Logica Predicativa

1 Linguaggi predicativi

I linguaggi predicativi differiscono da quello proposizionale per una più fine analisi della struttura delle affermazioni atomiche e per un nuovo tipo di connessione tra frasi resa possibile dai nomi e pronomi che hanno lo stesso riferimento in frasi diverse.

La struttura di base di un'affermazione atomica è la predicazione, cioè l'attribuzione di un predicato a uno o più termini. Ogni predicato ha un numero fisso di posti; i predicati a un posto, o monadici, sono anche detti *proprietà*; quelli a più di un posto *relazioni*. Se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini si scriverà

$$P(t_1, \ldots, t_n)$$

a indicare che il predicato sussiste per gli n termini.

I termini sono descrizioni (di individui) costruiti con nomi e funzioni, come "il padre di Giovanni o "la radice quadrata di 2. I verbi sono assorbiti dai predicati, e tutti ricondotti alla forma di "avere una proprietà per il verbo "essere o i verbi intransitivi, o "essere in relazione con per i verbi transitivi.

I pronomi servono a formare frasi collegando frasi che hanno un riferimento in comune, come in "uno che ha un amico ha un tesoro (dove "ha un amico e "ha un tesoro hanno lo stesso soggetto). In questa frase il primo "uno significa "chi, il secondo (è un articolo che) significa "qualche.

Anche se non c'è nessuna ambiguità, per maggiore chiarezza si possono usare altre parole, e dire ad esempio "chi ha qualche amico ha un tesoro o "chiunque abbia qualche amico ha un tesoro. Un esempio di frase ambigua è invece "uno che segue il corso di Logica si addormenta. Il professore spera che voglia solo dire che si conosce uno studente che tende ad addormentarsi, ma magari gli studenti intendono che tutti si addormentano sempre. Nei linguaggi predicativi invece della varietà di parole disponibili per formulare frasi non ambigue si sceglie di usare solo “uno, e varianti strettamente necessarie, corrispondenti ad esempio a “un secondo o “un tizio e “un caio e “un sempronio, e poi premettere alle frasi dei segni che indichino se nella frase “uno è da leggere in senso universale, come “tutti, “chiunque, oppure particolare, come “qualcuno, “almeno uno.

Non è previsto il corrispondente delle parole che servono come indicatori temporali o spaziali; in parte è possibile incorporarle nei predicati (“essere nero in Alabama” è diverso da “essere nero in Mozambico”, come “essere nero in Alabama negli anni Cinquanta” è diverso, si spera, da “essere nero in Alabama negli anni Novanta”).

1.1 Alfabeto

L’alfabeto di un linguaggio predicativo è costituito dai seguenti insiemi disgiunti:

- una lista infinita $\mathcal{V}$ di *variabili* individuali, indicate da $x, y, v, \ldots$, con o senza indici $x_1, y_1, x_2, \ldots$
- un insieme eventualmente vuoto di *costanti* individuali, indicate da $c, d, c_1, \ldots$
- un insieme eventualmente vuoto di simboli funzionali, ciascuno con associato un numero naturale > 0 che fissa il numero di argomenti, indicati con $F, G, F_1, \ldots$, lasciando al contesto la precisazione del numero di argomenti (invece di scrivere, ad esempio, il più pesante F_1^n)
- un insieme non vuoto di simboli predicativi, ciascuno con un numero naturale > 0 che fissa il numero di argomenti, indicati con $P, R, \ldots$
- un insieme adeguato di conettivi proposizionali
- due simboli detti *quantificatori*, rispettivamente *universale* ed *esistenziale* ed indicati con $\forall$ e $\exists$
- due simboli ausiliari, indicati rispettivamente con (e con).

L’alfabeto e la sua partizione nelle varie categorie sintattiche sono tutti decidibili, come effettive sono le funzioni che danno gli argomenti dei simboli funzionali e predicativi (la loro *arietà*). I linguaggi si differenziano tra loro per il numero di costanti individuali e di simboli predicativi e funzionali.

I *linguaggi con uguaglianza* sono linguaggi predicativi il cui alfabeto contiene almeno un simbolo predicativo a due posti che viene privilegiato e chiamato simbolo di *uguaglianza*, e indicato tradizionalmente con =.

