occasione dell'anniversario della nascita di Riemann, 1926, egli cercò di escludere dalle celebrazioni i matematici francesi. Anche in vista del congresso internazionale dei matematici di Bologna, dove i tedeschi furono di nuovo invitati, e la loro delegazione alla fine guidata da Hilbert stesso, Brouwer era tra quelli che si opponevano alla partecipazione. Nonostante un breve riavvicinamento nel 1926, queste dispute terminarono nel 1928 con l'allontanamento di Brouwer, voluto da Hilbert, dalla redazione dei *Mathematische Annalen*, con pesanti conseguenze psicologiche sul primo[31].

Nel 1925 Hermann Weyl metteva a confronto le due posizioni rivali[32], rimproverando forse per la prima volta a Hilbert di voler trasformare la matematica in un gioco di formule, equiparando la matematica formalizzata al gioco degli scacchi e iniziando così il luogo comune che Hilbert sia il campione del formalismo.

Weyl però mostrava i primi indizi di un avvicinamento a Hilbert, o della ricerca di un compromesso. Secondo Weyl, Brouwer chiedeva che ogni asserzioni matematica avesse un contenuto, e aveva con la sua analisi mostrato quanto poco contenuto avesse la maggior parte della matematica; Hilbert, d'altra parte negava contenuto a tutta la matematica; secondo Weyl una via di mezzo doveva trattare la matematica come una scienza teorica, come la fisica, dove non ogni asserzione doveva necessariamente avere un significato intuitivo.

Münster 1925

Nello stesso 1925 Hilbert rispondeva con una importante conferenza a Münster[33], dove il suo programma veniva meglio definito dalle radici, con una nuova giustificazione, e una sintesi che merita di essere meditata con attenzione. La sensazione che Hilbert doveva avere di essere finalmente riuscito ad avviare il programma in modo soddisfacente traspare dal fatto che, nonostante le cattive condizioni di salute, il tono della conferenza è brillante e ricco di passi memorabili ("nessuno ci caccerà dal paradiso che Cantor ha creato per noi", "l'analisi matematica non è che una sinfonia dell'infinito", "nessuno, per quanto parli la lingua degli angeli, impedirà alle persone di [...] usare il principio del terzo escluso"), tra cui la ripetizione dell'appello del 1900: "ecco il problema, trova la soluzione; la puoi trovare mediante il puro pensiero; perché in matematica non c'è l'*ignorabimus*".

Il punto di partenza dell'esposizione del 1925 era che

> non è ancora stato chiarito completamente il significato dell'"infinito" per la matematica[34].

[31]Si veda D. van Dalen, "The war of the frogs and the mice, or the crisis of the *Mathematische Annalen*", *The Mathematical Intelligencer*, 12 (1990), pp. 17-31

[32]H. Weyl, "Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik", *Symposion*, 1 (1925), pp. 1-32.

[33]"Über das Unendliche", cit.

[34]"Über das Unendliche", p. 234.

Nella realtà non si trova l'infinito, secondo Hilbert; la continuità fa pensare a una divisibilità infinita, ma le teorie atomiche e dei quanti contraddicono questa intuizione ingenua; l'infinità dell'universo è ora messa in dubbio da teorie cosmologiche; in particolare se anche la geometria euclidea non è contraddittoria, questo non significa che essa abbia validità nella realtà, nel senso dell'esistenza di rette infinite nello spazio.

> Abbiamo già visto prima che l'infinito non si può mai trovare nella realtà, quale che siano le esperienze, le osservazioni e le scienze a cui si fa appello. E il pensiero sulle cose dovrebbe essere tanto diverso da ciò che avviene con le cose, e svolgersi in maniera tanto diversa, tanto lontano dalla realtà tutta? Non è vero, piuttosto, che quando crediamo di aver riconosciuto la realtà dell'infinito in un qualche senso, abbiamo potuto essere indotti a ciò solo perché di fatto nella realtà incontriamo tanto spesso dimensioni tanto immense sia nel grande che nel piccolo?[35].

Se l'idea dell'infinito è suscitata in noi dall'impressione delle dimensioni inavvicinabili, potrebbe darsi, anzi dovrebbe succedere che l'applicarla nello studio della natura comporti uno sfasamento tra realtà e pensiero; tale sfasamento non è invece confermato dai risultati della scienza. Allora

> Potrebbe darsi che l'infinito occupi un posto ben giustificato nel nostro pensiero e che vi svolga il ruolo di concetto indispensabile[36].

Che il ruolo sia indispensabile è facile convincersene. Già le formule aritmetiche con variabili, come un'equazione dell'algebra, contengono infiniti enunciati.

> Ciò costituisce chiaramente la sua caratteristica essenziale, solo in virtù della quale essa può rappresentare la soluzione di un problema aritmetico e rende necessaria una vera e propria dimostrazione, mentre le singole equazioni numeriche [...] possono essere verificate semplicemente mediante il calcolo[37].

[35] "Über das Unendliche", pp. 243-44.
[36] "Über das Unendliche", p. 237.
[37] "Über das Unendliche", pp. 237-38.

Un ulteriore esempio della indispensabilità del concetto di infinito è rappresentato dal fatto che Weierstrass è riuscito a eliminare infinitesimi ed infiniti dall'analisi, ma sono restate le successioni infinite e anche il sistema completo dei numeri, a cui si applicano le leggi logiche come il *tertium non datur*. Accettata l'indispensabilità, altrimenti non ci sarebbe matematica, resta da provare che l'uso di questo concetto è giustificato. ; bisogna completare Il lavoro di Weierstrass deve essere completato mostrando non che l'infinito è eliminabile, perché invero è necessario, ma che è solo un modo di dire, che è necessario come modo di dire.

Qui Hilbert inseriva e ripeteva le sue idee, già espresse nel 1922, e che ora gli sembravano ben articolate, sul pensiero contenutistico, sui segni come precondizione del pensiero, e sulla costruzione della aritmetica elementare. La teoria finitaria dei numeri "può essere costruita mediante soltanto costruzioni numeriche attraverso argomentazioni intuitive contenutistiche. Ma la scienza matematica non si esaurisce affatto in equazioni numeriche e nemmeno è riducibile soltanto ad esse".

