La questione dei fondamenti tra matematica e filosofia
Panorama introduttivo

Gabriele Lolli
Dipartimento di Matematica - Università di Torino
gabriele@dm.unito.it

1 Filosofia e fondamenti

Nel presentare la questione dei fondamenti occorre distinguere il punto di vista dei filosofi e il punto di vista dei matematici. Le due ottiche non sempre coincidono, anche perché hanno una loro tradizione nella storia della filosofia e della matematica.

La filosofia è interessata, per sua natura, a dare una giustificazione e una spiegazione della matematica in quanto manifestazione della realtà, una delle tante, la cui considerazione ricade nelle classificazioni predisposte dalla filosofia stessa; la matematica è considerata soprattutto attività conoscitiva, non rientra ad esempio nel campo dell'etica; la matematica è presa in esame sia nell'ontologia sia nella teoria della conoscenza[1].

Nella problematica ontologica, ci si chiederà ad esempio che cosa sono e di che natura gli enti che la matematica indaga; nella teoria della conoscenza, ci si chiederà invece che tipo di certezza abbiano le verità matematiche (cioè le affermazioni che costituiscono le teorie matematiche), e se siano verità, e quale tipo di garanzia abbiano.

I due tipi di domande, ontologiche ed epistemologiche, sono collegate, e si influenzano mutualmente le risposte in vari modi. Il complesso di queste

[1] Tradizionalmente si distinguevano le sezioni di Metafisica, Logica, Etica, Estetica; più di recente è diventata una branca autonoma di base anche l'Epistemologia, o Teoria della conoscenza.

riflessioni è ciò che costituisce la disciplina filosofica nota come filosofia della matematica[2].

Nella storia della filosofia in generale la matematica è stata assunta come il modello della conoscenza certa e garantita, e questo ruolo ne ha segnato l'importanza filosofica. La certezza delle verità matematiche era inattaccabile, la loro garanzia assoluta. Quindi si poteva dire innanzi tutto che esistevano verità e certezze, prima quelle matematiche poi eventualmente altre, ad esempio quelle metafisiche (da ottenere possibilmente con il rigore dello stile matematico). La filosofia doveva solo inquadrare tale fatto in una teoria generale o dell'essere o delle capacità conoscitive umane, che spiegasse come le verità potessero esistere e come potessero essere conosciute (ad esempio le teorie associazioniste delle idee). Questo in generale con una sovrana indifferenza a quanto accadeva nella storia alla matematica, assunta come immutabile, e quindi di fatto in riferimento ad una matematica vecchia, precisamente a quella di Euclide. Le novità nella matematica, se erano riconosciute, ad esempio quando Descartes ha introdotto la geometria analitica, erano dichiarate d'autorità della stessa natura, senza un'indagine particolare (nonostante il fatto che molta della matematica nuova non avesse un'impostazione assiomatica euclidea).

Solo di recente (dall'Ottocento in avanti), la filosofia si è posta anche, o piuttosto, il compito di intervenire sulla matematica, fornendo per essa giustificazioni, o addirittura correttivi, necessari a ripristinare la fiducia nella sensatezza e nella validità della produzione matematica (oppure al contrario a sanzionarne la negazione). La svolta è avvenuta soprattutto in conseguenza e sotto l'influsso, questa volta, di quanto accadeva nel campo matematico, che non poteva più essere ignorato.

Nella storia, è capitato spesso che i matematici si siano trovati a vivere momenti in cui hanno avuto dubbi e incertezze sui metodi che usavano, o sulle ricerche che conducevano. Questo può sembrare incredibile a chi non conosca la storia della matematica, ma gli episodi di questo genere sono stati frequenti, e importanti. Sono i cosiddetti perodi di *crisi* e (o seguiti da) periodi di *rigore*. La matematica è un laboratorio di pensiero - questa potrebbe essere una sua definizione - e ogni tanto nel laboratorio gli esperimenti danno esiti insoddisfacenti, inaspettati o incontrollabili - sempre

[2] Una buona introduzione recente, rivolta soprattutto ai filosofi, è quella di S. Shapiro, *Thinking about mathematics*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2000. Per un'esposizione più rivolta ai matematici, si veda invece G. Lolli, *Filosofia della matematica*, Il Mulino, Bologna, 2002.

comunque richiedono molta manutenzione.

> [La critica dei principii] è parte essenziale dell'elaborazione dei concetti che in ogni tempo prepara o accompagna il progresso della scienza e la sua più estesa applicazione,

affermava Federigo Enriques[3], che era interessato tuttavia a ridimensionare l'importanza della critica dei pricipii del suo tempo, e faceva vedere perciò tale critica in atto in ogni momento dello sviluppo della matematica. Esistono invece periodi di crisi più critici di altri.

La scoperta degli irrazionali in Grecia, l'uso degli infinitesimi nel Seicento, i calcoli con le serie infinite nel Settecento, i metodi sintetici della geometria proiettiva all'inizio dell'Ottocento, lo studio degli insiemi infiniti a fine Ottocento sono alcuni esempi di tali situazioni. In ogni caso, i matematici si trovavano ad affrontare (o non riuscivano ad affrontare) problemi nuovi con strumenti che o si rivelavano inadeguati o che non erano sufficientemente precisi e determinati da regole chiare e, soprattutto, condivise. Capita allora che i matematici litighino fra loro, con fiere *dispute*.

Tutti questi periodi di crisi sono stati superati in generale con la nascita di *nuova* matematica, oppure con l'abbandono di una parte di essa (qualche volta temporaneo, seguito magari dopo secoli da una ripresa).