1.2 Termini e formule

Due sono gli insiemi di espressioni significative. L'insieme $\mathcal{T}$ dei termini è il più piccolo insieme di parole tale che

- le variabili e le costanti appartengono a $\mathcal{T}$
- se F è un simbolo funzionale a n argomenti e $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ allora anche $F^\frown t_1^\frown \ldots ^\frown t_n \in \mathcal{T}$.

Invece di $F^\frown t_1^\frown \ldots ^\frown t_n$ scriveremo per comodità di lettura $F(t_1, \ldots, t_n)$, ma non ci sarebbe bisogno delle parentesi (né delle virgole, che proprio non appartengono al linguaggio) per garantire la leggibilità unica (esercizio). Le t_i sono variabili metalinguistiche per i termini.

Le *formule atomiche* sono le parole della forma $(^\frown P^\frown t_1^\frown \ldots ^\frown t_n^\frown)$, scritte per comodità di lettura

$$(P(t_1, \ldots, t_n))$$

dove P è un simbolo predicativo a n posti e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini.

In un linguaggio con l'uguaglianza, le formule atomiche corrispondenti al simbolo di uguaglianza, dette anche "equazioni", sono indicate tradizionalmente con la notazione infissa $(t_1 = t_2)$.

L'insieme $\mathcal{F}$ delle *formule* è definito dalla seguente definizione induttiva:

- (Clausola di base) Le formule atomiche sono formule
- Se A è una formula, anche $(\neg A)$ è una formula
- Se A e B sono formule, anche $(A \otimes B)$ è una formula
- Se A è una formula e x una variabile, anche $(\forall x A)$ e $(\exists x A)$ sono formule
- Una parola è una formula se e solo se si ottiene con un numero finito di applicazioni delle clausole di base e induttive.

Come nel caso proposizionale, a ogni formula si associa l'albero di costruzione, ai cui nodi occorrono le sottoformule. Le formule $(\forall xA)$ e $(\exists xA)$ hanno il quantificatore iniziale come segno logico principale, e si dicono ottenute per quantificazione (rispettivamente universale ed esistenziale) da A. In esse, A si chiama *raggio d'azione* del primo quantificatore, e la variabile x che lo segue, e tutte le occorrenze di x in A si dicono *vincolate* dal quantificatore entro il cui raggio d'azione cadono, se non sono già vincolate per il fatto di cadere dentro al raggio d'azione di un quantificatore $\forall x$ o $\exists x$ di una sottoformula di A.

Usiamo Q come variabile metalinguistica sull'insieme dei due quantificatori $\forall$ e $\exists$ [2]. In (QxA) il quantificatore Qx vincola tutte le occorrenze di x in A che non sono già vincolate.

In una formula, una occorrenza di una variabile x si dice *libera* se essa non cade dentro al raggio d'azione di alcun quantificatore Qx. In una formula (QxA) perciò Qx vincola tutte le occorrenze libere di x in A.

Una variabile si dice libera in una formula se essa ha occorrenze libere, vincolata se ha occorrenze vincolate. Una variabile può essere sia libera che vincolata in una formula.

Esempio Nella formula

$$((P(x)) \to (\forall x(\exists y(\neg(R(x,y))))))$$

la prima occorrenza di x è libera, le altre due sono vincolate; tutte le occorrenze di y sono vincolate.

Si riducono le parentesi con le stesse convenzioni che nel caso proposizionale, eliminando quelle intorno alle formule atomiche e ordinando i segni logici in un ordine di priorità che vede al primo posto $\neg, \forall, \exists$, quindi $\wedge, \vee, \to$. Per i segni con la stessa priorità se sono consecutivi si procede dall'interno verso l'esterno.

Esempio La formula dell'esempio precedente si scrive anche

$$P(x) \to \forall x \exists y \neg R(x,y).$$

Se si quantifica (universalmente o esistenzialmente) la formula rispetto a x si ottiene

$$Qx(P(x) \to \forall x \exists y \neg R(x,y))$$

[2] Se Q compare più volte in una formula o in formule vicine si intende che rappresenta lo stesso quantificatore.

dove tutte le occorrenze di x sono vincolate, ma quella in $P(x)$ dal quantificatore Qx, mentre quella in $R(x, y)$ resta vincolata dal quantificatore $\forall x$ di $\forall x \exists y \neg R(x, y)$. La formula non ha più alcuna variabile libera.

Una formula in cui non occorrono variabili libere si chiama formula *chiusa* o *enunciato*. Un termine in cui non occorrano variabili si chiama termine *chiuso*. Una formula in cui ci sia qualche occorrenza libera di una variabile si chiama anche talvolta, per sottolineare questo fatto, formula *aperta*.

