Filosofia della matematica

Anno 2009-10

Il programma di Hilbert, e Gödel (1900-1931)

INDICE

Presentazione

Ma la cosa strana è appunto che con quei valori immaginari
o in qualche modo impossibili si possano tuttavia compiere
le ordinarie operazioni e alla fine ottenere un risultato tangibile! ...
Non ti fa pensare a un ponte di cui ci sono solo i pilastri a un capo e all'altro,
e che uno attraversa tranquillo come se ci fosse tutto intero?
Io non ho mai messo in dubbio che la matematica abbia ragione;
solo mi sembra strano che certe volte, si direbbe, va contro la ragione ...
Robert Musil

Lo scopo del corso è di studiare i problemi e le ricerche che nel periodo indicato hanno portato alla costituzione della logica matematica contemporanea. Il cosiddetto programma di Hilbert ha svolto un ruolo decisivo catalizzando, per la formazione degli strumenti necessari per la sua realizzazione, un ampio spettro di contributi e interessi.

Nella tradizione storiografica si traccia una linea che va da Frege a Russell, magari accostandovi quella di Boole e Peano, e che porta sia alla invenzione dei linguaggi simbolici formali e del sistema logico dei *Principia mathematica* sia alla nascita della filosofia analitica. La logica del primo e del secondo ordine sarebbero ritagliate dalla logica dei *Principia*. Si tratta di un racconto fuorviante e infedele, dovuto più che altro alla ignoranza della storia della matematica, a sua volta dovuta al pregiudizio che non possa esservi nulla di filosoficamente interessante.

Senza voler sminuire l'importanza della faticosa elaborazione della teoria dei tipi da parte di Russell[1], la logica che viene presentata nel primo manuale contemporaneo, i *Grundzüge der theoretischen Logik* di David Hilbert e Wilhelm Ackermann del 1928 nonostante la parentela con quella di Russell ha alle spalle una storia diversa, se pure non disgiunta e non insensibile

[1]Gödel nel 1931 farà riferimento proprio ai *Principia mathematica*, che con la teoria di Zermelo era uno dei due sistemi allora ritenuti onnicomprensivi di tutta la matematica esistente. Gödel più precisamente afferma ivi nell'introduzione che nei due sistemi sono incluse tutte le tecniche e le forme dimostrative della matematica. Apparentemente questo gli farebbe gioco per dare un significato assoluto al risultato di impossibilità, ma Gödel non segue questa strada, anzi è consapevole (in una discussione con Zermelo ad esempio) che il risultato dipende dall'uso di metodi dimostrativi ristretti. Questi concetti e apparenti incongruenze dovranno risultare chiarite alla fine del nostro studio.

alle influenze del logicismo[2] . Le sue radici affondano in due problematiche indipendenti e interne alla matematica, quella della assiomatizzazione della teoria degli insiemi e quella della particolare proposta fondazionale che Hilbert ha iniziato a concepire nel 1904 e ha ripreso in modo esplicito e sistematico a partire dal 1917, partendo dalla sua visione della natura e del ruolo del metodo assiomatico.

Lo sviluppo del corso sarà dunque, in un conciso riassunto, il seguente. Innanzi tutto si presenteranno le questioni fondazionali sul tappeto all'inizio del Novecento, che si possono distinguere in due sfide. Da una parte la richiesta di Hilbert di dimostrare la non contraddittorietà[3] della teoria dei numeri reali, che egli aveva presentato assiomaticamente nel 1900; dall'altra la necessità di risolvere le contraddizioni emerse nella teoria degli insiemi sviluppata da Georg Cantor (1845-1918).

La teoria degli insiemi verrà assiomatizzata nel 1908 da Ernst Zermelo (1871-1953); un aspetto insoddisfacente del suo sistema consisteva nell'uso della nozione di "proprietà definita" [*definit*] nell'assioma di esistenza dei sottoinsiemi. I tentativi di darne una versione precisa portarono, attraverso il lavoro di Hermann Weyl (1885-1955) e di Thoralf Skolem (1887-1963) a individuare quelle che diventeranno le formule dei linguaggi del primo ordine.

Intanto, le contraddizioni possibili con i concetti insiemistici dei numeri cardinali e ordinali erano note a Cantor, Hilbert stesso e Zermelo almeno a partire dal 1895. Le loro reazioni non furono isteriche: Cantor pensava che fossero evitabili con opportune distinzioni[4]; Hilbert vi vedeva inizialmente solo il segno della impossibilità di assiomatizzare la teoria. Quando tuttavia nel 1903 Russell pubblicò la sua antinomia, Hilbert ritenne che il problema dovesse essere affrontato per le corna; nel 1904 propose un modo di fondare assiomaticamente la logica e l'aritmetica attraverso una dimostrazione diretta di non contraddittorietà.

Per dimostrare la non contraddittorietà assoluta di una teoria non si ha a disposizione il metodo che si sfrutta per la non contraddittorietà relativa,

[2]Le somiglianze appaiono forti se, seguendo l'abitudine di Russell, si lasciano cadere i simboli di tipo, rispettando solo mentalmente i loro vincoli; la precisione formale peraltro, per quel che riguarda assiomi e regole, non era il forte di Russell. Gödel esprimerà la sua delusione per l'approssimazione della presentazione della logica nei *Principia*

[3]In italiano sinonimi di non contraddittorietà sono "coerenza" e "consistenza", quest'ultima parola molto usata e (perché) tuttavia derivata per assonanza dall'inglese *consistency* e in italiano di significato non univoco.

[4]Tra insiemi "compiuti" [*fertig*] e no, o in seguito tra totalità consistenti e inconsistenti.

quello cioè di interpretare la teoria in un'altra supposta già non contraddittoria[5]. A fine Ottocento i successivi rimandi avevano portato tutte le teorie classiche a essere dipendenti, per la loro non contraddittorietà, da quella dell'aritmetica. Una dimostrazione di non contraddittorietà assoluta non può basarsi che sulla definizione secondo cui una teoria è non contraddittoria se dai suoi assiomi non si deriva alcuna contraddizione.

Una dimostrazione di non contraddittorietà deve essere una dimostrazione relativa a dimostrazioni, cioè a successioni di formule e di frasi. Perché essa sia una vera dimostrazione matematica, i suoi oggetti devono essere enti matematici; Hilbert pensava di poter affermare che i simboli sono oggetti concreti, e quindi assoggettabili a manipolazioni combinatorie matematiche.

Nel 1904 David Hilbert (1862-1943) diede solo un esempio di una tale dimostrazione di non contraddittorietà per un frammento molto semplice di aritmetica. Quando negli anni venti riprese il suo programma, questa volta in reazione agli attacchi dell'intuizionismo alla matematica classica, il lavoro della sua scuola, con i contributi esterni di Skolem, incominciò ad accumulare risultati che diventeranno il nucleo della teoria logica, dall'esistenza dei modelli numerabili ad anticipazioni del teorema di completezza logica (Gödel 1930). Alla fine degli anni venti, una discussione tra Skolem e Zermelo metterà in chiaro la differenza tra l'uso della logica del primo ordine e quella del secondo ordine per lo sviluppo della teoria degli insiemi.

Hilbert pensava a una nuova disciplina, che chiamò "metamatematica", che avrebbe affrontato con il metodo da lui indicato diverse questioni "di tipo gnoseologico" sulle dimostrazioni. Tale disciplina non decollava tuttavia, nonostante risultati parziali, forse perché era attardata dalla costruzione hilbertiana della logica stessa[6] o forse proprio per l'ambiguità sulla natura matematica dei simboli, che si rifletteva sugli strumenti matematici ammissibili; fino a quando Kurt Gödel (1906-1978) non ebbe l'idea di dichiarare che i simboli sono numeri.

Magari non si sa che cosa sono i numeri, ma certo sono enti matematici ai quali si possono applicare tutte le risorse dell'aritmetica, opportunità che Gödel mise subito a frutto dimostrando due teoremi che affossa-

[5] Così ad esempio di dimostra la non contraddittorietà relativa reciproca della geometria euclidea e di quella non euclidea, o la non contraddittorietà relativa della geometria euclidea rispetto alla teoria dei numeri reali, attraverso la interpretazione data dalla geometria analitica.

[6] Vedremo come Hilbert perfezionasse progressivamente lo strumento logico.

vano le speranze di Hilbert di una dimostrazione di non contraddittorietà dell'aritmetica.

L'idea che i simboli sono numeri per diventare operativa richiede che si dimostri che le usuali manipolazioni sintattiche (ad esempio la congiunzione di due frasi) sono in effetti operazioni aritmetiche. Gödel lo fece, con una trattazione che viene chiamata aritmetizzazione (dei linguaggi), mettendo le basi della possibilità oggi nota a tutti di elaborare su un calcolatore, che lavora con i numeri in rappresentazione binaria, qualunque discorso relativo a qualunque argomento, scientifico o letterario. Questa è stata la parte decisiva del suo lavoro, con la quale ha dimostrato che il progetto di Hilbert di una metamatematica era possibile. Nel contempo, con un'altra ingegnosa soluzione, Gödel stesso dimostrava l'opposto di quelle che erano le aspettative di Hilbert. Tuttavia una previsione, o una speranza sbagliata su quello che sarà possibile dimostrare non inficia il valore di un pensatore.

Dopo il 1931 si continuerà naturalmente a discutere se il programma di Hilbert, inteso restrittivamente come ricerca di una dimostrazione di non contraddittorietà per l'aritmetica, sia davvero stato affossato da Gödel, o se possa essere resuscitato, opportunamente riformulato, o modificato; Gödel stesso contribuirà alla discussione[7]. Ma è fuori di dubbio che nella forma originaria è stato falsificato nello stesso momento che se ne dimostrava la fattibilità attraverso l'aritmetizzazione. Il programma di Hilbert non vive tuttavia solo quest'attimo fuggente: le tecniche e le dimostrazioni di Gödel, più che l'enunciato dei suoi teoremi, costituiranno la base della nascita della teoria della calcolabilità e dei calcolatori.

La prima parte delle lezioni sarà dedicata alla storia, sopra accennata, delle questioni fondazionali e della precisazione dei concetti della logica del primo ordine; la seconda parte sarà una esposizione dettagliata della dimostrazione di Gödel.

[7] In particolare, oltre alle osservazioni immediatamente a ridosso del teorema, con "Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes", *Dialectica*, 12, 1958, pp. 280-7; trad. it. in *Opere*, vol. 2, Bollati Boringhieri, Torino, 2002, pp. 245-50.

L’Europa e la matematica all’inizio del Novecento

Alla fine dell’Ottocento e nei primi anni del Novecento molti matematici si dedicano alla manutenzione della loro disciplina o, per usare parole diventate comuni, a problemi di fondamenti, in modo più esplicito e dedicato di quanto è avvenuto in altre epoche nelle quali si sono dovuti affrontare difficoltà dovute all’emergere di fenomeni inaspettati e all’esigenza di costruire un quadro coerente entro cui darne ragione. Due episodi noti del passato sono la scoperta delle grandezze incommensurabili nell’antica Grecia e l’intervento degli infinitesimi nelle prime formulazioni del calcolo infinitesimale[1].

Nell’Ottocento la matematica vive una crisi di crescita, o di abbondanza, che è parte ed elemento attivo del più generale impetuoso sviluppo della società europea. Per dare un’idea a chi non sia esperto, si potrebbe dire che all’inizio del secolo la matematica era più o meno quella che oggi si studia nella scuola secondaria (a parte i risultati più avanzati dell’analisi), alla fine del secolo era quella che oggi si studia all’università.

La reazione alla crescita, in campo matematico, è straordinariamente simile a quella che si manifesta nella società e nella cultura. I testimoni più sensibili dei cambiamenti sociali sono gli artisti e gli scrittori. Se consideriamo i paesi di lingua tedesca, la Germania e l’impero austro-ungarico, sia perché sono quelli dove lo sviluppo economico è stato più forte, soprattutto dal punto di vista del collegamento con i progressi scientifici, sia perché le vicende di cui vogliamo interessarci hanno lì il loro centro[2], abbiamo un romanziere che osserva con acuta comprensione le vicende della società e dello spirito, Robert Musil (1880-1942). La vita moderna basata sulla tecnologia guidata dalla scienza prende forma in quegli anni.

> Supponendo che uno fosse venuto al mondo nel 1871, anno di nascita della Germania, costui, arrivato sui trent’anni, avrebbe

[1] I greci reagirono non affrontando direttamente il problema, ma elaborando con Eudosso ed Euclide la teoria delle proporzioni, nella quale consideravano solo i rapporti tra grandezze, commensurabili o incommensurabili tra loro. I fondatori del calcolo infinitesimale furono costretti alla discussione, sia perché provocati da critiche come quelle del vescovo Berkeley, sia perché l’uso disinvolto degli infinitesimi (come anche quello delle serie infinite) portava anche a risultati paradossali o contraddittori. Non trovarono tuttavia una risposta se non nel corso dell’Ottocento con soluzioni che si inseriscono in sviluppi che portano proprio alla congiuntura che vogliamo considerare.

[2] Nella università di Göttingen dove lavora Hilbert, a Vienna dove studierà Gödel.

> già potuto accorgersi che nel corso della sua esistenza la lunghezza della rete ferroviaria europea era triplicata e in tutto il mondo più che quadruplicata, il traffico postale si era moltiplicato per tre, le linee telegrafiche addirittura per sette; e molte altre cose si erano sviluppate nello stesso senso.
>
> L'efficacia dei motori era cresciuta dl 50 al 90 per cento; nello stesso periodo la lampada a petrolio era stata progressivamente sostituita dall'illuminazione a gas, dalla luce di Auer e dall'elettricità che produce sempre nuovi sistemi di illuminazione; le carrozze a cavalli, che avevano resistito per millenni, dalle automobili; e gli aeroplani non solo erano venuti al mondo, ma erano già usciti dall'infanzia.
>
> Anche la durata media della vita si era sensibilmente alzata grazie ai progressi della medicina e dell'igiene, e le relazioni fra i popoli dal tempo dell'ultimo conflitto armato si erano fatte considerevolmente più amichevoli e fiduciose. L'uomo che viveva tali esperienze poteva ben credere che si fosse finalmente giunti al tanto atteso progresso durevole dell'umanità, e chi non lo riterrebbe normale, trattandosi dell'epoca in cui lui stesso è al mondo?[3]

Queste trasformazioni materiali sono accompagnate da una esplosione culturale in tutti i campi, scienza, letteratura, arte, scienze dello spirito. L'inizio del Novecento è un periodo di grande euforia.

> [d]alla mentalità, liscia come l'olio, degli ultimi due decenni del secolo diciannovesimo era insorta improvvisamente in tutta l'Europa una febbre vivificante. Nessuno sapeva bene cosa stesse nascendo; nessuno avrebbe potuto dire se ne sarebbe stata una nuova arte, un uomo nuovo, una nuova morale o magari un nuovo ordinamento della società.[4].

Musil descrive la Vienna degli anni che precedono la prima guerra mondiale, la Vienna che era il centro culturale del mondo e dove si espressero, in contemporanea o a pochi anni di distanza Mahler, Schönberg, Klimt,

[3]R. Musil, *L'uomo senza qualità*, 1930, 1933, vol. II, Mondadori, p. 713. Le successive citazioni sono tratte dalla stessa fonte.

[4]Il "grande evento", che sta per nascere ma nessuno se ne è accorto, è l'obiettivo della Azione Parallela in *L'uomo senza qualità*.

