LA METAFORA IN MATEMATICA

Gabriele Lolli

Dipartimento di Informatica dell'Università
Corso Svizzera, 185 - 10129 Torino
tel: 0116706733
e-mail: gabriele@di.unito.it

Un(a) linguista difficilmente incontra nel suo lavoro un matematico, e viceversa, anche se entrambi, a quanto si dice, si interessano di linguaggi. Ma la matematica non è di solito presentata come un discorso. Addirittura non è un discorso, secondo una visione polemica diffusa: non ha a che fare con idee, ma è sostanzialmente una manipolazione di simboli secondo regole sintattiche, casomai con l'interpretazione di questi enunciati formali in strutture che sono altrettanto astratte. E la semantica formalizzata è tutto fuorché una spiegazione dei significati, come intervengono nel discorso comune. Questo sarebbe uno dei motivi per cui la presentazione di concetti così fondamentali come limite, continuità, infinito, resi rigorosi nella definizione formale, incontra un muro di incomprensione e resistenza.

Tra le varie proposte offerte e sperimentate per superare le tradizionali ma sempre maggiori difficoltà della didattica[1], ce ne sono alcune che insistono sul fatto che si dovrebbe tornare a un discorso matematico pieno di contenuto; il che dovrebbe comportare tra l'altro prima il riconoscimento, quindi un ricco uso e sfruttamento di analogie, metafore e altre figure retoriche. Questa visione della matematica, che affascina per il suo tono ossimoro, non è presentata tuttavia solo come proposta didattica, ma si pone spesso in radicale rottura con le altre posizioni filosofiche considerate prevalenti e deleterie. Poiché nella letteratura di didattica ed epistemologia della matematica i termini linguistici possono essere usati in modo idiosincratico, vogliamo dedicare questo intervento a illustrare alcuni

[1] Alcuni aspetti delle nuove impostazioni curricolari sono discussi in G. Lolli, "Lo stile e il contenuto. Un confronto tra manuali di matematica", *Matematica-Lettera Pristem* n. 26, dicembre 1997, pp. 4-15.

aspetti della problematica attuale della metafora in matematica[2]; i linguisti non troveranno forse molto interessante la discussione, perché programmaticamente «la ricerca contemporanea sul ragionamento metaforico interpreta la nozione di metafora in un senso più ampio della interpretazione letteraria tradizionale»[3]; e ai matematici d'altra parte non interessa tanto l'ortodossia o correttezza dell'analisi linguistica quanto la luce che la discussione di questo tema può portare sulla natura della matematica e sul suo insegnamento.

I sempre più numerosi studi relativi alla metafora in matematica hanno lanciato e imposto un messaggio: «la matematica non è meno dipendente dalla metafora di quanto lo sia la letteratura»[4]. Per arrivare a scoprire la metafora in matematica tuttavia sembra che non basti esplorare la matematica così come è; bisogna premettere la conversione «dalla nozione tradizionale di ragionamento, come principalmente proposizionale, astratto e disincarnato [*disembodied*], alla visione contemporanea del ragionamento come incarnato e immaginativo». In questa concezione, che si fa risalire all'influenza di George Lakoff, il ragionamento matematico comporta il ragionare con strutture che «emergono dalle nostre esperienze corporee nel corso dell'interazione con l'ambiente», e per fare ciò usa «strumenti potenti che strutturano le esperienze concrete per il pensiero astratto»; gli strumenti sono l'analogia, la metafora, la metonimia e l'immaginazione[5].

Dire che il ragionamento matematico è incarnato significa sostenere che «le idee astratte ereditano la struttura della nostra esperienza fisica, corporea e percettiva». Per dare un'idea, e incominciare a vedere di che cosa si tratta, consideriamo un esempio di ragionamento per analogia, definita come «trasferimento di informazione strutturale da una sistema, la base o sorgente [*base*, *source*] a un altro, il bersaglio [*target*]».

L'esempio proposto è quello della rappresentazione analogica dei numeri in rappresentazione decimale mediante gruppi di oggetti, corrispondenti alle cifre, di diverse dimensioni (unità, decine, centinaia, migliaia e così via). L'analogia è accompagnata naturalmente

[2] Un riferimento aggiornato, a cui faremo riferimento, è il manifesto costituito dalla raccolta di saggi contenuti in Lyn D. English (a cura di), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*, Lawrence Erlbaum Associates, London, 1997.

[3] L. D. English, in *Mathematical Reasoning*, cit., *Introduction*, p. 7. Prosegue affermando che la forza della metafora sta «nel modo in cui concettualizziamo un dominio mentale in termini di un altro».

