# Logica Proposizionale

La logica proposizionale è un frammento semplificato, rispetto alla logica predicativa, con vantaggi e svantaggi. I vantaggi sono dovuti alla semplicità, al minor numero di problemi da trattare e alla conseguente miglior comprensione dei concetti fondamentali e degli algoritmi relativi. Gli svantaggi, oltre alla meno fine espressività, sono dovuti all'eccessiva semplificazione, per cui tutto è decidibile, e si perde la differenza tra calcolo e semantica.

## 1 Linguaggio proposizionale

Il linguaggio proposizionale si ricava da quello naturale isolando le particelle logiche con cui si formano frasi a partire da altre frasi senza che ci siano legami tra elementi della struttura interna delle stesse. Per dare un linguaggio si dà un alfabeto, e una morfologia o sintassi.

### 1.1 Alfabeto

L'alfabeto proposizionale è costituito dai seguenti sottoinsiemi disgiunti:

- una lista infinita $\mathcal{L}$ di *lettere*, o variabili, *proposizionali* indicate con $P, Q, \ldots, P_1, \ldots$
- (una *costante proposizionale*, indicata con $\perp$)
- un insieme finito di *connettivi proposizionali* indicati dai simboli

  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

  che sono detti rispettivamente negazione, congiunzione, disgiunzione, condizionale e bicondizionale

- due simboli *ausiliari*, di interpunzione, indicati da ( e da ) e detti parentesi, rispettivamente sinistra e destra[1].

L'alfabeto e le varie categorie sintattiche in cui è ripartito sono tutti insiemi decidibili.

Le *parole* sull'alfabeto sono le liste finite di simboli dell'alfabeto. Con "lista si intende successione finita, o sequenza, non il concetto di lista come struttura di dati della programmazione. Una successione di lunghezza $n$ è una funzione il cui dominio è $n$ e che a ogni $i < n$ associa l'elemento di posto $i$ della successione. L'operazione più importante è quella dell'appendere un elemento, che si estende a quella di concatenazione, la cui notazione tradizionale è la seguente $\sigma^\frown a$ e $\sigma^\frown \tau$. Nella scrittura tuttavia si ometterà il simbolo di concatenazione e si giustapporranno le due liste una di seguito all'altra, se non è necessario essere più precisi.

## 1.2 Morfologia

Nell'insieme delle parole si isolano in genere vari insiemi significativi di espressioni; nel caso del linguaggio proposizionale solo l'insieme $\mathcal{P}$ delle proposizioni, con la definizione induttiva seguente, dove si usano le lettere $A, B, \ldots$ come variabili metalinguistiche sulle proposizioni e $\otimes$ come variabile metalinguistica sull'insieme dei connettivi binari $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$:

- (Clausola di base) Per ogni lettera $P$, $(P)$ è una proposizione, detta *atomica* (e $(\perp)$ è una proposizione atomica, se $\perp$ appartiene all'alfabeto)

- (Clausole induttive)

  Se $A$ è una proposizione, anche $(\neg A)$ è una proposizione [2]

  Se $A$ e $B$ sono proposizioni, anche $(A \otimes B)$ è una proposizione

- (Clausola di chiusura) Una parola è una proposizione se e solo se si ottiene con un numero finito di applicazioni delle clausole di base e induttive.

[1] Il contesto aiuterà a distinguerli dagli stessi simboli usati nel linguaggio corrente, come arricchimento dell'alfabeto italiano dove sono usate per formare un inciso (come questo).

[2] $(\neg A)$ è un'abbreviazione per $({}^\frown\neg{}^\frown A^\frown)$, secondo la convenzione detta sulla scrittura della concatenazione.

In modo informale,

> $(\neg A)$ è detta "negazione di $A$, si legge "non $A$,
> $(A \wedge B)$ è detta "congiunzione di $A$ e $B$, si legge "$A$ e $B$,
> $(A \vee B)$ è detta "disgiunzione di $A$ e $B$, si legge "$A$ o $B$,
> $(A \rightarrow B)$ è un condizionale con antecedente (anticamente: protasi) $A$ e conseguente (o apodosi) $B$, e si legge "se $A$ allora $B$,
> $(A \leftrightarrow B)$ è il bicondizionale di $A$ e $B$, e si legge "$A$ se e solo se $B$.

Ciascuna di queste proposizioni si dice *composta*.

Esempi

1. $(P \cap Q)$ non è una proposizione perché $\cap$ non è un elemento dell'alfabeto (di qui si vede la necessità della richiesta di decidibilità dell'alfabeto).
2. $P \wedge Q$ non è una proposizione, perché:

   Ogni propsizione contiene almeno una parentesi.
3. $)P($ non è una proposizione perché:

   Ogni proposizione inizia con una parentesi ( e termina con una parentesi ).
4. $((P) \rightarrow (Q))$ è una proposizione perché ottenuta dalle proposizioni atomiche $(P)$ e $(Q)$ con una applicazione della clausola induttiva relativa a $\rightarrow$.
5. $((P)$ non è una proposizione perché:

   In ogni proposizione il numero di parentesi ( è uguale al numero di parentesi ).
6. $(PQ)$ non è una proposizione perché non è atomica e non contiene neussun connettivo.

## 1.3 Analisi sintattica

A ogni proposizione è associato un *albero di costruzione*, o di *analisi sintattica*, un albero etichettato finito binario definito in questo modo:

- la radice è etichettata con la proposizione

- ogni nodo ha nessuno, uno o due successori a seconda che la proposizione etichetta del nodo sia atomica, o della forma $(\neg A)$, o della forma $(A \otimes B)$. Nel secondo caso il successore è etichettato con $A$, nel terzo caso i due successori sono etichettati rispettivamente con $A$ e con $B$.

Si chiama *altezza* della proposizione l'altezza del suo albero di costruzione.

Le etichette dei nodi dell'albero di costruzione di una proposizione sono le sue sottoproposizioni. Se una proposizione è della forma $(\neg A)$ o della forma $(A \otimes B)$, $\neg$ e $\otimes$ sono rispettivamente il suo connettivo principale. Le lettere che compaiono nelle (proposizioni atomiche nelle) foglie sono le lettere che occorrono nella proposizione, come elementi della lista. Se $P, \ldots, Q$ sono le lettere che occorrono nella proposizione $A$, si scrive anche $A[P, \ldots, Q]$. Qualche volta si usa questa notazione anche se $P, \ldots, Q$ sono solo alcune delle lettere che occorrono in $A$, o viceversa se le lettere che occorrono in $A$ sono incluse tra le $P, \ldots, Q$; invece di introdurre notazioni apposite, la differenza sarà chiara dal contesto o da esplicite precisazioni.

Invece di associare alle proposizioni i loro alberi di costruzione, e dimostrarne l'unicità, si potrebbero definire direttamente le proposizioni come alberi etichettati, con operazioni di innesto di alberi in corrispondenza ai connettivi; le etichette delle radici, quelle che ora sono le nostre proposizioni, si potrebbero chiamare il "senso delle proposizioni; questa strada non è molto seguita, in vista delle successive manipolazioni e composizioni, il cui risultato interessa solo le etichette delle radici.

Se una parola *è* una proposizione, ad essa è associato l'albero di costruzione. Ma decidere se una parola è una proposizione comporta il riconoscimento delle clausole applicate per la sua costruzione, quindi andando indietro innanzi tutto il connettivo principale (introdotto dall'ultima clausola applicata); tale riconoscimento permette anche di (iniziare e continuare a) costruire l'albero sintattico.

Per questo riconoscimento giocano un ruolo essenziale le parentesi; è opportuno pensare a un contatore che, quando passa in rassegna una parola, aumenta di $+1$ a ogni ( e di $-1$ a ogni ), e notare le seguenti proprietà:

**Lemma 1.3.1.** *Condizione necessaria perché una parola sia una proposizione è che il contatore inizializzato a* 0 *non sia costante, non sia mai negativo e torni a* 0 *alla fine, e solo alla fine.*

Il tornare a 0 corrisponde al fatto che in ogni proposizione il numero di parentesi sinistre è uguale a quello delle parentesi destre; il tornarvi solo alla fine al fatto che:

**Lemma 1.3.2.** *Se si tronca una proposizione in un posto prima dell'ultimo, il numero delle parentesi sinistre nel segmento iniziale è maggiore di quello delle parentesi destre.*

*Dimostrazione*. Per induzione. Se una proposizione è atomica e la si tronca al primo o al secondo posto, nella lista iniziale si ha una parentesi sinistra e nessuna parentesi destra.

Se una proposizione è della forma $(\neg A)$ e la si tronca in uno dei posti di $A$, ci sono per ipotesi induttiva su $A$ più parentesi sinistre che destre provenienti dal segmento iniziale di $A$, oppure lo stesso numero se si è troncato nell'ultimo posto di $A$–per il lemma precedente–più la parentesi sinistra iniziale.