Schiele, Freud, Wittgenstein, Loos, Krauss e tanti altri[5]. Ricordare questi nomi significa già alludere al carattere fratturato dello spirito del tempo, un misto di creatività e di insofferenza che si manifestava nella prevalenza dell'immaginazione e dell'irrazionale, nella scoperta dell'inconscio.

Lo stesso apprezzamento della scienza aveva una venatura irrazionale:

> Quasi tutti gli uomini oggi si rendono ben conto che la matematica è entrata come un demone in tutte le applicazioni della vita ...[6]
>
> Se è attuazione di sogni ancestrali il poter volare con gli uccelli e navigare con i pesci, penetrare nel corpo di gigantesche montagne, inviare messaggi con la rapidità degli dèi, scorgere e udire ciò che è invisibile e lontano, sentir parlare i morti ... se luce, calore, forza, godimento, comodità sono i sogni primordiali dell'uomo, allora la ricerca odierna non è scienza soltanto: allora è anche magia, è un rito di grandissima forza sentimentale e intellettuale, che induce Dio a sollevare l'una dopo l'altra le pieghe del suo manto, una religione la cui dogmatica è retta e penetrata dalla dura, agile, coraggiosa logica matematica, fredda e tagliente come una lama di coltello.

Il grande evento febbrilmente atteso è stato il macello della grande guerra. Anticipato da inquietudini, disagio, paura, immotivate se non da un senso quasi di colpa per l'eccesso di ricchezza, e dalla preoccupazione che il sogno non potesse durare.

> È difficile descrivere in poche parole l'aspetto fondamentale di quelle debolezze [di uno spirito abbandonato alla libertà]. Lo si potrebbe scorgere nel esempio nel fatto che le imponenti costruzioni intellettuali erette autonomamente dalla filosofia per spiegare il mondo, le ultime delle quali sorte fra la metà del diciottesimo e la metà del diciannovesimo secolo, sono state scalzate

[5] A. Janik e S. Toulmin, *La grande Vienna*, Garzanti, 1975.

[6] [La citazione continua con "Forse non tutti credono alla storia del diavolo a cui si può vendere l'anima, ma quelli che di anima devono intendersene, perché in qualità di preti, storici e artisti ne traggono lauti guadagni, attestano che essa è stata rovinata dalla matematica, e che la matematica è l'origine di un perfido raziocinio che fa sì dell'uomo il padrone del mondo, ma lo schiavo della macchina".]

> dalle trasformazioni della vita, ma soprattutto dai risultati stessi del pensiero e dell'esperienza; senza che l'abbondanza delle nuove cognizioni, quasi ogni giorno portate alla luce dalla scienza, abbia condotto a una nuova mentalità, salda, ancorché provvisoria, anzi senza che si sia ridestata una volontà seria ed esplicita in tal senso, sicché l'abbondanza di cognizioni non è più soltanto una gioia, ma è diventata anche un peso.

Si accusa chi è responsabile della crescita incontrollata, cioè la scienza:

> [Ulrich] ricordava benissimo come era tornata di moda l'"insicurezza". Si erano sempre più moltiplicate le lagnanze di gente che aveva una professione un po' incerta, poeti, critici, donne e quelli che sono di professione "i giovani"; costoro accusavano la scienza pura di essere una cosa nefasta e che faceva a pezzi ogni altra opera dell'uomo senza saperla mai rimettere insieme, e chiedevano a gran voce una nuova fede umana, il ritorno a tutti i valori primordiali, originali, sorgivi ...

Quale scienza è quella considerata nefasta? Una scienza che rovescia in modo troppo rapido per essere digeribile i prodotti di conoscenze che non sono controllabili, perché sono accompagnate da un distacco tra il soggetto e l'esperienza. Sicché

> secondo l'opinione dei non matematici tutti questi antichissimi sogni atavici si sono avverati in modo totalmente diverso dall'immaginazione primitiva ... Noi abbiamo conquistato la realtà e perduto il sogno.

Il distacco era tanto più forte quando più si capiva del mondo fisico, perché la comprensione avveniva soprattutto attraverso linguaggi matematici.

Quando Einstein studiò e il calcolo tensoriale ebbe a dichiarare, ammirato e sorpreso, che

> in tutta la mia vita non ho mai lavorato tanto duramente, e l'animo mi si è riempito di un grande rispetto per la matematica, la parte più sottile della quale avevo finora considerato, nella mia dabbenaggine, un puro lusso.

Una matematica che parlava di cose invisibili e astratte, senza riscontro diretto nell'esperienza sensibile forniva alla scienza i mezzi per il controllo della natura.

All'interno della matematica si ripete la condizione generale della società: una proliferazione di beni e di ricchezza, e una preoccupazione, che si può cercare di formulare in domande più precise del vago disagio psicologico: di cosa parliamo, quali garanzie di verità abbiamo, o anche solo di sensatezza? Anche se questa ombra non impedisce di continuare ad andare avanti.

Un elenco di nuovi argomenti matematici, che rendono impossibile continuare a considerarla come la scienza dei numeri e delle figure, come è stato per millenni, non riesce a essere esauriente: numeri complessi, quaternioni, algebre, geometrie non euclidee, invarianti, vettori, matrici, gruppi (gruppi di sostituzione, gruppi di movimenti), ideali e, in una parola che riassume e rappresenta la nuova natura della matematica, l'infinito. Georg Cantor, il creatore con Richard Dedekind (1831-1916) della teoria degli insiemi aveva detto che l'essenza della matematica è la libertà.

Ma lo "spirito abbandonato alla libertà" sente il peso delle nuove conoscenze, non tutte compatibili con le precedenti. Per fare un esempio semplice, pensiamo ai numeri complessi. Questi sono stati accettati e capiti, con la rappresentazione geometrica nel piano, solo all'inizio dell'Ottocento. Ma nella coscienza popolare continuavano e continuano a essere sospettati. La $\sqrt{-1}$ ripugna alla mente (come il quadrilatero non euclideo di Saccheri) perché ripugna alla natura del numero, che è pensato come una grandezza. Quindi anche gli irrazionali in verità sono sospetti, come testimonia l'esperienza scolastica. Non si sa a quale esperienza farli corrispondere.

Non è un caso che questo argomento sia stato inserito da Musil nel quadro di imbarazzo da abbondanza che ha delineato[7].

> (Törless) Ma . . . questa unità [immaginaria] non esiste . . . non può esistere . . . con certezza matematica, è impossibile.
>
> (Banenberg) Non è lo stesso in fondo, coi numeri irrazionali? Una divisione che non finisce mai, una frazione il cui valore non verrà fuori mai e poi mai, anche se calcoli per cent'anni! E cosa ti immagini quando ti dicono che due linee parallele si intersecano nell'infinito? Io credo che se fossimo troppo coscienziosi non esisterebbe la matematica.

[7] R. Musil, *I turbamenti del giovane Törless*, 1906.

> (Törless) Ma la cosa strana è appunto che con quei valori immaginari o in qualche modo impossibili si possano tuttavia compiere le ordinarie operazioni e alla fine ottenere un risultato tangibile! ... Non ti fa pensare a un ponte di cui ci sono solo i pilastri a un capo e all'altro, e che uno attraversa tranquillo come se ci fosse tutto intero?
>
> Io non ho mai messo in dubbio che la matematica abbia ragione; solo mi sembra strano che certe volte, si direbbe, va contro la ragione ...

A questa, e a più grandi difficoltà connesse ad esempio all'infinito, c'è inizialmente una risposta ottimistica implicita: la matematica è un prodotto della mente umana. La stessa mente che portava in essere nuovi oggetti era la mente che otteneva successi parziali confortanti nella fondazione della matematica: la definizione dei numeri reali (1870), la definizione dei numeri naturali (1888) attraverso la quale tutta la matematica, basata su di essi, sarebbe apparsa un prodotto rigoroso della ragione[8]. Non si sarebbe più dovuto ammettere che "Dio ha creato gli interi, tutto il resto è opera dell'uomo", secondo il motto di Kronecker, ma si poteva affermare che l'uomo aveva creato i numeri.

Richard Dedekind aveva realizzato questa impresa sulla base dei concetti di rappresentazione e di sistema (funzioni e insiemi). La rappresentazione è "una capacità dello spirito senza la quale è impossibile ogni pensiero, la capacità di mettere in rapporto cose con cose, di far corrispondere una cosa a un'altra ovvero di rappresentare una cosa mediante un'altra cosa"; mentre "capita spesso che diverse cose $a, b, c \ldots$ considerate per qualche ragione sotto uno stesso punto di vista, siano riunite insieme nella mente, e allora uno dice che esse formano un *sistema* S".

Per Dedekind si trattava di nozioni logiche, come per i suoi contemporanei, Boole ad esempio: "la logica è possibile solo per l'esistenza nella mente di nozioni generali, quali la capacità di concepire una classe"[9]. Era una logica che non si esauriva nelle regole deduttive, e non si identificava con quelle, ma aveva una funzione costitutiva, o creativa. La logica tradizionale si riduceva

[8] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Vieweg, Braunschweig, 1888; trad. it. con il titolo "Che cosa sono e a cosa servono i numeri?", in *Scritti sui fondamenti della matematica*, Bibliopolis, Napoli, 1982.

[9] G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic*, MacMillan, Cambridge, 1847.

a un principio, il principio di comprensione, secondo il quale a ogni concetto corrisponde la classe degli oggetti che vi ricadono.

Tuttavia questa logica aveva generato anche mostri, contraddizioni e aporie, che mostravano la difficoltà di ragionare in modo pacifico sui nuovi enti da essa stessa creati, o davano la sensazione di andare contro la ragione. Dalla crisi spirituale prodotta dall'opulenza della libertà creativa doveva nascere una nuova logica, una logica contro la logica naturale.

La nuova logica: scienza o immagine speculare del mondo?

Le contraddizioni più discusse erano quella di Cantor del massimo cardinale, quella di Burali-Forti e Cantor del massimo ordinale, quella di Russell[1].

La contraddizione del massimo cardinale si può brevemente formulare in questo modo: l'insieme K dei numeri cardinali dovrebbe avere un numero cardinale maggiore di tutti gli altri cardinali, il cardinale massimo; ma per il teorema di Cantor del 1892, la cardinalità di K è minore di quella dell'insieme delle funzioni da K in un insieme con due elementi (o come si dirà in seguito dell'insieme $\mathscr{P}(K)$ di tutti i sottoinsiemi di K). In versione semplificata, si considera l'insieme universo[2] V e la sua potenza $\mathscr{P}(V)$.

La contraddizione del massimo ordinale è analoga: l'insieme di tutti gli ordinali è bene ordinato, e quindi dovrebbe avere un numero ordinale Ω, ma allora $\Omega + 1$ sarebbe un ordinale ancora maggiore.

La contraddizione di Russell considera la classe[3] di tutte le classi che non contengono se stesse come elemento, in simboli

$$\{x \mid x \notin x\},$$

e rileva che tale classe nello stesso tempo appartiene e non appartiene a se stessa.

Bertrand Russell (1872-1970) era convinto che il teorema di Cantor fosse sbagliato, perché era affezionato alla classe universale e alla sua esistenza. Nel cercare un errore nella dimostrazione di Cantor, che egli riformula in modo da applicarla a $\mathscr{P}(x)$ invece che alle funzioni, fu portato a considerare la classe delle classi che non appartengono a se stesse[4].

[1]Per informazioni più dettagliate sulla teoria degli insiemi fino all'assiomatizzazione di Zermelo del 1908, come pure sulla costruzione della teoria dei tipi da parte di Russell, si vedano le dispense del corso di Filosofia della matematica del 2008-09.

[2]Il simbolo V per l'universo è notazione moderna.

[3]Russell usava la terminologia delle classi, a preferenza di "insieme".

[4]Russell espresse per la prima volta l'antinomia in termini di predicati che si applicano o no a se stessi, in una bozza di un capitolo de *The principles of mathematics*, vol. I, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1903 (trad. it. *I principi della matematica*, Longanesi, Milano, 1963), nel maggio del 1901, e nella lettera a Frege del 1902; quindi di nuovo in questi termini nel §78 dei *Principles*, e sia in termini di predicati sia in termini di classi nel §100.

Infatti la dimostrazione di Cantor, riformulata per $\mathscr{P}(x)$, conduce a queste considerazioni. Supponendo che esista una iniezione f tra $\mathscr{P}(x)$ e x, si vuole definire un sottoinsieme z di x diverso da tutti i sottoinsiemi, quindi una contraddizione, che esclude l'esistenza di f. Ogni sottoinsieme è $f^{-1}(y)$ per qualche $y \in x, y \in im(f)$ e perché il sottoinsieme cercato sia diverso da $f^{-1}(y)$ si può giocare su y, mettendolo in z se e solo se $y \notin f^{-1}(y)$; si definisce quindi

$$z = \{y \in x \mid y \notin f^{-1}(y)\},$$

che si può considerare una sorta di sottoinsieme antidiagonale: esso differisce da tutti gli $f^{-1}(y)$; infatti se fosse $z = f^{-1}(y)$, la sua immagine mediante f sarebbe $f(z) = y$, ma $y \in z$ se e solo se $y \notin f^{-1}(y) = f^{-1}(f(z)) = z$ che è una contraddizione.

Nel caso che x sia la classe universale, $\mathscr{P}(x) \subseteq x$ si può pensare iniettable in x con la funzione identica, e l'insieme della dimostrazione è $\{y \mid y \notin y\}$, che è la classe considerata da Russell[5].

Sempre Russell trovò una formulazione unitaria per le contraddizioni citate[6]:

> Data una proprietà φ e una funzione f tali che, se φ appartiene a tutti gli elementi di u, $f`u$ esiste, ha la proprietà $\varphi$ e non appartiene a $u$; allora l'assunzione che esista una classe $w$ di tutti i termini che hanno la proprietà $\varphi$, e che $f`w$ esista porta alla conclusione che $f`w$ ha e non ha al contempo la proprietà φ.

L'antinomia di Russell si ottiene prendendo cone φ la proprietà di non appartenere a se stesso, e come f la funzione identica: quella di Burali-Forti prendendo la proprietà di essere un ordinale e $f`w =$ ordinale di $w$; quella di Cantor prendendo la proprietà di essere un cardinale e $f`w =$ cardinale di $\mathscr{P}(w)$.

---

[5]In effetti Russell presenta in modo analogo a quello qui esposto una "semplificazione della dimostrazione di Cantor", in "On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types", *Proceed. London Mathematical Society*, (2) 4 (1906), pp. 29-53, ristampato in B. Russell, *Essays in Analysis* (a cura di D. Lackey), George Allen&Unwin, London, 1973, pp. 134-64. Nei *Principles* §100 afferma anche che "io fui condotto ad esso [rompicapo] nel tentativo di conciliare la dimostrazione di Cantor circa l'impossibilità che esista un numero cardinale massimo con la supposizione molto plausibile che la classe di tutti i termini [...] abbia necessariamente il maggior numero possibile di elementi".

[6]"On some difficulties ...", cit.

Erano note poi altre antinomie[7], come quella del bibliotecario della Bodleiana G. G. Berry: "il minimo numero non definibile con meno di venticinque sillabe", che è definibile con ventiquattro sillabe; quella di J. Richard[8], una di König, e fu riesumata anche quella del mentitore il cretese Epimenide che afferma: "Io sto mentendo".