In una formula aperta le occorrenze libere di una variabile sono denotazioni ambigue per cui manca la precisazione del senso universale o particolare in cui devono essere intese, oppure sono come posti vuoti che attendono di essere riempiti da termini opportuni.

L'operazione di sostituzione è definita nel seguente modo, prima nei termini e poi nelle formule. Se t ed s sono termini, il risultato $t[x/s]$ della sostituzione di s a x in t è definito per induzione:

- Se t è una costante o una variabile diversa da x, $t[x/s]$ è t
- Se t è x, $t[x/s]$ è s
- Se t è $F(t_1, \ldots, t_n)$, $t[x/s]$ è $F(t_1[x/s], \ldots, t_n[x/s])$.

Il risultato $A[x/t]$ della sostituzione di t alle occorrenze libere di x in A si definisce per induzione nel seguente modo:

- Se A è atomica, della forma $P(t_1, \ldots, t_n)$, $A[x/t]$ è $P(t_1[x/s], \ldots, t_n[x/s])$
- Se A è $\neg B$, $A[x/t]$ è $\neg\{B[x/t]\}$[3]
- Se A è $B \otimes C$, $A[x/t]$ è $B[x/t] \otimes C[x/t]$
- Se A è QyB, con y diversa da x, $A[x/t]$ è $Qy\{B[x/t]\}$.
  Se A è QxB, $A[x/t]$ è A.

Un termine t si dice *libero per x in A* se t non contiene alcuna variabile y tale che qualche occorrenza libera di x in A cada dentro al raggio d'azione di un quantificatore Qy.

[3]Le parentesi graffe in $\{B[x/t]\}$ non fanno parte ovviamente della formula, ma sono messe a indicare (solo qui) che prima si esegue la sostituzione nella sottoformula B e dopo si premette il segno di negazione; lo stesso più avanti per il quantificatore.

Se t è chiuso, t è libero per x in A per ogni A e ogni x. Se t è una variabile y libera per x in A, e non libera in A, le occorrenze libere di y in $A[x/y]$ sono esattamente quelle libere di x in A.

Se t ed s sono liberi per x in A, $A[x/t]$ esprime per t la stessa affermazione che $A[x/s]$ esprime per s, e che A esprime per x, ma questo non vale se t non è libero per x in A.

Esempio Se A è $\exists y R(x, y)$, y non è libera per x in A. A esprime per x l'esistenza di un individuo che sta con x nella relazione (rappresentata da) R; $A[x/z]$ esprime per z l'esistenza di un individuo che sta con z nella relazione R; $A[x/y]$ esprime l'esistenza di un individuo che sta nella relazione R con se stesso.

La *struttura proposizionale* di una formula si ottiene nel seguente modo: si sviluppa il suo albero di costruzione applicando solo le clausole dei connettivi finché non si incontrano nodi che iniziano con un quantificatore Qx e ivi ci si ferma. Se ora le formule quantificate nei nodi si sostituiscono in modo biunivoco con lettere proposizionali e si ripercorre l'albero verso la radice riapplicando i relativi connettivi, si ottiene una proposizione tale che la formula data si può pensare ottenuta da questa proposizione per rimpiazzamento delle sue lettere con le formule che sono state individuate ai nodi (se si avesse un linguaggio sia con lettere proposizionali sia con alfabeto predicativo); questa proposizione si chiama la struttura proposizionale della formula (se la formula data inizia con un quantificatore ci si ferma subito, e la sua struttura proposizionale si può dire essere quella di una proposizione atomica, ma il caso non è interessante).

Esempio $\exists x P(x) \to (\forall x \exists y (R(x, y) \vee Q(y)) \to \exists x P(x))$ ha la struttura proposizionale $P \to (Q \to P)$.

1.3 Esercizi

1. Dimostrare che è equivalente definire induttivamente un insieme $\mathcal{X}$ come un insieme i cui elementi sono quelli che si ottengono iterando un numero finito di volte le clausole di base e le clausole induttive, oppure come *il più piccolo* insieme che è chiuso rispetto alle clausole di base e induttive.

2. Descrivere un algoritmo ricorsivo che, data una parola di un linguaggio predicativo, permette di decidere se la parola è una concatenazione di

termini, quanti e quali (o di quale lunghezza).