Se una proposizione è della forma $(A \otimes B)$ si distinguono vari casi; se si tronca nella parte di $A$ vale un ragionamento analogo al caso precedente; se si tronca in $\otimes$ le precedenti parentesi di $A$ si compensano, ma c'è quella iniziale sinistra; se si tronca nella parte di $B$, allora ci sono lo stesso numero di parentesi sinistre e destre nel segmento corrispondente ad $A$, e per ipotesi induttiva su $B$ più parentesi sinistre che destre nel segmento iniziale di $B$, o al massimo lo stesso numero, e poi sempre la prima parentesi sinistra che in ogni caso fa pendere la bilancia a favore delle sinistre. □

Date queste proprietà, per decidere se una parola è una proposizione si proceda con il seguente algoritmo ricorsivo (dove alcuni dettagli di verifica sono lasciati al lettore): si esamina il primo elemento della parola, che deve sempre essere una parentesi sinistra, come l'ultimo deve essere una parentesi destra; quindi il secondo: se è una lettera, si verifica se il terzo elemento è l'ultimo ed è una parentesi ); se è un segno di negazione, si prende la parola che va dal terzo al penultimo elemento e si applica ad essa l'algoritmo di decisione; se il secondo è ancora (, si applica il contatore inizializzato a 0 alla parola che inizia dal secondo posto, e si va a vedere dove torna a 0; se a destra di quel punto $i$ c'è un connettivo binario, si applica l'algoritmo alla sottoparola che va dal secondo all'$(i-1)$-esimo posto, e alla sottoparola che va dall'$(i+1)$-esimo posto al penultimo per verificare se queste sono proposizioni.

L'applicazione dell'algoritmo, se la risposta è positiva, permette anche di costruire l'albero sintattico, e la costruzione è unica (altrimenti la costruzione dell'albero abortisce). Questo risultato si chiama proprietà di *leggibilità*, o leggibilità *univoca*, delle proposizioni. Le parentesi sono essenziali per individuare il connettivo principale di una proposizione; alcune sono sovrabbondanti, ma solo nelle proposizioni atomiche, dove le abbiamo usate sia per uniformità sia per sottolineare la differenza tra una lettera come elemento dell'alfabeto e la lettera come proposizione. Ma ora per comodità di scrittura e lettura è meglio ridurre il numero di parentesi con le seguenti convenzioni: di non scrivere le parentesi intorno alle lettere (o alla costante) nelle proposizioni atomiche, e di ordinare per priorità i connettivi secondo le seguente graduatoria:

$$\begin{array}{c} \neg \\ \wedge \\ \vee \\ \rightarrow \\ \leftrightarrow \end{array}$$

Data una parola le cui parentesi non rispettano le condizioni per essere una proposizione (sì però la parità, il fatto che il numero di parentesi sinistre sia uguale a quello delle parentesi destre, il fatto che in ogni punto che non sia l'ultimo il numero di sinistre è maggiore o uguale di quello delle destre, e tutte le proprietà che si mantengono quando si eliminano alcune *coppie* di parentesi corrispondenti), le parentesi si rimettono secondo questo procedimento: prima si rimettono le parentesi a sinistra e a destra delle lettere (o della costante $\perp$); quindi si esamina la negazione, si considera la più corta sottoparola $\sigma$ alla sua destra che è una proposizione, e si rimette una parentesi sinistra alla sinistra della negazione, se non c'è già, e una parentesi destra a destra di $\sigma$, se non è già; quindi si passa ai connettivi binari e per ciascuno di essi si considerano le più corte sottoparole $\sigma$ e $\tau$ a sinistra e a destra che sono proposizioni, e si introduce una parentesi ( a sinistra di $\sigma$ e ) a destra di $\tau$, se non ci sono già, e così via. Per occorrenze dello stesso connettivo si conviene l'associazione a destra, cioè ad esempio con $A \to B \to C$ si intende $A \to (B \to C)$.

Definiamo l'*operazione di sostituzione* di una proposizione $B$ al posto di tutte le occorrenze di una lettera $P$ in un proposizione $A[P]$. Si può definire per ricorsione, pensando ad $A$ come a una lista: se $A[P]$ è della forma $C^\frown(^\frown P^\frown)^\frown D$ dove quella mostrata è la prima occorrenza di $P$ in $A$, cioè in $C$ non ci sono occorrenze di $P$, allora $A[P/B]$ è $C^\frown B^\frown D[P/B]$, altrimenti se non ci sono occorrenze di $P$, $A[P/B]$ è $A$. Oppure la sostituzione si può definire per induzione sulla costruzione di $A$:

- se $A$ è atomica ed è $(P)$, allora $A[P/B]$ è $B$

- se $A$ è atomica ed è $(Q)$, con $Q$ diversa da $P$ (o è $(\perp)$), allora $A[P/B]$ è $A$
- Se $A$ è $(\neg C)$, $A[P/B]$ è $(\neg C[P/B])$
- Se $A$ è $(C \otimes D)$, $A[P/B]$ è $(C[P/B] \otimes D[P/B])$.

Si può dare una definizione analoga per la sostituzione ad alcune (non necessariamente tutte le) occorrenze di $P$ in $A$ (esercizio).

Pensare a una proposizione $A$ come $A[P/B]$ significa metterne in luce uno scheletro strutturale più semplice.

## 1.4 Esercizi

1. Applicare il contatore di parentesi alle seguenti parole, e fare i commenti del caso:

   $(P \wedge (Q)$

   $(P)) \wedge Q)$

   $((P) \wedge Q)$

   $((P) \wedge (\neg(Q)))$

   $((P) \to \wedge)$

   $P$

   $)P($

   $((P))$

2. Verificare quali delle seguenti parole sono proposizioni e quali no, costruendo l'albero sintattico e spiegando dove eventualmene la costruzione fallisce e per quale ragione:

   $(\neg(\neg P))$

   $((P) \to ((Q) \vee (\neg(R))))$

   $(\neg\neg((P) \to (Q)))$

   $((((P) \to (Q)) \wedge (P)) \to (Q))$

   $\neg P \vee Q$

   $((\neg(P)) \wedge (Q)) \vee (R))$

   $(((\neg(P)) \wedge (Q)) \vee (R))$

3. Dimostrare per induzione:

   Ogni proposizione ha lunghezza maggiore o uguale a 3.

   In ogni proposizione non atomica occorre un connettivo.

   In nessuna proposizione occorrono due connettivi consecutivi.

   In nessuna proposizione occorre la sottosequenza (), né $)P$.

   In ogni proposizione la sua lunghezza (come lista) è maggiore della sua altezza (come albero, se l'albero coincidente con la sua radice ha altezza 0 o 1).

4. Il numero (di occorrenze) dei connettivi è una misura di complessità, come la lunghezza e l'altezza (cioè una funzione dalle proposizioni nei numeri naturali che soddisfa la condizione che la misura di una proposizione è maggiore delle misure delle proposizioni componenti, e le atomiche hanno la stessa misura minima). Dimostrare con un controesempio che il numero di connettivi diversi non è una misura di complessità.

5. Eliminare le parentesi, applicando le convenzioni sulla priorità dei connettivi, dalle seguenti proposizioni:

   $(((P) \land (\neg(Q)) \to (\neg(P)))$

   $((\neg(\neg(\neg(P)))) \lor ((P) \land (Q)))$

   $(((\neg(P) \land (\neg(Q))) \lor ((\neg(P)) \land (Q)))$

6. Reintrodurre le parentesi nelle seguenti proposizioni:

   $\neg\neg P$

   $\neg P \land Q \lor R$

   $P \to Q \lor \neg R$

   $(P \to Q) \land P \to Q$

   $P \to Q \land P \to Q$

   $P \lor Q \land R \to \neg P$

   $P \land Q \land R \lor \neg R$

7. Sostituire

   $Q$ a $P$ in $\neg P \vee Q$

   $P \to P$ a $P$ in $\neg P \to P$

   $Q \wedge \neg Q$ a $P$ in $\neg P \to (P \vee R)$

   $Q$ a $P$ in $Q \to R$

# 2 Semantica

Le interpretazioni particolari di uno schema formale come il linguaggio proposizionale si ottengono sostituendo le lettere con frasi di un linguaggio concreto; ma per studiare le proprietà generali delle interpretazioni, di tutte quelle possibili, si salta questo passaggio: eseguita un'interpretazione infatti, le proposizioni vengono ad essere vere o false (ovvero, la sostituzione si pensa di farla con le frasi dichiarative che, per definizione, si vorrebbe che fossero quelle che possono essere valutate come vere o false); si definisce allora direttamente come interpretazione l'assegnazione di un *valore di verità* alle proposizioni.