David Hilbert nel 1903, lettera del 7 novembre[9], informò Gottlob Frege (1848-1925) di aver scoperto le contraddizioni tre o quattro anni prima, e che anche Zermelo ne aveva trovate dopo che egli gli aveva comunicato le sue. Secondo una testimonianza di Husserl in un appunto del 16 aprile 1902 conservato nel *Nachlass*, Zermelo glie ne avrebbe esposta una forse nel 1901, o meglio l'osservazione che un insieme M tale che $\mathscr{P}(M) \subseteq M$ è inconsistente, considerando $\{x \in M \mid x \notin x\}$. Infatti $z = \{x \in M \mid x \notin x\}$ è certo un sottoinsieme di M, e quindi se $\mathscr{P}(M) \subseteq M$ appartiene a M. Allora ci si può chiedere se $z \in z$ e si ha che $z \in z \leftrightarrow z \notin z$. Il primo teorema del lavoro di Zermelo del 1908 con l'assiomatizzazione della teoria[10] dimostra proprio con lo stesso argomento che ogni insieme M possiede almeno un sottoinsieme che non è elemento di M, da cui segue che il dominio $\mathfrak{B}$ degli insiemi non è un insieme.

Hilbert avrebbe trovato che non può esistere alcun S tale che se $x \in S$ allora $\mathscr{P}(x) \in S$ e se $T \subseteq S$ allora $\bigcup T \in S$. Infatti allora $\mathscr{P}(\bigcup S) \in S$ e di qui segue che gli elementi di $\mathscr{P}(\bigcup S)$ appartengono all'unione di S, quindi $\mathscr{P}(\bigcup S) \subseteq \bigcup S$[11].

Nell'occasione, Hilbert espresse il suo convincimento che le contraddizioni mostrino la inadeguatezza della logica tradizionale. Anche Russell pensava

[7] Russell le considera tutte in B. Russell, "Mathematical Logic as based on the Theory of Types", *American Journal of Mathematics*, 30 (1908), pp. 222-62, ristampato in B. Russell, *Logic and Knowledge* (a cura di R. C. Marsh), George Allen&Unwin, London, 1956, pp. 57-102, e in J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard Univ. Press, Cambridge, MA, , 1967, pp. 152-82, per mostrare come tutte dipendano dal fenomeno del circolo vizioso.

[8] Vi torneremo più avanti, a proposito della dimostrazione di Gödel.

[9] La corrispondenza di Frege e Hilbert, e con altri contemporanei, è in G. Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Felix Meiner, Hamburg, 1976; trad. it. *Alle origini della nuova logica*, Boringhieri, Torino 1983.

[10] E. Zermelo, "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I", *Mathematische Annalen*, 65 (1908), pp. 261-81; trad. inglese in van Heijenoort, cit., pp. 199-215.

[11] Si veda V. Peckhaus e R. Kahle, "Hilbert's paradox", *Historia Mathematica*, 29 (2002), pp. 157-75 e A. Kanamori, "Zermelo and set theory", *Bulletin Symbolic Logic*, 10 (2004), n. 4, pp. 489-553.

di dover costruire la logica rivedendo il suo cardine che era il principio di comprensione. Non bastava irregimentare la logica come aveva fatto Frege quando aveva costruito un "linguaggio in formule del pensiero puro" (*Begriffschrift*, 1879); Frege era restato disarmato quando si capì che non erano le imprecisioni e le vaghezze del linguaggio naturale a provocare le contraddizioni, ma il principio di comprensione

$$\forall P \exists x \forall z (z \in x \leftrightarrow P(z))$$

(per ogni proprietà P esiste un insieme x che è la sua estensione, ovvero ogni comprensione [intensione] ha una estensione).

Russell cercò di limitare il principio sperimentando varie restrizioni, provando anche a escludere ragionevolmente le classi grandi, fino a che accettò la diagnosi di Poincaré che la fonte delle contraddizioni era il circolo vizioso, che si manifestava nelle definizioni impredicative; per evitarlo occorreva che "ciò che in un modo qualunque concerne *tutti* di *qualsiasi* o *alcuni* (indeterminati) degli elementi di una classe, non [sia] esso stesso uno degli elementi della classe"; in altri termini "ciò che coinvolge una variabile apparente [vincolata[12]] non deve essere uno dei possibili valori di quella variabile". La costruzione di un sistema logico che rispettasse automaticamente senza dirlo (ché sarebbe stata una nuova epifania del circolo vizioso) questa restrizione portò alla teoria dei tipi inserita nei *Principia mathematica* del 1910-12-13.

Ma a parte il motivo di insoddisfazione dovuto al fatto che la restrizione predicativa mutilava la matematica, a meno di non assumere l'assioma di riducibilità, che di fatto negava quella restrizione, la verità è che i logicisti procedevano con l'Angelus Novus di Walter Benjanim, con il viso rivolto al passato; la soluzione che adottavano, riesumata dall'arsenale delle concezioni intellettuali elaborate dalla tradizione, a parte le varianti formali e sostanziali era quella di una logica forte, costitutiva, che riteneva di definire l'essere, non un insieme di tecniche. La restrizione predicativa ha senso solo se si pensa che le definizioni creino gli enti che definiscono.

Il linguaggio, a parte la veste simbolica, non era uno strumento ma la sostanza della ragione, lo specchio o il canale, non intelligente, attraverso i quale il mondo veniva comunicato.

> 6.124 Le proposizioni della logica descrivono l'armatura del mondo o, piuttosto, la rappresentano. Esse trattano di nulla ...

[12]Nel linguaggio di Peano sono chiamate variabili reali e apparenti quelle che altrimenti sono dette rispettivamente libere e vincolate.

> 6.13 La logica non è una dottrina, ma un'immagine speculare del mondo

affermava il loro profeta Wittgenstein[13].

Wittgenstein si spingerà più in là, come vedremo, a dedurre da queste assunzioni l'impossibilità del programma di Hilbert.

La prospettiva di Hilbert era diversa; nella lettera citata esprimeva a Frege la convinzione che la logica tradizionale apparisse del tutto inadeguata, alla luce delle contraddizioni. Hilbert non aveva ancora incominciato ad affrontare il problema di una revisione della logica, ma ne aveva una concezione pluralista e strumentale, come di uno strumento necessario per determinare le relazioni di dipendenza tra diverse proposizioni.

Secondo una testimonianza di Edmund Husserl (1859-1938), dal 1901 a Göttingen, in occasione di una conferenza da lui tenuta nel 1901 presso la società matematica di Göttingen in cui aveva discusso i problemi logici della teoria dei numeri reali, Hilbert avrebbe osservato:

> Quando supponiamo che una proposizione sia decisa sulla base degli assiomi di un dominio, che cosa possiamo usare oltre agli assiomi? *Alles Logische. Was ist das?* Tutte le proposizioni che sono libere da ogni particolarità relativa a un campo di conoscenze, che sono indipendenti da ogni particolare assioma, da ogni contenuto di conoscenza[14]. Ma si apre uno spettro di possibilità. Il dominio logico algoritmico, quello dei numeri, della combinatorica, della teoria generale degli ordinali. Alla fin fine, la più generale teoria degli insiemi non è essa stessa pura logica? La logica combinatoria basta a derivare lo *Schnittpunktsatz*[15] dal teorema di Pascal (senza assioma di continuità); la logica dei numeri interviene quando si usa Archimede, e per usare l'assioma di completezza si deve fare ricorso alla teoria degli insiemi.[16]

---

[13] L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, 1921.

[14] Questa è ancora la definizione, di tipo qualitativo, di "verità logica".

[15] [Si intende qualsiasi teorema che usi solo proprietà di incidenza e intersezione.]

[16] L'appunto di Husserl si trova nella edizione di *Philosdophie der Arithmmetik* (1891), Martinus Nijhoff, The Hague, 1969, p. 445; si veda anche J. C. Webb, *Mechanism, Mentalism and Metamathematics*, Reidel, Dordrecht, 1980, p. 85.

La consapevolezza sulla forza di diverse logiche gli derivava dai risultati ottenuti nello studio della geometria che aveva appena concluso[17] con la pubblicazione delle *Grundlagen der Geometrie*, nel 1899, alle quali si riferisce il carteggio con Frege.

Spiegava Hilbert a Frege che il difetto decisivo della logica tradizionale stava nell'assunzione che un concetto sia determinato quando per ogni entità è determinato se essa cade o no sotto il concetto[18]; alludeva probabilmente al principio di comprensione, della cui responsabilità molti si rendevano conto, ma non erano note al momento proposte alternative; invece secondo Hilbert occorreva che gli assiomi che definiscono il concetto siano non contraddittori.

La restrizione da porre nel principio di comprensione era dunque la non contraddittorietà del concetto intensionale definito assiomaticamente. Hilbert aveva iniziato a utilizzare il metodo assiomatico nel suo studio della geometria, e ne diventerà il paladino più convinto e autorevole.

[17]A partire dal 1891. Si veda M. Hallett e U. Majer (a cura di), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891-1902*, Springer, Berlin, 2004.

[18]In realtà Hilbert stesso, quando Cantor gli aveva parlato della totalità di tutti i cardinali aveva a caldo risposto che gli sembrava legittima, in quanto era definito se un ente fosse un cardinale oppure no; presto accettò però la posizione di Cantor che la riteneva inconsistente.

Il metodo assiomatico

Il metodo assiomatico che si precisa nell'ultima parte dell'Ottocento, è ben diverso da quello euclideo, ed è anche inizialmente chiamato da alcuni (in Italia ad esempio) metodo ipotetico-deduttivo, per segnalare una rottura. In verità i nuovi ingredienti erano antichi. Il metodo assiomatico considera gli assiomi come proposizioni primitive (cioè non conseguenza di alcuna altra) tra termini o concetti primitivi (cioè non definiti esplicitamente in termini di altri); di essi si suppone solo di conoscere le mutue relazioni fissate dagli assiomi, ma non un significato indipendente. Come dice Enriques[1],

> La forma logica che si vuole dare ai postulati è precisamente quella di relazioni aventi un significato indipendente dal particolare contenuto dei concetti.

Sono le relazioni tra i concetti che hanno significato, non i concetti.

Le proposizioni primitive sono considerate arbitrarie, non nel senso che dipendano dal ghiribizzo del matematico, ma nel senso che non sono giustificate come proposizioni vere in qualche dominio della realtà.

Il metodo si impone come modo di introdurre nuove teorie. Soprattutto in campo algebrico verso la metà dell'Ottocento, in Inghilterra, sono studiate proprietà di operazioni analoghe ma non identiche a quelle dei numeri; le proprietà delle operazioni che si vogliono indagare costituiscono gli assiomi di nuove "algebre" che non hanno alle spalle una interpretazione; prevale e precede l'aspetto formale[2].

D'altra parte la logica formale, fin dai tempi di Aristotele e degli Stoici, come dice la parola tratta forme, schemi, che vengono interpretati in ciascuna applicazione, e un sillogismo è valido o corretto, così come qualsiasi inferenza secondo la logica contemporanea, se in tutte le interpretazioni nelle quali le premesse sono vere anche la conclusione è vera. Illustriamo il carattere formale della logica con un esempio.

[1] F. Enriques, *Per la storia della logica* (1922), Zanichelli, 1987.

[2] Forse la scelta di questi argomenti originali era dovuta anche all'arretratezza della matematica inglese, rimasta indietro nel campo dell'analisi per la fedeltà alle notazioni e ai metodi di Newton; alcune di queste algebre apparivano interpretazioni forzate, come quella di Hamilton per l'algebra degli intervalli di tempo; altri studi riguardavano algebre importanti, come quella dei quaternioni, che non godono della proprietà commutativa della moltiplicazione, o quella di Boole, per le leggi del pensiero (interpretazione peraltro apparentemente poco matematica).

Esempio Si chieda se il seguente sillogismo è valido, cioè se la conclusione è conseguenza logica delle premesse.

$$
\text{(I)} \qquad \begin{array}{l} \text{Nessun triangolo rettangolo è equilatero} \\ \underline{\text{Qualche triangolo isoscele è equilatero}} \\ \text{Qualche triangolo rettangolo non è isoscele,} \end{array}
$$

Se qualcuno risponde di sì, questi non ha il senso della conseguenza logica, perché gli si potrebbe rispondere che allora anche il seguente

$$
\text{(II)} \qquad \begin{array}{l} \text{Nessun cane è ruminante} \\ \underline{\text{Qualche quadrupede è ruminante}} \\ \text{Qualche cane non è quadrupede} \end{array}
$$

sarebbe valido, ché è un esempio dello stesso sillogismo.

In effetti il sillogismo in esame non è né il primo né il secondo, ma

$$
\text{(III)} \qquad \begin{array}{l} \text{Nessun } S \text{ è } M \\ \underline{\text{Qualche } P \text{ è } M} \\ \text{Qualche } S \text{ non è } P \end{array}
$$

dove S, P, M sono simboli di predicati.

La domanda in verità era se il sillogismo proposto sia un esempio di un sillogismo valido, ma questo si tende a dimenticare, anche quando si fa matematica.

Il sillogismo di sopra si può addirittura scrivere, nella formalizzazione tradizionale:

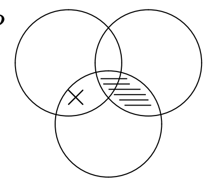
$$
\begin{array}{l} \mathbf{E}: \ S \ \ M \\ \underline{\mathbf{I}: \ P \ \ M} \\ \mathbf{O}: \ S \ \ P \end{array}
$$

Non c'è bisogno che ci siano solo simboli, la formalizzazione totale, per avere il formale. Basta, e occorre, che ci siano variabili, o almeno il concetto di variabile. Il carattere formale della logica non si manifesta nelle regole[3], ma nella possibilità di diverse interpretazioni (per i sillogismi, delle lettere S, P, M su predicati).

Poiché la verifica della validità di un sillogismo non è praticamente eseguibile passando in rassegna davvero tutte le possibili interpretazioni, e si

[3]Quando l'uomo primitivo dice "non c'è fumo senza arrosto, vedo fumo, deve esserci un arrosto", non sta applicando il *modus ponens*.

sono inventate tecniche finite. Lo stesso per i linguaggi logici più ricchi della logica contemporanea. Con la tecnica dei diagrammi di Venn ad esempio per il sillogismo considerato si ottiene



che non fornisce la conclusione, per certificare la quale ci dovrebbe essere una crocetta in $S \cap \sim P$. Non c'è la crocetta, e neppure $S \cap \sim P$ è tutto tratteggiato, e non possiamo dire in base alle premesse se $S \cap \sim P$ è vuoto o no, dipende da S e P.

Esiste come abbiamo visto una interpretazione dei simboli di predicato S, P, M per cui $S \cap \sim P$ è vuoto e una per cui non lo è.

In campo matematico, la lezione della logica (di essere un discorso formale) si era persa, perché si era imposta a partire da Descartes la convinzione che matematica e logica divergessero, e solo la prima fosse una vera *ars inveniendi*, e che in essa il discorso avesse un contenuto. D'altra parte anche ai tempi di Euclide la trattazione formale non si era sposata con quella matematica.

Gli *Elementi* di Euclide sono impostati con assiomi (postulati) iniziali, ma vengono date definizioni dei termini primitivi (punto e retta) e le inferenze formali non vi hanno posto.

Il metodo assiomatico moderno, sollecitato anche dalle ricerche geometriche oltre che algebriche, fu messo a punto e teorizzato da molti matematici, tra i quali Pasch, Peano, Pieri, Enriques, Hilbert. Enriques testimonia[4] che ogni pensatore del periodo dovette in un certo senso riscoprire "come una conquista personale" la rivoluzione che si era attuata nella concezione della natura della scienza matematica e della sua metodologia, acquisendo "coscienza matura del significato di una rivoluzione compiuta nei secoli". L'enfasi era

[4] Enriques, *Per la storia della logica*, cit.

giustiticata, perché mai prima si era avuta la consapevolezza che il discorso matematico fosse formale.