3. Dedurne un algoritmo per decidere quali parole sono termini e quali formule, e per la costruzione, univoca, dell'albero sintattico di un termine e di una formula.

4. Utilizzare l'algoritmo suddetto per decidere se le seguenti parole, scritte come concatenazione di simboli, senza le parentesi, sono termini o formule atomiche, dove c è una costante, F un simbolo funzionale a un argomento, G un simbolo funzionale a due argomenti, e R un simbolo relazionale a due argomenti:

   $GxFc$

   $GFGxcy$

   $FGFxFy$

   $RGcFxFGFxy$

   $RGcFFGFxy$

5. Rimettere le parentesi nelle seguenti parole e decidere se sono formule[1] costruendone anche l'albero sintattico:

   $\exists x R(x,y) \to \forall z \neg P(z)$

   $\forall x \neg \exists y R(x,y) \to \forall x R(x,y)$

   $\forall x \exists y \neg R(x,y) \to \neg R(x,F(x))$

   $\neg \forall x P(x) \vee \exists y R(y,F(x),F(x,y))$

   $\forall x(P(x) \vee Q(z)) \to \forall x P(x) \vee \forall z Q(z)$

6. Distinguere le occorrenze libere e le occorrenze vincolate delle variabili che occorrono nelle seguenti formule:

   $\exists x R(x,y) \to \forall y P(y)$

   $\forall y P(y) \to \exists x R(x,y)$

   $\exists x R(x,y) \to \forall z P(z)$

   $\forall x \exists y R(x,y) \to \forall x R(x,F(x,y))$

   $\forall x(P(x) \vee Q(z)) \to \forall x P(x) \vee \forall z Q(z)$.

[1] Anche se il numero di argomenti dei simboli predicativi e funzionali non è indicato, si suppone che sia rispettato, cioè che le formule atomiche siano corrette.

7. Verificare se t è libero per x in A nei casi seguenti ed eseguire la sostituzione $A[x/t]$:

   y per x in $\forall x P(x) \to P(x)$

   c per x in $\forall x P(x) \to P(x)$

   $F(y)$ per x in $P(x) \to \exists y R(x, y)$

   $F(y)$ per x in $P(G(x, c)) \to \exists z R(x, z)$

   $F(y)$ per y in $\exists x R(x, y) \lor P(y)$

   $G(x, y)$ per x in $\forall z P(y, z) \lor \exists y \neg P(x, y)$

   $G(x, y)$ per y in $\forall z P(y, z) \lor \exists y \neg P(x, y)$.

2 Semantica

Ogni *dominio di conoscenza* in relazione al quale si esprimono conoscenze in termini di relazioni, funzioni e individui particolari dà origine a un linguaggio predicativo specifico per la *rappresentazione della conoscenza* relativa a quel dominio.

Viceversa, una qualunque interpretazione di un linguaggio predicativo deve contemplare un universo di discorso che sia non vuoto, e in esso un riferimento per ogni elemento non logico costante del linguaggio: ai simboli predicativi a n argomenti devono corrispondere, non necessariamente in maniera biunivoca, relazioni n-arie sull'universo; a ogni simbolo funzionale a n argomenti, funzioni n-arie nell'universo; a ogni costante, un elemento dell'universo di cui la costante è un nome.

Un'interpretazione comporta quindi una *struttura* a cui si riferiscono le frasi interpretate; per lo studio generale delle interpretazioni si prendono in esame queste strutture.

2.1 Interpretazioni

Un'interpretazione di un linguaggio predicativo è una struttura

$$\mathcal{M} =< M, P^M, \ldots, F^M, \ldots, c^M, \ldots >$$

dove M è un insieme non vuoto, detto *universo* o *dominio* della struttura, e per ogni simbolo predicativo P a n argomenti, $P^M \subseteq M^n$, per ogni simbolo funzionale F a n argomenti $F^M : M^n \longrightarrow M$, e per ogni costante c, $c^M \in M$.

Data un'interpretazione, per dare una denotazione a tutti i termini e un senso alle formule aperte occorre fissare il riferimento delle variabili, che non è dato con l'interpretazione e può variare anche per ciascuna formula.

Si dice *assegnazione* in $\mathcal{M}$ una funzione $\alpha : \mathcal{V} \longrightarrow M$. Una volta fissata un'assegnazione, a ogni termine t viene a corrispondere un elemento t^α di M secondo la seguente definizione induttiva:

- Se t è una variabile x, t^α è $\alpha(x)$
- Se t è una costante c, t^α è c^M
- Se t è $F(t_1, \ldots, t_n)$, t^α è $F^M(t_1^\alpha, \ldots, t_n^\alpha)$.