## 2.1 Interpretazioni e valutazioni

I valori di verità saranno rappresentati dall'insieme[3] $\{0, 1\}$. Ci si colloca con ciò nell'ottica della logica classica a due valori. $\{0, 1\}$ può essere pensata sia come un'*algebra di Boole*, con $0 < 1$, sia come l'insieme dei primi due numeri naturali con le operazioni modulo 2.

Un'interpretazione è una funzione $i : \mathcal{L} \longmapsto \{0, 1\}$; una valutazione è una funzione $v : \mathcal{P} \longmapsto \{0, 1\}$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$\begin{array}{lcl} v((\neg A)) & = & 1 - v(A) \\ v((A \wedge B)) & = & inf\{v(A), v(B)\} \\ v((A \vee B)) & = & sup\{v(A), v(B)\} \\ v((A \to B)) & = & sup\{1 - v(A), v(B)\} \\ v((A \leftrightarrow B)) & = & 1- \mid v(A) - v(B) \mid \end{array}$$

Ogni interpretazione $i$ si estende a una valutazione $i^*$ ponendo

$$\begin{array}{lcl} i^*((P)) & = & i(P) \\ (i^*((\bot)) & = & 0) \end{array}$$

e definendo $i^*$ sulle proposizioni composte in modo da soddisfare le condizioni ricorsive della definizione di valutazione.

Per ogni valutazione $v$ il valore di verità di una proposizione $A$ si ottiene applicando ai valori delle sottoproposizioni immediate di $A$ un operatore, una funzione, che dipende dal connettivo principale di $A$. Ad ogni connettivo è associata una *funzione di verità*, cioè una funzione da $\{0, 1\}^n$ in $\{0, 1\}$, dove

[3] Altre notazioni per i valori di verità sono $\{V, F\}$, $\{T, F\}$, $\{\top, \bot\}$, $\{\mathbf{True}, \mathbf{False}\}$.

$n$ è il numero di argomenti del connettivo. Per il loro carattere finito queste funzioni sono rappresentate da tabelle, che sono dette *tavole di verità*.

La tavola di verità della negazione è:

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

la tavola di verità della congiunzione:

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

la tavola di verità della disgiunzione:

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

la tavola di verità del condizionale:

| $P$ | $Q$ | $P \rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

e la tavola di verità del bicondizionale:

| $P$ | $Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Benché le interpretazioni siano infinite, per ogni singola proposizione solo un numero finito di esse sono rilevanti, perché solo i valori dati alle lettere occorrenti influiscono sulla valutazione.

**Lemma 2.1.1.** *Se $i_1$ e $i_2$ coincidono sulle lettere occorrenti in $A$, allora*

$$i_1^*(A) = i_2^*(A).$$

*Dimostrazione.* Per induzione. Se $A$ è $(P)$, allora

$$i_1^*((P)) = i_1(P) = i_2(P) = i_2^*((P)).$$

Se $A$ è $(B \wedge C)$ allora

$$i_1^*(A) = inf\{i_1^*(B), i_1^*(C)\} = inf\{i_2^*(B), i_2^*(C)\} = i_2^*(A)$$

e così per gli altri connettivi. □

Data una proposizione, il calcolo dei suoi valori di verità per ogni possibile interpretazione si può organizzare in una tabella con i valori progressivi delle sottoproposizioni, come nei seguenti esempi:

Se $A$ è $P \wedge \neg P \to Q$:

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \wedge \neg P$ | $P \wedge \neg P \to Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Se $A$ è $P \vee R \to \neg P \wedge (Q \to R)$:

| $P$ | $Q$ | $R$ | $\neg P$ | $Q \to R$ | $\neg P \wedge (Q \to R)$ | $P \vee R$ | $A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Come si vede dagli esempi, ci sono proposizioni che per ogni interpretazione hanno il valore 1, altre che per alcune interpretazioni hanno il valore 0 e per altre interpretazioni il valore 1. Si possono dare esempi di proposizioni che per ogni interpretazione assumono il valore 0 (esercizio).

## 2.2 Validità e conseguenza

Se $i^*(A) = 1$, si dice che $A$ è *vera* nell'interpretazione $i$, o che $i$ *soddisfa* $A$, o che $i$ è un *modello* di $A$, e si scrive anche

$$i \models A$$

Se esiste almeno una $i$ tale che $i \models A$, si dice che $A$ è *soddisfacibile*, o (semanticamente) *consistente*. Se non esiste alcun modello di $A$, si dice che $A$ è *insoddisfacibile*, o (semanticamente) *inconsistente*, o *contraddittoria*, o una *contraddizione*. Se per ogni $i$ si ha $i \models A$, si dice che $A$ è *logicamente valida*, o *logicamente vera*, o una *tautologia*, e si scrive

$$\models A.$$

Si dice che $B$ è *conseguenza logica* di $A$, e si scrive

$$A \models B$$

se per ogni $i$, se $i \models A$ allora $i \models B$. Si noti che, grazie alla tavola di verità del condizionale,

**Osservazione 2.2.1.** *Per ogni $A$ e $B$,*

$$A \models B \textit{ se e solo se} \models A \to B.$$

Più in generale, se $T$ è un insieme qualunque di proposizioni, si scrive $i \models T$ se $i \models A$ per ogni $A \in T$, e $T \models B$ se per ogni $i$, se $i \models T$ allora $i \models B$.

Se $T = \{A_1, \ldots, A_n\}$, allora $i \models T$ se e solo se $i \models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$, e $T \models B$ si scrive anche $A_1, \ldots, A_n \models B$ o $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B$.

Se $A \models B$ e $B \models A$, si dice che $A$ e $B$ sono *logicamente equivalenti*, o anche solo equivalenti, e si scrive $A \equiv B$.

*Dimostrazione.* Per ogni $A$ e $B$,

$$A \equiv B \text{ se e solo se } \models A \leftrightarrow B.$$

□

Si noti che $\models$ e $\equiv$ sono segni metalinguistici. Le tautologie, in particolare quelle che sono nella forma di equivalenze, sono dette anche *leggi logiche*.

Elenco di leggi logiche notevoli:

| | |
|---|---|
| $A \to A$ | *legge dell'identità* |
| $A \equiv \neg\neg A$ | *legge della doppia negazione* |
| $A \wedge B \equiv B \wedge A$ | *commutatività di* $\wedge$ |
| $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ | *associatività di* $\wedge$ |
| $A \vee B \equiv B \vee A$ | *commutatività di* $\vee$ |
| $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ | *associatività di* $\vee$ |
| $A \wedge A \equiv A$ | *idempotenza di* $\wedge$ |
| $A \vee A \equiv A$ | *idempotenza di* $\vee$ |
| $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | *distributività* |
| $A \vee (A \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ | *distributività* |
| $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ | *legge di De Morgan* |
| $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$ | *legge di De Morgan* |
| $\neg A \vee A$ | *legge del terzo escluso* |
| $\neg(A \wedge \neg A)$ | *legge di non contraddizione* |
| $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$ | *legge di contrapposizione* |
| $A \wedge \neg A \to B$ | *Lewis, o ex falso quodlibet* |
| $A \to (B \to A)$ | *affermazione del conseguente* |
| $\neg A \to (A \to B)$ | *negazione del conseguente* |
| $(A \to B \wedge \neg B) \to \neg A$ | *legge di riduzione all'assurdo* |
| $(A \to \neg A) \to \neg A$ | *riduzione all'assurdo debole* |
| $((A \to B) \to A) \to A$ | *legge di Peirce* |
| $(A \to B) \vee (B \to A)$ | *legge di Dummett* |
| $A \to ((A \to B) \to B)$ | *modus ponens* |
| $A \to (B \to C) \equiv B \to (A \to C)$ | *scambio antecedenti* |
| $A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$ | *importazione/esportazione* |
| $(A \to C) \wedge (B \to C) \equiv A \vee B \to C$ | *distinzione di casi* |
| $(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \to B$ | *distinzione di casi* |
| $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ | *distributività di* $\to$ |
| $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$ | *transitività di* $\to$ |

Per verificare queste leggi, dove $A$ e $B$ sono qualunque, si deve prima verificare che le stesse, con lettere al posto di $A$ e di $B$, cioè nel caso particolare che $A$ e $B$ siano atomiche (ad esempio $P \to P$ per la legge dell'identità), sono tautologie, e poi osservare che se $\models A$ e $B$ è qualunque, allora anche $\models A[P/B]$ (si veda il paragrafo 3.1 per una dimostrazione).

## 2.3 Esercizi

1. Verificare con le tavole di verità le precedenti leggi logiche.

2. Verificare che

    - Se $\models A$ allora $B \models A$ per ogni $B$.
    - Se $\models A$ allora $\models A \lor B$ per ogni $B$.
    - Se $\models A$ e $\models A \to B$ allora $\models B$.