La scoperta dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ ha prodotto a quanto si dice una grave crisi nel pitagoreismo; sul versante matematico l'opinione diffusa è che abbia favorito uno sviluppo preferenziale della geometria, e la restrizione ai rapporti razionali con la teoria delle proporzioni, ma in realtà ha anche messo il seme di procedimenti di approssimazione di grande fecondità come il metodo di esaustione di Archimede, un metodo a tutti gli effetti equivalente al processo di limite; il metodo era giudicato dai contemporanei e almeno pubblicamente da lui stesso come una tecnica euristica più che una forma dimostrativa rigorosa (rispetto ai canoni forniti dal modello geometrico), un istruttivo caso di freno esercitato da pregiudizi conservativi[4].

Gli evanescenti infinitesimi che erano all'origine del calcolo infinitesimale non hanno superato le obiezioni di chi, come il vescovo Berkeley, vedeva in essi i fantasmi di quantità trapassate. Ma il calcolo infinitesimale è andato avanti,

[3]F. Enriques, *Il significato della critica del principii nello sviluppo delle matematiche*, 1912, ristampato in F. Enriques, *Per la scienza*, Bibliopolis, Napoli, 2000, pp. 155-72.

[4]Altre volte, nella storia, pregiudizi analoghi hanno agito in direzione opposta, consolidando una contrapposizione non ancora sanata tra algoritmi e dimostrazioni. Si veda P. Zellini, *Gnomon*, Adelphi, Milano, 1999.

confidando nella sua versione algebrica, e nelle sue regole di calcolo, fino a che gli infinitesimi sono stati eleminati dalla definizione di limite di Cauchy e anche come terminologia da quella di Weierstrass (per poi resuscitare negli anni Sessanta del Novecento con l'Analisi non standard, prodotto della logica matematica).

I paradossi delle serie infinite del Settecento hanno sollecitato e sono stati risolti dai teoremi sulla convergenza, ma ben addentro all'Ottocento.

I metodi sintetici della geometria proiettiva, con i loro punti all'infinito e le coniche degeneri, dopo molti contrasti hanno innescato una geometria delle coordinate che ha rappresentato un sostanziale passo in avanti della geometria analitica e ha permesso una distinzione-unificazione delle geometrie affine, proiettiva e metrica.

Per quel che riguarda gli insiemi infiniti, basti ricordare che all'inizio della storia si può simbolicamente mettere l'opera del 1851 di Bernhard Bolzano intitolata *I paradossi dellfinfinito*, e che Cantor esclamava "Lo vedo ma non ci credo" di fronte alle sue prime inaspettate scoperte. Il disorientamento è palese. Ancor più che con le serie, non si sapeva quali leggi logiche (piuttosto che matematiche[5]) fossero ammissibili nel nuovo dominio.

2 Il periodo del rigore dell'Ottocento

Alla fine dell'Ottocento, ai problemi dell'infinito se ne è aggiunto uno che è all'origine della questione dei fondamenti nella forma che ha dominato il panorama nella prima metà del Novecento, con strascichi fin quasi ai nostri tempi. Si tratta di quello che i matematici stessi hanno chiamato il problema della *realtfi matematica*, con una terminologia che invitava in modo ovvio un intervento da parte della filosofia.

A lungo è stata un'idea universalmente diffusa, anche se con notevoli sfumature, che la matematica studiasse caratteristiche del mondo reale. Si ricordi il detto di Galileo che la natura è un libro, e che il libro è scritto in un linguaggio che è la matematica. La geometria studiava lo spazio, i numeri misuravano i fenomeni quantitativi del mondo.

La Matematica Superiore è l'arte di ragionare su relazioni nu-

[5]Il tentativo di estendere agli insiemi infiniti le leggi valide per quelli finiti ha tra l'altro permesso, o costretto ad isolare come autonoma anche una teoria proprio degli insiemi finiti del tutto astratti, cosa che in precedenza non si faceva.

meriche tra fenomeni naturali[6],

è solo una tra le tante possibili citazioni.

Le geometrie non euclidee e le teorie algebriche con leggi parzialmente diverse da quelle numeriche tradizionali, sviluppate nell'Ottocento, erano invece teorie che non avevano un riscontro immediato nel mondo; esse erano tuttavia o apparivano coerenti, almeno relativamente a quelle tradizionali. I matematici potevano solo concordare che quello che studiavano e su cui lavoravano erano teorie impostate assiomaticamente, e sviluppate in modo logico - perché così essi continuavano a fare sul modello di Euclide - ma quale realtà esse descrivessero, se ne descrivevano una, era difficile dire, letteralmente, difficile trovare le parole per esprimerlo. La descrizione dei modelli delle teorie, ad esempio, come sistemi di cose non precisate soddisfacenti gli assiomi, richiedeva un linguaggio ("cose", "enti") che fino ad allora non era stato matematico, ma che stava diventando matematico nella teoria degli insiemi, sicché nella spiegazione delle teorie matematiche non si usciva dall'autoriferimento.

L'altro caposaldo della matematica tradizionale, accanto alla geometria, era lo studio dell'aritmetica, ma anch'essa portava i suoi problemi. Quando si erano eliminati definitivamente gli infinitesimi con il concetto di limite, si era resa necessaria una definizione dei numeri reali, per gestire la continuità senza l'appoggio intuitivo della retta geometrica - con l'intuizione geometrica squalificata dagli sviluppi in corso. Si completava così una progressiva estensione dai naturali agli interi ai razionali ai reali che spostava tutto il peso dei sistemi numerici e quindi dell'Analisi sui numeri naturali (*aritmetizzazione* dell'Analisi); che cosa erano questi numeri, a cui molti si aggrappavano (Gauss tra essi)? Si pensi che fino ad allora persino il principio d'induzione, sporadicamente usato, non aveva una chiara ed esplicita formulazione. Le alternative disponibili erano tutte precarie o non del tutto soddisfacenti: a parte il considerarli un dono di Dio, o una nostra intuizione innata, restavano la definizione assiomatica di Peano (che riconduceva all'impostazione assiomatica tutta la parte numerica della matematica) e quella insiemistica di Dedekind.