Se t è un termine chiuso, t^α è uguale per ogni α, e sarà indicato con t^M. Se β è un'assegnazione che differisce da α al più per il valore dato a x, β si chiama una x-variante di α.

Fissata un'assegnazione α in $\mathcal{M}$, a ogni formula corrisponde un valore di verità nell'interpretazione, sotto l'assegnazione. Si dirà che α *soddisfa A in $\mathcal{M}$*, e si scriverà

$$\mathcal{M}, \alpha \models A$$

se vale la relazione definita dalle seguenti clausole induttive:

- Se A è della forma $P(t_1, \ldots, t_n)$,

$$\mathcal{M}, \alpha \models A \text{ se e solo se } < t_1^\alpha, \ldots, t_n^\alpha > \in P^M$$

- Se A è $\neg B$,

$$\mathcal{M}, \alpha \models A \text{ se e solo se non vale } \mathcal{M}, \alpha \models B$$

- Se A è $B \wedge C$,

$$\mathcal{M}, \alpha \models A \text{ se e solo se } \mathcal{M}, \alpha \models B \text{ e } \mathcal{M}, \alpha \models C$$ [4]

- Se A è $\forall x B$,

$$\mathcal{M}, \alpha \models A \text{ se e solo se per ogni } x\text{-variante } \alpha' \text{ di } \alpha \ \mathcal{M}, \alpha' \models B$$

- Se A è $\exists x B$,

$$\mathcal{M}, \alpha \models A \text{ se e solo se}$$
$$\text{esiste una } x\text{-variante } \alpha' \text{ di } \alpha \text{ per cui } \mathcal{M}, \alpha' \models B.$$

Si vede facilmente che se le assegnazioni α e β coincidono sull'insieme delle variabili occorrenti in t, allora $t^\alpha = t^\beta$; e che se α e β coincidono sull'insieme delle variabili libere di A, allora $\mathcal{M}, \alpha \models A$ se e solo se $\mathcal{M}, \beta \models A$ (esercizio).

Se A è un enunciato quindi, o tutte le assegnazioni lo soddisfano, e in tal caso di dice che A è *vero* in $\mathcal{M}$, o che $\mathcal{M}$ è *modello* di A, e si scrive

$$\mathcal{M} \models A$$

oppure nessuna lo soddisfa, e in tal caso A si scrive $\mathcal{M} \not\models A$ e si dice che A è *falso* in $\mathcal{M}$.

[4] Non consideriamo anche gli altri connettivi perché $\{\neg, \wedge\}$ è un insieme adeguato, e in ogni caso le condizioni per gli altri connettivi sono ovvie.

2.2 Validità e conseguenza

Per ogni formula A, la sua *chiusura universale* $\forall A$ è l'enunciato che si ottiene premettendo una quantificatore universale $\forall x$ per ogni variabile x che abbia occorrenze libere in A.

Se $\forall A$ è vero in $\mathcal{M}$, si dirà anche che A è *valida* in $\mathcal{M}$, o che $\mathcal{M}$ è *modello* di A, e si scriverà $\mathcal{M} \models A$. A è valida in $\mathcal{M}$ se per ogni α, $\mathcal{M}, \alpha \models A$. Quindi $\mathcal{M}$ è modello di A, come formula, se e solo se è modello di $\forall A$, come enunciato.

Una formula A si dice *soddisfacibile in* $\mathcal{M}$ se esiste qualche assegnazione α tale che $\mathcal{M}, \alpha \models A$.

Se A è un enunciato, $\forall A$ coincide con A, e si possono perciò dare le definizioni delle nozioni semantiche, che partono da quella di modello, per le formule in generale, in modo che valgano tuttavia senza modifiche sia nel caso di formule aperte sia nel caso di enunciati. Al massimo si cambia un po' la terminologia per rispettare il genere grammaticale: se $\mathcal{M}$ è un modello di A, A si dice valida in $\mathcal{M}$ se A è una formula aperta, e A si dice vero in $\mathcal{M}$ se A è un enunciato.

Una formula A è *soddifacibile* se esiste $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \models A$, cioè se esiste un'interpretazione in cui A è valida. Altrimenti è insoddisfacibile.