[4] A. Sfard, "On Metaphorical Roots of Conceptual Growth", in English, cit., pp. 339-71.

[5] English, ivi.

da un disegno con una immagine eloquente. Viene detto, sulla base di esperienze didattiche, che queste rappresentazioni agiscono come la fonte per l'apprendimento del concetto bersaglio. La manipolazione da parte dei fanciulli di questi materiali concreti costituisce il fondamento per la costruzione di modelli cognitivi del concetto di numero intero[6]. In questa accezione l'analogia o la metafora non è tanto una forma di discorso, ma un'operazione pre-linguistica o fondante, costitutiva di un tipo di discorso.

In questo senso sarebbe meglio parlare di metafora, perché la distinzione che si fa tra analogia e metafora è che la prima stabilisce un legame tra due concetti già dati, mentre la metafora si appoggia solo su di uno noto per affrontare una nuova situazione[7]. Nell'*Oxford Concise Dictionary* la metafora è definita come l'applicazione di un nome o termine descrittivo a un oggetto a cui non è letteralmente applicabile. Il significato etimologico, di trasferimento, la fa quindi vedere come una sorta di analogia, implicita, mentre la similitudine sarebbe un'analogia esplicita[8]. Ma non c'è perfetta concordanza tra gli autori. Se per alcuni la metafora è soprattutto uno strumento per l'uso dei concetti matematici, altri insistono che il target è portato in esistenza dalla metafora, e quindi la creazione dei concetti matematici può essere vista come una metafora; si ritiene che la maggior parte dei concetti matematici provenga attraverso questa operazione da qualche esperienza concreta nel mondo fisico[9].

Non è certo una notizia sorprendente. Da Piaget e il ruolo dato alle esperienze senso-motorie, andando indietro a John Stuart Mill, o ancora più allo gnomone dei Greci, ai sassolini del calcolo, si ha quasi ritegno a ripeterlo: «I concetti matematici fondamentali corrispondono a esperienze primordiali... Il numero-misura è quello che c'è in comune a tutti i bastoncini, o serie di punti che affiancati hanno la stessa lunghezza... il concetto di serie viene dalla sensazione soggettiva del passare del tempo. Altrettanto si può dire per i concetti di ordine, funzione, gruppo, e altre strutture. I concetti non fondamentali derivano da quelli fondamentali per un processo di astrazione... in cui si fa tesoro di nozioni già acquisite, in interazione anche con la deduzione delle conseguenze di quelle, che ne mettano in luce ulteriori aspetti. I concetti derivati hanno alla base più esperienze, e spesso già

[6] ivi.

[7] La somiglianza si crea nel momento in cui si esprime la metafora, non è data; questa sembra la lezione più importante, dovuta a Max Black, che ha innescato la ripresa attuale dell'interesse per la metafora ; per una discussione più approfondita, e riferimenti obbligati, si veda Sfard, cit.

[8] N. C. Presmeg, "Reasoning with Metaphors and Metonymies in Mathematics Learning", in English, *Mathematical Reasoning*, cit., pp. 267-79.

[9] Le esperienze dirette sono le cosiddette *grounding metaphor*; esistono anche metafore di connessione (*linking metaphors*) ci sui diremo dopo.

trasformate in forma matematica. Le esperienze alla base della nozione di gruppo ad esempio sono più di una, da quella dei movimenti rigidi nello spazio a quella delle permutazioni di un insieme finito a quella delle operazioni numeriche»[10].

Ma una volta ripetuta la banalità che il pensiero degli esseri umani si riferisce e si sviluppa in relazione al loro essere nel mondo, allora incominciano i problemi, di vedere come si svolge il ragionamento, con le idee che si sono formate o sono in formazione.

Nel caso dell'esempio citato, del raggruppamento di oggetti in gruppi di decine, centinaia, migliaia di unità, associati alle cifre della rappresentazione decimale, è fuori di dubbio che l'immagine di tali raggruppamenti è utilissima per alcuni ragionamenti; in particolare lo è per la giustificazione degli algoritmi che si definiscono per i numeri in rappresentazione decimale, quelli soliti di somma, sottrazione, prodotto. Non c'è altro modo di giustificarli. Una struttura di raggruppamenti associata ai numeri funge da semantica e permette la dimostrazione di correttezza per gli algoritmi.