## 2.4 Forme normali

A ogni proposizione è associata una tavola di verità, come abbiamo visto nell'esempio di $P \lor Q \to \neg P \land (Q \to R)$. Viceversa, data una qualunque tavola di verità, come ad esempio

| $P$ | $Q$ | $R$ | ? |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

esiste una proposizione scritta utilizzando soltanto i connettivi $\neg$, $\land$, $\lor$ che ha quella data come sua tavola associata.

La proposizione si costruisce nel seguente modo, appoggiandosi come esempio alla tavola di sopra. Sarà una disgiunzione con tanti disgiunti quante sono nella tavola le righe che hanno il valore 1, quindi $A_1 \lor A_2 \lor A_3 \lor A_4$; ogni disgiunto dovrà essere vero solo per l'interpretazione della riga corrispondente, quindi sarà una congiunzione di tante proposizioni quante sono le colonne di entrata della tavola, nell'esempio 3, e ciascuna di queste proposizioni sarà una lettera o la negazione di quella lettera a seconda che nella riga corrispondente la lettera abbia il valore 1 oppure 0. Quindi

$$(\neg P \land \neg Q \land \neg R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land \neg R) \lor (\neg P \land Q \land R).$$

Per le proprietà della valutazione della disgiunzione, congiunzione e negazione, si può facilmente prevedere che la tavola associata a questa proposizione è uguale alla tavola data, che era la tavola di $P \lor Q \to \neg P \land (Q \to B)$.

Si chiama *letterale* una proposizione che sia o una lettera $P$, letterale *positivo*, o la negazione di una lettera $\neg P$ (o $\perp$), letterale *negativo*.

La proposizione associata alla tavola ha dunque la forma di una disgiunzione di congiunzioni di letterali. Una tale forma di chiama *forma normale disgiuntiva*. Poiché è evidente che

*Dimostrazione.* Per ogni $A$ e $B$ che contengano le stesse lettere,

$$A \equiv B \text{ se e solo se } A \text{ e } B \text{ hanno la stessa tavola di verità}$$

□

si può concludere che

**Teorema 2.4.1.** *Per ogni proposizione $A$ esiste una proposizione con le stesse lettere che è in forma normale disgiuntiva ed è equivalente ad $A$.*

*Dimostrazione*. Come nell'esempio di sopra, data $A$ si calcoli la sua tavola, quindi si costruisca la proposizione in forma normale disgiuntiva associata alla tavola.

Nel caso che la tavola di $A$ non abbia alcun 1 nella colonna dei valori, quindi che $A$ sia una contraddizione, la proposizione equivalente in forma normale disgiuntiva si può scrivere nella forma $(\neg P \land P) \lor (\neg Q \land Q) \ldots$ come disgiunzione di contraddizioni elementari, una per ogni lettera di $A$. □

Anche una proposizione come $\neg P \lor Q$ è in forma normale disgiuntiva, perchè il concetto di congiunzione e disgiunzione è usato in senso generalizzato, ammettendo due o più componenti, o anche una sola (peraltro $Q \land Q$ è equivalente a $Q$). Le proposizioni in forma normale disgiuntiva associate a tavole di proposizioni non contraddittorie hanno l'ulteriore proprietà che in ogni disgiunto compaiono le stesse lettere, e che in ogni congiunzione ogni lettera compare una sola volta, positiva o negata. Qualche volta si usa l'aggettivo ulteriore *regolare* per indicare questa caratteristica delle forme normali. Una proposizione in forma normale disgiuntiva regolare permette di leggere direttamente i modelli della proposizioni, uno per ogni disgiunto. Questo è vero anche per le forme normali disgiuntive non regolari, considerando le interpretazioni come definite in modo arbitrario sulle lettere che non occorrono in alcuni disgiunti.

Un altro modo di associare a una tavola una proposizione scritta solo con i connettivi $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ è il seguente, dove sono scambiati i ruoli di 0 e 1 e della disgiunzione e congiunzione: si cerca ora una proposizione che sia falsa esattamente nei casi prescritti dalla tavola data. In riferimento allo stesso esempio di prima, la proposizione deve essere falsa solo ed esattamente in corrispondenza alle ultime quattro righe della tavola, sarà perciò una congiunzione $A_5 \wedge A_6 \wedge A_7 \wedge A_8$, e ogni $A_i$ sarà la disgiunzione di tre letterali, ogni letterale positivo o negativo a seconda che nella riga in questione la lettera abbia il valore 0 oppure 1. Quindi:

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R).$$

Una proposizione che sia una congiunzione di disgiunzioni di letterali si dice in *forma normale congiuntiva*. Una disgiunzione di letterali si chiama anche *clausola*, e le forme normali congiuntive si descrivono perciò brevemente come congiunzioni di clausole. Come sopra, aggiustando anche il caso in cui nella tavola non ci siano 0, si ha:

**Teorema 2.4.2.** *Per ogni proposizione $A$ esiste una proposizione con le stesse lettere che è in forma normale congiuntiva ed è equivalente ad $A$.*

Le forme normali, non necessariamente regolari, sono convenienti per verificare in modo efficiente (alla sola scansione e ispezione della lista) la validità logica, o l'insoddisfacibilità, ma ciascuna forma è adeguata solo per una delle due proprietà.

**Teorema 2.4.3.** *Una proposizione in forma normale congiuntiva è una tautologia se e solo se in ogni sua clausola c'è una lettera che occorre sia positiva sia negata.*

*Una proposizione in forma normale disgiuntiva è insoddisfacibile se e solo se in ogni suo disgiunto c'è una lettera che occorre sia positiva sia negata.*

*Dimostrazione.* Per le forme congiuntive, una clausola in cui occorra una lettera e la negazione della stessa lettera è una tautologia, e una congiunzione è una tautologia se e solo se lo sono le sue componenti. Una clausola in cui non si verifichi la presenza di una lettera e della sua negazione può assumere il valore 1 se a tutti i letterali si assegna il valore 1 interpretando a 1 le lettere dei letterali positivi e a 0 le lettere dei letterali negativi.

Un ragionamento analogo vale per le forme disgiuntive. □

## 2.5 Definibilità

Il risultato sulle forme normali si esprime anche dicendo che tutte le funzioni di verità sono *definibili* in termini dell'insieme di connettivi $\{\neg, \wedge, \vee\}$, o che questo è un insieme *adeguato*, o una *base* di connettivi. Questo significa che non si è perso nulla, quanto a capacità espressiva, non ammettendo nell'alfabeto altri connettivi, ad esempio quello per la disgiunzione esclusiva, con la tavola di verità

| $P$ | $Q$ | $P \mid Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

o per la duplice negazione "né...né..., con la tavola

| $P$ | $Q$ | $P \parallel Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

Invece della proposizione che avremmo scritto $P \mid Q$ scriviamo $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$, e invece di $P \parallel Q$ scriviamo $\neg P \wedge \neg Q$.

Il teorema sulle forme normali dice peraltro che anche i connettivi del linguaggio proposizionale sono sovrabbondanti, perché $\{\neg, \wedge, \vee\}$ è adeguato, e neanche il minimo possibile (si vadano gli esercizi): $P \to Q \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$ e $P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$.

Queste equivalenze comportano che all'interno di ogni proposizione una sottoproposizione della forma $A \to B$ può essere rimpiazzata dalla proposizione equivalente $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B)$, e lo stesso per $A \leftrightarrow B$.

Avere meno connettivi nell'alfabeto originario riduce i casi da trattare nelle definizioni e dimostrazioni induttive. Ad esempio $\leftrightarrow$ sarà spesso dimenticato.

Per definire l'operazione di *rimpiazzamento* di una sottoproposizione $B$ in una proposizione $A$ con $C$, che si indicherà con $A[B//C]$, si può pensare che $A$ sia della forma $A'[P/B]$ dove $P$ è una nuova lettera non occorrente in $A$ e che occorre una sola volta in $A'$, e $A[B//C]$ sia allora $A'[P/C]$.

Si ha allora

**Teorema 2.5.1.** *Se $B \equiv C$ allora $A \equiv A[B//C]$.*

*Dimostrazione.* Per induzione su $A'$, se $A$ è $A'[P/B]$. Se $A'$ è $(P)$, cioè $A$ è $B$, allora $A[B//C]$ è $C$.