> Si può però ben asserire che la matematica è un apparato che, applicato a numeri interi, deve dare sempre equazioni numeriche vere.

In questa dichiarazione, sia pure molto sintetica, si intravedono due sviluppi. Da una parte l'idea che la matematica abbia il carattere di una scienza teorica quale Weyl chiedeva in analogia alla fisica: una scienza che non è tutta puntualmente interpretata, ma solo nella sua globalità. La seconda idea che sarà ulteriormente precisata è che l'apparato teorico debba essere conservativo rispetto alle affermazioni contenutistiche controllabili.

Come nel 1922, Hilbert riconosceva la necessità, al di là della matematica iniziale contenutistica, di forme di comunicazione che oltrepassano le considerazioni intuitive. L'enunciato "se $\mathbf{a}$ è un segno numerico, deve essere sempre $\mathbf{a}+1=1+\mathbf{a}$" ha un contenuto di comunicazione, ed è "un giudizio ipotetico che asserisce qualcosa per il caso in cui sia dato un segno numerico $\mathbf{a}$". Negandolo in una affermazionze esistenziale lo trattiamo "come una combinazione mediante 'e' di infinite equazioni numeriche". Una affermazione esistenziale (ad esempio che esiste un numero primo maggiore di un primo dato) ha senso solo come enunciato parziale che "costituisce un salto nel transfinito se [. . .] viene espresso come un'autonoma asserzione".

> Da ciò segue in particolare che, nel senso dell'atteggiamento finitario, non possiamo usare l'alternativa secondo cui un'equazione come la precedente, in cui compare un segno numerico indeterminato, o è soddisfatta per ogni segno numerico oppure può essere refutata con un controesempio. Infatti, questa alternativa, in quanto applicazione del principio del terzo escluso, si basa essenzialmente sull'ipotesi che l'asserzione della validità universale di quell'equazione sia suscettibile di negazione.

In relazione a questo passo, secondo alcuni interpreti[38] in questa fase della sua elaborazione Hilbert era giunto a distinguere tre livelli: quello delle proposizioni contenutistiche o reali (il termine è del 1927), quello delle proposizioni finitarie generali, come $x + 1 = 1 + x$, e quello delle proposizioni che non sono realmente proposizioni, o sono proposizioni ideali, come sarà spiegato più avanti.

Il secondo livello sembra invocato nella citazione seguente.

> Ad ogni modo, constatiamo questo: se restiamo, come noi dobbiamo restare, nell'ambito degli enunciati finitari, vi regnano rapporti logici assai poco dominabili, e questa loro non dominabilità diventa insopportabile quando "tutti" ed "esiste" compaiono in proposizioni nidificate. Comunque, non valgono quelle leggi logiche che gli uomini hanno sempre adoperato da quando hanno incominciato a pensare, e che proprio Aristotele ci ha insegnato. Potremmo ora cercare di fissare le leggi logiche che valgono per il dominio delle asserzioni finitarie; ma ciò non ci servirebbe, poiché noi non vogliamo rinunciare all'uso delle semplici leggi della logica aristotelica, e nessuno, neppure se parlasse la lingua degli angeli, tratterrà gli uomini dal negare asserzioni universali, dal formare giudizi parziali e dall'adoperare il *tertium non datur*.

Hilbert si chiedeva allora come dobbiamo comportarci.

> Ricordiamoci che siamo matematici e che, in quanto tali, ci siamo trovati spesso in una simile situazione precaria dalla quale siamo usciti con il geniale metodo degli elementi ideali[39].

[38] Ad esempio Smoriński, cit., p. 39.

[39] "Über das Unendliche", p. 247.

La matematica ha già avuto esperienze del genere con l'infinito.

> Gli elementi ideali "all'infinito" [nella geometria] hanno il vantaggio di rendere il più possibile semplice e chiaro il sistema delle leggi di collegamento[40].

Lo stesso metodo si è usato per gli immaginari e per i numeri ideali. Hilbert si propone di usarlo anche in questo caso

> Anche qui agli enunciati finitari dobbiamo aggiungere gli enunciati ideali per conservare le semplici regole formali dell'usuale logica aristotelica [...]

e "mediante il metodo importante e fecondo degli elementi ideali, veniamo a conoscere un'interpretazione affatto peculiare e una comprensione radicale del concetto di infinito"[41].

> Ma come ottenere gli enunciati ideali? E' un fatto notevole, e comunque vantaggioso e promettente, che per procedere su questa via ci occorra proseguire semplicemente, in una maniera naturale e conseguente, gli sviluppi già compiuti dalla teoria dei fondamenti della matematica. In effetti, teniamo presente che già la matematica elementare va al di là del punto di vista della teoria intuitiva dei numeri. Il metodo del calcolo letterale algebrico non è compreso infatti nella teoria intuitiva-contenutistica dei numeri come noi l'abbiamo costruita finora. In questa, le formule sono state adoperate sempre soltanto per la comunicazione: le lettere significavano segni numerici e con un'equazione veniva comunicata la coincidenza di due segni. Invece, nell'algebra consideriamo le espressioni letterali in se stesse come costrutti autonomi e con esse vengono formalizzati i teoremi contenutistici della teoria dei numeri. Al posto degli enunciati sui segni numerici si hanno formule che sono a loro volta oggetti concreti di una teoria intuitiva; e al posto di una dimostrazione contenutistica sui numeri subentra la derivazione di una formula da un'altra formula secondo certe regole.

[40] "Über das Unendliche", p. 238.
[41] "Über das Unendliche", p. 238.

> Dunque, come viene mostrato già dall'algebra, si ha un aumento di oggetti finitari [...] [al posto di $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ si prende $a + b = b + a$, che] non è più la comunicazione immediata di un qualcosa di contenutistico ma è un certo costrutto formale [la cui relazione con i precedenti è che se sostituiamo le variabili con segni numerici con un semplice processo dimostrativo otteniamo i singoli enunciati finitari]. Arriviamo quindi alla concezione secondo la quale $a, b, +, =$ come pure l'intera formula $a + b = b + a$ in sé non significano niente, esattamente come i segni numerici; ma dalla formula se ne possono ottenere altre alle quali assegniamo un significato, e precisamente concependole come comunicazioni di enunciati finitari. Generalizzando questa concezione, la matematica diviene un patrimonio di formule: in primo luogo, formule cui corrispondono comunicazioni contenutistiche di enunciati finitari, e in secondo luogo altre formule che non significano niente e che sono *i costrutti ideali della nostra teoria*[42].