I matematici hanno ben presente le situazioni qui discusse, e hanno anche una terminologia appropriata; in questo caso si parla di semantica. La semantica è un altro dominio matematico, che viene accostato a quello che interessa in modo da sfruttare un'analogia; l'analogia sussiste tra due strutture matematiche. I matematici nella loro attività di scoperta e dimostrazione parlano di diverse strutture che aiutano a vedere la soluzione di un problema: la strategia di pensiero che usano «consiste nel vedere, superimponendola, una struttura diversa, che a sua volta aiuta a vedere la conclusione... Esempi... si incontrano ancora più di frequente man mano che si procede nella matematica e si hanno conoscenze non limitate a un dominio: si pensi alla geometria analitica, oppure in teoria dei numeri all'intervento dei gruppi, nella forma delle classi di resti; ci sono poi tutti i casi detti dei metodi impuri, come la teoria analitica dei numeri; ma anche nella matematica antica troviamo il fenomeno, ancora più significativo ed evidente, con le cosiddette dimostrazioni algebro-geometriche: le dimostrazioni geometriche di fatti aritmetici... Le dimostrazioni algebro-geometriche non erano in origine esempi di spostamento concettuale, perché erano imposte dalla natura spaziale del numero (numeri piani, numeri cubici). In seguito si sono raffinate divergenti intuizioni compresse nella primitiva rappresentazione, e si sono separate e perfezionate in tecniche autonome, che possono tornare a competere sullo stesso problema... Tutti questi sono esempi della regola euristica: vedi il problema come... un altro problema,

[10] G. Lolli, *Capire la matematica*, Il Mulino, Bologna, 1996, cap. V, in particolare il paragrafo *Metafore*.

relativo a un altro dominio[11]... le dimostrazioni in cui si cambia o si aggiunge struttura sono quelle più proficue, più interessanti e psicologicamente più soddisfacenti. Non si tratta solo di euristica: che le strutture miste formate dalle strutture madri siano la vera ricchezza della matematica assurge a principio fondazionale nello strutturalismo di Bourbaki. I numeri reali possono essere un campo, un gruppo, o due gruppi, uno spazio topologico, uno spazio metrico, un insieme ordinato»[12].

Ma considerare certe analogie come fondanti ed originarie è sospetto, innanzi tutto perché sembra che venga suggerito che si deve tornare alla fonte di questa, per sviluppare i ragionamenti; quindi le idee si articolerebbero nella fonte, e non nel linguaggio simbolico matematico, a cui sarebbe soltanto trasferito il risultato o la scansione del ragionamento. In secondo luogo, non siamo in grado di giustificarle come una relazione tra un dominio del tutto non matematizzato e uno invece puramente simbolico. Per tornare all'esempio dei raggruppamenti associati ai numeri in rappresentazione decimale, si consideri questa situazione, nota agli storici: gli antichi Egizi sapevano trattare in modo efficiente le progressioni geometriche, perché avevano un modo molto conveniente di eseguire moltiplicazioni iterate[13]. Essi sapevano che ogni numero si può scrivere come somma di 1, 2, 4, 8,.... Si ricordi che non avevano una rappresentazione posizionale, ma questa proprietà la conoscevano, e la proprietà equivale a conoscere di fatto la rappresentazione binaria dei numeri. Ai numeri in base 2 corrisponde la stessa rappresentazione analogica che in base dieci, con i raggruppamenti che sono ora non di gruppi multipli di dieci ma di gruppi multipli di due. Con questa semantica essi potevano inventare i loro algoritmi per la moltiplicazione, che si riduceva a iterare raddoppio e somma; l'idea dei raggruppamenti è dunque potente, ma in primo luogo non è strettamente legata alla notazione posizionale, e in secondo luogo dipende invece da un'altra idea fondamentale, che i raggruppamenti si devono fare comunque in gruppi le cui dimensioni crescenti siano ciascuna un multiplo della precedente (dieci volte, oppure due volte). Altrimenti non serve a niente. La rappresentazione mediante raggruppamenti, lungi dal poter essere fondante della nozione di numero, richiede, per essere concepita, la nozione di multiplo.

Non si può sostenere che vi sia qui un'origine storica o evolutiva del concetto di numero. Su questa in effetti non si sa dire molto, e sarebbe meglio non avventurarsi in campi così precari. Ci sono casi in

[11] Il rimando obbligato naturalmente è a George Polya.

[12] Lolli, *Capire la matematica*, cit. cap. V.