Si dirà che A è *logicamente valida*, e si scriverà $\models A$, se

$$\text{per ogni } \mathcal{M},\ \mathcal{M} \models A.$$

Se A è una formula chiusa logicamente valida, A si dirà anche un enunciato *logicamente vero*, sempre con la stessa definizione che ogni intepretazione ne è un modello.

A si dice *conseguenza logica* di $A_1, \ldots, A_n$, e si scriverà

$$A_1, \ldots, A_n \models A$$

se ogni modello di $\{A_1, \ldots, A_n\}$ è modello di A. $\mathcal{M}$ è modello di un insieme T se $\mathcal{M} \models B$ per ogni $B \in T$. La definizione di conseguenza $T \models A$ si può perciò generalizzare a insiemi qualunque T. Se T è finito $T = \{A_1, \ldots, A_n\}$, $\mathcal{M} \models T$ se e solo se $\mathcal{M} \models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$, per cui $A_1, \ldots, A_n \models A$ se e solo se $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models A$.

Se A e B sono enunciati,

$$B \models A \text{ se e solo se } \models B \to A$$

ma lo stesso non vale se B è una formula; se $\models B \to A$ allora anche $B \models A$, ma non viceversa (esercizio).

La definizione di equivalenza logica che si dà è perciò la seguente: A è *logicamente equivalente* a B, in simboli $A \equiv B$ se per ogni $\mathcal{M}$ e per ogni assegnazione α in $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M}, \alpha \models A \text{ se e solo se } \mathcal{M}, \alpha \models B,$$

che corrisponde a $\models A \leftrightarrow B$.

Le formule logicamente valide sono dette *leggi logiche*. Tra le leggi logiche vi sono, e si determinano facilmente, quelle che hanno la struttura proposizionale di una tautologia.

Lemma 2.2.1. *Se A ha la struttura proposizionale di una tautologia, A è logicamente valida.*

Dimostrazione. Se A ha la struttura proposizionale di una tautologia, l'albero di costruzione troncato alle sottoformule che iniziano con un quantificatore è l'albero di costruzione di una tautologia. Comunque si scelga $\mathcal{M}$ e si valutino le sottoformule di A rispetto alle assegnazioni in $\mathcal{M}$, quando si arriva alle foglie dell'albero troncato si applicano, a valutazioni del tipo "tale formula è soddisfatta o no", gli stessi calcoli che si applicano ai valori 1 o 0 mediante le tavole di verità dei connettivi presenti. Siccome questi calcoli portano sempre al valore 1 nella radice, che è una tautologia, essi portano alla affermazione "la formula è soddisfatta" per ogni $\mathcal{M}$ e ogni assegnazione. $\square$

Esistono però anche formule logicamente valide che non hanno la struttura proposizionale di una tautologia, ad esempio la legge di *particolarizzazione*

$$\forall x A \to A[x/t]$$

per ogni A e ogni t libero per x in A. Per verificarlo, premettiamo il

Lemma 2.2.2. *Se t è libero per x in A e se α e α' sono due assegnazioni in $\mathcal{M}$ tali che $\alpha'(x) = t^\alpha$, e $\alpha'(y) = \alpha(y)$ per ogni altra eventuale variabile libera in A, allora*

$$\mathcal{M}, \alpha' \models A \textit{ se e solo se } \mathcal{M}, \alpha \models A[x/t]$$

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione sull'altezza di A, dopo aver dimostrato, sempre per induzione, l'analogo del lemma per i termini, vale a dire: se s è un termine e $\alpha'(x) = t^{\alpha}$, e $\alpha'(y) = \alpha(y)$ per ogni altra eventuale variabile di s, allora $s^{\alpha'} = (s[x/t])^{\alpha}$.

Con questo, è subito visto il caso delle formule atomiche. L'unico altro caso importante, dove si vede la funzione dell'ipotesi che t sia libero per x in A è quello dei quantificatori. Sia A della forma $\forall z B$. Supponiamo che α' soddisfi A e dimostriamo che α soddisfa $A[x/t]$. Per questo, dobbiamo provare che ogni z-variante di α soddisfa $B[x/t]$. Sia β una z-variante di α. Costruiamo β' che da una parte sia una z-variante di α', e quindi per questo soddisfi B, e che dall'altra stia con β nella relazione richiesta dall'enunciato del lemma, per poter applicare l'ipotesi induttiva e concludere che β soddisfa $B[x/t]$. Deve dunque essere $\beta'(x) = t^{\beta}$ e $\beta'(y) = \beta(y)$ per ogni altra eventuale variabile libera di B. Tra queste c'è possibilmente anche z. Ma essendo libero per x in A, t non contiene z, quindi notiamo che $t^{\beta} = t^{\alpha}$.