Hibert ribadiva qui la distinzione, nel campo delle formule, quindi al di là della matematica contenutistica, tra le comunicazioni contenutistiche di enunciati finitari, che pure non possono essere negate, e le formule che non significano proprio niente, gli enunciati ideali.

In queste formule non ci sono solo i tradizionali segni matematici, ma anche i simboli logici, trattati alla stessa stregua dei primi. Questo suggeriva a Hilbert una riflessione sulla possibilità e sul senso di usare la logica non per la comunicazione ma come oggetto formale a cui si applica la metamatematica.

Dopo gli enunciati elementari e quelli già più problematici dell'algebra

> abbiamo introdotto ora gli enunciati ideali che devono servire affinché valgano di nuovo in generale le consuete leggi della logica. Ma poiché gli enunciati ideali, cioè le formule, nella misura in cui non esprimono asserzioni finitarie, non significano niente, allora su di essi non possono essere applicate contenutisticamente le operazioni logiche come sugli enunciati finitari. E' dunque necessario formalizzare le operazioni logiche e anche le dimostrazioni matematiche stesse; ciò richiede che le relazioni logiche siano tradotte in formule, sicché oltre ai segni matematici dobbiamo introdurre anche segni logici come

[42] "Über das Unendliche", pp. 247-49.

$$\begin{array}{cccc} \wedge, & \vee, & \rightarrow, & \neg \\ \text{e,} & \text{o,} & \text{implica,} & \text{non} \end{array}$$

e oltre alle variabili matematiche $a, b, c, \ldots$ dobbiamo usare anche variabili logiche, cioè enunciati variabili $A, B, C, \ldots$

Come può avvenire ciò? Ci viene incontro ora, per nostra fortuna, quell'armonia prestabilita che tanto spesso osserviamo nello sviluppo storico della scienza, che venne in aiuto di Einstein quando egli per la sua teoria della gravitazione trovò già completamente sviluppato il calcolo generale degli invarianti; noi incontriamo il *calcolo logico* come un progredito lavoro preparatorio. Certamente questo in origine fu creato sotto tutt'altri punti di vista ed è perciò che anche i segni del calcolo logico furono introdotti originariamente solo per la comunicazione; tuttavia, è coerente negare adesso ogni significato anche ai segni logici, come già ai segni matematici, e dichiarare che anche le formule del calcolo logico in se stesse non significano niente ma sono enunciati ideali.

Con il calcolo logico possediamo un linguaggio segnico, che permette di tradurre in formule i teoremi matematici e di esprimere il ragionamento logico mediante processi formali. In perfetta analogia con il passaggio dalla teoria contenutistica dei numeri all'algebra formale, noi consideriamo ora i segni e i simboli di operazioni del calcolo logico astraendo dal loro significato contenutistico. Con ciò infine, invece della scienza matematica contenutistica che viene comunicata con il linguaggio ordinario, otteniamo un patrimonio di formule che contengono segni matematici e logici che si susseguono secondo determinate regole. Agli assiomi matematici corrispondono alcune formule; al ragionamento contenutistico corrispondono le regole secondo cui si susseguono le formule: il ragionamento contenutistico viene rimpiazzato da un operare esterno secondo regole e con ciò viene compiuto il passaggio rigoroso da una trattazione ingenua ad una trattazione formale, sia per gli assiomi stessi (che pure in origine erano ingenuamente intesi essere delle verità fondamentali, ma che già da lungo tempo sono considerati nell'assiomatica moderna come mere connessioni di concetti) sia anche per il calcolo logico (che originariamente doveva essere soltanto un altro linguaggio)[43].

Il sistema presentato da Hilbert incorporava il simbolo di scelta ed era costituito dai seguenti assiomi[44]:

I. *Assiomi dell'implicazione*

$A \to (B \to A)$
(aggiunta di un'ipotesi)

$(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
(eliminazione di un enunciato)

II. *Assiomi della negazione*

$(A \to (B \wedge \neg B)) \to \neg A$
(principio di contraddizione)

$\neg\neg A \to A$
(principio della doppia negazione)

III. *Assiomi transfiniti*

$(a)A(a) \to A(b)$
(inferenza dall'universale al particolare,
assioma aristotelico)

$\neg(a)A(a) \to (Ea)\neg A(a)$
(se un predicato non vale per tutti,
esiste un controesempio)

$\neg(Ea)A(a) \to (a)\neg A(a)$
(se non esiste un esempio,
l'enunciato è falso per ogni a)

che derivano "tutti da un unico assioma che contiene al tempo stesso il nucleo dell'assioma finora più contestato della letteratura matematica, il cosiddetto assioma di scelta":

[43]"Über das Unendliche", pp. 249-51.

[44]Oltre alle regole del *modus ponens* e di sostituzione.

$$A(a) \to A(\varepsilon A)$$

IV. *Assiomi dell'identità*

$$a = a$$

$$a = b \to (A(a) \to A(b))$$

V. *Assiomi del numero*

$$a + 1 \neq 0$$

Assioma dell'induzione completa[45].

Questo è il sistema che la scuola di Hilbert usa per formalizzare le dimostrazioni matematiche ed applicare ad esse la teoria della dimostrazione. Ma nel contesto del metodo degli elementi ideali, appare naturale anche un'altra giustificazione e un altro senso della dimostrazione di non-contraddittorietà.

> Ma nella gioia suscitata, in generale dal successo, e in particolare dall'aver trovato già pronto senza sforzo alcuno da parte nostra uno strumento indispensabile come il calcolo logico, non dobbiamo dimenticare qual è la condizione essenziale del nostro lavoro. C'è infatti una condizione, una sola ma assolutamente necessaria, alla quale è collegato l'uso del metodo degli elementi ideali, e questa è la dimostrazione della non-contraddittorietà. L'estensione mediante aggiunta di ideali è infatti ammissibile solo se con essi non sorgono contraddizioni nel precedente e più ristretto dominio, se dunque sono sempre valide nel precedente dominio le relazioni che risultano per i precedenti costrutti quando si eliminano i costrutti ideali[46].

