Da dove viene la matematica

Gabriele Lolli

Recensione di
G. Lakoff, R. E. Nuñez, *Where Mathematics comes from*[*]

---

[*]G. Lakoff, R. E. Nuñez, *Where Mathematics comes from*, Basic Books, New York, 2000.

1 Gli obiettivi del libro

La tesi portante del libro è l'affermazione che la matematica che conosciamo è stata fatta dagli esseri umani, quindi "la matematica che conosciamo è limitata e strutturata dal cervello umano e dalle capacità mentali umane", è una matematica "basata su mente e cervello" (*brain and mind based*)[1].

Da questa bella tautologia prendono le mosse gli autori con l'obiettivo di arrivare a provarla, o a convincere della sua verità. Lo scopo della ricerca è descritto a più riprese, non sempre come vedremo in modo coerente.

> Noi cerchiamo, da una prospettiva cognitiva, di fornire risposte a domande come: Da dove vengono le leggi dell'aritmetica? Perché esiste una sola classe vuota e perché è una sottoclasse di ogni classe? Ma perché esiste una classe vuota, mentre non esiste la classe che contiene tutto? E perché, nella logica formale, da una contraddizione segue qualunque proposizione? Perché da una contraddizione dovrebbe seguire qualcosa?[2]

Lo strano elenco non vuole probabilmente essere un campione di possibili domande significative, ché non tutte lo sono, né sono omogenee; vuole forse indicare che si spazierà dall'aritmetica alla logica *via* la teoria degli insiemi; in realtà si dedicherà molta attenzione anche ad algebra e analisi.

"Prospettiva cognitiva" significa che per capire non basta considerare le definizioni dei concetti matematici e i loro assiomi, bisogna chiedersi *come sono capiti*, quindi bisogna dar conto delle idee e dei *meccanismi cognitivi*.

Come se fosse la stessa cosa, si propone altresì una "analisi delle idee matematiche" che spieghi "cosa significano i teoremi e perché sono veri sulla base di quello che significano"[3]. I matematici di solito spiegano cosa significano i teoremi nelle loro esposizioni e lezioni, o vogliono farlo. A quanto pare credono solo di farlo, o lo fanno in modo sbagliato.

Tuttavia individuare i meccanismi cognitivi che permettono di capire i teoremi non equivale a spiegare cosa significano i teoremi. La tesi soggiacente è duplice (o triplice, se si include la convinzione che i matematici non lo facciano) e invade territori tradizionalmente filosofici nel sostenere innanzi tutto che i teoremi sono veri sulla base del loro significato, e per di più che

[1] p. 1.
[2] p. xiii.
[3] p. xv.

il significato è stabilito da meccanismi cognitivi. Non è chiaro se chi non conosce tali meccanismi, chi è vissuto prima di leggere questo libro, può davvero capire la matematica; né se la comprensione che viene promessa sia diversa da quella che normalmente i matematici ottengono o di cui si accontentano - ma il tono dell'esposizione suggerisce di sì.

Si può capire che gli scienziati cognitivi abbiano grande stima e fiducia nelle loro scoperte, ma che l'unica possibilità per capire una manifestazione intellettuale sia di conoscere i meccanismi cognitivi sottostanti sembra una pretesa assolutistica; che dire della comprensione, del godimento e della creazione stessa della musica, per citare un fenomeno universale?

Ma infine si prospetta anche un obiettivo più ambizioso:

> In aggiunta, noi concepiamo il nostro lavoro come un aiuto per rendere le idee matematiche precise in un'area che è stata finora lasciata alla "intuizione"[4]

Dalla presentazione appaiono dunque almeno tre livelli di indagine e tre obiettivi che sono diversi, ma non paiono tali per gli autori, i quali passano disinvoltamente da uno all'altro. Ad esempio l'ultima frase è accoppiata alla seguente: "Una scienza cognitiva della matematica dovrebbe studiare la natura precisa delle intuizioni matematiche chiare". Ma le due frasi sono bene diverse; un conto è studiare "la natura delle intuizioni matematiche chiare" (compito, si può concedere, dello scienziato cognitivo); un conto è "rendere le idee matematiche precise" andando oltre l'intuizione (compito del matematico).