[13] Già nel papiro Rhind; si veda ad esempio E. Maor, *Trigonometric Delights*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1998.

cui invece non dobbiamo risalire alla preistoria e possiamo seguire il sorgere di un concetto matematico, ed è bene considerare questi esempi. Alcuni, come funzioni continue e insiemi, sono discussi a lungo in un saggio di George Lakoff[14]. Lakoff si era già avventatamente azzardato nel campo della matematica[15], ma ora ha ulteriormente articolato il suo discorso, facendo scuola, ed è lui il punto di riferimento della cosiddetta scienza cognitiva della matematica.

Questa produce intanto come abbiamo detto «una nuova filosofia della matematica, in cui la matematica è un prodotto della mente umana incarnata». «Quando Frege, Russell, Hilbert, Weierstrass, Cantor, Gödel e altri erano impegnati a costruire la filosofia della matematica del ventesimo secolo,... nessuno dei meccanismi fondamentali della ragione umana era ancora stato scoperto». E' stata la scienza cognitiva che ha ora scoperto questi meccanismi consistenti in «schemi-immagini, concetti di livello-base, modelli cognitivi idealizzati, prototipi, categorie radiali, metafore concettuali e metonimie, spazi mentali e miscugli concettuali». Non conoscendo la mente, era naturale ritenere che il pensiero fosse oggettivo, e ha così prevalso la visione della matematica come proprietà oggettiva del mondo, di cui la versione più famosa è il Platonismo. Ma è stato tutto un *Love's labour lost*. Averlo saputo.

Lakoff presenta le metafore *grounding* più fondamentali per l'aritmetica, che sono la collezione, la formazione di oggetti e il movimento. Queste metafore sarebbero *grounding* perché danno tutto quello che serve per trattare i numeri interi positivi, le loro proprietà di base e le operazioni[16].

Siccome «le proiezioni metaforiche preservano la struttura degli schemi-immagine, le metafore *grounding* permettono di proiettare precise, seppur astratte, strutture di schema-immagine dai domini quotidiani che conosciamo intimamente al dominio dell'aritmetica. E di conseguenza le metafore *grounding* proiettano le inferenze relative al mondo quotidiano nel dominio della matematica». In breve, la nostra comprensione dell'aritmetica poggia (o si esaurisce, *rests*) sulla nostra precisa e intima comprensione degli oggetti e operazioni comuni.

Nei discorsi matematici indubbiamente c'è traccia di tali metafore; quando si parla di "numeri grandi", di quanto "resta", come

---

[14] G. Lakoff e R. E. Núñez, "The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-Based Mathematics", in English, *Mathematical Reasoning*, cit., pp. 21-89.

[15] G. Lakoff, *Women, fire and dangerous things: What categories reveal about the mind*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1987.

[16] Abbiamo già osservato che la pretesa è discutibile, perché ad esempio la definizione astratta delle operazioni, ad esempio della somma, viene elaborata solo in un'ottica fondazionale; nella pratica non precede, ma segue gli algoritmi su particolari rappresentazioni.

numero, quando si sottrae, di quanto “vicini” sono due numeri. E’ la traccia dell’uso dei numeri per contare collezioni; invece la metafora della formazione di oggetti non è per nulla comprensibile; non è chiaro quale sia l’operazione fisica con cui costruiremmo oggetti; è un fatto invece che costruiamo i numeri associandoli alle collezioni, e il problema è proprio questo; il concetto matematico di collezione, o insieme, è molto delicato per conto suo, e non tutti sono d’accordo che i numeri siano associati in modo naturale alle collezioni come loro numerosità; Frege ad esempio aveva molte e fondate riserve. Anche l’uso di numeri come locazioni a segnare le tappe di un viaggio richiede che si conti quante volte è stata ripetuta un’unità di misura, e presuppone questa idea della formazione dell’unità di misura e del suo riporto iterato; le pietre miliari le costruiamo noi, non si trovano già sulla strada.

Quello che soprattutto non è chiaro, e neanche posto come problema, è come si alternino o mescolino o si sostengono a vicenda queste diverse metafore, di cui tutte c’è traccia nel linguaggio.

Se è vero che diverse metafore si possono applicare a un concetto matematico (e questo sarebbe già un motivo per non ritenerne nessuna fondante) è anche evidente che sono tutte in parte inadeguate e insufficienti. Lo potrebbe riconoscere Lakoff stesso se meditasse su alcune osservazioni che pure propone, ad esempio riguardo allo zero.