Il lavoro rivolto a sistemare le geometrie non euclidee e i loro rapporti con quella euclidea, come anche la nuova geometria proiettiva, hanno indotto a interrogarsi su cosa fosse una scienza deduttiva, come era sempre stato vanto sbandierato dalla matematica:

> Perché la geometria diventasse una vera scienza deduttiva era necessario che le derivazioni delle conseguenze fossero indipendenti dal senso dei concetti geometrici, come devono esserlo dalle figure. Nel corso di una deduzione, è lecito e può essere utile pensare al significato dei concetti geometrici in giuoco; ma non è necessario; quando diventa necessario, è segno di un difetto delle deduzioni e di un'inadeguatezza delle proposizioni assunte per sostenere la dimostrazione[5].

Il merito principale del metodo assiomatico è riconosciuto nel fatto che le teorie hanno sempre la possibilità di ricevere diverse interpretazioni,

> [le quali] invitano a tradurre l'una nell'altra diverse forme di intuizione[6]

Con le parole di Hilbert[7]

> La circostanza [che tutti gli enunciati di una teoria valgono anche per ogni altro sistema di enti che si sostituiscano a quelli pensati, purché siano soddisfatti gli assiomi] , però, non può mai rappresentare un difetto di una teoria* [* ne è piuttosto un grandissimo pregio] e in ogni caso è inevitabile.

Il pregio è ad esempio espresso un po' ingenuamente da Pasch generalizzando il principio di dualiltà:

[5] M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1882, p. 82. Pasch fu il primo a segnalare la necessità di assiomi dell'ordine.

[6] Enriques, *Per la storia della logica*, cit.

[7] Lettera a Frege del 29 dicembre 1899, vedi oltre.

> Quando si deduce [...] un teorema da un gruppo di proposizioni – che chiameremo generatori – il valore della deduzione travalica lo scopo iniziale. Infatti, se si derivano dai generatori proposizioni corrette, allora cambiando con altri i concetti geometrici [...] si ottiene senza duplicare la dimostrazione una proposizione che è conseguenza dei generatori così modificati[8].

Questa situazione si esprime dicendo che la teoria non è categorica, la categoricità essendo appunto la proprietà di avere un solo modello, a meno di isomorfismi.

Che tutte, o la maggior parte delle teorie siano non categoriche era una constatazione empirica; si sarebbe voluto fare una eccezione per teorie come quella dei numeri che si pensava esprimessero le proprietà matematiche di concetti fondamentali. La questione sarà chiarita solo dallo sviluppo successivo della logica matematica.

Esempio La teoria assiomatica dei gruppi è data dai seguenti assiomi

$$\forall x, y, z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$$

$$\forall x(x \cdot e = x)$$

$$\forall x \exists y(x \cdot y = e)$$

che affermano la proprietà associativa di una operazione, indicata da "$\cdot$", l'esistenza di un elemento neutro e e l'esistenza di un inverso per ogni oggetto.

Un modello della teoria è una struttura che soddisfa gli assiomi (e nel caso particolare è detta un gruppo). I teoremi della teoria sono gli enunciati, scritti nel linguaggio degli assiomi (cioè che fanno intervenire i concetti primitivi, e quelli definiti[9] oltre alle variabili e agli operatori logici), che valgono in tutti i modelli. Sono chiamati anche teoremi gli enunciati dimostrabili, con una dimostrazione che sia una catena finita di assiomi e applicazioni di regole logiche. Le due definizioni coincidono ma i matematici all'inizio del

[8] Pasch, cit. p. 98.

[9] Una volta che si dimostri che per ogni x esiste un solo inverso,

$$\forall x \exists y(x \cdot y = e \wedge \forall z(x \cdot z = e \rightarrow z = y)),$$

si può introdurre un simbolo di operazione definito x^{-1} con il nuovo assioma $\forall x(x \cdot x^{-1} = e)$.

Novecento non lo sapevano (e non lo sanno) e usavano e usano i due concetti come equivalenti senza chiara consapevolezza.

Esistono gruppi finiti delle più varie specie. Alcuni sono formati da numeri, ad esempio gli interi modulo 2, o $\mathbb{Z}_2$, cioè l'insieme $\{0,1\}$ con le operazioni individuate dall'interpretazione $e \rightsquigarrow 0$ e $\cdot \rightsquigarrow +(\mathrm{mod}\ 2)$; verificare la proprietà associativa non è immediato, se prima non si dimostra che e è anche elemento neutro a sinistra; questa proprietà, così come l'esistenza di un inverso destro e sinistro, richiede all'inizio dello sviluppo della teoria una derivazione non semplice, tanto che spesso le si inseriscono entrambe negli assiomi.

Esiste anche il gruppo banale con un solo elemento, che si indica in genere con $\{e\}$, prendendo la costante stessa come elemento, e definendo l'operazione come costante. Un altro gruppo, esempio di altri dello stesso genere, per ogni n, è l'insieme delle permutazioni di tre lettere

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

se si interpreta e come l'identità

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

e il prodotto "$\cdot$" come la composizione consecutiva di due permutazioni[10]:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ g(a) & g(b) & g(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ g(f(a)) & g(f(b)) & g(f(c)) \end{pmatrix}$$

Esistono anche gruppi infiniti, come i numeri interi $\mathbb{Z}$ con $e \rightsquigarrow 0$ e $\cdot \rightsquigarrow +$, o $\mathbb{R}$ con 0 e l'addizione, oppure con 1 e la moltiplicazione.

[10] Una permutazione di tre lettere di può identificare con una funzione biiettiva $f : \{a,b,c\} \longrightarrow \{a,b,c\}$, ad esempio

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

con la f tale che $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$.

La pluralità delle interpretazioni è anche una filosofia della matematica, che ad esempio offre una scusa per non rispondere alla domanda su cosa sono gli enti matematici di cui parla una teoria, ma non è questo il motivo per cui era apprezzata, quanto il fatto che avesse una funzione euristica

> Pare quasi che agli occhi mortali, con cui ci è dato esaminare una figura sotto un certo rapporto, si aggiungano mille occhi spirituali per contemplarne tante diverse trasfigurazioni; mentre l'unità dell'oggetto splende alla ragione così arricchita, che ci fa passare con semplicità dall'una all'altra forma[11].

Hilbert si è dedicato alla geometria elementare non (solo) per correggere o completare Euclide, ma per svolgere una serie di indagini logiche, come ha spiegato in una lettera a Frege[12]

> Io sono stato costretto dalla necessità a stabilire il mio sistema di assiomi: volevo rendere possibile la comprensione di quelle, fra le proposizioni della geometria, che ritengo essere i risultati più importanti delle indagini geometriche: ossia che l'assioma delle parallele non è conseguenza dei rimanenti assiomi, che lo stesso vale per l'assioma di Archimede ecc. Volevo rispondere alla domanda tendente a stabilire se la proposizione che in due rettangoli equivalenti e di ugual base sono uguali anche gli altri lati, può venir dimostrata o vada piuttosto assunta come un nuovo postulato, come già fa Euclide. In generale, volevo stabilire la possibilità di comprendere e dare una risposta a domande del tipo: perché la somma degli angoli interni di un triangolo vale due retti? E volevo inoltre chiarire come questo fatto fosse collegato all'assioma delle parallele.

Nel sistema delle *Grundlagen* queste domande sono affrontabili in modo perfettamente determinato e "per molte di esse si ottiene una risposta assai sorprendente e anzi del tutto inattesa".

Più in generale Hilbert era interessato a rivalutare il posto autonomo della geometria nel panorama della matematica. Mentre si sviluppava impetuosamente l'analisi, la geometria si interrogava sulla propria funzione e sul

[11] Enriques, cit. L'unità dell'oggetto non è costituita dunque dagli enti, ma dai problemi che si possono formulare e trattare nella teoria.

[12] Lettera del 29 dicembre 1899.

proprio significato. L'intuizione geometrica era scaduta a livelli minimi di considerazione e affidabilità. La geometria rientrava nella matematica solo attraverso l'analitica.

Gli obiettivi che Hilbert si pose, e realizzò nelle *Grundlagen* erano innanzi tutto quello di fondare le geometria indipendentemente dai numeri, e al contrario ricambiare la dipendenza definendo geometricamente i numeri e le loro operazioni in modo da ottenere un corpo con le caratteristiche dei numeri reali; in secondo luogo quello di chiarire il ruolo del principio di continuità in geometria. La continuità era stata definita, da Cantor e Dedekind, in modo aritmetico, mentre la geometria non pareva in grado di fornire un fondamento alla continuità, nonostante l'idea comune che trattasse grandezze continue. Infine Hilbert sentiva la necessità di chiarire i rapporti tra geometria del piano e dello spazio, per una serie di questioni connesse alla forza deduttiva dei due sistemi[13].

Come dichiarò a Frege, Hilbert riuscì a compiere le analisi che lo interessavano solo con la impostazione assiomatica. Egli era convinto tuttavia di un valore generale di questo metodo, non solo in matematica. Egli fu a quanto pare fortemente influenzato dalla riflessione di Heinrich Hertz (1857-1894)[14]

Nell'introduzione ai suoi *Principi della Meccanica*[15], Hertz aveva esposto una metodologia che si ritroverà in Hilbert nella concezione che gli assiomi, se non contraddittori tra loro, stabiliscono il significato dei concetti.

Secondo Hertz il significato dei concetti di base di una teoria dipende solo dalla loro coerenza. A tale conclusione si perviene se si riflette, dice Hertz, sull'incompletezza delle definizioni e sull'impossibilità di cogliere con le parole l'essenza delle cose. "Possiamo, con le nostre concezioni, con le nostre parole, rappresentare completamente la natura di una cosa? Certamente no". Noi ci formiamo immagini o simboli di oggetti esterni e la forma che diamo ad essi è tale che "le necessarie conseguenze delle immagini nel pensiero sono sempre le immagini delle necessarie conseguenze in natura delle cose rap-

[13]Qualcuno (Bolyai) pensava che il quinto postulato potesse essere dimostrabile nella geometria dello spazio; molti teoremi della geometria piana avevano una dimostrazione molto più semplice (con un piano immerso) nello spazio; si trattava solo di una semplificazione o erano possibili risultati nuovi? Si veda G. Lolli, *Da Euclide a Gödel*, il Mulino, Bologna 2004, cap. 3.4, "Hilbert e la geometria".

[14]Anche Enriques riconosce il suo debito con Hertz, in *Per la storia della logica*, cit..

[15]H. R. Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt*, J. A. Barth, Leipzig 1894; ed. italiana a cura di G. Gottardi *I principi della meccanica presentata in connessione nuova*, La Gogliardica Pavese, Pavia 1995.

presentate". Questo presuppone una certa conformità tra natura e pensiero ma soprattutto la coerenza legale delle nostre immagini. Il significato dei concetti di base dipende dalla loro coerenza. Null'altro è necessario.

I termini teorici non sono mai adeguatamente definiti[16]. Con termini come "velocità", o il nome di un elemento come "oro" connettiamo un ampio numero di relazioni con altri termini e se tra tutte queste relazioni non troviamo contraddizioni che ci offendano, siamo perciò soddisfatti e non chiediamo altro.

Se ci sembra che la nozione di elettricità, ad esempio, sia incoerente è perché – secondo Hertz, interessato proprio a questo concetto – abbiamo accumulato troppe relazioni, più di quelle che si possono conciliare tra loro, e di conseguenza abbiamo una vaga sensazione di incoerenza, che ci porta ad interrogarci sulla natura dell'elettricità. Le incoerenze possono e devono essere eliminate da un'analisi logica degli elementi di una scienza, ma nel frattempo non impediscono il successo anche travolgente di una teoria.

Molte di tali suggestioni si ritrovano nella concezione che gli assiomi sono definizioni implicite dei concetti che li soddisfano, o definizioni per postulati, definizioni *descrittive*, come si dirà anche per un certo breve periodo.

Tale idea di un nuovo tipo di definizioni, oltre a quelle nominali e reali, andava tuttavia contro l'inerzia di una lunga tradizione logica, il cui paladino in questa occasione si presenta sotto le vesti di Frege.

Hilbert fu quasi costretto a precisare la sua concezione del metodo assiomatico, e a diventarne un sostenitore deciso, dalle obiezioni che Frege mosse, pur apprezzandolo, al suo lavoro.

> Nel paragrafo 6 Lei dice: "Gli assiomi di questo gruppo definiscono il concetto della congruenza o del movimento". Ma allora, perché mai essi non vengono chiamati definizioni?[17]

ed ammannisce a Hilbert una lezione di logica.

[16]In modo analogo, il matematico Beppo Levi, a proposito dei termini primitivi di una teoria assiomatica, affermava: "è ben vero che un sistema dato di postulati può dare di un'idea primitiva una determinazione, in rapporto alle altre idee, minore di quella che effettivamente si attribuisce a quel nome nel discorso comune; ma la vera e completa determinazione di una idea primitiva non è possibile, comunque complesso sia il sistema dei contrassegni che per essa si vogliono enunciare; noi non potremo mai identificare le idee, ma potremo solo affermare che tra esse sussistono certe relazioni", B. Levi, "Antinomie logiche?", *Annali di Matematica*, (3) 15 (1908), pp. 187-216, footnote (*), p. 188, ristampato in *Opere scelte*, vol. 2, Cremonese, Roma, 1999, pp. 629-58.

[17]Lettera di Frege a Hilbert del 27 dicembre 1899.

> Resta ... anche oscuro che cosa Lei chiami punto. A tutta prima vien fatto di pensare ai punti nel senso della geometria euclidea, e la Sua affermazione – che gli assiomi esprimono fatti fondamentali della nostra intuizione[18] – conferma tale opinione. In seguito però Lei intende per punto una coppia di numeri. Resto dubbioso di fronte alle affermazioni che per mezzo degli assiomi della geometria si raggiunge la descrizione completa e precisa delle relazioni, e che gli assiomi definiscono il concetto del "fra". Con ciò si ascrive agli assiomi qualcosa che è compito delle definizioni. Così facendo vengono – a mio parere – seriamente confusi i confini tra assiomi e definizioni, e accanto al significato tradizionale della parola "assioma" – quale risulta nell'affermazione che gli assiomi esprimono fatti fondamentali dell'intuizione – mi sembra ne affiori un secondo, che peraltro non mi riesce di cogliere esattamente.

Secondo Frege le definizioni non sono asserzioni (come lo sono princípi, assiomi, teoremi), ma stipulazioni, mediante le quali ad un segno o ad una espressione viene attribuito un significato per mezzo della definizione stessa.

> [Le asserzioni] non possono contenere nessuna parola e segno di cui non siano già completamente fissati in precedenza il senso e il significato o il contributo all'espressione del pensiero, cosicché non rimanga alcun dubbio sul senso dell'enunciato ... Assiomi e teoremi non possono dunque mai stabilire per la prima volta il significato di un segno o di una parola che ricorra in essi.
> Attribuisco il nome di assiomi a enunciati che sono veri, ma che non vengono dimostrati perché la loro conoscenza scaturisce da una fonte conoscitiva di natura extra-logica, che possiamo chiamare intuizione spaziale. Il fatto che gli assiomi siano veri ci assicura di per sé che essi non si contraddicono tra loro, e ciò non abbisogna di alcuna ulteriore dimostrazione.