Se $A'$ è $\neg D'$ e quindi $A$ è $\neg D'[P/B]$, allora $A[B//C]$ è $\neg D'[P/C]$ e siccome per ipotesi induttiva $D'[P/B] \equiv D'[P/C]$ anche $\neg D'[P/B] \equiv \neg D'[P/C]$. Gli altri casi si trattano nello stesso modo. $\square$

Nella dimostrazione, per trattare i vari casi, si fa uso del seguente

**Lemma 2.5.2.** *Per ogni $A$ e $B$,*

- *se $A \equiv B$ allora $\neg A \equiv \neg B$*
- *se $A_1 \equiv A_2$ e $B_1 \equiv B_2$, allora $A_1 \otimes B_1 \equiv A_2 \otimes B_2$*

che si dimostra facilmente con le tavole di verità per i connettivi. Si vede anche facilmente che

**Lemma 2.5.3.** *Se $A \equiv B$ e $B \equiv C$, allora $A \equiv C$*

ed è anche utile

**Lemma 2.5.4.** *Se $A$ è una tautologia, allora $A \wedge B \equiv B$, e se $A$ è una contraddizione, allora $A \vee B \equiv B$.*

Queste ultime due leggi nella terminologia delle algebre di Boole sono le leggi di *assorbimento*.

Si noti che due proposizioni equivalenti non debbono necessariamente avere le stesse lettere, ad esempio $Q \wedge (\neg P \vee P)$ è equivalente a $Q$, e $\neg P \vee P$ è equivalente a $Q \to Q$ (sono tutt'e due tautologie); quando si controlla che per ogni interpretazione le due proposizioni hanno lo stesso valore si considerano interpretazioni definite sull'insieme più ampio di lettere, ma si possono trascurare in una proposizione i valori delle lettere non occorrenti.

I precedenti lemmi permettono di trasformare progressivamente una proposizione in altre equivalenti, sfruttando equivalenze già provate.

Si noti che, se il linguaggio contiene $\perp$, ogni contraddizione è equivalente a $\perp$; e se si introduce $\top$ come abbreviazione per $\neg\perp$, ogni tautologia è equivalente a $\top$.

Le proposizioni in forma normale che si ottengono da una tavola non sono sempre le più semplici possibili. Se ad esempio il criterio che interessa è quello della lunghezza, la forma normale congiuntiva che si ottiene dalla tavola del condizionale, vale a dire $\neg P \vee Q$, è preferibile alla forma normale disgiuntiva. A $\neg P \vee Q$ si può passare dalla forma normale disgiuntiva regolare $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$ con i seguenti passaggi:

$$\begin{gathered}
(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \\
(\neg P \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee (P \wedge Q) \\
\neg P \vee (P \wedge Q) \\
(\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q) \\
\neg P \vee Q
\end{gathered}$$

applicando le leggi distributive e la semplificazione delle tautologie.

Si noti che $\neg P \vee Q$ è pure essa in forma normale disgiuntiva, ancorché non regolare, e si può considerare la forma normale disgiuntiva semplificata di $P \to Q$. Esistono quindi diverse forme normali disgiuntive (e lo stesso per le congiuntive) equivalenti a una data proposizione, ma lo si era gi` a incontrato prima; si parlerà perciò solo impropriamente della forma normale disgiuntiva (o congiuntiva) di una proposizione $A$, ma si userà tale dizione, a meno di equivalenza logica; si intenderà con questo una forma normale disgiuntiva (o congiuntiva) che sia equivalente ad $A$, e si potrà anche scrivere, se conveniente, $\textsc{dnf}(A)$ (o $\textsc{cnf}(A)$).

Una forma normale disgiuntiva può anche essere equivalente a un'altra forma che non contiene le stesse lettere (vedi esercizi).

Il risultato generale che ogni proposizione è equivalente a una proposizione in forma normale disgiuntiva o congiuntiva si può dimostrare anche applicando un algoritmo di trasformazioni successive come nell'esempio di sopra.

Il procedimento è il seguente:

- eliminare $\leftrightarrow$ e $\to$

- spostare $\neg$ verso l'interno con le leggi di De Morgan
- cancellare le doppie negazioni, con la legge della doppia negazione
- cancellare le ripetizioni, con le leggi di idempotenza
- applicare ripetutamente le leggi distributive.

L'ultima indicazione può sembrare vaga, ma si può rendere più precisa e deterministica. Con i passi precedenti si è trasformata la proposizione in una equivalente che è formata a partire da letterali con applicazioni ripetute di $\wedge$ e $\vee$, anche se non necessariamente nell'ordine che produce una forma normale. Supponiamo di volerla trasformare in forma normale congiuntiva (per la forma normale disgiuntiva il procedimento è lo stesso con scambiati i ruoli di $\wedge$ e $\vee$).

Consideriamo il connettivo principale della proposizione; se è $\wedge$ passiamo alle due sottoproposizioni immediate trasformandole con il procedimento sotto descritto e facendo la congiunzione delle due forme congiuntive così ottenute; se è $\vee$, la proposizione è della forma $A \vee B$. Se $A$ a sua volta è una disgiunzione $C \vee D$, possiamo considerare al suo posto la equivalente $C \vee (D \vee B)$; quindi possiamo supporre che $A$ sia della forma $C \wedge D$, perché se in $A$ non occorresse per nulla $\wedge$ potremmo passare a $B$, lavorando su $B \vee A$.

La proposizione data si trasforma allora nella equivalente $(C \vee B) \wedge (D \vee B)$ e possiamo applicare ricorsivamente il procedimento alle due proposizioni più corte $C \vee B$ e $D \vee B$. Quando procedendo in questo modo si è eliminato il connettivo $\wedge$ a sinistra di B, si passa a lavorare nello stesso modo su $B$.

Esempio

$$\begin{gathered}
(P \to Q) \to (R \vee \neg P) \\
\neg(P \to Q) \vee (R \vee \neg P) \\
\neg(\neg P \vee Q) \vee (R \vee \neg P) \\
(\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (R \vee \neg P) \\
(P \wedge \neg Q) \vee (R \vee \neg P)
\end{gathered}$$

che è in forma normale disgiuntiva

$$(P \wedge \neg Q) \vee R \vee \neg P$$

con due clausole unitarie $R$ e $\neg P$. Se invece si vuole la forma normale congiuntiva, si continua con

$$(P \vee (R \vee \neg P)) \wedge (\neg Q \vee (R \vee \neg P))$$

che è in forma normale congiuntiva.

Esempio Trasformare la forma normale disgiuntiva $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ in forma normale congiuntiva:

$$\begin{gathered}(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \\ (P \vee (\neg P \wedge Q)) \wedge (\neg Q \vee (\neg P \wedge Q)).\end{gathered}$$

Il primo congiunto si trasforma in

$$(P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q),$$

il secondo in

$$(\neg Q \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee Q),$$

quindi la proposizione in

$$(P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee Q),$$

da cui si possono ancora eliminare le tautologie, ottenendo

$$(P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P).$$

.

Non è detto che questo procedimento, che ha il merito di far vedere la terminazione del compito, se lo si segue come filo d'Arianna, sia sempre il più efficiente, come mostra l'esempio precedente della forma normale disgiuntiva del condizionale; può essere utilmente integrato con l'applicazione dell'eliminazione delle ripetizioni, e con l'eliminazione delle tautologie dalle congiunzioni, e della contraddizioni dalle disgiunzioni, ogni volta che sia possibile; oppure ci sono scorciatoie come quando, volendo mirare a una forma congiuntiva, si incontra una sottoproposizione della forma $(A \wedge B) \vee (C \wedge B)$ che conviene rimpiazzare direttamente con $(A \vee C) \wedge B)$.

Le forme normali disgiuntive e congiuntive si trovano ai poli estremi di uno spettro su cui si immagini di collocare le proposizioni misurando la loro distanza con il numero di applicazioni delle proprietà distributive necessarie per passare dall'una all'altra. Se si pensasse di decidere se una proposizione in forma normale disgiuntiva è una tautologia applicando il teorema 2.4.4, dovendola prima trasformare in forma congiuntiva, si affronterebbe un compito non inferiore come complessità a quello di costruire la tavola di verità completa.

## 2.6 Connettivi e linguaggio naturale

L'affermazione che i connettivi corrispondono alle particelle logiche del linguaggio naturale va presa con cautela. Nel linguaggio naturale le particelle non sono sempre funzioni di verità, nel senso che il valore di verità delle frasi composte non dipende soltanto e in modo uniforme e meccanico dal valore di verità delle frasi componenti. Spesso "se ... allora in italiano ha un senso di causa; alcune particelle come "perché, "giacché o "affinché possono a fatica essere rese con il condizionale; la congiunzione talvolta non è commutativa, perché ha un senso temporale; la disgiunzione "o si capisce solo dal contesto se è inclusiva o esclusiva; la parola "o può essere usata in alcuni contesti per esprimere la congiunzione: "mele o pere sono frutti significa "le mele sono frutti e le pere sono frutti"; "mele e pere in generale rappresenta l'unione, come in "ho comprato un chilo di mele e pere", non l'intersezione, che è vuota; "ovvero a volte significa "o a volte "cioè; la doppia negazione talvolta è un rafforzativo della negazione e non equivale alla affermazione (come in "non voglio nulla); le particelle possono essere espresse da parole di altre categorie sintattiche (come "nulla).