Si aggiungano *last but not least* le patologie dell'Analisi, che rendevano impossibile identificare le funzioni con le formule, come si era fino ad allora ritenuto possibile, e con i fenomeni naturali.

[6] J. W. Mellow, 1902.

Tagliate le radici con il mondo, non restava che riconoscere con ammirazione e stupore che

> [la matematica] contiene in sé la causa del suo essere e dei suoi metodi di prova. In assoluta indipendenza la matematica crea per se stessa l'oggetto di cui tratta, le sue grandezze e le sue leggi, le sue formule e i suoi simboli[7],

ma allora la matematica appariva e doveva essere giustificata solo come una produzione mentale, sia pure con una mente concepita con diversi gradi di universalità, dalla mente individuale ad una ragione oggettiva.

Tutte le risposte che sarano date a questa crisi cercheranno una fondazione nella mente, più o meno oggettivamente concepita, invece che nel mondo, che pone troppe restrizioni alla *libertà* (Cantor) di creazione di teorie matematiche, che era sotto gli occhi di tutti.

A differenza dello schema storiografico, spesso ripetuto, per cui i periodi di crisi sarebbero seguiti da periodi di rigore, periodi in cui per risolvere i problemi precedenti si instaurano rigidi criteri di svolgimento e di accettazione della ricerca matematica, nel corso dell'Ottocento i due momenti appaiono scambiati; l'esigenza del rigore si manifesta nella necessità di presentare la matematica senza più il sostegno della realtà naturale e dell'intuizione fisica, e quindi anche proponendo per i concetti fondamentali definizioni autosufficienti; ma questa tendenza fa emergere le difficoltà della ragione, della sua logica e della sua capacità di definizione dei concetti matematici.

3 La crisi dei fondamenti

Alla fine dell'Ottocento convergono dunque una molteplicità di problemi: la fondazione del metodo assiomatico, con due difficoltà principali, come dimostrare la coerenza delle teorie e come presentare i modelli delle stesse; le leggi dell'infinito, che erano una questione urgente dal momento che la teoria degli insiemi si stava rivelando sempre di più la soluzione meglio adatta o comoda a risolvere molte delle difficoltà summenzionate, ma era essa stessa tormentata da molteplici incongruità e soprattutto dal disaccordo, sussistente tra i matematici, su come svilupparla. Si poteva ad esempio assumere

[7] E. Dillmann, 1899.

il principio di scelta o no, si potevano accettare le forme di definizione ed argomentazione che portavano in essere infiniti più che numerabili? Quelle stesse forme di ragionamento, essenziali in molta matematica, come ad esempio le definizioni impredicative, conducevano facilmente, in contesti strettamente analoghi a quelli della pratica quotidiana, a contraddizioni.

Questa crisi dunque da una parte è stata simile alle altre, in quanto nasceva da difficoltà di nuovi sviluppi matematici; ma da un'altra parte è stata diversa, investendo proprio la giustificazione della natura della matematica. L'Ottocento è stato il secolo in cui si è avuto il maggior progresso della matematica di tutta la storia, un progresso, o comunque un mutamento, non solo quantitativo ma nel modo stesso di fare matematica. Questo secolo rappresenta forse uno spartiacque tra due epoche storiche, nonostante le ovvie continuità, paragonabile forse solo al sesto secolo a.C. quando Talete per primo introdusse le dimostrazioni.

I problemi non riguardavano solo singoli concetti o metodi, o particolari discipline, ma la matematica tutta nella sua impostazione. Non è strano che questa, che è nota come la crisi dei fondamenti per eccellenza, non solo perché la più vicina a noi, abbia sollecitato anche l'interesse filosofico.

La crisi della matematica nei confronti del suo oggetto di studio, della sua realtà, è stata tra l'altro una crisi anche per la filosofia della matematica. Diventava difficile continuare a prenderla come modello, quando la matematica sembrava una costruzione logica sospesa nell'aria. Che tipo di certezza si ha, e di che valore, senza un contenuto? La conoscenza di nulla è quanto è fornito dalla logica analitica, utile ma difficile da qualificare come conoscenza.

Nello stesso periodo si verifica anche la circostanza che, per lo stimolo dei problemi discussi, in gran parte logici e linguistici in misura maggiore che nel passato, è stato elaborato uno strumento nuovo per affrontare i problemi posti, uno strumento come quello della logica simbolica.

Non tutti i protagonisti della crisi hanno usato questo strumento, ma coloro che lo hanno fatto hanno dato il contributo più nuovo e (in alcuni casi) duraturo. Mai il linguaggio e le procedure della matematica sono state sottoposte ad un'analisi tanto approfondita ed originale.

Non sorprende quindi che anche l'uscita da questa crisi sia in parte diversa dagli altri casi; si è avuta sì la produzione di nuova matematica, ma soprattutto si è raggiunta qualche conclusione (parziale) sulla natura della matematica[8]; si è usciti dalla crisi con le idee più chiare sulle potenzialità e i limiti degli strumenti di pensiero che usiamo nel fare matematica.