La risposta di Hilbert[19] è altrettanto puntigliosa.

[18] ["Gli assiomi della geometria possono essere divisi in cinque gruppi. Ciascuno di questi gruppi esprime certi corrispondenti fatti fondamentali per la nostra intuizione", Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, cap. 1, §1.]

[19] Lettera del 29 dicembre 1899.

> Lei dice: "Sono di tutt'altro tipo le spiegazioni del paragrafo 1[20], nel quale i significati delle parole, punto, retta ... non vengono indicati, ma presupposti come noti". Proprio qui si trova il punto cardinale dell'equivoco. Io non voglio presupporre nulla come noto; io vedo nella mia spiegazione del paragrafo 1 la definizione dei concetti di punto, retta, piano, se si tornano ad assumere come note caratteristiche[21] tutti gli assiomi dei gruppi I-V. Se si cercano altre definizioni di "punto", ricorrendo per esempio a perifrasi come "privo di estensione" ecc., si capisce che debbo oppormi nel modo più deciso a siffatti tentativi; si va infatti alla ricerca di qualcosa là dove non la si potrà mai trovare, per il semplice motivo che non è là dove la si cerca.

Quindi in riferimento all'affermazione di Frege che gli assiomi sono veri:

> Mi ha molto interessato leggere nella Sua lettera proprio questa frase, poiché io, da quando ho cominciato a riflettere, scrivere e tenere conferenze su questo argomento, ho sempre detto esattamente il contrario: se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri, allora esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi. Questo è per me il criterio della verità e dell'esistenza.

---

[20]Ricordiamo come iniziano le *Grundlagen* con il primo capitolo dedicato ai cinque gruppi di assiomi e il primo paragrafo che esordisce così:

> DEFINIZIONE Consideriamo tre distinti insiemi di oggetti. Gli oggetti del primo siano chiamati *punti* e denotati da $A, B, C, \ldots$; gli oggetti del secondo siano chiamati *rette* e denotati da $a, b, c, \ldots$; gli oggetti del terzo siano chiamati *piani* e denotati da $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$
>
> ...
>
> I punti, le rette e i piani sono pensati soddisfare certe mutue relazioni e queste relazioni sono denotate da parole come "giace", "fra", "congruente". La descrizione precisa e matematicamente completa di queste relazioni segue dagli assiomi della geometria.

Seguono gli assiomi divisi in cinque gruppi, assiomi di incidenza, di ordine, di congruenza, delle parallele, di continuità.

[21]Nella terminologia del tempo, le note caratteristiche erano quelle condizioni che permettevano di riconoscere se un oggetto soddisfaceva o no a una definizione. Una definizione consisteva di un insieme di note caratteristiche.

Questa importante affermazione era stata ribadita e applicata da Hilbert in un altro lavoro del 1899, pubblicato nel 1900, relativo alla assiomatizzazione del sistema dei numeri reali, sul quale torneremo. Per quanto riguarda la critica che i "punti" hanno diversi significati in diverse parti dell'opera, si tocca con mano l'utilità del metodo assiomatico per stabilire le relazioni logiche tra diverse proposizioni. Il principio ispiratore e la tecnica inizialmente più usata è la proprietà che un enunciato φ è indipendente da un insieme di enunciati T, cioè non è dimostrabile a partire da T se e solo se $\neg\varphi$ è compatibile con T, se T non è contraddittorio, cioè in termini moderni

$$T \not\models \varphi \text{ se e solo se } T \cup \{\neg\varphi\} \text{ ha un modello}$$

ovvero

$$T \models \varphi \text{ se e solo se } T \cup \{\neg\varphi\} \text{ è contraddittorio,}$$

a seconda che si usi la versione semantica o quella deduttiva.

Questa proprietà non era invero dimostrata, perché non erano ben definiti i concetti fondamentali: come abbiamo detto il concetto di "dimostrazione" oscillava tra la versione dedutttiva e quella semantica, ma l'intuizione soggiacente era valida, tanto più che l'equivalenza di sopra vale sia per la nozione di conseguenza logica $\models$ sia per la nozione deduttiva di derivabilità $\vdash$.

Nei diversi modelli usati per le dimostrazioni di indipendenza i concetti primitivi vengono per forza ad assumere diversi significati:

> Lei dice ... che ad esempio "fra" è concepito in modo diverso a pagina 20 e che ivi il punto è una coppia di numeri. Certamente, si comprende da sé che ogni teoria è solo un telaio, uno schema di concetti unitamente alle loro mutue relazioni necessarie, e che gli elementi fondamentali possono venir pensati in modo arbitrario. Se con i miei punti voglio intendere un qualunque sistema di enti, per esempio il sistema: amore, legge, spazzacamino[22]. ..., allora basterà che assuma tutti i miei assiomi come relazioni tra questi enti perché le mie proposizioni, per esempio il teorema di Pitagora, valgano anche per essi. In altre parole: ogni teoria può essere

[22][Si tramanda che già nel 1891 Hilbert avesse sostenuto che le parole 'punto", "retta" e "piano" dovevano poter essere sostituite da "tavola", "sedia" e "boccale di birra"; lo afferma O. Blumenthal nella nota biografica inserita nelle opere scelte di Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, Berlin, 1932-5.]

> sempre applicata a infiniti sistemi di elementi fondamentali. Anzi occorre soltanto applicare una trasformazione biunivoca e convenire che gli assiomi per gli enti trasformati debbano essere uguali a quelli che valgono per i loro corrispondenti. Di fatto anche questa circostanza si applica sovente, ad esempio col principio di dualità ecc., e io l'applico alle mie dimostrazioni di indipendenza. Tutti gli enunciati di una teoria dell'elettricità valgono naturalmente anche per ogni altro sistema di enti che si sostituiscano al posto dei concetti magnetismo, elettricità . . . , purché siano soddisfatti gli assiomi richiesti.

Con la maturazione, Hilbert diventerà sempre più convinto che il metodo assiomatico fosse quello più adatto e naturale per lo sviluppo consapevole di tutte le teorie scientifiche. Il manifesto di questa sua concezione fu una conferenza del 1917, con la quale Hilbert riprese a interessarsi di fondamenti e questioni gnoseologiche[23].

Hilbert nell'occasione osserverà che ogni dominio di conoscenze, non solo matematiche, è formato da dati che sono reciprocamente ordinati e formano una intelaiatura di concetti. Quando esaminiamo in profondità una determinata teoria, ogni volta riconosciamo che alla base dell'intelaiatura dei suoi concetti ci sono poche, ben individuate proposizioni e che queste sole bastano per costruire da esse, secondo principi logici, l'intera intelaiatura.

> Lo stesso ruolo è svolto nella statica dal teorema sul parallelogramma delle forze, nella meccanica ad esempio dalle equazioni differenziali del movimento di Lagrange, e nell'elettrodinamica dalle equazioni di Maxwell insieme con il postulato della rigidità e della carica dell'elettrone. La termodinamica può venire costruita interamente sul concetto di funzione di energia e sulla definizione di temperatura e di pressione come derivate dalle sue variabili (entropia e volume). Al centro della teoria elementare della radiazioni c'è il teorema di Kirchkoff sulle relazioni tra scissione e assorbimento. Nel calcolo della probabilità il principio fondamentale è la legge degli errori di Gauss, nella teoria dei gas

[23] D. Hilbert, "Axiomatisches Denken", *Mathematische Annalen*, 78 (1918), pp. 405-15; trad. it. "Pensiero assiomatico", in D. Hilbert, *Ricerche sui fondamenti della matematica* (a cura di M. V. Abrusci), Bibliopolis, Napoli, 1978, pp. 177-88. Torneremo in seguito su questo importante; ora consideriamo solo le dichiarazioni di esaltazione del metodo assiomatico in ogni dominio scientifico.

> il teorema dell'entropia come logaritmo negativo della probabilità dello stato ...
>
> Da un primo punto di vista, questi teoremi fondamentali possono essere ritenuti come gli *assiomi dei singoli campi conoscitivi*.

Con la crescita delle conoscenze si è tuttavia fatta sentire l'esigenza, in ciascun campo, di fondare gli stessi teoremi fondamentali, ritenuti come assiomi, dimostrandoli.

> Ma, esaminando criticamente queste "dimostrazioni", ci si può rendere conto che esse in se stesse non sono dimostrazioni bensì, in sostanza, esse rendono possibile soltanto la riconduzione a certi teoremi più profondi che, a loro volta, possono essere quindi riguardati come nuovi assiomi al posto dei teoremi da dimostrare. In questo modo sono sorti quelli che oggi vengono detti propriamente *assiomi* della geometria, dell'aritmetica, della statica, della meccanica, della teoria dell'irraggiamento e della termodinamica. Questi assiomi costituiscono un livello di assiomi più profondo rispetto a quello caratterizzato dalle proposizioni, prima menzionate, poste originariamente alla base dei singoli campi conoscitivi. Il procedimento del metodo assiomatico, qui esposto, equivale perciò ad un *approfondimento dei fondamenti* dei singoli campi conoscitivi, quale diviene necessario in ogni costruzione, man mano che la si sviluppa, la si innalza e ci si vuol garantire della sua sicurezza.
>
> Perché la teoria di un campo conoscitivo (cioè l'intelaiatura di concetti che la esprime) possa servire al suo scopo (cioè ad orientare e ad ordinare), devono essere soddisfatti principalmente due requisiti: si deve offrire *in primo luogo* un quadro complessivo della *dipendenza* (risp. *indipendenza*) dei teoremi della teoria, e *in secondo luogo* una garanzia della *non contraddittorietà* di tutti i teoremi della teoria.

L'utilità delle indagini sulla dipendenza è illustrata con l'ovvio esempio dell'assioma delle parallele in geometria, ma anche con le ricerche sull'assioma di continuità, e altre. Hilbert insiste tuttavia sulle teorie fisiche.

> Un altro esempio di indagine sulla dipendenza degli assiomi è offerto dalla meccanica classica. Come si è notato sopra, le equazioni lagrangiane del moto possono essere prese provvisoriamente come assiomi della meccanica: su di esse infatti, nella loro formulazione generale per forze e condizioni aggiuntive arbitrarie, si può certo fondare tutta la meccanica. Ma, con un'indagine più approfondita, si mostra che nella costruzione della meccanica non è necessario presupporre sia forze arbitrarie sia condizioni aggiuntive arbitrarie, e che perciò il sistema delle ipotesi può venire ridotto. Questa conoscenza ci porta da un lato al sistema di assiomi di Boltzmann che assume soltanto forze, e invero in particolare forze centrali, ma nessuna condizione aggiuntiva, e al sistema di assiomi di Hertz che rigetta le forze e procede con condizioni aggiuntive, e in particolare con vincoli rigidi. Entrambi questi sistemi di assiomi, perciò, costituiscono un livello più profondo dello sviluppo dell'assiomatizzazione della meccanica.

Per quel che riguarda la non contraddittorietà

> succede spesso di ritenere ovvia la non contraddittorietà interna di una teoria, mentre in verità per dimostrarla sono necessari profondi sviluppi matematici. Consideriamo, ad esempio, un problema tratto dalla teoria elementare della *conduzione del calore*, cioè la distribuzione della temperatura all'interno di un corpo omogeneo la cui superficie superiore è mantenuta ad una determinata temperatura variante da punto a punto. Il postulato del mantenimento dell'equilibrio della temperatura non contiene allora nessuna contraddizione interna alla teoria. Ma per riconoscere questo fatto è necessaria la dimostrazione che è sempre risolubile il noto problema dei valori al contorno, della teoria del potenziale; infatti solo la soluzione di questo problema al contorno mostra che è possibile in generale una distribuzione di temperatura che soddisfi alle equazioni della conduzione del calore.

In fisica inoltre non basta la non contraddittorietà interna ma anche quella con i campi vicini; al momento della conferenza, Hilbert poteva ricordare i propri studi sugli assiomi della teoria elementare dell'irraggiamento, la cui non contraddittorietà egli aveva ricondotto a quella dell'analisi.

D'altra parte già nel 1900, nella sua presentazione dei problemi matematici, il sesto problema era intitolato alla "Trattazione matematica degli assiomi della fisica"[24], dove aveva dichiarato:

> Inoltre, a complemento delle modalità di trattazione proprie della fisica, spetta ai matematici il compito di esaminare ogni volta con precisione se un assioma aggiunto ex novo non sia in contraddizione con gli assiomi precedenti. Il fisico, spesso, si vede costretto dai risultati dei suoi esperimenti a fare di tanto in tanto nuove assunzioni, *nel corso* dello sviluppo della sua teoria, appellandosi, per quanto concerne la non contraddittorietà delle nuove assunzioni con gli assiomi precedenti, meramente proprio a quegli esperimenti oppure ad una certa sensibilità fisica: un procedimento, questo, che è inammissibile nella costruzione rigorosamente logica di una teoria. L'auspicata dimostrazione della non contraddittorietà di tutte le assunzioni fatte mi sembra importante, anche perché lo sforzo di eseguire una tale dimostrazione spinge sempre, e con molta efficacia, anche ad una esatta formulazione degli assiomi stessi.

Le considerazioni che Hilbert espone a Frege sulla sua concezione dell'esistenza matematica, sul rapporto tra non contraddittorietà ad esistenza, erano state anticipate, come indica lo stesso Hilbert, in una conferenza del 1899, pubblicata nel 1900, sul concetto di numero[25].

Sul concetto di numero

Hilbert aveva esordito mettendo a confronto due diversi modi di procedere negli studi rispettivamente sui principi della teoria dei numeri e su quelli della geometria.

[24]D. Hilbert, "Mathematische Probleme", *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1900, pp. 253-97; trad. it. parziale in *Ricerche sui fondamenti ...*, cit., pp. 145-62.

[25]"Über den Zahlbegriff", *Jahresbericht der DMV*, 8 (1900), pp. 180-4; trad. it. in *Ricerche sui fondamenti ...*, cit., pp. 139-43.

Partendo dai numeri interi positivi, i naturali[26] "si arriva al numero negativo chiedendo l'eseguibilità generale della sottrazione"[27], quindi si definiscono i razionali e i reali.

> Possiamo chiamare *metodo genetico* questo modo di introduzione del concetto di numero, poiché il più generale concetto di numero reale viene ottenuto mediante successive estensioni del semplice concetto di numero.
>
> Nella costruzione della geometria ci si comporta in modo sostanzialmente diverso. Qui si comincia con l'assunzione della esistenza di tutti gli elementi ... e quindi si pongono questi elementi in certe relazioni tra di loro mediante certi assiomi ...
>
> ...
>
> Vogliamo chiamare *metodo assiomatico* il procedimento di indagine che è qui coinvolto.
>
> Ci domandiamo se realmente il metodo genetico sia il solo adeguato per lo studio del concetto di numero e il metodo assiomatico sia il solo adeguato per i fondamenti della geometria; appare interessante anche paragonare i due metodi e ricercare quale sia il metodo più vantaggioso quando si tratti di un'indagine logica dei fondamenti della meccanica e di altre discipline fisiche.
>
> La mia opinione è questa: nonostante l'alto valore pedagogico ed euristico del metodo genetico, tuttavia per una definita presentazione e per una piena sicurezza del contenuto della nostra conoscenza merita la preferenza il metodo assiomatico.

[26] Qui Hilbert considera come naturali i numeri di conto: 1,2, ...