Si chiamano esercizi di *formalizzazione* le traduzioni di frasi della lingua naturale in proposizioni, ovvero la scrittura di proposizioni il cui scheletro strutturale corrisponda a quello di frasi del linguaggio naturale, salvo la sostituzione di lettere alle frasi elementari o che non contengono altre particelle; per eseguirla, occorre prima precisare il senso delle frasi, quando sia ambiguo, e piegare l'uso delle particelle a quello di funzioni di verità.

## 2.7 Esercizi

1. In quanti modi si può dire la congiunzione in italiano?

2. Trovare connettivi (tavole di verità) corrispondenti a "a meno che", "anche se".

3. Usare il condizionale, con $A$ e $B$, per esprimere "$A$ è condizione necessaria affinché $B$, "condizione sufficiente perché $A$ è che $B$, "$A$ solo se $B$.

4. Scrivere la tavola di verità di IF $P$ THEN $Q$ considerando $Q$ come un'affermazione di fatto piuttosto che come un comando, e riconoscere a quale dei connettivi usuali è equivalente.

5. Scrivere la tavola di verità di IF $P$ THEN $Q$ ELSE $R$ ed esprimerla in termini di $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

6. Dimostrare che $\{\neg, \wedge\}$ e $\{\neg, \vee\}$ sono due insiemi adeguati di connettivi, definendo la disgiunzione nel primo e la congiunzione nel secondo.

7. Dimostrare che $\{\neg, \rightarrow\}$ è un insieme adeguato di connettivi.

8. Dimostrare che il connettivo $\|$ da solo costituisce un sistema adeguato di connettivi, definendo in termini di esso la negazione e la congiunzione.

9. Dimostrare che il connettivo “non entrambi, o “non sia ... che ... che ha la tavola

| $P$ | $Q$ | $P \uparrow Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

costituisce da solo un sistema adeguato di connettivi.

10. Scrivere la forma normale congiuntiva e disgiuntiva, usando le tavole di verità, delle seguenti proposizioni:

$(P \vee Q \rightarrow R) \wedge \neg P \wedge \neg R$

$\neg P \rightarrow \neg(Q \rightarrow P)$

$(\neg(P \rightarrow Q) \vee \neg Q) \rightarrow P$

11. Per le proposizioni del precedente esercizio, trasformare la forma normale disgiuntiva in quella congiuntiva e viceversa con l'algoritmo di trasformazione descritto nel testo.

12. Scrivere la forma normale disgiuntiva e congiuntiva, usando l'algoritmo del testo, delle seguenti proposzioni:

$(P \vee Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$

$(P \vee Q) \rightarrow \neg(P \wedge (Q \rightarrow R))$

$P \rightarrow (\neg Q \vee P \rightarrow (R \rightarrow P))$

13. Trasformare le leggi logiche del paragrafo 2.2 in forma normale congiuntiva e disgiuntiva.

14. Osservare che la tavola della proposizione $P \vee Q \to \neg P \wedge (Q \to R)$ di 2.4 è uguale a quella di $\neg P$ (se questa è estesa a una tavola a tre entrate $P, Q, R$ indipendente da $Q$ e $R$) e trasformare in $\neg P$ la sua forma normale disgiuntiva ottenuta dalla tavola.

15. Scrivere $\neg P \vee Q \to \neg P \wedge Q$ in forma normale disgiuntiva e leggerne i modelli.

16. Verificare, ai fini dell'applicazione delle trasformazioni con le leggi distributive, che è

    $(A \vee B) \wedge (C \vee D) \equiv (A \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge D)$

    e analogamente

    $(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \equiv (A \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D)$.

17. Verificare come si trasforma, applicando le leggi di De Morgan, la negazione di una forma normale congiuntiva (rispettivamente disgiuntiva) in una forma normale disgiuntiva (rispettivamente congiuntiva).

18. Spiegare, utilizzando le leggi di De Morgan e la legge della doppia negazione, perché $\textsc{cnf}(A) \equiv \neg\textsc{dnf}(\neg A)$ e $\textsc{dnf}(A) \equiv \neg\textsc{cnf}(\neg A)$.

    L'osservazione è utile nei seguenti casi: si vuole $\textsc{dnf}(A)$ e $\textsc{cnf}(A)$ e si ottenuta una di queste, poniamo $\textsc{dnf}(A)$ ma trasformarla in $\textsc{cnf}(A)$ è complicato; si prova allora a scrivere $\textsc{dnf}(\neg A)$, quindi la si nega e si applica De Morgan; spesso si evita così l'applicazione delle leggi distributive.

    Errore frequente: lo studente ha trovato $\textsc{dnf}(A)$ e per ottenere $\textsc{cnf}(A)$ nega $\textsc{dnf}(A)$ e applica De Morgan, ottenendo in realtà $\textsc{cnf}(\neg A)$. E' il residuo dell'idea di premettere due negazioni, di cui una si dimentica.

19. In riferimento alle osservazioni del precedente esercizio, trovare la forma normale disgiuntiva e congiuntiva e confrontare i diversi modi per ottenerle, per le proposizioni

    $(P \to Q) \to (R \to \neg P)$

    $P \vee Q \to \neg P \vee Q$

    $P \vee (A \wedge R) \to (\neg R \to P)$

20. Verificare la seguente generalizzazione delle leggi di assorbimento, che $A \equiv A \vee C$ se $C \models A$ e che $A \equiv A \wedge C$ se $A \models C$.

# 3 Calcoli logici

## 3.1 Alberi di refutazione

La risposta alle domande semantiche, sulla validità logica o sulla insoddisfacibilità, si può dare con metodi più efficienti della ricerca esaustiva offerta dalla costruzione delle tavole di verità. Uno di questi è il metodo degli *alberi di refutazione*. Il nome deriva dal fatto che sono usati, per rispondere alla domanda sulla validità logica, secondo l'impostazione della ricerca del controesempio: si cerca di scoprire se esiste un'interpretazione che falsifichi la proposizione. Il metodo seguito o mostra che non è possibile che esista, e quindi la proposizione è una tautologia, oppure fornisce un modello per la sua negazione.

Più in generale, il metodo serve a stabilire se esista o no un'interpretazione che soddisfa una proposizione, non partendo dal basso dalle possibili interpretazioni delle lettere ma dall'alto, dalla proposizione, cercando di accumulare condizioni necessarie per l'esistenza dell'interpretazione fino alle condizioni necessarie riguardanti le lettere, che si traducono, se non sono incompatibili tra di loro, in condizioni sufficienti.

Gli alberi di refutazione possono dunque essere usati anche per rispondere alle altre domande semantiche; altri nomi usati sono quelli di *alberi semantici*, oppure di *tableaux* semantici, denominazioni infelici perché la tecnica è integralmente sintattica, basata su un'analisi e scomposizione della proposizione.

Vero è che tutto nella teoria dei linguaggi è guidato dalla sintassi, anche la definizione di soddisfazione; quello che si vuole dire, e che apparirà chiaro, per contrasto, nel caso dei linguaggi predicativi, è qualcosa di più, e cioè che si tratta di algoritmi.

Si chiamano in generale *calcoli logici* i metodi per rispondere ai quesiti logici sulla validità, l'insoddisfacibilità, la conseguenza, che sono procedure guidate dalla sintassi, e che si articolano in un'applicazione iterata di regole che produce strutture come sequenze o alberi, che si chiamano *derivazioni* o *dimostrazioni*.

Gli alberi di refutazione sono alberi etichettati con proposizioni. Identifichiamo per comodità di scrittura i nodi con le loro etichette. Nella radice è una proposizione (di cui si vuole sapere se esiste un modello). L'albero è sviluppato secondo la seguente procedura.