La contraddizione non deve presentarsi nel dominio delle affermazioni contenutistiche, perché queste hanno un significato. Una contraddizione formale nel senso di $A \wedge \neg A$ dove A è un enunciato ideale non ha il significato di una contraddizione non avendo nessun significato. Non si debbono quindi poter dimostrare nuove relazioni elementari, come $0 = 1$ o $1 \neq 1$; in tal modo

[45] In altre edizioni del testo della conferenza è precisata la forma $A(0) \wedge (x)(A(x) \to A(x+1)) \to (a)A(a)$.

[46] "Über das Unendliche", p. 252-53.

si ha anche la non-contraddittorietà come conseguenza della proprietà della conservatività dell'estensione mediante elementi ideali. Hilbert si avvicinava tuttavia a rovesciare anche l'implicazione e a porre la non-contraddittorietà come condizione sufficiente per la accettazione della introduzione di elementi ideali[47].

Infine un problema che gli stava sempre a cuore era quello della risolubilità di ogni problema – assioma a cui continuava a credere, visti i ripetuti riferimenti.

> Ora la mia teoria della dimostrazione non potrà certo indicare in generale una via lungo la quale ogni problema matematico si lasci risolvere: una tale via neanche esiste. Tuttavia rientra interamente nell'ambito della nostra teoria la dimostrazione che è non-contraddittoria l'ipotesi della risolubilità di ogni problema matematico[48].

L'affermazione non è molto comprensibile[49].

Nel 1926 Hilbert aveva trovato un farmaco, proveniente dagli Stati Uniti, che aveva sostanzialmente migliorato le due condizioni di salute[50], e continuava la sua polemica con Brouwer, che per parte sua nel 1927 aveva parlato del formalismo e richiesto in pratica che Hilbert riconoscesse il suo debito per la distinzione tra una matematica finitista e una transfinita, e per l'uso di

[47]Ma siccome il banco di prova definitivo per ogni nuova teoria è il suo successo in questioni ad essa preesistenti per la cui soluzione essa non era stata creata, siccome anche le teorie "dai loro frutti si riconosceranno", Hilbert affrontava nella seconda parte della conferenza la questione del continuo, pensando di poter dimostrare l'ipotesi di Cantor. La sua idea era quella di enumerare le definizioni dei numeri reali, che *a posteriori* è stata considerata una anticipazione, sia pure molto grezza, del metodo con cui Gödel darà una dimostrazione di consistenza. Questo argomento tuttavia esula dalla nostra considerazione

[48]"Über das Unendliche", p. 254

[49]Ricordiamo tuttavia che Gödel userà una formulazione simile quando nel 1930 discuterà il significato del teorema di completezza logica. Nell'occasione aveva manifestato il dubbio che l'esistenza come conseguenza della non contraddittorietà presupponesse "che ogni problema matematico sia risolvibile. O, più precisamente, presuppone[sse] che non si possa dimostrare l'insolubilità di alcun problema" (si veda il cap. "Il teorema di completezza", *supra*, p. 118). Questo per Gödel era tuttavia smentito dalle sue scoperte sull'incompletezza. Non è escluso che dietro l'affermazione di Hilbert ci fossero ragionamenti non esplicitati che assumevano la dimostrabilità della completezza dell'aritmetica.

[50]Peggioreranno di nuovo dopo il congresso di Bologna del 1928, pare in seguito a farmaci assunti in Italia.

quella finitista nella metamatematica; polemicamente denunciava la pochezza dei risultati ottenuti dal formalismo. Hilbert rispondeva indirettamente in una seconda conferenza tenuta nel 1927 ad Amburgo[51].

Amburgo 1927

La conferenza del 1927 è importante per diverse precisazioni ivi contenute: la risposta definitiva a Poincaré, la formulazione del programma come dimostrazione della conservatività dell'estensione transfinita, l'adesione al suggerimento di Weyl, una difesa della formalizzazione che non lo qualifica come formalista perché "gioco di formule permette di esprimere unitariamente tutto il contenuto concettuale della scienza matematica".

A Brouwer che aveva espresso giudizi sprezzanti sul "gioco di formule", Hilbert ribatteva che

> questo gioco di formule si svolge secondo regole determinate, nelle quali si esprime la tecnica del nostro pensiero.
>
> Il metodo degli elementi ideali sembra talvolta inserire a pieno diritto la parte formale nella matematica; o almeno giustifica una matematica arricchita da larghe parti non interpretabili ma ormai essenziali.

Polemicamente affermava anche che "togliere al matematico questo tertium non datur sarebbe come vietare all'astronomo il telescopio o al pugile l'uso dei pugni".

Nello stesso tempo veniva incontro al suggerimento avanzato da Weyl.

> Questo gioco di formule permette di esprimere unitariamente tutto il contenuto concettuale della scienza matematica e di svilupparlo in maniera tale da rendere chiare le interconnessioni dei singoli teoremi e dei singoli risultati. Non è per niente ragionevole stabilire in generale la richiesta che ogni singola formula sia interpretabile per se stessa; corrisponde invece alla natura di una teoria il fatto che all'interno del suo sviluppo non si abbia bisogno di ricorrere all'intuizione o al significato. Il fisico richiede da una teoria proprio che i teoremi particolari vengano derivati dalle leggi di natura o dalle ipotesi soltanto mediante inferenze e senza

[51] "Die Grundlagen der Mathematik", *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 6 (1928), pp. 65-85; trad. it. pp. 267-89; cit. p. 279.

> invocare ulteriori condizioni [...] Soltanto certe combinazioni e certe conseguenze delle leggi fisiche possono venir controllate mediante l'esperimento – e allo stesso modo nella mia teoria della dimostrazione soltanto gli enunciati reali sono immediatamente suscettibili di verifica. Il pregio delle dimostrazioni puramente esistenziali sta proprio nel fatto che con esse si elimina la costruzione particolare e si riassumono con un'idea basilare più costruzioni diverse, cosicché emerge soltanto quel che è essenziale per la dimostrazione. Brevità ed economia di pensiero sono la ragion d'essere delle dimostrazioni esistenziali. I teoremi puramente esistenziali sono stati realmente le più importanti pietre miliari nello sviluppo storico della nostra scienza[52].