4 Le scuole fondazionali

Due immagini contrapposte del lavoro sui fondamenti svolto tra la fine del secolo diciannovesimo e i primi trenta anni del ventesimo si sono susseguite nella opinione comune. Per un po' si è pensato e detto che quello fosse il momento più alto della riflessione filosofica sulla matematica, quindi è seguito il severo giudizio secondo cui gli esiti delle scuole fondazionali (logicismo, formalismo, intuizionismo) sono stati fallimentari.

Entrambi i giudizi sono esagerati, anche se è comprensibile la prima esaltazione nel momento di svolgimento della vicenda, da parte dei protagonisti, mentre è meno giustificato il successivo giudizio radicalmente negativo, che è basato sia su un'incomprensione tecnica sia sull'incapacità di storicizzare il fenomeno (si mette tutto nel calderone della crisi del neo-positivismo).

Uno dei motivi della prima esaltazione è stata la novità delle analisi compiute, e precisamente il fatto che venissero svolte con lo strumento della logica simbolica o matematica.

Questa opportunità sembrava permettere un'indagine più coerente con la natura dell'oggetto stesso, e non a caso molto lavoro, anche filosofico, è stato svolto da personaggi nuovi, come le figure di filosofi logici, oppure proprio da matematici.

L'uso di una logica matematica dava l'idea che questo fosse il modo corretto di cercare fondazioni per la matematica, fondazioni che fossero omogenee alla stessa e quindi veramente tali (come le colonne di cemento nella fondamenta che si prolungano poi in quelle della struttura esterna di una casa).

Ma nello stesso tempo lo studio dei problemi fondazionali della matematica con strumenti matematici induceva anche l'idea che si potesse arrivare per questa via a risposte definitive e certe, definitive come sono i risultati della matematica, e certe come sono le certezze della matematica - come ancora si credeva che fossero.

[8]Certamente ad esempio sul metodo assiomatico: "ad ogni matematico che abbia a cuore la probità intellettuale s'impone ormai la necessità assoluta di presentare i propri ragionamenti in forma assiomatica ... *con parole che si sono svuotate di ogni significato intuitivo*" (J. Dieudonné), corsivo nostro.

4.1 Logicismo

La necessità di una definizione dei numeri naturali da una parte, e il problema di eliminare forme di intuizione che erano tradizionalmente collegate alla geometria, quando questa invece diventava qualcosa di puramente logico essa stessa, sono al cuore del programma del *logicismo*.

Il matematico Richard Dedekind e il logico Gottlob Frege sono i capostipiti di questa scuola, la quale non solo si preoccupa praticamente (Dedekind) di dare una definizione dei numeri naturali, ma pretende anche (Frege) di darne una tale che riduca tutta la matematica ad avere un carattere analitico, e quindi un carattere di necessità controllabile dalla ragione.

La definizione dei numeri naturali s'interseca con i problemi della teoria degli insiemi, ché si tratta di una definizione insiemistica, e nello stesso tempo con la questione della natura e dell'ambito della logica, perché la logica deve essere tale da trattare anche gli insiemi, le classi, i concetti di ordine superiore. Non può essere solo un sistema di regole come il *modus ponens* o i sillogismi aristotelici; occorre una logica che abbia la capacità di trattare e ancor prima definire enti infiniti, e una giustificazione teorica convincente di tali possibilità.

Nello studiare la questione, i logici si trovano alle prese con gli stessi problemi che si erano presentati ai matematici, in particolare l'impossibilità di estendere all'infinito alcune leggi del finito, e la necessità di certe forme inevitabili di definizioni (impredicative) che tuttavia possono generare antinomie.

Da questa vicenda, che va dal 1870 circa al 1930, sono venute la teoria assiomatica degli insiemi e la logica.

La logica che è emersa da questi studi e applicazioni è qualcosa di non riconducibile, per ricchezza e profondità, alla precedente logica aristotelica e scolastica; è stata una grande conquista intellettuale. Anche nel campo del pensiero forme e strumenti hanno una data di nascita, non sono sempre stati lì a disposizione.

La teoria degli insiemi continua a tutt'oggi con le ricerche sui grandi cardinali ad essere una laboratorio di sperimentazione sulla nozione di definibilità[9].

[9] L'introduzione e lo studio dei grandi cardinali non vuole essere una sorta di modello cosmologico espansivo. Essi sono ipotizzati per decidere questioni di regolarità della gerarchia proiettiva, l'unico campo in cui i matematici si accorgono della rilevanza della definibilità, e i grandi infiniti interagiscono con proprietà di definibilità. Questo è uno dei misteri portati alla luce dalla ricerca logica.

D'altra parte il ventesimo secolo è stato il secolo del linguaggio.

4.2 Scuola di Hilbert e Formalismo

Con la nuova logica a disposizione, David Hilbert concepì in un modo del tutto originale il progetto di usarla per affrontare la questione della coerenza delle teorie matematiche (di quelle fondamentali, in primo luogo l'aritmetica), piuttosto che per generare o esporre la matematica stessa.

Il presupposto del progetto era la *formalizzazione*, cioè la rappresentazione delle teorie in linguaggi simbolici adeguati, dalla sintassi assolutamente rigorosa, sì da trasformare le teorie stesse (teoremi e dimostrazioni) in configurazioni discrete di oggetti (simboli), con la conseguente possibilità di applicazione di metodi matematici elementari, combinatori, allo studio di questioni logiche relative ad esse.

I logici della scuola di Hilbert non sono filosofi; non vogliono dire: ora vi spiego cosa è la matematica. Dicono: sulle teorie matematiche, se si formalizzano, si possono applicare metodi matematici per (cercare di) rispondere ai seguenti quesiti. Ma spesso sono fraintesi, perché la tentazione di trovare risposte definitive, *ultimate*, è sempre presente, è proprio la fonte della filosofia.