Ad ogni stadio, si saranno già prese in considerazione alcune proposizioni, messe tra parentesi quadre o segnate con un asterisco, e ne resteranno da considerare altre. Se sono già state considerate tutte, l'albero è *terminato*; se no, si prende in esame una proposizione $A$ non ancora considerata, e a seconda della sua forma si prolunga l'albero nel modo seguente, dopo aver segnato la proposizione e aver notato quali sono i rami non chiusi che passano per $A$, dove un ramo si dice *chiuso* se su di esso occorre sia una proposizione sia la sua negazione:

- Se $A$ è un letterale, non si fa nulla.
- Se $A$ è $B \land C$, alla fine di ogni ramo non chiuso passante per $A$ si appendono alla foglia due nodi in serie etichettati con $B$ e $C$, come nello schema:

  $$\begin{array}{c} [B \land C] \\ \vdots \\ \downarrow \\ B \\ \downarrow \\ C \end{array}$$

  con una ovvia generalizzazione che si ottiene applicando ripetutamente la regola se si tratta di una congiunzione generalizzata.
- Se $A$ è $B \lor C$, alla fine di ogni ramo non chiuso passante per $A$ si aggiunge alla foglia una diramazione con due nodi $B$ e $C$, come nello schema:

  $$\begin{array}{ccc} & [B \lor C] & \\ & \vdots & \\ \swarrow & & \searrow \\ B & & C \end{array}$$

- Se $A$ è $B \to C$, alla fine di ogni ramo non chiuso passante per $A$ si aggiunge alla foglia una diramazione con due nodi $\neg B$ e $C$, come nello schema:

  $$\begin{array}{ccc} & [B \to C] & \\ & \vdots & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg B & & C \end{array}$$

- Se $A$ è della forma $\neg B$ e $B$ è $\neg C$, al fondo di ogni ramo non chiuso passante per $A$ si appende alla foglia il successore $C$, come nello schema:

$$\begin{array}{c} [\neg\neg C] \\ \vdots \\ \downarrow \\ C \end{array}$$

- Se $A$ è della forma $\neg B$ e $B$ è $C \vee D$, alla fine di ogni ramo non chiuso passante per $A$ si aggiungono alla foglia due nodi in serie $\neg C$ e $\neg D$, come nello schema:

$$\begin{array}{c} [\neg(C \vee D)] \\ \vdots \\ \downarrow \\ \neg C \\ \downarrow \\ \neg D \end{array}$$

  con un'ovvia generalizzazione se $B$ è una disgiunzione generalizzata.

- Se $A$ è della forma $\neg B$ e $B$ è $C \to D$, alla fine di ogni ramo non chiuso passante per $A$ si appendono alla foglia due successori in serie $C$ e $\neg D$, come nello schema:

$$\begin{array}{c} [\neg(C \to D)] \\ \vdots \\ C \\ \downarrow \\ \neg D \end{array}$$

- Se $A$ è della forma $\neg B$ e $B$ è $C \wedge D$, alla fine di ogni ramo non chiuso passante per $A$ si aggiunge alla foglia una diramazione con due nodi $\neg C$ e $\neg D$, come nello schema:

$$\begin{array}{ccc} & [\neg(C \wedge D)] & \\ & \vdots & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg C & & \neg D \end{array}$$

Ovviamente se per il nodo in cosiderazione non passa alcun ramo non chiuso, non si fa nulla. Se si vede che un ramo è chiuso, è inutile prendere in considerazione le sue proposzioni non ancora asteriscate. Dalla formulazione è chiaro che quando tutti i rami sono chiusi il procedimento termina, e in tal caso l'albero si considera terminato e si dice *chiuso*.

Non diamo le regole per la biimplicazione perché non sarebbero altro che l'adattamento di quelle che derivano dal fatto che $A \leftrightarrow B$ è equivalente a $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

Esempio

1. Consideriamo la proposizione $\neg((\neg P \vee Q) \wedge P \to Q)$ che mettiamo nella radice dell'albero

$$\neg((\neg P \vee Q) \wedge P \to Q)$$

2. Lavorando su di essa otteniamo

$$\begin{array}{c} [\neg((\neg P \vee Q) \wedge P \to Q)] \\ \downarrow \\ (\neg P \vee Q) \wedge P \\ \downarrow \\ \neg Q \end{array}$$

3. Lavorando su $(\neg P \vee Q) \wedge P$ otteniamo

$$\begin{array}{c} [\neg((\neg P \vee Q) \wedge P \to Q)] \\ \downarrow \\ [(\neg P \vee Q) \wedge P] \\ \downarrow \\ \neg Q \\ \downarrow \\ \neg P \vee Q \\ \downarrow \\ P \end{array}$$

4. Lavorando su $\neg Q$, senza effetti, e su $\neg P \vee Q$

$$\begin{array}{c}
[\neg((\neg P \vee Q) \wedge P \to Q)] \\
\downarrow \\
[(\neg P \vee Q) \wedge P] \\
\downarrow \\
[\neg Q] \\
\downarrow \\
[\neg P \vee Q] \\
\downarrow \\
P \\
\swarrow \quad \searrow \\
\neg P \qquad\quad Q
\end{array}$$

Non è neanche necessario indicare che si sono presi in considerazione i restanti letterali, perché il loro effetto è nullo. Si noti che l'albero è chiuso, perché su uno dei sue due rami occorrono $P$ e $\neg P$, e sull'altro occorrono $Q$ e $\neg Q$.

Esempio

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \neg((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee \neg Q) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \neg(P \wedge Q) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \neg(\neg P \wedge Q) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \neg\neg Q & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & Q & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & \neg P & & & \neg Q \\
\swarrow & & \searrow & & \\
\neg\neg P & & \neg Q & &
\end{array}$$

dove il ramo di destra con foglia $\neg Q$ non è sviluppato con

$$\begin{array}{c}
\neg Q \\
\swarrow \quad \searrow \\
\neg\neg P \quad \neg Q
\end{array}$$

come dovrebbe essere per il lavoro su $\neg(\neg P \wedge Q)$ perché il ramo è già chiuso, e il ramo di sinistra non è prolungato con

$$\begin{array}{c} \neg\neg P \\ \downarrow \\ P \end{array}$$

perché anch'esso chiuso.

**Lemma 3.1.1** (Terminazione). *La costruzione dell'albero di refutazione inizializzato con una proposizione termina sempre in un numero finito di passi.*

*Dimostrazione.* Se a ogni stadio si lavora su una proposizione di quelle che hanno altezza massima $n$ tra quelle non ancora considerate, l'applicazione delle regole fa sì che dopo un numero finito di passi tutte quelle di altezza $n$ siano state considerate, e l'altezza massima delle proposizioni non ancora considerate sia $< n$. Infatti le proposizioni introdotte nell'albero con le regole hanno tutte altezza minore della proposizione che governa la regola, salvo il caso di $B \to C$, per cui si introducono $\neg B$ e $C$, e $\neg B$ può avere la stessa altezza di $B \to C$; ma la successiva applicazione di una delle regole per proposizioni negate a $\neg B$ la sostituisce con proposizioni di altezza minore. Anche se dunque nel corso del procedimento il numero di proposizioni nell'albero cresce, diminuisce quello delle proposizioni di altezza massima, e dopo un numero finito di passi ci saranno solo proposizioni di altezza minima, letterali, non ancora considerate, e a quel punto il processo termina, se non termina prima per la chiusura dell'albero. □

Quando si dà un metodo sintattico per rispondere a quesiti di natura semantica, si pone il problema della correttezza e completezza del metodo. *Correttezza* significa che le risposte che dà il metodo sono giuste, *completezza* significa che quando la risposta è di un certo tipo, il metodo dà quella giusta.

Qualche ambiguità può sussistere quando le domande possibili sono diverse, e tuttavia collegate. Ad esempio per il fatto che

**Osservazione 3.1.2.** *Per ogni $A$,*

$$\models A \textit{ se e solo se } \neg A \textit{ è insoddisfacibile}$$

ci si può porre come problema semantico sia il problema della validità logica sia il problema dell'insoddisfacibilità. Un calcolo si può pensare sia come calcolo per stabilire la validità logica sia come un calcolo per stabilire l'insoddisfacibilità. Scegliamo per il metodo degli alberi di refutazione il problema dell'insoddisfacibilità; abbiamo allora [guess]Teorema

**Teorema 3.1.3** (Correttezza)**.** *Se l'albero di refutazione con radice $A$ si chiude, allora $A$ è insoddisfacibile.*

*Dimostrazione.* Procediamo per contrapposizione dimostrando che se esiste un'interpretazione $i$ che soddisfa $A$, allora a ogni stadio di sviluppo dell'albero esiste almeno un ramo tale che $i$ soddisfa tutte le proposizioni del ramo. Allora l'albero non è mai chiuso, perché se un ramo è chiuso non tutte le sue proposizioni possono essere vere in una stessa interpretazione.