[27] Tecnicamente, si considerano le coppie $\langle m, n\rangle$ a rappresentare $m-n$, si definisce una relazione di equivalenza $\langle m, n\rangle \sim \langle p, q\rangle \leftrightarrow m+q=n+p$, e si definiscono gli interi relativi come classi di equivalenza rispetto a questa relazione, ponendo $0=[\langle n, n\rangle], +n=[\langle n+1,1\rangle], -n=[\langle 1, n+1\rangle]$; la operazione di addizione è definita da $[\langle m, n\rangle]+[\langle p, q\rangle]=[\langle m+p, n+q\rangle]$, e quella di moltiplicazione da $[\langle m, n\rangle] \cdot [\langle p, q\rangle]=[\langle mp+nq, mq+np\rangle]$. In modo analogo si introducono i razionali come classi di coppie di interi, e i reali come insiemi di razionali con le sezioni di Dedekind, o come successioni di Cauchy.

Quindi Hilbert procede nel seguente modo: "Pensiamo un sistema di cose; chiamiamo numeri queste cose, e indichiamoli con $a, b, c, \ldots$". Pensiamo a certe relazioni descritte dai seguenti assiomi[28].

I. *Assiomi del collegamento*. È sempre definita l'addizione con l'esistenza dello 0, elemento neutro destro e sinistro, e sono sempre risolubili in modo unico le equazioni $a + x = b$ e $x + a = b$

   È definita la moltiplicazione con l'esistenza dell'elemento neutro 1 destro e sinistro e la risolubilità unica delle equazioni $a \cdot x = b$ e $x \cdot a = b$ per $a \neq 0$.

II. *Assiomi del calcolo*. Le proprietà associativa e commutativa per somma e prodotto e la distributività del prodotto rispetto alla somma, a destra e a sinistra.

III. *Assiomi dell'ordinamento*. La relazione $<$ è un ordine totale ed è compatibile con somma e prodotto, cioè

$$a > b \text{ implica } a + c > b + c \text{ e se } c > 0 \text{ anche } a \cdot c > b \cdot c.$$

IV. *Assiomi della continuità*.

   IV1. (Assioma archimedeo) Se $a > 0$ e $b > 0$ è possibile sommare a con se stesso tante volte che $a + a + \ldots + a > b$.

   IV2. (Assioma della completezza [*Vollständigkeit*]) Non è possibile aggiungere al sistema dei numeri un altro sistema di cose in modo tale che anche nel sistema risultante dalla riunione dei due sistemi siano soddisfatti tutti gli assiomi I, II, III, IV1; ovvero, brevemente, i numeri costituiscono un sistema di cose che, se si conservano tutti gli assiomi, non è più capace di alcuna estensione.

I primi commenti di Hilbert riguardano la non indipendenza degli assiomi; gli assiomi per 0 e 1 sono sovrabbondanti; la legge commutativa dell'addizione è conseguenza degli assiomi I e della legge associativa dell'addizione e di entrambe le distributive

Dimostrazione. Si ha

[28] Che riassumiamo, salvo per l'assioma di continuità riportato alla lettera. Gli assiomi erano stati esposti nelle *Grundlagen*, all'inizio del capitolo III, meno quello di continuità, nella prima edizione; la continuità nella forma sotto utilizzata era stata aggiunta anche per la geometria nella traduzione francese delle *Grundalgen* apparsa nel 1900, oltre che nelle successive edizioni, a riprova che Hilbert lo concepì proprio nel 1899.

$$\begin{aligned}(a+b)(1+1) &= (a+b)1+(a+b)1 &&= a+b+a+b \\ &= a(1+1)+b(1+1) &&= a+a+b+b\end{aligned}$$

quindi

$$a+b+a+b = a+a+b+b,$$

e dalla risolubilità unica delle equazioni lineari, due volte, una a destra e una a sinistra si ha $b+a = a+b$.

La legge commutativa della moltiplicazione è conseguenza degli assiomi I, III, IV1 e dei restanti assiomi del calcolo, ma non da questi meno l'assioma di Archimede. Hilbert, che ha ricavato questo risultato dal suo lavoro sul sistema delle *Grundlagen* a proposito del teorema di Pascal, osserva che questo fatto ha un particolare significato per gli assiomi della geometria.

Infine

> Gli assiomi IV1 e IV2 sono indipendenti l'uno dall'altro; essi non contengono alcuna asserzione sul concetto di convergenza o sull'esistenza del limite; eppure, si può mostrare che da essi segue il teorema di Bolzano[-Wierstrass] sull'esistenza del punto di accumulazione[29]. Perciò riconosciamo la corrispondenza del nostro sistema di numeri con l'ordinario sistema dei numeri reali.

Hilbert non accenna alla dimostrazione della usuale formulazione della continuità[30], né fornisce alcun commento sulla forma peculiare dell'assioma IV2, di cui non poteva non essere consapevole della differenza dai restanti e da quelli usuali di tutte le teorie: non parla delle relazioni tra gli elementi del dominio, ma del dominio stesso. Non sappiamo dunque come lo avesse concepito.

Il lavoro dell'assiomatizzatore non finisce con l'enunciazione degli assiomi e lo studio della loro indipendenza. Nell'introduzione sopra riassunta del

---

[29] Allude al teorema secondo il quale ogni insieme superiormente limitato di numeri naturali ha un estremo superiore (o versioni equivalenti) che è normalmente usato per esprimere la proprietà di continuità.

[30] Non è difficile peraltro immaginare quale fosse: chiamiamo $\mathbb{R}$ un sistema soddisfacente agli assiomi; supponiamo che esista in $\mathbb{R}$ un sottoinsieme X limitato superiormente ma privo di estremo superiore. Definiamo una sezione di $\mathbb{R}$ ponendo nella classe inferiore tutti i numeri razionali che sono minori o uguali a qualche elemento di X. Questa sezione individua un nuovo numero, quindi $\mathbb{R}$ può essere esteso con l'aggiunta di questo e la opportuna chiusura.

lavoro sul concetto di numero, prima di definire come metodo assiomatico il procedimento seguito in geometria, Hilbert aveva avvertito:

> Sorge allora la necessità di mostrare la non contraddittorietà e la completezza di questi assiomi; cioè si deve mostrare che l'uso degli assiomi fissati non può portare mai a contraddizioni e inoltre che il sistema degli assiomi basta per la dimostrazione di tutti i teoremi geometrici.

In riferimento al sistema di assiomi proposto per i reali, Hilbert osserva che "per dimostrare la non contraddittorietà degli assiomi costitutivi, occorre soltanto un'idonea modifica dei noti metodi argomentativi". Non è per nulla chiaro a cosa pensasse, in considerazione del fatto che si dovrebbe trattare di una dimostrazione di non contradittorietà assoluta, non relativa a qualche altro sistema; nella esposizione dei problemi matematici torna sull'argomento a proposito del problema n. 2, la non contraddittorietà degli assiomi aritmetici, affermando più cautamente[31]:

> Ora sono convinto che si deve riuscire a trovare una dimostrazione della non contradittorietà degli assiomi aritmetici, se in considerazione dello scopo prefissato si rielaborano con precisione e si modificano in modo opportuno i noti metodi inferenziali della teoria dei numeri irrazionali.

Sulla portata della dimostrazione di non contraddittorietà invece afferma recisamente

> In questa dimostrazione [di non contraddittorietà] io vedo anche la dimostrazione dell'esistenza della totalità dei numeri reali ovvero – nel modo di esprimersi di G. Cantor – la dimostrazione che il sistema dei numeri reali è un insieme consistente (compiuto).

Al termine dell'articolo osserverà che al contrario, se si volesse arrivare in modo simile alla dimostrazione dell'esistenza di una totalità di tutte le cardinalità, si fallirebbe perché tale totalità non esiste, è un sistema inconsistente (incompiuto),

La concezione dell'esistenza come conseguenza della non contraddittorietà secondo Hilbert libera dalle obiezioni rivolte in generale contro l'esistenza di insiemi infiniti.

[31] *Ricerche sui fondamenti ...*, p. 157.

> [...] come insieme dei numeri reali non abbiamo da pensare, ad es., la totalità di tutte le possibili leggi secondo cui si possono susseguire gli elementi di una successione fondamentale, ma piuttosto – come è stato appena spiegato – un sistema di cose le cui relazioni sono date mediante quel sistema *finito e chiuso* di assiomi I-IV e su cui valgono nuove asserzioni solo se possono essere derivate da quegli assiomi per mezzo di un numero finito di inferenze logiche.

Il "non abbiamo da pensare" significa che si tratta proprio di un'altra cosa:

> Ovviamente, secondo la concezione sopra accennata [del sistema assiomatizzato in "Über den Zahbegriff"], l'aggregato dei numeri reali, cioè il continuo, non è per esempio la totalità di tutti i possibili sviluppi decimali, né la totalità di tutte le possibili leggi secondo cui possono procedere gli elementi di una successione fondamentale; bensì, è un sistema di cose le cui relazioni reciproche sono regolate mediante gli assiomi fissati e per le quali sono veri tutti e soli quei fatti che possono essere ricavati dagli assiomi mediante un numero finito di inferenze logiche[32].

Per un pieno dispiegamento delle potenzialità e del significato del metodo assiomatico, Hilbert indica dunque, a parte l'esame logico degli assiomi che si esprime nella dipendenza o indipendenza, la necessità della dimostrazione di non contraddittorietà. Due aspetti si pongono come problematici. Come fare una tale dimostrazione, e il suo rapporto con l'esistenza dell'oggetto della teoria.

I due problemi sono collegati, perché era opinione comune che la non contraddittorietà di una teoria si potesse dimostrare solo esibendo un modello.

> Di quale mezzo disponiamo per dimostrare che certe proprietà, o certi requisiti (o come altrimenti si vogliano chiamare) non sono fra loro contraddittori? L'unico mezzo che io conosca è il seguente: presentare un oggetto che possieda tutte quelle proprietà, o citare un caso in cui tutti quei requisiti siano soddisfatti. Non dovrebbe essere possibile dimostrare la non contraddittorietà per altra via[33]

[32] "Mathematische Probleme", cit., trad. it. p. 157, problema 2.
[33] Frege a Hilbert, lettera del 6 gennaio 1900.

Allo stesso modo si esprime Poincaré[34]:

> Di solito per dimostrare che una definizione non implica una contraddizione, si procede con *un esempio*; si cerca un esempio di un oggetto che soddisfi la definizione [. . .] Ma una tale dimostrazione non è sempre possibile.

Nel caso della teoria dei numeri, come è chiaro a Hilbert sia nel lavoro sul concetto di numero sia nella esposizione dei problemi matematici, occorre seguire un'altra via, per avere la non contraddittorietà assoluta. Nel 1900 Hilbert è ottimista, ma oscuro o reticente. Nel 1904 darà la sua indicazione, che peraltro incontrerà subito obiezioni tecniche, da parte di Poincaré e di altri.

Si noti che Poincaré condivide l'idea che "[in matematica] esistenza può avere un solo significato, assenza di contraddizioni"[35]. Tuttavia sa che non sempre è possibile, con un esempio, e contesta il tentativo originale di Hilbert. Probabilmente la situazione di stallo gli fa gioco, in quanto vi scorge l'opportunità di legittimare il ruolo dell'intuizione sintetica *a priori*, quando la dimostrazione con un esempio non è possibile.

Ma sono espresse anche opposizioni all'idea che la dimostrazione di non contraddittorietà abbia qualcosa a che fare con l'esistenza matematica. La scuola di Peano in generale, e Couturat, non condividono tale posizione. Esplicitamente contrario, per la sua sfiducia nelle costruzioni linguistiche, è il fondatore dell'intuizionismo Luitzen Brouwer (1881-1966) nel 1907:

> Anche se risultasse palese che tali costruzioni non possono mai esibire la forma linguistica di una contraddizione, esse sono matematiche solo in quanto sono costruzioni linguistiche e non hanno nulla a che fare con la matematica, che è al di fuori dell'edificio [linguistico] [. . .]
>
> Supponiamo di avere in qualche modo dimostrato, senza pensare a una interpretazione matematica, che un sistema costruito

[34] H. Poincaré, *Science et méthode*, Flammarion, Paris, 1908, pp. 161-63.

[35] H. Poincaré, *Science et méthode*, cit. p. 161. L'affermazione di Poincaré è rivolta contro gli empiristi come John Stuart Mill che vorrebbero legare l'esistenza della matematica alla realtà fisica. Una volta stabililto che l'esistenza matematica è la non contraddittorietà, si può accettare l'idea di Mill che le definizioni siano assiomi mascherati, in quanto implicano una affermazione di esistenza, e per converso che gli assiomi siano definizioni.

> logicamente sulla base di alcuni assiomi linguistici è non contraddittorio, cioè che a nessuno stadio dello sviluppo del sistema possiamo incontrare due teoremi in contraddizione tra loro; se anche allora potessimo trovare un'interpretazione matematica degli assiomi [...] ne segue forse che tale costruzione matematica *esiste*? Nulla del genere è mai stato provato dagli assiomatizzatori[36]

L'altra richiesta dichiarata necessaria nella costruzione assiomatica è quella della dimostrazione della completezza.

[36]L. E. J. Brouwer, *Over de grondslagen der wiskunde*, Dissertazione, Maas & van Suchtelen, Amsterdam, 1907, pp. 183, cit. p. 132; in L. E. J. Brouwer, *Collected Works I*, North Holland, Amsterdam, 1975, pp. 11-101.

Avventure di una parola

Se quando parla in generale del metodo assiomatico Hilbert richiede sempre le condizioni della indipendenza e della non contraddittorietà, nel sistema di assiomi per la geometria e in quello per i numeri introduce anche la condizione della completezza.

Nella breve introduzione delle *Grundlagen* l'unica frase significativa è la seguente:

> La presente ricerca è un nuovo tentativo di stabilire per la geometria un insieme di assiomi **completo** e **il più semplice possibile** e di dedurre da essi i più importanti teoremi geometrici in modo tale che il significato dei vari gruppi di assiomi . . . venga alla luce.

Dopo la prima definizione del §1 aveva annunciato che "[l]a descrizione precisa e matematicamente completa di queste relazioni ["giace", "fra", "congruente"] segue dagli assiomi della geometria".

Nel lavoro sul concetto di numero, come abbiamo visto, parla della necessità di mostrare, oltre alla non contraddittorietà, anche la completezza degli assiomi, nel senso probabilmente delle *Grundlagen*, ma introduce un assioma che chiama "Assioma di completezza" (laddove di solito si parlava di "continuità" per la proprietà da aggiungere alle regole algebriche, valide anche per i razionali ed altri campi, per avere la caratteristica matematica tipica dei reali) che riguarda l'impossibilità di estendere il dominio; nello stesso tempo descrive il suo sistema finito di assiomi come "chiuso".

Prima di esaminare le carte, ricordiamo come sono definiti oggi i concetti di completezza: "concetti", perché si parla di completezza in due sensi, la completezza di un calcolo logico e la completezza di una teoria[37].

Con "completezza logica" si intende una proprietà di un calcolo logico, cioè di un sistema di assiomi e regole, la cui nozione di derivabilità indichiamo con $\vdash$. Se è data una semantica per il calcolo, la cui nozione di conseguenza indichiamo con $\models$, la correttezza del calcolo è la proprietà che[38]

---

[37] Il permanere di questa ambiguità terminologica, per la quale capita di parlare nello stesso giro di frase del successo di Gödel nel dimostrare la completezza e la incompletezza, è infelice, tanto più che dovremo dedicare tanto tempo a chiarire le confusioni che su questo, e termini collegati, sussistevano all'inizio del Novecento.