Poniamo allora per definizione:

$$\begin{aligned}
&\beta'(x) = t^{\beta} = t^{\alpha} = \alpha'(x) \\
&\beta'(z) = \beta(z) \\
&\beta'(y) = \beta(y) = \alpha(y) = \alpha'(x)
\end{aligned}$$

e tutte le condizioni sono soddisfatte. Allo stesso modo si dimostra il viceversa, e il caso del quantificatore esistenziale.□

Dato il lemma, per dimostrare che $\models \forall x A \to A[x/t]$, se t è libero per x in A, si immagini un'interpretazione qualunque $\mathcal{M}$ e un'assegnazione qualunque α che soddisfi $\forall x A$. Allora ogni sua x-variante soddisfa A, e sia α' la sua x-variante definita da $\alpha'(x) = t^{\alpha}$. Siccome α' soddisfa A, per il Lemma α soddisfa $A[x/t]$.

Se t non è libero per x in A, il condizionale non è valido, come mostra il controesempio $\forall x \exists y R(x, y) \to \exists y R(y, y)$, che è falso nella struttura dei numeri naturali se R è interpretato sulla relazione $<$.

Un'altra legge logica importante è quella che va sotto il nome di *rinomina* delle variabili vincolate:

$$\forall x A \equiv \forall y A[x/y]$$

e analogamente per il quantificatore esistenziale, se y è una variabile che non è libera in A ed è libera per x in A. Queste due condizioni assicurano che i posti delle occorrenze libere di x in A sono esattamente i posti delle occorrenze libere di y in $A[x/y]$. Allora l'equivalenza si dimostra facilmente con una nuova applicazione del lemma. Le ipotesi su y garantiscono che $A[x/y][y/x]$ è uguale ad A. Le ipotesi sono anche necessarie, come mostra il controesempio di $\exists x \exists y R(x, y)$ che non è equivalente a $\exists y \exists y R(y, y)$.

Più semplicemente per fare la rinomina si usa di solito una variabile y che non occorra per nulla in A.

Elenco di altre leggi logiche notevoli:

$\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$	
$A[x/t] \to \exists x A$	*se t libero per x in A*
$\forall x A \to \exists x A$	
$\forall x(A \land B) \equiv \forall x A \land \forall x B$	
$\exists x(A \lor B) \equiv \exists x A \lor \exists x B$	
$\forall x A \lor \forall x B \to \forall x(A \lor B)$	
$\exists x(A \land B) \to \exists x A \land \exists B$	
$\forall x A \lor B \equiv \forall x(A \lor B)$	*se x non libera in B*
$\exists x A \land B \equiv \exists x(A \land B)$	*se x non libera in B*
$\forall x A \lor \forall x B \equiv \forall x \forall y(A \lor B[x/y])$	*se y non occorre né in A né in B*
$\exists x A \land \exists x B \equiv \exists x \exists y(A \land B[x/y])$	*se y non occorre né in A né in B*
$\forall x(A \to B) \equiv (A \to \forall x B)$	*se x non libera in A*
$\exists x(A \to B) \equiv (A \to \exists x B)$	*se x non libera in A*
$\exists x(A \to B) \equiv (\forall x A \to B)$	*se x non libera in B*
$\forall x(A \to B) \equiv (\exists x A \to B)$	*se x non libera in B*
$\forall x(A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$	
$(\forall x A \to \forall x B) \equiv \exists x \forall y(A \to B[x/y])$	*se y non occorre né in A né in B*
$(\forall x A \to \forall x B) \equiv \forall y \exists x(A \to B[x/y])$	*se y non occorre né in A né in B*
$(\exists x A \to \exists x B) \equiv \forall x \exists y(A \to B[x/y])$	*se y non occorre né in A né in B*

2.3 Esercizi

1. Trovare un esempio di struttura in cui $P(x) \to Q(x)$ non è valida, ma $\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$ è vero (usare strutture finite).

2. Dimostrare che $P(x) \to \forall x Q(x)$ non è equivalente a $\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$.