Solo nella metafora del moto c’è posto per lo zero, come punto di partenza; la collezione vuota non è un’esperienza proprio comune, e ancor meno l’oggetto vuoto. Secondo Lakoff questo è il motivo per cui ci è voluto tanto a far entrare lo zero tra i numeri, ma non si vede il perché. Se la metafora del moto porta allo zero, perché questo non entra nei numeri? Le persone si muovevano e viaggiavano, contando le miglia, ben prima del Medio Evo, o non si vede perché gli indiani dovessero usare lo zero per i loro viaggi e non i romani. Forse solo quello che è comune a tutte le metafore lo fa? Lakoff non lo dice e non pare sostenerlo. Ci si chiede dunque come lo zero è diventato un numero. L’argomento si ripresenta con i numeri negativi.

A proposito dei numeri negativi, Lakoff osserva che la metafora delle collezioni e quella degli oggetti non si prestano a essere estese in modo da giustificare i numeri relativi; forse di nuovo solo quella del moto, con l’andare avanti e indietro, può essere estesa. Peraltro non si capisce perché in questo caso di debba parlare di un’estensione, perché ogni volta che ci si muove si va avanti e indietro, o si parte sia verso l’ovest che verso l’est, per cui la metafora del moto-viaggio dovrebbe portare direttamente ai numeri relativi, cosa che parrebbe non fare. Non si vede però perché non dovrebbe esserci una metafora *grounding* direttamente per i numeri relativi; chi ha deciso che questi non corrispondono a un’esperienza fondamentale? C’è un’altra metafora che sembrerebbe essere naturale per i numeri relativi, ed è quella dei debiti e crediti, ma Lakoff non ne parla, ancorché sembrerebbe fondamentale, visto che i numeri si sono sviluppati soprattutto in rapporto alle operazioni commerciali in diverse civiltà.

Il fatto è che tutte le metafore associate a un'idea matematica sono inadeguate e ci sono punti in cui vengono meno rispetto al concetto matematico; è questo è bene ed è giusto, perché se ci fosse una metafora che va bene per tutto (quello che matematicamente ci serve del concetto) allora basterebbe quella, mentre il concetto matematico apporta qualcosa di più, o sarebbe superfluo; e basterebbe anche una parola del linguaggio comune, invece del simbolo artificiale che per questo è essenziale; è proprio nella natura del concetto matematico quella di non identificarsi con una sola metafora ma nell'essere qualcosa che è comune a una famiglia di metafore concorrenti[17].

La creazione di un concetto matematico è un processo non uniforme e in genere lungo e tortuoso; ma tipicamente, per molti casi fondamentali, come quelli dei sistemi numerici, si realizza introducendo (o incominciando a usare) un simbolo, o un complesso sistema simbolico, associandogli da una parte alcune regole di manipolazione, derivate per analogia formale da altri sistemi, e dall'altra alcune metafore, corrispondenti alle situazioni in cui si pensa che i nuovi concetti siano applicabili. Alcune metafore - i matematici spesso dicono "intuizioni" - possono non andare d'accordo con alcune regole, e occorrono compromessi e modifiche[18], una negoziazione logica che nel corso del tempo modifica e adatta e le regole e l'insieme di metafore associate.

Per Lakoff comunque i numeri negativi associati al movimento sono un'estensione della metafora, e le estensioni non gli piacciono, perché le metafore *grounding* non ammettono estensioni (se non a scopo didattico), ma si identificano con un'esperienza fondamentale, o non sarebbero tali. Per le estensioni entrerebbero in gioco altri meccanismi, le metafore di collegamento, o *linking metaphor*, che agiscono però già su nozioni matematiche, e la metonimia. Nel caso dei numeri negativi peraltro Lakoff non spiega come si realizzi, e passa invece a discutere un altro concetto, quello di "insieme"

La scelta è curiosa, perché è una incredibile concessione a quel tipo di fondamenti oggettivi che è giudicato radicalmente sbagliato; ma certo è un campo in cui c'è ovviamente spazio per parlare ancora di

---

[17] Questo è spiegato in Lolli, *Capire la matematica*, cit., cap. V e in G. Lolli, Appendice a S. Aurisicchio, "Metafora, ridondanza e ambiguità nell'immaginazione scientifica", *Belfagor*, Anno L (1995), fasc. II, pp. 156-60.