[38] Chiamiamo "formule" le espressioni del linguaggio alle quali si applicano correttamente le relazioni di derivabilità e conseguenza.

per ogni formula φ e ogni insieme di formule T, se $T \vdash \varphi$ allora $T \models \varphi$,

mentre la completezza[39] è la proprietà reciproca che

per ogni formula φ e ogni insieme di formule T, se $T \models \varphi$ allora $T \vdash \varphi$,

oppure spesso la congiunzione delle due, in forma di equivalenza, $T \models \varphi$ se e solo se $T \vdash \varphi$.

Se il calcolo, e la semantica, godono di semplici proprietà[40], la completezza è equivalente a

per ogni insieme di formule T,
T ha un modello se e solo se T è non contraddittorio.

T si dice non contraddittorio, se il linguaggio contiene un simbolo di negazione, se non esiste alcuna formula φ per cui $T \vdash \varphi$ e $T \vdash \neg\varphi$[41].

Naturalmente la completezza logica dipende dal calcolo e dalla semantica. Quando si parla in generale di completezza della logica ci si riferisce alla logica alla quale si sta facendo riferimento, in generale (in questo corso) la logica dei predicati del primo ordine, oppure del secondo ordine.

Supponiamo ora che la logica soggiacente sia completa, anzi che sia la logica del primo ordine, altrimenti i prossimi concetti diventano più complicati.

La "completezza", o "completezza deduttiva", di una teoria[42] T è la proprietà che

per ogni φ, o $T \vdash \varphi$ o $T \vdash \neg\varphi$.

Se una teoria T è completa, i suoi modelli hanno la proprietà che in essi sono veri esattamente gli stessi enunciati[43]. Ogni enunciato o è derivabile da T, e allora vale in tutti i modelli di T, oppure è refutabile in T, e allora è falso in tutti i modelli di T.

---

[39] Questa versione di chiama anche "completezza forte", in riferimento al fatto che T sia un insieme qualunque di formule; se invece T è vuoto (o formato da un numero finito di formule, e se vale il teorema di deduzione) si parla di completezza semplice: se φ è logicamente valida allora φ è derivabile nel calcolo, senza assiomi aggiuntivi.

[40] Devono essere derivabili, e valide, ad esempio, la legge *ex falso quodlibet*, come pure $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$, o equivalenti.

[41] Se il linguaggio non contiene il simbolo di negazione, si può definire la non contraddittorietà alla Post chiedendo che non siano derivabili tutte le formule. Se ne riparlerà più oltre.

[42] Si intende con "teoria" un insieme di enunciati, che costituiscono gli assiomi.

[43] Parliamo ora di "enunciati", che sono le formule che sono prese in considerazione cone assiomi e teoremi.

Due strutture che soddisfino esattamente gli stessi enunciati del loro linguaggio si dicono "elementarmente equivalenti". Una teoria dunque è completa se e solo se i suoi modelli sono tutti tra loro elementarmente equivalenti. Infatti, per ogni enunciato φ, se φ è vero in tutti i modelli, allora è un teorema, per la completezza; se è falso in tutti i modelli, la sua negazione è vera, e per la completezza è un teorema.

I modelli di una teoria completa sono dunque indistinguibili tra loro, per quel che riguarda i teoremi della teoria. Se una teoria T è completa, per conoscere i suoi teoremi è sufficiente considerare un suo modello $\mathfrak{M}$. I teoremi di T sono gli enunciati che sono veri in $\mathfrak{M}$.

Per una teoria completa T, dato un qualunque enunciato φ, o questo è già un teorema, quindi $T \cup \{\varphi\}$ è equivalente a T, oppure è incompatibile con T, nel senso che $T \cup \{\varphi\}$ è contraddittoria, essendo $T \vdash \neg\varphi$.

Interessanti teorie matematiche che sono complete sono la teoria degli ordini densi senza primo né ultimo elemento (come l'ordine dei razionali), e la teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica fissata. Ogni campo algebricamente chiuso di caratteristica 0 è elementarmente equivalente al campo dei complessi.

Una teoria T si dice "categorica" se tutti i suoi modelli sono tra loro isomorfi, ovvero ha un solo modello, a meno di isomorfismi.

Due strutture $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ si dicono isomorfe se esiste una corrispondenza biunivoca $F : A \longrightarrow B$ che conserva le operazioni e relazioni delle strutture.

Esempio Consideriamo due strutture ordinate e finite con un minimo, ad esempio sia $\mathfrak{A} = \langle\{a, b, c\}, <_{\mathfrak{A}}, a\rangle$, dove $a <_{\mathfrak{A}} c, c <_{\mathfrak{A}} b, a <_{\mathfrak{A}} b$, e $\mathfrak{B} = \{0, 1, 2\}, <, 0\rangle$, dove $<$ è l'ordine naturale. Un isomorfismo è dato dalla funzione f tale che $f(a) = 0, f(b) = 2, f(c) = 1$.

Una teoria di cui le due strutture sono modelli potrebbe essere:

$$\begin{array}{l} \forall x(x \not\prec x) \\ \forall x, y, z(x \prec y \wedge y \prec z \rightarrow x \prec z) \\ \forall x, y(x \prec y \vee x = y \vee y \prec x) \\ \forall x(x \neq c \rightarrow c \prec x) \end{array}$$

oltre agli assiomi dell'uguaglianza che supponiamo inclusi negli assiomi logici.

Questa teoria non è categorica, perché come suo modello possiamo esibire ad esempio $\langle\{0, 1, 2, 3\}, <, 0\rangle$.

Se aggiungiamo l'assioma

$$\exists x, y, z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \forall u(u = x \vee u = y \vee u = z))$$

la teoria diventa categorica, tutti i suoi modelli avendo tre elementi.

Le uniche teorie formulate nella logica del primo ordine che sono categoriche si trovano tra quelle che, come nell'esempio, hanno solo modelli finiti di cardinalità fissata.

Se una teoria è categorica, essa è completa: due strutture isomorfe soddisfano infatti gli stessi enunciati. Non è vero il viceversa. I due esempi sopra citati di teorie complete non rientrano tra gli esempi di teorie categoriche.

All'inizio del Novecento troviamo una totale confusione sui concetti di completezza, sia per quel che riguarda le nozioni di completezza logica e di completezza deduttiva di teorie, sia per i rapporti tra questa e la categoricità[44].

La terminologia non era ancora fissata. Ma a parte la terminologia, sussistevano incertezze sui concetti, anche in Hilbert.

Innanzi tutto va osservato che, benché tutti esaltassero la molteplicità delle interpretazioni, molti tuttavia pensavano che modelli isomorfi fossero comunque diversi, e quindi le teorie che interessavano potessero essere categoriche.

Hilbert stesso lascia qualche dubbio, quando dice a Frege, come abbiamo visto, parlando in generale, che "ogni teoria può essere sempre applicata a infiniti sistemi di elementi fondamentali. Anzi occorre soltanto applicare una trasformazione biunivoca e convenire che gli assiomi per gli enti trasformati debbano essere uguali a quelli che valgono per i loro corrispondenti".

L'idea che le diverse interpretazioni fossero isomorfe non pregiudicava la possibilità di "tradurre l'una nell'altra diverse forme di intuizione", secondo il punto di vista di Enriques, cit. Se ad esempio si considerano i due gruppi $\mathbb{Z}_2$ e quello delle sostituzioni di due lettere[45], pur essendo isomorfi essi entrano a preferenza in uno o nell'altro discorso, a seconda del tipo di rappresentazione degli oggetti, e del tipo di intuizione che favoriscono.

Molto più che ora, quando è invalsa l'abitudine di esprimere la categoricità con "un solo modello, a meno di isomorfismi", all'inizio del metodo assiomatico i matematici sembra che ponessero maggiore enfasi sul fatto che

[44] Per maggiori dettagli, si veda G. Lolli, *Completeness*, AILA Preprints, 1995. Si può vedere anche J. Corcoran, "Categoricity", *History and Philosophy of Logic*, 1 (1980), pp. 187-207, che contiene tuttavia giudizi affrettati e discutibili.

[45] I due elementi sono $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$, l'elemento neutro, e $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, idempotente: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$, come $1 + 1 = 0$.

interpretazioni isomorfe sono nondimeno diverse. Ad esempio, ancora nel 1928, Abraham Adolf Fraenkel (1891-1965) osservava:

> [quando] per un particolare concreto [*inhaltlichen*] significato dei concetti primitivi, ad esempio "punto" e "retta" intuitivi, una proposizione è *richtig*, cioè deducibile dagli assiomi, allora la proposizione non può essere falsa rispetto a un altro significato, compatibile con gli assiomi (per esempio "punto" come "coppia di numeri"), o avremmo una contraddizione con l'isomorfismo provato. Ma questo non significa che il senso, il contenuto essenziale dei concetti primitivi, possa mai essere determinato dagli assiomi, perché per ogni interpretazione ve ne è un'altra, isomorfa ma con un senso differente[46].

Nel testo di Fraenkel risalta la diffusa scarsa chiarezza relativa ai concetti dell'assiomatica[47]: una proposizione è chiamata *richtig* per un particolare significato se essa è "deducibile dagli assiomi", come se il significato avesse qualcosa a vedere con la deduzione. Che essa non possa essere falsa rispetto a un'altra interpretazione segue solo dal fatto che essa è dedotta dagli assiomi, quindi valida in ogni modello, senza appellarsi alla categoricità. Tuttavia si capisce che l'idea era che la categoricità assicurasse la completezza (nel nostro senso).

Ma prevaleva la sensazione che fosse vero anche il viceversa, o fosse la stessa cosa. Innanzi tutto all'inizio del secolo mancava la terminologia appropriata, e la proprietà che chiamiamo "categoricità" (in assenza di questa parola) era chiamata "completezza".

L'assioma che Hilbert chiama di completezza ha infatti una duplice funzione: da una parte assicurare la usuale continuità, ma dall'altra garantire l'unicità del sistema a meno di isomorfismi. Supponiamo infatti che, oltre al sistema dei numeri reali $\mathbb{R}$, esista un altro modello $\mathfrak{A}$ non isomorfo a $\mathbb{R}$. In A esistono elementi corrispondenti a 1, a $1 + 1$, e a tutti i numeri naturali; esistono anche gli interi relativi, e i razionali. Possiamo immaginare di usare

[46] A. A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengelehre*, Springer, Berlin, 1928^3, p. 353. La prima edizione è del 1919, e oltre alla teoria degli insiemi l'esposizione è dedicata a questioni dei fondamenti, già sotto l'influsso della revisione sostenuta da Brouwer; contiene una parte sul metodo assiomatico, arricchita nelle successive edizioni, del 1923 e 1928, con il riferimento alle ricerche in corso nell'ambito del programma di Hilbert. Fraenkel qui sta assumendo che per la geometria sia stata provata la categoricità.

[47] Torneremo su questo testo, che è una testimonianza significativa.

il metodo genetico dentro ad $\mathfrak{A}$ per ottenere questi sistemi. Dunque $\mathbb{R}$ è immergibile in $\mathfrak{A}$ con una iniezione f. Ma se f non fosse un isomorfismo, $\mathfrak{A}$ si configurerebbe come un'estensione dell'immagine di $\mathbb{R}$, mediante f, che è isomorfa a $\mathbb{R}$.

In "Über den Zahlbegriff" Hilbert non aveva parlato esplicitamente della esistenza di una sola intepretazione, ma aveva detto, a commento dell'assioma di completezza, che "riconosciamo la corrispondenza del nostro sistema di numeri con l'ordinario sistema dei numeri reali".

Come abbiamo visto, tuttavia, Hilbert parla anche di un sistema di assiomi completo, come obiettivo della sua ricerca geometrica. Hilbert spiega a Frege che cosa intenda con ciò.

> [...] una definizione completa di [punto] la dà [...] l'intero complesso degli assiomi. Proprio così: ogni assioma contribuisce alla definizione, e quindi ogni nuovo assioma fa variare il concetto. "Punto" è di volta in volta qualcosa di diverso, a seconda che lo consideriamo nella geometria euclidea, non euclidea, archimedea, non archimedea. Secondo il mio modo di vedere, l'aggiunta di un qualunque assioma, dopo che un concetto è stato stabilito in modo univoco e completo, è qualcosa di assolutamente illecito e non logico, – un errore in cui si occorre molto di frequente, specialmente da parte dei fisici, Nelle ricerche di fisica teorica compaiono spesso evidenti non sensi appunto per il fatto che i fisici assumono senza risparmio nuovi assiomi nel corso della ricerca, senza assolutamente confrontarli con le ipotesi ammesse in precedenza e senza dimostrare se i nuovi assiomi non contraddicano nessuna delle conseguenze tratte dalle precedenti ipotesi. Proprio il procedimento di stabilire un assioma, di appellarsi alla sua verità (?) e di concludere che esso è compatibile con i concetti definiti è una delle fonti principali di errori e malintesi nelle moderne ricerche fisiche[48].

Un sistema di assiomi completo determina totalmente un concetto, se "completo" significa che non gli si può più aggiungere alcuna specificazione mediante altri assiomi. L'aggiunta di un nuovo assioma, veramente nuovo, indipendente, darebbe origine a una contraddizione.

[48]Hilbert a Frege, lettera 29 dicembre 1899.

Questo senso di completezza è quello che corrisponderebbe alla nostra completezza deduttiva. Tuttavia per assicurarsi di aver ottenuto lo scopo, Hilbert pone tra gli assiomi quello che assicura la categoricità, il suo *Vollständigkeitsaxiom*. Lo scopo è raggiunto, ma non è chiaro se lo sia perché la categoricità implica la completezza deduttiva, oppure perché si pensa che siano lo stesso concetto.

Il dubbio è legittimo, per vari indizi. Innanzi tutto per la terminologia. Hilbert, e altri, amavano dire che gli assiomi di una teoria T sono completi se quando φ si può aggiungere a T come assioma nuovo, perché φ non è un teorema, allora $T \cup \{\varphi\}$ diventa contraddittorio. Questo significa che $\neg\varphi$ è un teorema. Si usava tuttavia sempre solo questa formulazione; ma la proprietà che se φ non è un teorema, allora è un teorema $\neg\varphi$, è equivalente a dire che o φ è un teorema o lo è $\neg\varphi$ (per ogni idea di logica che si abbia). Quest'ultima formulazione invece non è mai usata quando si parla di sistemi di assiomi completi. Non si tratta ovviamente della incapacità di eseguire la banale trasformazione di $A \to B$ in $\neg A \vee B$, ma di una diversità di problematiche che induce punti di vista diversi: la prima quella del completamento degli assiomi, la seconda quella della decidibilità dei problemi. In effetti, alla completezza deduttiva viene riservato un altro nome, nella scuola di Hilbert negli anni venti, *Entscheidungsdefinitheit*, cioè definita rispetto alla decisione, o decidibilità, e ancora lo usa Gödel nella presentazione dei suoi risultati di incompletezza: "Das System S ist *nicht* entscheidungsdefinit"[49]. Non è escluso che un motivo dell'impressione e dell'incredulità di molti contemporanei fosse dovuta, dal punto di vista psicologico, alla confusione della completezza con la scontata categoricità dell'aritmetica[50].