3. Sia A l'enunciato

$$(\exists x \neg P(x) \to \exists x(P(x) \land \neg Q(x))) \land (\forall x P(x) \to \forall x Q(x)).$$

Verificare che $A, P(x) \models Q(x)$ ma $A \not\models P(x) \to Q(x)$, e quindi, se si indica $A \wedge P(x)$ con B, che $B \models Q(x)$ ma $\not\models B \to Q(x)$.

4. Trovare la struttura proposizionale delle seguenti formule e verificare che sono tautologie:

   $(\forall x P(x) \to \neg\forall x P(x)) \to \neg\forall x P(x)$

   $\exists x \forall y R(x, y) \wedge \forall x Q(x) \to \exists x \forall y R(x, y)$

   $P(c) \to \forall x \neg P(x) \vee P(c)$

5. Trovare la struttura proposizionale di $(\forall x P(x) \to \exists x \neg P(x)) \to \exists x \neg P(x)$ e verificare che non è una tautologia nonostante l'enunciato sia logicamente equivalente a $(\forall x P(x) \to \neg\forall x P(x)) \to \neg\forall x P(x)$ (vedi esercizio precedente).

6. Dimostrare che $\exists x A \equiv \neg\forall x \neg A$.

7. Dimostrare che $\models \forall x A \to \exists x A$.

8. Dimostrare che $A \equiv \forall x A \equiv \exists x A$ se x non occorre libera in A.

9. Dimostrare che se $A \equiv B$, anche $\forall x A \equiv \forall x B$ e $\exists x A \equiv \exists x B$.

10. Dimostrare la validità delle leggi logiche elencate nel testo.

11. Dimostrare con un controesempio che $\forall x \exists y A \not\equiv \exists y \forall x A$.

12. Trovare un controesempio a $\exists x A \wedge \exists x B \to \exists x(A \wedge B)$ e uno a $\forall x(A \vee B) \to \forall x A \vee \forall x B$.

13. Dimostrare che se t ed s sono due termini liberi per x in A e $t^{\alpha} = s^{\alpha'}$ e $\alpha(y) = \alpha'(y)$ per ogni altra eventuale variabile libera di A diversa da x, allora

$$\mathcal{M}, \alpha \models A[x/t] \text{ se e solo se } \mathcal{M}, \alpha' \models A[x/s].$$

14. Dimostrare che

$$\mathcal{M} \models A[x/c] \text{ se e solo se } \mathcal{M}, \alpha \models A$$

se α è tale che $\alpha(x) = c^M$.

2.4 Linguaggi con uguaglianza

Se il linguaggio è un linguaggio con uguaglianza, un'interpretazione $\mathcal{M}$ tale che

$$\mathcal{M}, \alpha \models t_1 = t_2 \text{ se e solo se } t_1^\alpha = t_2^\alpha$$

cioè un'interpretazione in cui il simbolo di uguaglianza è interpretato sulla relazione di identità, si dice un'interpretazione *normale*.

Un'interpretazione $\mathcal{M}$ si dice *quasi-normale* se in $\mathcal{M}$ sono valide le seguenti formule, dette *assiomi dell'uguaglianza*:

$$x = x$$

$$x = y \to y = x$$

$$x = y \wedge y = z \to x = z$$

$$x_i = y \to F(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

per ogni simbolo funzionale a n argomenti e ogni i, e

$$x_i = y \to (P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \to P(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$$

per ogni simbolo predicativo a n argomenti e ogni i.

In una interpretazione quasi-normale la relazione su cui è interpretato il simbolo relazionale $=$ è una relazione di equivalenza, e di congruenza rispetto agli altri simboli funzionali e predicativi.

Poiché si dimostra che ogni interpretazione quasi-normale si può trasformare in un'interpretazione normale, che soddisfa gli estessi enunciati, con un passaggio al quoziente, considerando cioè come nuovi individui le classi di equivalenza, quando si usa un linguaggio con uguaglianza e ci si vuole restringere alle interpretazioni normali si aggiungono gli assiomi dell'uguaglianza: B è conseguenza logica di A e di questi se e solo se A vale in tutti i modelli normali di B.

2.5 Esercizi

1. Per un linguaggio con uguaglianza, verificare che in un'interpretazione normale sono validi gli assiomi dell'uguaglianza, e anche lo schema

$$x = y \to (A \leftrightarrow A[x/y])$$

per ogni formula A, e y non libera per x in A.

2. Definire l'interpretazione normale che si ottiene da una quasi-normale con il passaggio al quoziente.