Allo stadio $n$, consideriamo un ramo $\sigma$ le cui proposizioni sono tutte soddisfatte da $i$, e una proposizione $B$ su di esso non ancora considerata (se non ce ne sono, il lavoro su quel ramo è terminato senza che esso sia chiuso, e tale rimane alla fine, e l'albero non è chiuso). Se $B$ è una congiunzione, al ramo sono aggiunti due nodi che sono anch'essi veri in $i$, e il ramo prolungato soddisfa la proprietà richiesta allo stadio successivo. Se $B$ è una disgiunzione $C \vee D$, o il ramo $\sigma^\frown C$ o il ramo $\sigma^\frown D$ soddisfano la proprietà richiesta, a seconda che $C$ o $D$ siano vere in $i$. Lo stesso vale per gli altri casi. □

Viceversa

**Teorema 3.1.4** (Completezza)**.** *Se $A$ è insoddisfacibile, l'albero di refutazione con radice $A$ si chiude.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo che

**Lemma 3.1.5.** *Se l'albero non si chiude, allora per ogni ramo non chiuso e terminato esiste una interpretazione $i$ che soddisfa tutte le proposizioni del ramo, inclusa la radice.*

*Dimostrazione del lemma.* Si definisca un'interpretazione $i$ ponendo $i(L) = 1$ per ogni letterale che occorre come proposizione nel ramo $\sigma$; si ponga cioè $i(P) = 1$ se la proposizione atomica $P$ è un nodo di $\sigma$, $i(P) = 0$ se $\neg P$ è un nodo di $\sigma$. Si dimostra ora per induzione sulla lunghezza delle proposizioni, che per ogni proposizione $B$ di $\sigma$, $i^*(B) = 1$. Se $B$ è una congiunzione $C \wedge D$, quando è stata presa in considerazione $B$ si sono aggiunte come nodi del ramo sia $C$ che $D$, che sono quindi in $\sigma$ e per ipotesi induttiva vere in $i$, quindi anche $B$ è vera in $i$. Se $B$ è una disgiunzione $C \vee D$, quando è stata presa in considerazione $B$ si sono aggiunti a tutti i rami passanti per $B$, incluso $\sigma$, o

$C$ o $D$; quindi una delle due è su $\sigma$, e vera in $i$ per ipotesi induttiva, quindi anche $B$ lo è. Se $B$ è $\neg(C \lor D)$, quando è stata presa in considerazione $B$ si sono aggiunte $\neg C$ e $\neg D$ a tutti i rami passanti per $B$, incluso $\sigma$; quindi queste stanno su $\sigma$ e per ipotesi induttiva sono vere, quindi anche $B$ è vera. Gli altri casi si trattano nello stesso modo. □ □

Se in un ramo terminato non chiuso manca un letterale corrispondente a una lettera, nel definire l'interpretazione si può dare alla lettera il valore che si vuole; ciò significa che al ramo è associata pi` u di una interpretazione.

L'esito complessivo dei teoremi di correttezza e completezza è che il metodo degli alberi prende in esame *tutte* le possibilità di costruzione di interpretazioni, e se ce ne sono le fornisce tutte.

La dimostrazione delle proprietà di correttezza e completezza non prende in esame l'ordine in cui si sviluppa l'albero. Il procedimento degli alberi di refutazione si può rendere deterministico fissando un ordine progressivo per le proposizioni introdotte e quelle da prendere in considerazione ma la dimostrazione è indipendente dall'ordine e permette di vedere che la risposta che si ottiene e le sue proprietà non dipendono dall'ordine eventualmente fissato; lavorare su una proposizione prima che su di un'altra può modificare l'albero ma non la risposta (anche se una dimostrazione diretta di riduzione di un albero all'altro non sarebbe facile); di fatto quello che si fa con una proposizione non interferisce con le altre già presenti, se non nel senso che una può magari contribuire con un letterale e un'altra con la negazione alla chiusura di un ramo, ma non importa in che ordine. Si può sfruttare questa circostanza per formulare utili regole euristiche, come quella di prendere in esame prima le proposizioni che si limitano ad allungare i rami e non introducono diramazioni.

**Corollario 3.1.6.** *Per ogni $A$,*
$\models A$ *se e solo se l'albero di refutazione con radice* $\neg A$ *si chiude.*

Un albero di refutazione chiuso con radice $\neg A$ si chiama anche una *dimostrazione ad albero* di $A$; la completezza si esprime in questo caso con

**Corollario 3.1.7.** *Se* $\models A$*, allora esiste una dimostrazione ad albero di* $A$*.*

Si potrebbe definire il metodo per alberi inizializzati anche con più di un nodo, oltre alla radice, ma non è necessario per le domande semantiche che interessano.

**Corollario 3.1.8.** $A \models B$ *se e solo se l'albero di refutazione con radice* $\neg(A \to B)$, *o con* $A \wedge \neg B$, *si chiude.*

Si noti che è indifferente avere nella radice $\neg(A \to B)$ oppure l'equivalente $A \wedge \neg B$ perché in entrambi i casi l'applicazione delle regole per la negazione di un condizionale o per la congiunzione portano ad aggiungere alla radice

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ A \\ \downarrow \\ \neg B \end{array}$$

dopo di che si continua lavorando solo su $A$ e su $\neg B$ e loro sottoproposizioni.

**Corollario 3.1.9.** *Per ogni* $A$,

*$A$ è soddisfacibile se e solo se l'albero di refutazione con radice $A$ non si chiude.*

Gli alberi di refutazione permettono di ottenere altre informazioni sulle proposizioni a cui si applicano. Se $A$ è una proposizione soddisfacibile, e quindi l'albero di refutazione con radice $A$ non si chiude, una forma normale disgiuntiva di $A$ si può ottenere nel seguente modo: per ogni ramo terminato e non chiuso, si faccia la congiunzione di tutti i letterali che sono nodi del ramo, quindi si faccia la disgiunzione di queste congiunzioni, per ogni ramo terminato non chiuso. Le proprietà dimostrate della correttezza e della completezza garantiscono che questa disgiunzione è proprio equivalente ad $A$ (esercizio).

Esempio

$$\begin{array}{ccc}
 & \neg(P \vee \neg Q) \vee Q \vee \neg(P \to Q) & \\
\swarrow & \downarrow & \searrow \\
\neg(P \vee \neg Q) & Q & \neg(P \to Q) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\neg P & & P \\
\downarrow & & \downarrow \\
\neg\neg Q & & \neg Q \\
\downarrow & & \\
Q & &
\end{array}$$

dove abbiamo usato una regola abbreviata legittima per la disgiunzione generalizzata; l'albero non è chiuso e la forma normale disgiuntiva della radice è $(\neg P \wedge Q) \vee Q \vee (P \wedge \neg Q)$; la proposizione non è una tautologia in quanto manca tra i modelli l'interpretazione $i(P) = i(Q) = 0$.

Poiché l'albero terminato e non chiuso permette di leggere i modelli della radice, per verificare che $A$ è una tautologia si può anche sviluppare l'albero con radice $A$, e controllare che ci siano alla fine $2^n$ interpretazioni associate ai rami non chiusi, se $A$ ha $n$ lettere. Ma se la domanda è se $A$ sia una tautologia, è più conveniente impostare l'albero con $\neg A$, perché se la risposta è positiva essa arriva dalla chiusura dell'albero prima dello sviluppo integrale dell'albero con radice $A$.

Gli alberi di refutazione permettono anche l'agevole dimostrazione di proprietà generali, ad esempio

**Lemma 3.1.10.** *Se* $\models A$ *e* $B$ *è qualunque, anche* $\models A[P/B]$.

*Dimostrazione.* L'albero di refutazione con radice $\neg A$ si chiude, l'albero con radice $A[P/B]$ ripete le stesse mosse costruttive al di sopra del livello delle occorrenze di $P$, e quando arriva a introdurre nodi con $B$ o $\neg B$, là dove quello con $\neg A$ ha $P$ o $\neg P$, ha su ogni ramo le stesse situazioni contraddittorie che portano alla chiusura, salvo per la scrittura di $B$ al posto di $P$. □

## 3.2 Esercizi

1. Verificare con gli alberi di refutazione le leggi logiche del paragrafo 2.2.

2. Verificare con gli alberi di refutazione se le seguenti proposizioni sono tautologie, e se no indicare i controesempi:

   $(P \vee Q) \wedge (R \to \neg P) \to (R \to Q)$

   $((P \to \neg P) \wedge (Q \to P)) \to \neg Q$

   $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee Q$

3. Verificare con gli alberi di refutazione se le seguenti proposizioni sono insoddisfacibili:

   $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q$

   $(P \vee \neg Q \vee R) \wedge \neg R \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg P$

4. Trovare con gli alberi di refutazione la forma normale disgiuntiva e i modelli delle seguenti proposizioni:

   $P \wedge Q \to (P \to Q)$

   $P \wedge Q \to (P \to Q \wedge R)$

   $(P \to (Q \vee (P \wedge R))) \wedge (\neg P \wedge (Q \to P))$

5. Con gli alberi di refutazione e la proprietà dell'esercizio 2.7.16 trovare la forma normale congiuntiva delle seguenti proposizioni:

   $P \wedge Q \to (P \to Q \wedge R)$

   $(P \vee Q \to R) \wedge \neg P \to (P \vee R)$

   $(P \to (Q \vee (P \wedge R))) \wedge (\neg P \wedge (Q \to P))$