[18] Per una discussione dei diversi sistemi numerici, in particolare dei razionali, in questa ottica, si veda Lolli, *Capire la matematica*, cit. cap. I.

metafore. La teoria degli insiemi nasce dalla fissazione, negli assiomi, di proprietà relative ad almeno tre diverse nozioni intuitive: una è quella delle collezioni finite, una è quella delle estensioni delle proprietà intensionali e una è quella della iterazione di operazioni di costruzioni di insiemi[19]. Nessuna di queste idee pre-matematiche sembra veramente la sorgente di una metafora nel senso discusso dai nostri autori, a meno di sostenere ad esempio che l'idea di una collezione astratta è una metafora dei mucchi di sassi, o di mele; non ci pare proprio una metafora, bensì un'astrazione, operazione che avrà anche legami con la metafora ma che non è una metafora.

Lakoff parte ovviamente dalla metafora degli insiemi come collezioni, a cui si riferisce come metafora dei contenitori, con una complicata discussione per affermare che le pareti fanno parte del contenuto, il cui senso si capisce dopo; a questa metafora, come nel caso dell'aritmetica affianca quella degli insiemi come oggetti; ma a differenza dell'aritmetica, qui tale metafora, se così vogliamo dire, è essenziale per sviluppare la teoria, e avere insiemi che appartengono a insiemi, l'unione di insiemi e altre operazioni fondamentali. Anche se si è partiti dalle collezioni, l'idea che una collezione sia a sua volta un oggetto è essenziale per andare oltre l'algebra di Boole delle classi; qui le due metafore si integrano, una permette si sviluppare l'altra, contrariamente a quello che Lakoff aveva detto nel caso precedente. Tuttavia le difficoltà non mancano, se Lakoff si soffermasse a pensare un momento: se uno immagina un insieme di mele come un sacco di mele, e poi un insieme di sacchi di mele, per fare l'unione deve eliminare i sacchi, cioè le pareti dei contenitori che invece sembrerebbero parte integrante dei contenitori e non si capisce dove spariscano. Se gli insiemi sono "contenitori concettuali", quale esperienza della carne corrisponda a questa operazione di eliminazione delle pareti non è detto e non è immaginabile. Le pareti sono peraltro importanti perché per rassicurare che la combinazione delle due metafore non permette le antinomie Lakoff osserva che non si possono avere insiemi che sono elementi di se stessi, in quanto le pareti del contenitore non possono essere nell'interno del contenitore. Questa è la funzione delle pareti, che d'altra parte impedisce il concetto di unione. E' la solita illusione di eliminare le antinomie con una soluzione semplicistica; non spiegando cosa vuol dire combinare due metafore, le si combinano quando fa comodo in un modo *ad hoc* e opportunistico.

A proposito delle funzioni, la prima metafora fondante richiamata è quella della macchina, e questo è davvero curioso; le funzioni c'erano ed erano studiate ben prima - anche se non tantissimo, nel Settecento - che le macchine nella nostra civiltà diventassero qualcosa capace di

[19] Si veda G. Lolli, *Dagli insiemi ai numeri*, Bollati Boringhieri, Torino, 1995.

sostenere metafore fondamentali. La metafora della macchina è susseguente alla definizione del concetto matematico di macchina, da parte di Turing.

D'altra parte Lakoff preferisce la metafora del moto, a cui torna anche per funzioni e curve, e quella della macchina è abbandonata. Passa in rassegna una serie di concetti matematici e ad essi associa la parola metafora, a proposito o a sproposito: il piano cartesiano è una metafora; la definizione della somma di funzioni è una metafora (e non si capisce proprio in che senso. L'estensione delle operazioni, come l'addizione, alle funzioni, attraverso la definizione punto a punto[20] è un'idea matematica fondamentale, ma non è una metafora; Lakoff la chiama metafora dell'aritmetica delle funzioni, ma darle un nome non la rende una metafora).

Stranamente, l'idea di Eulero di una "curva descritta dalla mano" che disegna, senza staccare la punta della matita dal foglio, non è detta metafora ma "concezione intuitiva". Quella attribuita ad Eulero è una concezione importante, perché lega l'idea della continuità al movimento, e le metafore del viaggiatore «sono, naturalmente, metafore *grounding*. Il loro ruolo è quello di radicare la nostra comprensione matematica delle variabili in termini di una comprensione non matematica - qui come sorgente della metafora è usata la nostra conoscenza familiare del movimento. Per esempio, noi concettualizziamo la *variazione* delle variabili in termini del *movimento* di un viaggiatore. Siccome la metafora mappa le nostre inferenze quotidiane relative al movimento sulla matematica, la nostra comprensione della matematica dipende dalla comune quotidiana comprensione del moto».