Hilbert parlava come se il suo programma avesse avuto successo, perché i successi parziali non erano mancati. Ackermann stava lavorando a perfezionare la correzione della sua dimostrazione del 1924, relativa all'eliminabilità dell'operatore di scelta dalle dimostrazioni delle formule numeriche, da cui seguiva la non-contraddittorietà dell'aritmetica con l'induzione ristretta a formule senza quantificatori. La pubblicazione sarebbe apparsa nel 1928. Hilbert e Bernays ne parlavano come di cosa fatta. von Neumann insoddisfatto dei tentativi di Ackermann nel 1927 aveva fatto vedere che l'assioma di induzione seguiva dall'assioma transfinito applicato a variabili di ordine superiore, con un assioma di estensionalità aggiuntivo; il risultato finale non sembrava lontano.

In base al risultato di Ackermann, Hilbert poteva presentare l'obiettivo del suo programma in un modo che si può riassumere come segue: se T è un sistema formale di aritmetica finitista ed F è un sistema di matematica transfinita tale che T dimostri la non contraddittorietà di F, allora ogni asserzione universale φ derivabile in F è già derivabile in T.

Hilbert presentava l'esempio del teorema di Fermat. Supponendo di aver trovato una dimostrazione in F del teorema "facendo uso della ε-funzione logica", allora si avrebbe una dimostrazione di

$$\mathbf{Z}a \wedge \mathbf{Z}b \wedge \mathbf{Z}c \wedge (p > 2) \to a^p + b^p \neq c^p.$$

Se fossero dati segni numerici $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{p}$, con $\mathbf{p} > 2$ che soddisfano l'equazione $\mathbf{a}^{\mathbf{p}} + \mathbf{b}^{\mathbf{p}} = \mathbf{c}^{\mathbf{p}}$, questa relazione potrebbe essere dimostrata finitisticamente,

[52] "Die Grundlagen der Mathematik", cit., pp. 282-3.

e quindi anche in F, e d'altra parte in questo sistema, per specializzazione, si avrebbe $\mathbf{a^p} + \mathbf{b^p} \neq \mathbf{c^p}$, che non può darsi per la dimostrazione finitaria di non contraddittorietà. Dunque se il teorema (di Fermat) è dimostrato in F, allora non possono essere dati $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{p}$, con $\mathbf{p} > 2$, che soddisfano l'equazione $\mathbf{a^p} + \mathbf{b^p} = \mathbf{c^p}$, e le precedenti considerazioni sono una dimostrazione finitista di questo fatto.

Non è del tutto chiaro se Hilbert ritenesse le considerazioni precedenti solo una traccia di un modo possibile per derivare la conservatività dalla non contraddittorietà, oppure se le ritenesse sufficienti, in modo da potersi concentrare unicamente sulla dimostrazione della premessa, cioè sulla dimostrazione finitista della non contraddittorietà di F.

Hilbert in verità non fu mai così esplicito nella presentazione del programma come avente l'obiettivo della dimostrazione della conservatività; ma molti lo hanno letto in questo modo[53]. Anche il formalismo rimproveratogli da Weyl era inteso da molti come una strategia giustificativa; in un ricordo informale di von Neumann del 1955 si legge che "Hilbert venne fuori con quest'idea ingegnosa per giustificare la matematica "classica" [...]: Anche nel sistema intuizionistico è possibile dare un resoconto rigoroso di come opera la matematica classica, benché non se ne possano giustificare i procedimenti[54]". Questo significa che la formalizzazione di Hilbert era rivolta a una descrizione esterna del funzionamento logico della matematica classica che poteva renderla chiara, se non accettabile, a un intuizionista.

Hilbert pensava anche di chiudere i conti con l'obiezione di Poincaré:

> Già Poincaré in diversi luoghi aveva fatto considerazioni che sono opposte alla mia concezione; innanzi tutto egli contestò in partenza la possibilità di una dimostrazione di non contraddittorietà degli assiomi aritmetici, affermando che la non contraddittorietà del procedimento dell'induzione completa non avrebbe potuto mai essere dimostrata se non a sua volta di nuovo mediante il procedimento di induzione. Ma, come mostra la mia teoria, nella fondazione dell'aritmetica si incontrano due metodi che procedono in modo ricorsivo e cioè, da un lato, la composizione intuitiva dei numeri interi come segni numerici [...] l'induzione *contenutistica* e, dall'altro lato, l'induzione *formale* vera

[53] Vedremo la presentazione di von Neumann nel 1930 a Königsberg.

[54] J. von Neumann, "The Mathematician", postumo in R. B. Heywood (ed.), *The Works of the Mind*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1966, pp. 180-96; p. 178.

e propria[55]: questa si basa sull'assioma di induzione e solo con questo la variabile matematica è in grado di svolgere il suo ruolo nel formalismo[56].

Chi lavorava in metamatematica accettava la distinzione di Hilbert. Per esempio Herbrand nella tesi[57] del 1930 chiamava quella che interveniva nella metamatematica "l'induzione che si ferma nel finito"; essa consiste solo nell'"indicazione, in una formula, di una procedura che per ogni caso particolare deve essere ripetuta un numero finito di volte".

Tuttavia nella metamatematica occorrono e si dimostrano affermazioni generali, in particolare quando si considera la non contraddittorietà. Hilbert rispondeva nel 1928:

> Nell'indagine della non contraddittorietà si tratta della possibilità che venga presentata una dimostrazione che porta a una contraddizione. Se non mi si può presentare una siffatta dimostrazione, tanto meglio – poiché allora mi viene risparmiata la fatica di andare a esaminarla. Se invece mi sta davanti questa dimostrazione, allora io posso estrarne certe singole parti e prenderle in considerazione per se stesse, e quindi ricomporre i particolari segni numerici che occorrono in essa e che mi vengono dati già costruiti e composti. In ciò l'inferenza da n a $n+1$ non viene ancora affatto usata; anzi, come già sappiamo da Dedekind e come è di nuovo confermato dalla mia teoria della dimostrazione, il riconoscimento della validità di questa inferenza da n a $n+1$ è da qui ancora molto lontano e costituisce un compito essenzialmente diverso[58].