Così molti hanno inteso o fingono di intendere che venisse proposta da Hilbert la tesi che la natura della matematica è formale e che la matematica sia fatta in modo formale. Esistono in effetti posizioni filosofiche *formaliste* che sostengono che la matematica è una manipolazione di segni, come un gioco dalle regole arbitrarie, e nulla più. Il formalismo è spesso bersaglio di critiche feroci, ma la sua forza sta nella debolezza (speculare) delle altre filosofie.

La scuola di Hilbert sperava soprattutto di *dimostrare* la non contraddittorietà della teoria dei reali, ponendo dunque la parola fine a dubbi e discussioni sulla definizione (di Cantor e Dedekind) dei reali. Se restavano interrogativi soggettivi sulla natura e il senso della costruzione, almeno si sarebbe avuta la certezza di non fare cosa platealmente vana.

La non contraddittorietà non era però l'unica questione logica affrontabile via formalizzazione; la decidibilità era un'altra, rilevante, e su questa si sono ottenuti molti risultati.

Dal lavoro della scuola di Hilbert sono venuti i teoremi, negativi per gli obiettivi hilbertiani, di Gödel.

Con il senno di poi, si può sostenere che l'impossibilità dell'obiettivo di Hilbert fosse prevedibile, per una sorta di principio di bilancio energetico: si voleva dimostrare la non contradditorietà dell'aritmetica piena in una teoria più debole. Tuttavia anche la speranza di Hilbert appariva a priori fondata, perché una volta formalizzata l'aritmetica doveva perdere tutto il suo senso, quindi la sua forza, e ridursi a un insieme di strutture finite astratte simboliche. L'impossibilità del programma suggerisce che forse, in modo misterioso, i simboli non sono mai del tutto spogliati del loro significato, o non ne sono mai completamente privi, che il significato risiede o si annida nelle regole di combinazione sintattica, e questo potrebbe essere un punto a favore del formalismo.

I risultati limitativi non sono tuttavia l'unica cosa che si è imparata dagli studi logici; sono quelli più citati (non necessariamente noti); ma molto di più si è imparato sulla logica stessa, come si è detto, sulla semantica, sulla completezza di sistemi vari di regole, sulla distinzione tra logica del primo ordine e logica del secondo ordine, e su cosa si può definire in una e non nell'altra, e quali possibilità e garanzie si hanno per lo svolgimento dell'argomentazione nell'una (ricorsivamente enumerabile) o nell'altra (non ricorsivamente enumerabile).

La ricerca continua, non è affatto esaurita. Basti segnalare come esempio un capolavoro di studio fondazionale che è la recente analisi dell'aritmetica predicativa compiuta da Edward Nelson[10], che mostra quanto maggior controllo, grazie agli studi sui fondamenti, abbiamo ora sulla costruzione delle teorie riguardanti i concetti matematici di base.

Dallo stesso lavoro è nata poi la teoria delle funzioni calcolabili e i calcolatori, con quello che ne è seguito. La metamatematica si è liberata del vincolo hilbertiano di usare solo strumenti combinatori, ed ha avuto numerose importanti applicazioni algebriche.

Nessuna fondazione, nessuna risposta definitiva, ma un arricchimento enorme delle nostre capacità di pensiero.

Forse è proprio perchè le analisi del logicismo e della scuola hilbertiana sono state ricerche matematiche, che hanno prodotto risultati matematici, che esse non potevano produrre una fondazione, e tanto meno la fondazione definitiva, assoluta (?) che qualcuno si aspettava e la cui impossibilità ora rinfaccia loro.

[10]E. Nelson, *Predicative Arithmetic*, Princeton Univ. Press, Mathematical Notes n. 32, Princeton, 1986.

4.3 Intuizionismo

L'intuizionismo è una scuola che per un certo periodo ha richiamato molta attenzione, pur essendo, o proprio per questo, reazionaria; le difficoltà della trattazione classica dell'infinito venivano considerate ineliminabili in quella impostazione, e veniva proposta una drastica revisione e mutilazione non solo della matematica astratta, ma della logica stessa, che avrebbe dovuto impedire il presentarsi di anomalie, ma anche di affermazioni di scarso senso o contenuto operativo. La matematica classica era per Ludwig Brouwer illusoria, non tanto sbagliata, quanto priva di senso. Era il linguaggio che trascinava ad affermazioni formalmente corrette ma insensate. Brouwer voleva sottrarre la matematica al dominio del linguaggio, e non gli restava quindi che il rifugio nel misticismo.

Le filosofie che propongono una revisione o un ridimensionamento della matematica che si è accumulata nella storia, come per fare un altro esempio il nominalismo, non hanno mai molto successo, se non in pochi e talvolta fanatici adepti. Ma l'intuizionismo non è stato solo un capriccio di pensatori mistici, che pensano all'intuizione originaria del numero naturale nella percezione dello scorrere del tempo e nella scissione dell'unità in due; quando è stato rivisto da seguaci moderati, e disposti ad usare i linguaggi simbolici, esso ha prodotto, o meglio rafforzato e precisato l'idea di dimostrazione costruttiva, e gran parte del suo insegnamento è ancora tecnicamente valido.

Ad ogni modo, Gödel ha dimostrato che l'aritmetica classica è interpretabile nell'aritmetica intuizionista, e quindi relativamente non contraddittoria.