Diversi fraintendimenti sorgono da questa commistione di livelli, e sono state segnalate da vari recensori[5] suscitando le proteste degli autori che di fronte alle contestazioni si sono sempre rifugiati in corner sostenendo di essere scienziati cognitivi e di non voler fare matematica (vedremo se vero, ma non lo è).

Nonostante tale autolimitazione, essi sostengono tuttavia che il loro lavoro è importante per la didattica o la divulgazione, perché le bellezze e profondità della matematica sono inaccessibili ai non matematici a causa dell'assenza di una descrizione della struttura cognitiva della matematica[6].

---

[4]p. xv.

[5]Recensione di J. Nunemacher, *Amer. Math. Monthly*, **109**, pp. 672-5; recensione di J. J. Madden, *Notices AMS*, **48**, n. 10, pp. 1182-8; recensione di B. Gold, *MAA Online*, dicembre 2001, con risposta degli autori.

[6]p. 5.

"Struttura cognitiva della matematica" è un'altra dizione ambigua, o per lo meno ellittica, tipica dello stile degli autori. Suppone che sulla base della conoscenza dei meccanismi cognitivi che permettono di capire (o produrre?) la matematica si possa individuare una struttura della stessa che non è accessibile, e quindi è diversa, dalle presentazioni abituali.

Nella lettura commentata del libro, cercheremo di tenere distinte - anche se non è del tutto possibile - le osservazioni riguardanti i contributi di scienza cognitiva, prevalenti nella prima parte, da quelle riguardanti la presentazione di argomenti di matematica veri e propri, nella seconda parte. La divisione corrisponde praticamente anche alla presentazione del materiale del libro, dedicato alla matematica fondamentale nella prima parte, e a quella superiore nel resto.

Le due tematiche costituiscono il motivo della presente disamina dettagliata del libro, che è duplice. L'interesse per i contributi reali, in crescita, degli studi neurofisiologici alla comprensione delle competenze e attività matematiche è doveroso e l'informazione non facilmente accessibile; benvenuta sarebbe ogni informazione. D'altra parte discutere sulla matematica, anche in disaccordo, è sempre stimolante e utile.

Una "z" a margine segnala, secondo la tradizione bourbakista, un punto a cui prestare particolare attenzione.

2 L'incarnazione

Gli autori (d'ora in avanti LN) affermano che

> Una delle grandi scoperte della scienza cognitiva è che le nostre idee ricevono forma dalle esperienze corporee - non in una semplicistica corrispondenza uno a uno ma indirettamente, attraverso il radicamento del nostro intero sistema concettuale nella vita di ogni giorno[7].

Due parole chiave della nuova scienza cognitiva sono *embodied*, con la corrispondente *disembodied*, e *grounded, grounding*.

Traduciamo *grounded* con "radicato", "fondato" o varianti riconoscibili.

La traduzione più incisiva di *embodied* sarebbe "incarnato", ma quella prevalente è "situato", anche se non è proprio lo stesso significato - "situato" traduce piuttosto *embedded*, o *situated*.

La questione terminologica è interessante perché indica un'alternativa su dove bisogna radicare le caratteristiche della mente indagate dalla scienza cognitiva, se nel cervello o nella vita quotidiana. Nella scienza cognitiva si parla sempre più spesso di "mente estesa", a includere in essa oltre al funzionamento del cervello ogni tipo di supporto materiale e sociale utilizzato nel pensare. LN non aderiscono a questa impostazione, peraltro controversa. Le manifestazioni della mente sono di solito genericamente indicate dagli autori come "meccanismi cognitivi". In tutto il libro non compare mai una definizione precisa di "meccanismo cognitivo".

Si parla di meccanismi cognitivi indifferentemente sia per il cervello che per la mente, o per la mente-cervello.