La conclusione di questa disputa, che negli anni successivi ha visto numerosi interventi e interpretazioni, sembra potersi ragionevolmente riassume nel seguente modo: se si richiede che le proprietà alle quali si applica l'induzione siano tali che si possa sempre verificare se valgono o no per ciascun

---

[55][In una ristampa dell'anno successivo Hilbert eliminò le parole "induzione *contenutistica*" e "*formale*" lasciando il primo procedimento senza nome e chiamando il secondo "induzione propria".]

[56]"Die Grundlagen der Mathematik", *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 6 (1928), pp. 65-85; trad. it. pp. 267-89; cit. p. 279.

[57]J. Herbrand, *Recherches sur la théorie de la démonstration*, cit.

[58]"Probleme der Grundlegung der Mathematik", 1928, cit., p. 298.

caso e quali siano le operazioni necessarie per la verifica, come spiegava Herbrand, allora nel formalismo si ha a che fare solo con proposizioni o senza quantificatori o con solo quantificatori universali nel prefisso. Questo corrisponderebbe all'induzione usata nell'aritmetica ricorsiva primitiva, e non a quella applicata a formule qualsiasi.

Resta vero comunque che anche quella ristretta è valida perché gli oggetti ai quali si applica sono, nel caso dei numerali, o 1 o un numerale seguito da 1, cioè hanno una definizione induttiva. Secondo Weyl era stato merito di Poincaré aver indicato questa circostanza fondamentale.

Weyl era presente alla conferenza del 1927, ed espresse sul momento e poi pubblicò alcuni commenti[59]. Il primo riguarda proprio la questione dell'induzione. Nonostante Hilbert insista che in metamatematica si lavora solo con oggetti concreti, egli non tratta soltanto $0, 0'$ e $0''$, ma un qualsiasi $0''^{\cdots\prime}$: "si sottolinei pure il 'concretamente dato'; d'altra parte è altrettanto essenziale che gli argomenti contenutistici nella teoria della dimostrazione siano sviluppati *in ipotetica generalità*, per *qualsiasi* dimostrazione, per *qualsiasi* numerale".

Weyl non intendeva l'osservazione come una critica, riconoscendo che le applicazioni dell'induzione fatte da Hilbert avevano il segno caratteristico evidente del pensiero contenutistico; tuttavia Poincaré aveva avuto ragione a indicare la differenza.

Per quanto riguardava l'intuizionismo, Weyl ripeteva che merito di Brouwer era stato quello di insistere che la matematica dovesse essere fatta di proposizioni reali, per usare la terminologia hilbertiana; con la sua analisi aveva tuttavia mostrato quanto la matematica avesse ovunque trasceso i limiti del pensiero contenutistico, che era suo merito aver indicato. Hilbert rispettava tali limiti nel suo studio delle teorie formalizzate, ma Hilbert non sopportava l'idea di una mutilazione della matematica. Restava da vedere se "egli abbia avuto successo nel salvare la matematica classica *per mezzo di una radicale reinterpretazione del suo significato* senza ridurre il suo patrimonio", vale a dire formalizzandola e trasformandola in linea di principio da un sistema di risultati intuitivi in un gioco di formule con regole fisse.

Weyl non rinunciava come si vede alle sue idee, e tuttavia rendeva un caloroso omaggio al significato e alla portata della mossa di Hilbert, e al suo

[59] H. Weyl, "Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik", *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 6 (1928), pp. 86-8; trad. inglese in van Heijenoort, cit., pp. 480-4, con note di J. van Heijenoort, pp. 480-2.

genio di completare in questo modo la dedizione di una vita ai principi del metodo assiomatico.

> E sono in grado di assicurare che non c'è nulla che mi separi da Hilbert nella valutazione epistemologica della situazione così creata.

La nuova situazione era stata creata da Hilbert stesso con l'introduzione della parte formale, aveva quindi cambiato il panorama della matematica. Hilbert aveva quindi asserito che il passaggio attraverso proposizioni ideali era un artificio formale legittimo nella dimostrazione di proposizioni reali; Weyl lo accettava come principio morale e gnoseologico, senza per questo pronunciarsi se fosse dimostrabile, e secondo lui questo doveva essere ammesso anche da un intuizionista. Rimaneva incerto se il gioco valesse la candela, nel senso che per Weyl la difficoltà o l'interesse per la dimostrazione di una proposizione reale "non sta tanto nel trovare una dimostrazione finitista, quanto nel trovare i giudizi reali accettabili agli intuizionisti e tuttavia in grado di dare un contenuto a tutti i teoremi della matematica classica", cioè potremmo dire nel trovare il contenuto costruttivo dei teoremi classici.

Infine Weyl sottolineava l'enfasi di Hilbert sui caratteri della fisica teorica, facendogli dire ancora di più forse di quello che Hilbert intendeva: le assunzioni e le leggi della fisica teorica in genere non hanno un significato che possa realizzarsi immediatamente nell'intuizione; non sono le singole proposizioni, ma il sistema teorico come un tutto che deve essere confrontato con l'esperienza. Si tratta di una costruzione simbolica del mondo, più che di una sua descrizione. L'interesse teorico nei confronti di tale costruzione non è rivolto alle proposizioni reali, quanto piuttosto alle assunzioni ideali che si manifestano negli esperimenti reali. Con le osservazioni di Hilbert si poteva ora dire che già la matematica pura travalica con le assunzioni ideali i limiti di ciò che è intuitivamente accertabile.

Nel caso della matematica, Weyl vedeva una questione filosofica nascere da questa visione, quella della scelta del sistema degli assiomi, per la cui giustificazione la non contraddittorietà non gli pareva sufficiente. Per adesso sembrava che ci si dovesse accontentare di un riferimento alla ragionevolezza della storia, pur nella consapevolezza che i suoi protagonisti hanno spesso scambiato per evidenti le loro costruzioni arbitrarie, forse mossi dal successo delle stesse.

Se, "come sembra essere", Hilbert avrebbe prevalso sull'intuizionismo, il suo successo avrebbe segnato "*una decisiva sconfitta dell'atteggiamento filosofico della fenomenologia pura*", che si sarebbe mostrata così insufficiente per la comprensione della scienza creativa perfino in quell'area della cognizione che è più fondamentale e più disposta ad aprirsi all'evidenza, vale a dire la matematica.