Tra gli assiomatizzatori di inizio secolo, la parola "completezza" era usata per denotare la nostra categoricità. Ad esempio Edward Huntington (1874-1952) nel 1902[51] propone un insieme di sei postulati per le grandezze continue

[49] K. Gödel, "Einige metamatematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit", *Anzeiger der Akademie der Wissenschaftten un Wien*, 67 (1930), pp. 214-5; trad. ingl. in *Collected Works*, vol. I, Oxford Univ. Press, New York, 1986, pp. 140-3; trad. italiana in *Opere*, vol. I, Bollati Boringhieri, Torino, xxx, pp

[50] Nonostante Gödel spiegasse, come vedremo, che il risultato dipendeva da una restrizione imposta ai metodi deduttivi. Gödel chiama *unentscheidbare* (in una teoria) le proposizioni tali che né esse né la loro negazione sono dimostrabili nella teoria; la terminologia attuale è infatti di proposizioni "indecise", o "indecidibli", con una nuova complicazione terminologica rispetto al concetto di teoria o problema indecidibile.

[51] E. V. Huntington, "A Complete Set of Postulates for the Theory of Absolute Continuous Magnitude", *Trans. AMS*, 3 (1902), pp. 264-79. Huntington usa "*assemblage*" per

e dimostra che esso è completo, intendendo con questo che gli assiomi sono non contraddittori, sufficienti e mutuamente indipendenti; "non contraddittori" significa che "esiste almeno un *assemblage* nel quale la regola di combinazione scelta soddisfa tutti e sei i requisiti; il significato di "sufficienti" è che "esiste essenzialmente *un solo* possibile *assemblage* siffatto" (modulo corrispondenze che ora si chiamano isomorfismi).

Anche Oswald Veblen (1880-1960) nel 1904 in una assiomatizzazione della geometria[52] mira alla categoricità per garantire la completezza deduttiva. Egli sostiene essere suo diritto applicare i termini indefiniti "punto" e "ordine" a qualsiasi classe di oggetti per cui gli assiomi siano soddisfatti. "Rientra nei nostri obiettivi tuttavia mostrare che esiste *essenzialmente solo una* classe nella quale i dodici assiomi sono validi". Ne segue per Veblen che qualsiasi proposizione espressa in termini di punto e ordine o è in contraddizione con gli assiomi, o è ugualmente vera in tutte le classi che verificano gli assiomi.

Veblen tuttavia introduce il termine che risulterà vincente, chiamando "categorico" un tale sistema, pur sapendo che Huntington usa "completo" e Hilbert "*Vollständig*", tradotto con "*complete*". Attribuisce il termine a un suggerimento di John Dewey, che avrebbe anche proposto "disgiuntivo" per un sistema al quale si possono aggiungere nuovi assiomi, possibilmente in più di un modo.

Vediamo dunque in Veblen uno spostamento, non una eliminazione dell'ambiguità: egli introduce il termine "categorico" che sarà utile per avere una alternativa a "completo", e lo applica a un sistema di assiomi con "essenzialmente" un solo modello; nello stesso tempo ritiene equivalente tale proprietà alla impossibilità di aggiungere nuovi assiomi, cioè alla completezza deduttiva, dal momento che la non categoricità, o proprietà disgiuntiva, si riferisce alla possibilità di aggiungere nuovi assiomi.

Dopo il 1905, Huntington[53] si adeguò alla proposta di Veblen usando anch'egli "categorico". Altri continueranno invece ad usare "completo". Ad esempio Enriques nel 1922:

> un sistema di postulati è detto completo quando due sistemi di entità obbligati a soddisfare il sistema [di assiomi] possono essere

"insieme", menzionando anche "*Menge*" e "*ensemble*", e usando curiosamente "insieme" per insiemi di assiomi.

[52] O. Veblen, "A System of Axioms for Geometry", *Trans. AMS*, 5 (1904), pp. 343-84.

[53] E. V. Huntington, "A Set of Postulates for Real Algebra", *Trans AMS*, 6 (1905), pp. 17-41, nota §, p. 17.

> messi in corrispondenza uno a uno, in modo tale che le proprietà dell'uno si traducano in perfettamente analoghe proprietà dell'altro, sì che essi appaiano astrattamente uguali, per quel che riguarda le idee in oggetto[54].

Nel 1928 Fraenkel[55] ammetteva che nell'assiomatica c'erano meno risultati sulla completezza che sull'indipendenza (un tema su cui egli stesso lavorava, in teoria degli insiemi) e soprattutto che non erano chiariti i rapporti tra diverse nozioni. Ne presentava tre. In una prima versione, la completezza di un insieme di assiomi significa che qualunque problema formulato in termini dei concetti primitivi può avere una risposta, in un senso o nell'altro, positiva o negativa: si tratta della *Entscheidungsdefinitheit*. Correttamente Fraenkel spiegava che tale proprietà implicherebbe che nessun nuovo assioma può essere aggiunto a meno di non modificare i termini primitivi (diremmo: cambiare linguaggio).

Fraenkel vedeva questa proprietà come diversa dalla completezza espressa nell'assioma omonimo di Hilbert, e che si riferisce alla inestendibilità del dominio, non degli assiomi, ma ammetteva che restavano oscurità. Si riferiva alla diversità di prospettiva, o di linguaggio, non escludendo esplicitamente che potessero essere estensionalmente equivalenti. Quindi Fraenkel cercava di esporre un altro concetto di completezza, per descrivere la situazione che si ha quando diverse assunzioni mutuamente contraddittorie sono tutte non derivabili da un sistema di assiomi, ma tutte compatibili con esso. La differenza con la prima versione è difficile da cogliere: Fraenkel sembra dire che nel secondo caso l'impossibilità di decidere quale assunzione ammettere non dipenda da una insufficienza dei metodi dimostrativi, ma valga in un senso assoluto, per gli attuali e futuri metodi. Un esempio di un problema così resistente potrebbe essere per Fraenkel l'ipotesi del continuo.

Il terzo senso di "completezza" discusso da Fraenkel era quello di categoricità (così chiamato, o "monomorficità", adottando il termine da Carnap e Feigl), che veniva giudicato più ampio[56]. Fraenkel sa che vale per i numeri naturali, i numeri reali e la geometria: implica la completezza nel secondo

[54] F. Enriques, *Per la storia della logica*, cit. p. 198.

[55] A. A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, cit. §18.4, pp. 347-54.

[56] Il primo uso corretto, ovvero moderno, del termine "categorico" si può far risalire a J. W. Young, *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*, Macmillan, New York, 1911, se si esclude l'anticipazione di Veblen che però lo confondeva con "completo".

senso, ma Fraenkel non sa dire se valga l'implicazione inversa. Si è comunque arrivati a porsi il problema.

Un'altra testimonianza pertinente si trova nel libro del 1930 di Felix Kaufmann (1895-1949) sull'infinito[57] in un capitolo dedicato alla categoricità dell'aritmetica, significativamente intitolato alla "completa decidibilità" delle questioni aritmetiche[58]. Le tre alternative di Fraenkel sono presentate nel seguente modo: la prima nozione è quella di categoricità; la seconda e la non ramificazione di una teoria, nel senso che per nessuna proposizione P si abbia la compatibilità sia di P sia della negazione di P. La terza nozione è quella di decidibilità, nel senso che "ogni questione che si riferisce [alla teoria] può essere decisa". Non pare accorgersi che le due ultime sono banalmente equivalenti[59]

Kaufmann non si esponeva a sostenere se le tre nozioni coincidano o no, ma affermava che puntano tutte allo stesso criterio, cioè ad avere una determinazione della teoria che non richieda ulteriori perfezionamenti.

Nel 1928 un importante risultato di Thoralf Skolem (1887-1963)[60] conferma la confusione terminologica. Alla fine di un lavoro che è una pietra miliare nella storia della logica[61] Skolem dimostrava che la teoria degli ordini densi senza primo né ultimo elemento è completa; nello stesso tempo chiamava *kategorisch* un sistema di assiomi con tale proprietà, pur dichiarando in nota che il termine è usato anche in un altro senso; che la teoria in oggetto non fosse categorica era evidente in ragione dei suoi modelli di cardinalità diversa[62].

Infine, dal momento che siamo saltati alla fine degli anni venti, possiamo vedere, anticipando i tempi dell'esposizione, come Hilbert formulò il problema

---

[57] F. Kaufmann, *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung*, Franz Deuticke, Wien, 1930.

[58] D'altra parte, Birkhoff e MacLane, in G. Birkhoff e S. MacLane, *A survey of modern algebra*, Macmillan, New York, 1944, intitolano "Completeness of the axiom set for integral domain" il capitolo dedicato alla categoricità degli assiomi per i domini d'integrità.

[59] A meno che non si parli di decidibilità di una teoria in senso moderno, con l'esistenza di un algoritmo di decisione, ma la formulazione si riferisce chiaramente alla *Entscheidungsdefinitheit*.

[60] T. Skolem, "Über die mathematische Logik", *Norsk matematisk tidsskrift*, 10 (1928), pp. 125-42; trad.inglese in J. van Heijnoort, *From Frege to Gödel*, cit., pp. 508-24.

[61] Vi torneremo a suo tempo.

[62] Questo è forse il primo esempio di una teoria significativa che è completa ma non categorica. Skolem ricorda altri esempi di teorie complete dati da C.H. Langford.

della completezza per l'aritmetica al congresso di Bologna del 1928[63].

Dalla presentazione di Hilbert si ha la conferma che il concetto di categoricità e di completezza deduttiva erano considerati equivalenti; quindi forse si può dire che la pretesa esistenza conseguente alla non contraddittorietà aveva un senso, o un valore, per quei sistemi di assiomi che fossero risultati completi.

Il problema della completezza dell'aritmetica consiste per Hilbert nel cercare una versione finitisticamente[64] soddisfacente della categoricità.

Problema III

> È ben vero che in generale si asserisce la completezza sia del sistema di assiomi per la teoria dei numeri sia di quello per l'analisi; ma l'usuale argomentazione con cui si mostra che ogni due realizzazioni del sistema di assiomi della teoria dei numeri (risp. dell'analisi) devono essere isomorfe, non soddisfa ai requisiti del rigore finitario.
>
> Ciò che si deve fare – e innanzitutto per la teoria dei numeri, il cui dominio si lascia definire con precisione – è trasformare finitariamente la consueta dimostrazione di isomorfia, così che per questa via si dimostri quanto segue:
>
> Se per una proposizione S può venir dimostrata la non contraddittorietà con gli assiomi della teoria dei numeri, allora la non contraddittorietà con quegli assiomi non può venir dimostrata anche per $\neg S$ (l'opposto di S).
>
> E in stretta connessione con ciò, anche: se un enunciato è non contraddittorio, allora è dimostrabile.

Sembra inconfutabile che la concezione di Hilbert ancora in questo momento, e più esplicitamente che agli inizi, sia che il concetto di completezza deduttiva è lo stesso di quello di categoricità (qui ancora chiamato "completezza"),

[63]D. Hilbert, "Probleme der Grundlagen der Mathematik", in *Atti Congresso internazionale dei matematici, Bologna, 3-10 ottobre 1928*, Zanichelli, Bologna, 1929, vol. I; pp. 135-41, con aggiunte e correzioni in *Mathematische Annalen*, 102 (1929), pp. 1-9; trad. it. "Problemi della fondazione della matematica", in *Ricerche sui fondamenti della matematica*, cit. pp. 292-300.

[64]Spiegheremo più avanti il significato di questo termine. Allude all'uso di metodi dimostrativi della massima trasparenza e affidabilità.

essendone solo una variante linguistica che si presta a una dimostrazione con metodi costruttivamente accettabili[65]. A parte la dimostrazione, il risultato di tale dimostrazione sarebbe comunque quello di riuscire a definire assiomaticamente il concetto di numero.

Nel 1928 tuttavia Hilbert aveva a disposizione un sistema di logica preciso, elaborato nel corso degli anni e presentato nel manuale scritto con Ackermann nello stesso 1928, a proposito del quale poneva, come caso particolare del problema della completezza dell'aritmetica, il problema della completezza logica.

Non era così all'inizio del secolo. Quando Huntington, come abbiamo visto, aveva adottato da Veblen il termine "categorico", aveva definito tale un sistema di assiomi per cui ogni proposizione espressa per mezzo dei termini primitivi o è deducibile dai postulati o è in contraddizione con essi. Veblen invece non aveva parlato di proposizioni derivabili, ma vere in tutti i modelli. Huntington si era corretto, e aveva intuito un problema:

> Nel caso di un sistema categorico di assiomi si sarebbe tentati di enunciare il teorema che se una proposizione può essere espressa in termini dei concetti fondamentali, o è essa stessa deducibile dai postulati oppure la sua contraddittoria è così deducibile; bisogna ammettere tuttavia che la nostra padronanza dei processi della deduzione logica non è ancora, e magari non potrà mai essere sufficientemente completa per giustificare tale asserzione[66].

La definizione del concetto di completezza o categoricità per una teoria si intersecava infine con quello della forza deduttiva della logica, o se si vuole con il problema della completezza della logica.

Sempre negli Stati Uniti in quegli anni Edwin Wilson (1879-1964)[67] diede espressione alla consapevolezza di dover studiare i rapporti tra compatibilità e deduzione. Dopo aver osservato che non sempre è desiderabile avere un

[65] Hilbert continua con una sibillina osservazione, relativamente alla possibilità che "in ambiti superiori" sia pensabile il caso della non contraddittorietà tanto di S che di $\neg S$. Il Problema IV espone il problema della completezza logica, dopo aver ribadito che la completezza della teoria dei numeri "può anche essere espressa così: se agli assiomi della teoria die numeri viene aggiunta una formula appartenente alla teoria dei numeri ma non dimostrabile, allora dal sistema d'assiomi esteso può essere derivata una contraddizione".

[66] E. V. Huntington, "A Set of Postulates for Ordinary Complex Algebra", *Trans. AMS*, 6 (1905), pp. 209-29, nota †, p. 210.

[67] E. B. Wilson, "Logic and the Continuum", *Bull. AMS*, 14 (1908), pp. 432-43.

sistema categorico (con l'esempio della teoria dei gruppi), ricordato che il vantaggio della categoricità è quello che ogni proposizione costruita sui termini primitivi è o compatibile o incompatibile, si era chiesto se si possa anche dire che è o deducibile o in contraddizione con gli assiomi.

> Questo interrogativo, questo suggerimento che compatibilità e deducibilità possano non essere la stessa cosa quando applicate a sistemi categoricamente determinati, è vitale in logica e richiede un'attenta discussione ... E tuttavia, cosa significa la parola deducibile? Il significato è assolutamente relativo al sistema di logica che è disponibile per trarre conclusioni dall'insieme delle proposizioni primitive: Qualcuno potrebbe ritenere che la mente umana abbia istintivamente a sua disposizione tutti i metodi di deduzione validi. Questo è un postulato terrificante, e privo di qualsiasi valore che non sia sentimentale. Di fatto, porta ad abbandonare ogni ricerca di metodi di deduzione efficienti, è pericoloso e peggio che inutile. È essenziale nell'atteggiamento moderno verso la logica che chi deduce enunci distintamente la sua forma di inferenza.

Le sollecitazioni di Wilson tuttavia resteranno lettera morta, per un po', non solo perché forse il loro autore non aveva abbastanza prestigio per essere ascoltato, ma soprattutto perché mancava un oggetto preciso su cui ragionare.

L'oggetto su cui lavorare sarebbero sistemi di logica presentati in modo preciso, assoggettabile a una indagine metalogica; per questo tuttavia occorreva che anche l'altro termine della questione, le nozioni semantiche, ora espresse da parole e aggettivi particolari, come compatibilità, fosse posto in modo indipendente e ben definito. Vedremo come si svilupperà la ricerca negli anni venti.