5 Il Bourbakismo

Può darsi che la matematica non abbia bisogno di fondazioni ma, indipendentemente dai problemi menzionati, la grande crescita delle teorie astratte della fine dell'Ottocento e della prima parte del Novecento (spazi funzionali, varietà geometriche, topologia) aveva bisogno di un'organizzazione, o di una nuova organizzazione, che non poteva essere fornita dalla teoria degli insiemi (un'altra delle nuove teorie astratte[11]).

Questa forniva un linguaggio comodo e potente, ma laddove mostrava

[11] Una veloce definizione operativa di "teoria astratta" è che la teoria non parla di numeri o funzioni numeriche o di figure.

come ogni nozione matematica, ogni struttura, fosse definibile insiemisticamente compiva un'opera che filosoficamente dichiama *riduzionismo*, e la cui legittimità e significato sono soggetti a molte diatribe (in tutti i settori della scienza, non solo nella matematica); ma sopratutto non corrispondeva alle esigenze dei matematici. Di fronte alla definizione insiemistica di una sua creatura, il matematico non la riconosce più, come quando si definiscono i colori in base alle lunghezze d'onda, e il pittore non ritrova in quelle i suoi materiali.

L'organizzazione ed unificazione di tutto il nuovo materiale è stata compiuta da Bourbaki, verso la metà del secolo. La presentazione della matematica fatta da Bourbaki nei suoi *Éléments* è stata utile, corretta, profonda, ma era un'organizzazione dall'alto, un collegamento unificante dei concetti più generali e della loro (con)presenza nei domini specifici.

Tali concetti generalissimi (le strutture madri topologiche, algebriche e d'ordine) non sono quelli che si incontrano nella costruzione dal basso, nella crescita effettiva delle teorie e neanche nella loro presentazione usuale, per esempio ai non matematici in vista delle applicazioni. Lo stesso si può dire peraltro della fondazione categoriale[12].

Di fronte al perfetto edificio bourbakista, si è tuttavia rafforzata la tentazione di lavorare su (o entro) questa enorme, articolata e autosufficiente costruzione astratta come se esistesse solo essa, e non il mondo reale, sia naturale che umano.

Ne è venuta un'immagine un po' irreale della matematica - pericolosa in quanto ha influenzato anche la didattica scolare - come di qualcosa che vive in un iperuranio platonico.

Dalla battuta di Bourbaki che i matematici sono platonisti nei giorni feriali e formalisti la domenica, si è preso il peggio dei due mondi nella costruzione dell'immagine della *new math*: rigidità espositiva e metafisica realista.

Non è un caso che da quel periodo in avanti si sia diffusa sempre di più la tendenza tra i matematici a dichiararsi platonisti, cioè convinti dell'esistenza oggettiva di entità di natura diversa da quella naturale. Il problema della realtà matematica nel platonismo è risolto con un *fiat*.

Il mondo platonico non è tuttavia quello umano. In quest'ultimo, la storia

---

[12]Unificare in un concetto generale concetti emergenti in settori diversi è parte integrante e importante della crescita delle teorie matematiche, ma il concetto generale è un punto di arrivo, non può essere un punto di partenza.

che andava avanti sotto l'azione degli uomini concreti portava intanto nuove scoperte e nuove attività, tra le quali un ruolo preminante è stato, ed è, quello svolto dal calcolatore.

Le ricerche permesse o indotte dai calcolatori hanno riportato in auge una matematica fatta di esplorazioni, prove, congetture e - come qualcuno ama sottolineare - addirittura esperimenti. Hanno riportato il calcolo anche nell'algebra, da cui era scomparso, per quanto questa affermazione possa sembrare incomprensibile a uno studente.

Nello stesso periodo, sotto l'influsso delle vicende sociali, nascevano anche o si consolidavano nuovi tipi di interessi e ricerche che coinvolgevano la matematica, o nuova matematica, come la ricerca operativa, come la statistica, e con il loro contributo (oltre che con quello della scienza dei calcolatori) si rafforzava l'impulso alla matematica combinatoria del finito.

In questo quadro si collocano le nuove tendenze della filosofia della matematica. I matematici si ritirano nel loro lavoro, ricco di problemi interessanti - e non hanno un loro progetto fondazionale. Tornano a recitare un ruolo di primo piano i filosofi, o almeno i concetti e la terminologia filosofica; sono tuttavia concetti nuovi, applicati alla matematica, rispetto alla tradizionale analisi filosofica che, nella problematica ontologica ed epistemologica, ha già praticamente detto tutto quello che si poteva dire[13].

6 Tendenze attuali

Dal punto di vista filosofico tradizionale l'ontologia si poneva un problema di esistenza, con gli enti matematici assunti come tipici rappresentanti degli enti astratti; le risposte realiste oppure nominaliste della tradizione scolastica si possono in effetti riversare nel contesto della matematica astratta; ma l'interesse di tali etichette è del tutto estrinseco; sono pure dichiarazioni di fede, a parte le posizioni nominaliste che imporrebbero una revisione della matematica, secondo criteri però calati dall'alto, non nati dalla ricerca e dall'inserimento della disciplina nella vita associata.

Invece le nuove tendenze tendono a vedere la matematica come un fatto umano. Dalla mente, o dall'iperuranio, si torna a collocare la matematica nel mondo, non più quello naturale, ma quello umano.

[13] Non si vuol dire con ciò che non vi siano contributi originali, ad esempio sul logicismo - si veda Shapiro, cit. - ma si tratta di variazioni sul tema.