BOLOGNA 1928

Al congresso di Bologna del 1928, Hilbert pose quattro problemi. I primi due riguardavano le dimostrazioni di non contraddittorietà. Dopo aver erroneamente affermato che Ackermann e von Neumann avevano dimostrato la non contraddittorietà dell'aritmetica, chiedeva l'estensione al caso che la funzione di scelta ε fosse applicata a formule anche con variabili funzionali. Il secondo compito era quello di estendere la dimostrazione a teorie per l'analisi e che inglobassero parte della teoria degli insiemi. Gli altri due sono già stati considerati, sulla completezza dell'aritmetica e sulla completezza delle regole logiche.

KÖNIGSBERG 1930

Nel 1930 Gödel parlò del suo teorema di incompletezza a una conferenza tenuta a Königsberg nel settembre. La conferenza è importante perché da essa si consolidò la tradizione storiografica di parlare di tre scuole fondazionali. In effetti nell'occasione Rudolf Carnap presentò il logicismo, Arendt Heyting, il primo allievo di Brouwer nel campo dei fondamenti[60], l'intuizionismo e John von Neumann il formalismo di Hilbert[61].

von Neumann descrisse il programma di Hilbert come ricerca della dimostrazione della conservatività:

> I problemi che la teoria della dimostrazione di Hilbert deve risolvere sono i seguenti:
>
> 1. Enumerare tutti i simboli ...
>
> [...]

[60] Un allievo un po' infedele, perché non condivideva la preclusione linguistica di Brouwer, e a lui si devono i sistemi formalizzati di logica e aritmetica intuizionistica che hanno permesso il confronto metamatematico con quelli classici.

[61] Gli atti furono pubblicati nel 1931 nel vol. 2 di *Erkenntinis*; trad. inglese in Benacerraf e Putnam, *Philosophy of Mathematics*, cit., xxx.

> 3. Dare una procedura costruttiva che permetta la progressiva generazione di tutte le formule che corrispondono alle asserzioni 'dimostrabili' della matematica classica [...]
>
> 4. Mostrare (in un modo finito-combinatorio) che quelle formule che corrispondono a asserzioni finitisticamente controllabili (verificabili aritmeticamente) della matematica classica possono essere dimostrate (vale a dire costruite) come in 3 se e solo se la effettiva 'verifica' ora menzionata fornisce la correttezza delle corrispondenti asserzioni matematiche.
>
> Se 1-4 fossero garantiti, sarebbe stabilita la assoluta stabilità della matematica classica rispetto all'obiettivo di essere un metodo abbreviato per il calcolo di espressioni aritmetiche, per le quali la trattazione elementare sarebbe troppo complicata.

In quell'occasione si alzò a parlare Gödel con l'annuncio, sia pure criptico, del suo risultato, che non fece colpo se non su von Neumann, a giudicare anche dai resoconti pubblicati delle discussioni[62].

Gödel accettava implicitamente la versione data da von Neumann al programma di Hilbert, senza menzionarlo, e con qualche variante terminologica (Gödel preferisce parlare di contenuto concettuale piuttosto che di significati dati dalla manipolazione dei simboli):

> Secondo la concezione formalista agli enunciati significativi della matematica si aggiungono (pseudo-)enunciati transfiniti che in sé non hanno significato ma servono solo ad arrotondare il sistema, proprio come in geometria si ottiene un sistema ben tornito con l'introduzione dei punti all'infinito. Questa concezione presuppone che quando si aggiunge al sistema S degli enunciati significativi il sistema T degli enunciati e assiomi transfiniti e quindi si dimostra un enunciato di S attraverso una digressione su enunciati di T allora questo enunciato è corretto nel suo contenuto in modo che con l'aggiunta degli assiomi transfiniti nessun enunciato concettualmente falso diventa dimostrabile. Di solito si rimpiazza questa richiesta con quella della non contraddittorietà. Vorrei indicare che queste due richieste non possono in alcun modo essere considerate equivalenti.

[62] K. Gödel, "Diskussion zur Grundlegung der Mathematik", *Erkenntnis*, 2 (1931), pp. 147-51; con trad. inglese in *Collected Works*, vol. 1, cit., pp. 201-5

La spiegazione di Gödel era la seguente:

> Infatti, se un enunciato significativo p è dimostrabile in un sistema formale non contraddittorio A (poniamo quello della matematica classica), tutto quello che ne segue è che non-p non è dimostrabile nel sistema A. Tuttavia, rimane concepibile che uno potrebbe riconoscere non-p attraverso qualche considerazione di tipo concettuale (intuizionistica) che *non* può essere formalmente rappresentata in A. In tale caso, nonostante la non contraddittorietà di A, sarebbe dimostrabile in A un enunciato la falsità del quale si può riconoscere attraverso considerazioni finite.

Gödel ammetteva che se si definisce "enunciato significativo" in modo restrittivo, ad esempio limitato alle equazioni numeriche, allora non può darsi una eventualità come quella descritta. Per enunciati più complessi invece si potrebbe verificare.

> Tuttavia, sarebbe per esempio del tutto possibile che si potesse dimostrare con i metodi transfiniti della matematica classica un enunciato della forma $\exists x F(x)$ dove $F(x)$ è una proprietà finita dei numeri naturali [...] e d'altra parte riconoscere attraverso considerazioni concettuali che tutti i numeri hanno la proprietà non-F; quello che voglio mettere in evidenza è che questo rimarrebbe possibile anche se si fosse verificata la non contraddittorietà del sistema formale della matematica classica. Giacché non si può affermare con certezza di nessun sistema formale che in esso sono rappresentabili tutte le considerazioni concettuali.

Le osservazioni di Gödel furono intese come una ripetizione della posizione di Brouwer sulla non rappresentabilità formale del pensiero matematico. Brouwer aveva tenuto a Vienna nel 1928 una conferenza su *Mathematik, Wissenschaft und Sprache* alla quale Gödel aveva assistito (e forse anche WIttgenstein, nel ricordo di Gödel) e dalla quale era rimasto impressionato. Al circolo di Schlick, il 23 dicembre 1929, secondo un diario di Carnap, fece una esposizione sulla inesauribilità della matematica nella quale espresse l'opinione che la matematica non sia completamente formalizzabile: "data una qualsiasi formalizzazione, ci sono problemi che si possono capire ed esprimere nel linguaggio ordinario, ma che non possono essere espressi nel linguaggio dato".