Assolutamente falso. La nostra comune quotidiana comprensione del movimento è qualcosa di poverissimo che non dà nessuna capacità di fare alcuna inferenza finché non è un po' elaborata concettualmente e matematicamente; si pensi a quanto c'è voluto per riuscire a sostituire i moti inerziali ai moti naturali, a distinguere moti accelerati da moti uniformi; basti un'osservazione: il concetto di velocità istantanea è qualcosa che la nostra esperienza quotidiana non riesce a esprimere in nessun modo; senza le derivate, l'idea di velocità istantanea è estranea all'esperienza.

E naturalmente la velocità porta al concetto di limite; Lakoff si pone solo il problema dell'infinito; viene detto che il punto all'infinito di una retta deriva dall'esperienza del guardare lontano, vedere che le distanze appaiono sempre più ridotte e che c'è l'orizzonte che chiude tutto; il punto all'infinito come orizzonte è in effetti una metafora che può avere il suo valore, ma per nulla fondante in quanto dà pochissimo,

[20] Che la somma di due funzioni f e g è quella funzione che per ogni argomento prende come valore la somma dei valori di f e di g per quell'argomento.

e viene subito meno: «quanto più un viaggiatore si muove lungo una linea di estensione infinita, tanto più vi avvicina al punto all'infinito. Benché questo sia letteralmente falso, è metaforicamente vero». Assolutamente no, esattamente il contrario. L'affermazione è metaforicamente falsa, perché man mano che un viaggiatore si muove, l'orizzonte si sposta e appare sempre alla stessa distanza; basta aver fatto un viaggio in alto mare. La metafora dell'orizzonte deve immediatamente essere modificata, per essere usata matematicamente, come succede già in tanti altri casi che abbiamo visto.

La definizione di limite è presentata come se non potesse darsi altrimenti che con la metafora del movimento. E' ben noto invece che la metafora del movimento non permette di raffigurarsi l'avvicinarsi "infinitamente vicino", o "approssimativamente quanto vicino si vuole senza mai toccare"; quale viaggio tende così a una metà senza raggiungerla? Solo l'inseguimento della tartaruga da parte di Achille... - a buon intenditor. Le costruzioni che hanno preceduto e anticipato il limite non avevano carattere dinamico, ma erano le approssimazioni del metodo di esaustione per coprire aree con poligoni. La definizione di Weierstrass con gli $\varepsilon$ e $\delta$ non è una mania formalista che non dica nulla di più di quello che si può dire a parole; il concetto viene definito associandolo a un processo che non è un movimento; altre metafore sono più utili, ad esempio quella della scommessa[21], e invertono l'ordine di priorità di variabile indipendente e funzione: il processo è una possibilità potenziale di controllo, con approssimazioni buone quanto si vuole, della funzione, giocando opportunamente sulla variabile.

Lakoff dedica molto spazio a discutere il rovinoso episodio dell'abbandono della metafora della curva come movimento, o traccia di una matita, in seguito all'attacco della impostazione insiemistica e del formalismo di Frege [sic[22]]. Lakoff si appoggia a un significativo indirizzo di James Pierpoint all' *American Mathematical Society* nel 1899, sulla necessità di modificare il concetto di funzione e di funzione continua.

Pierpoint nella sua esposizione presenta prima la concezione intuitiva, quella fino ad allora generalmente considerata intuitiva, e accettata, di curva come generata dal moto di un punto: continua, con tangente in ogni punto, con distanze definite e finite tra due punti, e

[21] Si veda l'istruttiva discussione in R. Courant e H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Boringhieri, Torino, 1950.

[22] Un cittadino americano, per quanto ignorante, non parlerebbe mai di George Washington come del primo re degli Stati Uniti, o come sostenitore dell'uso della bomba atomica; non si capisce perché un intellettuale possa permettersi di parlare di Frege come di un formalista, di Weierstrass come di un formalista e insiemista, e altre piacevolezze - ma non è il caso di infierire - senza essere privato del contratto di insegnamento.

simili; quindi spiega la necessità di abbandonare quest'intuizione in presenza di funzioni patologiche, e dell'impossibilità di estendere ad esse i teoremi fondamentali dell'Analisi.