6.1 I sistemi culturali

Tra i primi a dare questa indicazione per uno studio del fenomeno "matematica" è stato Raymond Wilder[14]. Dopo aver definito i sistemi culturali[15], ed aver riconosciuto la matematica come un esempio particolare di questi, Wilder introduceva alcuni concetti adatti al loro studio, come quelli di tensione, consolidamento, pressione ambientale; formulava quindi alcune leggi di evoluzione, relative all'accettazione di un nuovo concetto, al suo radicamento, alla sua diffusione o al suo isolamento, al ruolo dei problemi e delle soluzioni, al presentarsi di discontinuità, al fenomeno delle anticipazioni e delle scoperte multiple, e molte altre, cercando di coprire tutti gli aspetti dei fenomeni importanti nella storia della matematica.

Anche la sociologia della scienza, nella versione aggressiva recente, si è interessata alla matematica, ma solo nel tentativo (non convincente) di fornire una giustificazione convincente del suo essere completamente un fenomeno sociale; in questo modo i sociologi pensano di eliminare, con la matematica, il più ovvio controesempio alla loro tesi che tutto è sociale, e che non esiste un dominio autonomo di astrazioni di validità universale[16].

6.2 Il nuovo empirismo

Anche senza passare esplicitamente ad una sociologia dei sistemi culturali, la matematica viene da più parti considerata come un'attività continua con altre, non radicalmente separata; questa tendenza è particolarmente evidente nel nuovo empirismo. La tradizionale filosofia empirista della matematica mirava a dare una spiegazione e fondazione del numero e degli altri concetti matematici elementari a partire dalle esperienze sensibili. Il nuovo empirismo non ha questa preoccupazione genetica; sostiene invece che le *procedure* della matematica, le procedure di scoperta e di conferma, non sono diverse da quelle delle altre scienze naturali.

---

[14] R. L. Wilder, *Mathematics as a Cultural System*, Pergamon Press, Oxford, 1981.

[15] Una cultura è una collezione di abitudini, rituali, credenze, strumenti, *mores* (valori etici), linguaggio, e così via, chiamati *elementi culturali*, posseduti in comune da un gruppo di persone che sono legate da qualche fattore associativo, come l'appartenenza ad una tribù, la vicinanza geografica, l'occupazione.

[16] Si veda D. Bloor, *Knowledge and Social Imagery*, The Univ. of Chicago Press, Chicago, 1976-1991; trad. it. *La dimensione sociale della conoscenza*, Raffaello Cortina, Milano, 1994, e la discussione in G. Lolli, *Beffe, scienziati e stregoni*, Il Mulino, Bologna, 1998.

Si possono citare nomi di filosofi che vanno per la maggiore, anche per i loro interventi in altri campi, come Hilary Putnam:

> Con metodi "quasi-empirici" intendo metodi che sono analoghi ai metodi delle scienze fisiche, eccetto per il fatto che gli enunciati singolari che sono "generalizzati per induzione", usati per mettere alla prova le "teorie" e simili, sono essi stessi il prodotto di calcoli invece di essere "resoconti osservativi" nel senso solito[17].

Il primo ad usare il termine "quasi-empirico" è stato Imre Lakatos[18], prendendolo da Eulero via George Polya. Lakatos applicava alla "dialettica" della matematica un modello mutuato da Popper, ma ha avuto il merito di richiamare l'attenzione sulla storia. Anche Hao Wang ha introdotto stimoli interessanti, sotto l'influenza di Wittgenstein. Tra coloro che più hanno contribuito poi a diffondere questa visione è da annoverare Reuben Hersh, insieme a Philip Davis[19].

Ma l'idea della presenza di esperimenti nella matematica è stata soprattutto rilanciata nella filosofia della matematica dall'uso dei calcolatori per le dimostrazioni automatiche, un fatto paradossale, considerando che quelle dimostrazioni sono l'esaltazione della logica formale incorporata nelle macchine.

Dopo la dimostrazione del Teorema dei Quattro Colori, si è innescata una discussione prettamente filosofica sull'argomento dell'a priori, che anche se non conclusiva, ha dato ulteriore fiato alle posizioni empiriste:

> Secondo [la nostra] valutazione, l'uso dei calcolatori in matematica, come nel caso di 4CT, introduce esperimenti empirici in matematica ... Dobbiamo ammettere che l'attuale dimostrazione

[17]H. Putnam, *What is Mathematical Truth*, in *Philosophical Papers*, 2 voll., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975; trad. it. *Che cosa è la verità matematica*, in H. Putnam, *Matematica, materia e metodo*, Adelphi, Milano, 1993, pp. 80-98.

[18]I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1976; trad. it. *Dimostrazioni e confutazioni*, Feltrinelli, Milano, 1979. Per una discussione, sia di Lakatos sia in generale delle nuove tendenze, si veda Lolli, *Filosofia della matematica*, cit.

[19]Si veda P. J. Davis e R. Hersh, *The Mathematical Experience*, Birkäuser, Basel, 1981 e il recente R. Hersh, *What is Mathematics, Really*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997; trad. it. *Cos'è davvero la matematica*, Baldini&Castoldi, Milano, 2001. Per una scelta degli scritti più significativi della tendenza, si veda l'antologia di T. Tymoczko (curatore), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1998.

non è una dimostrazione tradizionale, non è una deduzione a priori di un enunciato da delle premesse. Si presenta come una dimostrazione in cui c'è una lacuna, che è colmata con i risultati di un ben congegnato esperimento. Questo fatto attribuisce a 4CT lo stato di prima proposizione matematica che è conosciuta a posteriori (non che sia falsa o dubbia, ma conosciuta in modo particolare) e solleva di nuovo il problema della distinzione tra la matematica e le scienze naturali[20].