A Königsberg tuttavia Gödel tuttavia non si riferiva alla espressibilità dei linguaggi, ma precisamente al proprio risultato:

> Si possono dare (sotto l'assunzione della non contraddittorietà della matematica classica) esempi di enunciati (perfino del genere di quelli di Goldbach o di Fermat) che sono concettualmente corretti ma non dimostrabili nel sistema della matematica classica. Perciò, se si aggiunge la negazione di un tale enunciato agli assiomi della matematica classica si ottiene un sistema non contraddittorio nel quale è dimostrabile un enunciato concettualmente falso.

Si può anticipare l'esempio di questo tipo di enunciati, e riassumere così[63] il risultato di Gödel: egli costruisce per S (trascuriamo per ora di quale sistema S esattamente si tratti) un enunciato che afferma la propria indimostrabilità in S. L'enunciato è della forma della chiusura universale di relazioni finitiste, del tipo $\forall x \neg Dim(x, \underline{q})$ dove $Dim(x, \underline{q})$ non contiene quantificatori non ristretti, un enunciato finitistico generale; ad esso si applicherebbero dunque le considerazioni del 1927 sulla conservatività.

Assumendo la non contraddittorietà di S, è verificabile finitisticamente che l'enunciato non è dimostrabile. Con considerazioni transfinite, non solo si riconosce che l'enunciato è vero, ma lo si dimostra in T. Se ora S potesse dimostrare la non contraddittorietà di T, e se l'argomento del 1927 fosse valido, anche S dovrebbe dimostrare l'enunciato, cioè la sua indimostrabilità. Ma allora T dovrebbe dimostrare sia la dimostrabilità sia la non dimostrabilità dell'enunciato, e sarebbe contraddittorio. Il programma della non contraddittorietà ai fini della conservatività sembra fallire, o richiedere una restrizione degli enunciati finitistici.

Hilbert non fu informato subito del risultato di Gödel; solo nel dicembre del 1930 Bernays chiese a Gödel notizie sull'articolo che stava scrivendo. Contemporaneamente Hilbert in una nuova conferenza ad Amburgo sosteneva di poter dimostrare la completezza dell'aritmetica (di nuovo affermando che Ackermann e von Neumann avevano dimostrato la non contraddittorietà) presentando una regola di inferenza che considerava finitaria: se per ogni numerale n la formula numerica $\varphi(n)$ era verificabile finitisticamente, allora $\forall x \varphi(x)$. Secondo Hilbert la regola era una regola ristretta, in quanto nelle

[63] Con il commento di Smoriński.

premesse non si consideravano tutti i termini, ma solo i numerali, mentre $\forall x\varphi(x)$ in genere affermava la verità di φ per tutti i termini.

Quando conobbe il risultato di Gödel, Hilbert reagì proponendo una generalizzazione della suddetta regola, la cosiddetta ω-regola

$$\frac{\varphi(0), \varphi(1), \ldots}{\forall x\varphi(x).}$$

dove non si chiedeva più che tutte le $\varphi(n)$ fossero verificabili finitisticamente.

Per mezzo di questa regola, nel suo ultimo lavoro[64] Hilbert dimostrava tutti gli enunciati aritmetici veri. Gödel commentò[65]: "Come può scrivere un tale articolo dopo quello che io ho fatto?".

Nella prefazione alle *Grundlagen der Mathematik* del 1934 Hilbert scrisse[66]:

> [...] L'opinione talvolta espressa che dai risultati di Gödel segua la non eseguibilità della mia teoria della dimostrazione viene [qui] mostrata erronea. Questo risultato mostra in effetti solo che per dimostrazioni più avanzate di non contraddittorietà si deve usare il punto di vista finitista in un modo più profondo di quello necessario per la considerazione dei formalismi elementari.

Il significato di questa oscura osservazione può essere duplice: sia che la formalizzazione della matematica attuale, o per lo meno dell'aritmetica, non rappresenta la matematica finitista, sia che per la gerarchia di teorie che va dall'aritmetica all'analisi alla teoria degli insiemi occorrono strumenti matematici via via più forti, necessariamente trascendenti i metodi finitisti come originariamente concepiti.

Gödel stesso in un primo momento sembrò ritenere ragionevole la prima interpretazione, quando affermò, nell'articolo del 1931, che i teoremi di incompletezza non segnavano la fine del programma di Hilbert:

---

[64] "Bewis des tertium non datur", *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, 1931, pp. 120-5; trad it. in *Ricerche*, cit., pp. 325-30.

[65] A Olga Taussky-Todd. Si veda il ricordo in R. Gödel, O. Taussky-Todd, S. C. Kleene, G. Kreisel, *Gödel Remembered*, Bibliopolis, Napoli, 1987, p. 40.

[66] D. Hilbert e P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, Springer, Berlin, 1934, cit. a p. vii della seconda edizione 1968.

> Questo punto di vista [di Hilbert] presuppone solo l'esistenza di una dimostrazione di non contraddittorietà nella quale non si usi nulla se non strumenti finitisti, ed è concepibile che esistano dimostrazioni finitiste che *non possono* essere espresse nei formalismi ai quali si applicano i teoremi di incompletezza[67].

Tuttavia due anni dopo si ricredeva:

> Sfortunatamente la speranza di riuscire [a ottenere la desiderata dimostrazione di non contraddittorietà] è del tutto svanita [...] tutte le dimostrazioni [finitarie] [...] finora costruite possono essere espresse facilmente nel sistema dell'analisi classica o perfino dell'aritmetica classica, e ci sono ragioni per credere che questo varrà per ogni dimostrazione che si sarà mai in grado di costruire[68].

La seconda interpretazione allude a quello che di fatto è avvenuto nello sviluppo successivo della teoria della dimostrazione[69].

[67] K. Gödel, *Collected Works. Vol. I*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1986, p. 195; trad. it. *Opere*, vol. 1, Bollati Boringhieri, Torino, 1999.

[68] K. Gödel, *Collected Works. Vol. III*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995, p. 456; trad. it. *Opere*, vol. 3, Bollati Boringhieri, Torino, 2006.

[69] Per una rassegna aggiornata si veda S. R. Buss (ed.), *Handbook of Proof Theory*, North Holland, Amsterdam, 1998.