Uno scienziato cognitivo, secondo Lakoff, riconosce nella presentazione di Pierpoint quello che ora si chiama prototipo di una categoria. Le categorie non sono individuate da condizioni necessarie e sufficienti, ma da prototipi; questa delle curve sarebbe una categoria radiale, nel senso che il prototipo è ben definito, ma ci sono eccezioni o situazioni estreme in cui non tutte le proprietà del prototipo valgono; allora la categoria è arricchita da categorie non centrali, con specificate condizioni per le estensioni. «Ma Pierpoint, naturalmente, non sapeva nulla di questa possibilità rivelata dalla scienza cognitiva contemporanea». E ancora oggi molti matematici non ne sono consapevoli. Se lo avesse saputo, non si sarebbe preoccupato o non avrebbe parlato di dover cambiare l'intuizione della curva. Avrebbe detto che quelle che sembravano eccezioni erano coperte da categorie non centrali della categoria radiale, e tutto sarebbe finito lì; proprio come una balena è un mammifero non prototipo.

I matematici hanno invece creduto di dover eliminare l'intuizione, perché non sapevano che le idee sono nella mente. Il che comporta a quanto pare che non cambino; per Lakoff le idee della mente non si modificano, e hanno una validità assoluta. Tutta la storia della matematica e della scienza in generale è una smentita di questa posizione reazionaria, oggi sostenuta magari con la terminologia delle nicchie evolutive e dell'adattamento ambientale, ma palesemente contraria alla verità storica; la nostra intuizione geometrica nopn è stata eliminata, ma si è modificata, nonostante i divieti, e questo grazie al simbolismo matematico.

Ma Lakoff pretende che «il legame tra i formalismi matematici che usano simboli e le idee che essi rappresentano è parte dello studio della mente, della scienza cognitiva, e non parte della matematica. I formalismi che usano i simboli devono essere compresi, e quella comprensione non è una parte rigorosa della matematica». Rigorosa è invece la scienza cognitiva, che paragona il problema delle funzioni patologiche al (non) problema delle balene[23]. Gli scienziati cognitivi, che non sanno come viene fatta la matematica, studiano la relazione tra realtà e simbolo, e credono che sia fissa in una specie pure essa fissa, pretendendo quindi di bloccare l'uso e lo sviluppo della matematica nei vincoli che essi riconoscono.

[23] Dovrebbe provare a rendere ragione con le categorie radiali non della balena ma ad esempio degli incredibili divieti ebraici sui cibi, derivati da categorizzazioni inadeguate; vedi M. Douglas, *Purezza e pericolo* (1966), Il Mulino, Bologna, 1975, cap. III.

Le funzioni patologiche, quelle che non hanno derivata in nessun punto, quelle che riempiono lo spazio, i frattali, i mostri, in breve, secondo Lakoff non sarebbero affatto stati domati. «La continuità alla Weierstrass corrisponde alla nostra idea di continuità naturale, la base intuitiva della nostra intuizione di continuità? La risposta è no...[I mostri] non sono funzioni naturalmente continue. Se la corrispondenza tra la continuità alla Weierstrass e la continuità naturale è il criterio, allora la continuità alla Weierstrass non addomestica i mostri. Se non è il criterio, allora lo fa». Certo che la continuità alla Weierstrass non è quella naturale; l'intuizione geometrica è cambiata. La furbizia scoperta di Lakoff è di dire che i mostri non sono addomesticati, perché quegli enti sono stati riconosciuti come funzioni in relazione ad una diversa concettualizzazione basata sulle metafora insiemistica; rispetto alla precedente caratterizzazione non sono stati affatto domati, restano in una categoria con centrale; ma rispetto alla precedente caratterizzazione non solo non potevano essere domati, ovviamente, ma neanche essere concepiti.

Intanto la nozione di continuità basata sul movimento, nelle parole di Lakoff è diventata, come si è visto, naturale. Ai tempi di Pierpoint la dicevano tale i sostenitori di quella concezione. Oggi Lakoff ci lascia la scelta. «Aderite alla filosofia del formalismo e al programma offerto dai fondamenti insiemistici?»; allora la soluzione della balena non vi appare rigorosa. Oppure avete dei dubbi «che il mito che il formalismo può esprimere idee con rigore matematico sia stato dannoso»? Allora «accettate la scienza cognitiva come caratterizzante le idee matematiche» naturali. Pare che Lakoff non ha mai letto le pagine di Feyerabend sulle interpretazioni naturali, e come cambiano. Forse se affrontasse la questione - non so se lo abbia fatto - Lakoff direbbe anche che l'aristotelismo è naturale, contro Galileo. Per sostenere i diritti della sua disciplina accademica Lakoff pretenderebbe che tutta la scienza restasse ferma.

Forse arebbe bene che, dopo l'ubriacatura di proclamare che tutto è metafora, come il postino di Skarmata per cui anche l'universo è una metafora di qualcos'altro[24], si tornasse a una visione più sobria.

[24] Citato da Sfard, cit.