La caratteristica principale delle nuove impostazioni è quella di vedere la matematica come un fatto storico, e di studiarne i meccanismi di formazione *in fieri*. Ne vengono in generale esempi e storie molto più affascinanti che non la presentazione della matematica consolidata.

Purtroppo, è la dimostrazione che scompare spesso da questi resoconti, sostituita da quella che viene chiamata dimostrazione informale, la quale viene contrapposta non tanto a quella formale quanto alla logica in sé. Non solo la dimostrazione scompare, ma addirittura è combattuta ideologicamente, per una sua indebita identificazione con il formalismo.

Secondo Putnam, ad esempio, se l'Ipotesi di Riemann fosse verificata in un numero enorme di casi mediante calcolatore - cosa che invero già è, quanto deve essere grande "enorme"? - allora saremmo legittimati a dire che l'ipotesi è stata verificata, e che può essere accettata senza riserve.

Lo contraddice una voce dal campo:

> A tuttoggi, la congettura [di Goldbach] è stata verificata per tutti i numeri pari $m \leq 10^{13}$ da H. J. J. de Riele e J.-M. Deshouillers. Esiste inoltre una dimostrazione di J.-R. Chen (semplificata da P. M. Ross) che ogni numero pari m sufficientemente grande può essere scritto come somma $p+q$, dove p è primo e q è quasi primo, nel senso che q o è primo o è il prodotto di due primi. Con tutta questa evidenza positiva, tuttavia, nessun matematico dirà che la congettura deve perciò essere vera per tutti gli m[21].

Fa parte del patrimonio genetico della matematica che

[20] T. Tymoczko, *The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance*, in "The Journal of Philosophy", 76, 1979, pp. 57-83. Si veda anche G. Lolli, *La Macchina e le dimostrazioni*, Il Mulino, Bologna, 1986.

[21] J. Rotman, *Journey into Mathematics*, Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 1998, p. 4.

> Caratteristica esclusiva della matematica è che fintanto che sembra possibile dimostrare (o refutare) una congettura, i matematici la considereranno un problema aperto, anche quando, secondo i criteri delle scienze naturali, l'evidenza non deduttiva a favore del risultato (o della sua negazione) è schiacciante[22].

Le tendenze storiche ed empiristiche tendono a dimenticare, o a non considerare il fatto che la dinamica della costruzione di soluzioni e di teorie si svolge sempre ad un livello logico e si articola nella costruzione di dimostrazioni.

6.3 La semiotica

Anche la semiotica ha qualcosa da dire sulla matematica, che è un'attività eminentemente simbolica, o meglio ci si aspetterebbe che avesse molto da dire, molto più di quanto succede. Non è solo il formalismo che sostiene che la matematica rientra nelle attività simboliche umane. Anzi il formalismo stesso potrebbe perdere parte della sua apparenza spettrale o gratuita (con i segni si può solo giocare) se si integrasse in un'analisi di maggior respiro con gli studi culturali e sociali relativi alla produzione di segni.

Esistono alcuni tentativi di un'analisi semiotica della matematica[23], che tuttavia sono inficiati dalla tendenza degli autori ad assumere la posizione ideologica che "tutto è segno", che si rovescia facilmente in "il segno è tutto", ma nel senso che il segno contiene tutto; disturba anche la volontà eccessiva di polemica proprio contro l'immagine impaludata della matematica, modellata sulla volgarizzazione della *new math* di origine bourbakista, immagine che i linguisti assumono come facile obiettivo di paglia, come se per imporsi dovessero proporsi come un'alternativa radicale e globale ad una degenerazione causata dalle altre concezioni.

[22] M. D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997, p. 138.

[23] B. Rotman, *Mathematics as Sign*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000. Si veda anche G. Lakoff e R. E. Núñez, *The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-Based Mathematics*, in L. D. English (curatore), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images*, Lawrence Erlbaum Associates, London, 1997, pp. 21-89, e una discussione in G. Lolli, "La metafora in matematicva", in *La parola al testo*, a cura di G. L. Beccaria e Carla Marello, Dell'Orso, Alessandria, 2002, pp. 221-32.

7 Prospettive

La matematica di oggi non presenta problemi drammatici sul piano concettuale; si è tornati ad una visione più pacata dalla coesistenza e collaborazione tra diversi aspetti e ricerche. La matematica astratta continua a crescere ed a rivelarsi utile (si veda la recente dimostrazione del teorema di Fermat). Ha anche ripreso ad alimentarsi del fecondo rapporto con la fisica (si vedano le intuizioni di Edward Witten sugli invarianti delle varietà a quattro dimensioni originate da considerazione di teoria quantistica dei campi).

Nello stesso tempo, la matematica del finito, la matematica discreta, o combinatoria, è tornata a mostrare la sua ricchezza e la sua bellezza, anche sul piano educativo.

Il calcolatore, pur con le sue rivoluzionarie conseguenze, ha esaltato aspetti già presenti, da una parte il calcolo e la sperimentazione, dall'altra l'utilizzo della formalizzazione per l'automazione di parti del ragionamento.

Se in tale quadro non è possibile indicare pressanti problemi fondazionali, questo è solo un segno della vitalità presente della matematica e della sua buona salute.

Questo non significa che non ci siano interessanti questioni da indagare, approfondire, tenere sotto controllo, e non solo per aumentare la nostra comprensione della matematica come fenomeno della civiltà umana. Il lavoro originato da Hilbert, soprattutto, ci ha insegnato che la considerazione *metafi matematica* delle procedure di dimostrazione e costruzione di teorie ha una ricaduta positiva anche sulla matematica stessa. Lo studio dei fondamenti si è laicizzato.