Nel primo caso, quello del radicamento esclusivo nel cervello, nulla di fondato si può affermare senza precise scoperte neurofisiologiche. Nel secondo siamo invece ancora fuori della scienza dura e nel campo dell'opinabile, soprattutto in una prospettiva di mente estesa. La vita quotidiana corrisponde in parte a quello che altri chiamano aspetti culturali, perché non si tratta ovviamente della vita preistorica; molte delle nuove idee come vedremo sorgono tardi e in contesti molto civilizzati, dove la vita quotidiana pur nel senso materiale è già imbevuta di concezioni e idee sofisticate.

[7] p. xiv.

3 Il bersaglio polemico

Sarebbe buona norma del dialogo costruttivo prima presentare e sostanziare le proprie tesi o scoperte, e quindi eventualmente rilevare come esse smentiscano o confutino altre posizioni. Invece in questo caso la tesi rivale è presentata subito, e accompagna e ritorna in tutta l'esposizione.

Il bersaglio polemico molto di comodo è:

> Una mitologia che suona press'a poco così.
>
> - La matematica è astratta e disincarnata - eppure reale.
> - La matematica ha un'esistenza oggettiva ... indipendente e trascendente rispetto all'esistenza degli esseri umani o di esseri di qualunque genere.
> - La matematica umana è solo una parte della matematica astratta e trascendente.
> - La dimostrazione matematica ci permette di scoprire verità trascendenti dell'universo.
> - La matematica è parte dell'universo fisico e fornisce ad esso una struttura razionale ...[8]

Seguono altre tesi dello stesso tenore, incluso il fatto che solo il principio che la matematica sia disincarnata permette di concepire l'idea che le macchine possono pensare.

LN danno per scontato che questa in blocco sia la filosofia corrente, maggioritaria o prevalente (*mainstream*) nell'ambiente matematico e di chi si occupa di matematica.

Dopo aver posto tale termine di confronto, essi formulano due domande fondamentali:

1. Esattamente quali meccanismi del cervello e della mente umana permettono agli esseri umani di formulare idee matematiche e di ragionare matematicamente?

[8] p. xv.

2. La matematica basata sulla mente-cervello è tutto ciò che la matematica *è*? Oppure, come hanno suggerito i platonisti, esiste una matematica trascendente che trascende i corpi e le menti e struttura l'universo - il nostro e tutti quelli possibili?[9]

La prima domanda è coerente con il contesto di scienza cognitiva in cui il libro si colloca, anche se il suo obiettivo è ribadito a breve distanza come quello di "dir[ci] come è la matematica umana, concettualizzata attraverso le menti e i cervelli"[10], che come abbiamo già rilevato non sembra la stessa questione.

Un conto è rivelare quali sono i meccanismi cognitivi, un conto è dire come è la matematica (*what it is like*). Non perché la matematica sia indipendente dai meccanismi cognitivi, ma perché sono risposte a due domande diverse.

Ammesso che si scoprano i meccanismi cognitivi che fanno capire che una forma espressiva è poesia e non prosa, ne seguirebbe che la loro descrizione è l'unica o la corretta spiegazione di cosa è la poesia? È alla mancata individuazione di questi meccanismi che si deve attribuire la responsabilità per lo scarso apprezzamento e diffusione della poesia? E al contrario, come già ricordato, i fruitori della musica conoscerebbero i meccanismi cognitivi della sua produzione?

A meno di non avere una concezione molto ampia ed ambiziosa di cosa s'intende con "meccanismo cognitivo", che riporti al radicamento corporeo *tutti* gli elementi culturali che contribuiscono alla definizione della poesia. La spiegazione dovrebbe comunque salvare la concezione usuale millenaria di poesia, cioè essere coerente con quella e non pretendere di insegnare cosa è *veramente* la poesia, nel senso di "a differenza di quello che appare" e "di quello che dicono i poeti".

La seconda domanda invece non ha nulla a che vedere con eventuali ricerche orientate alla prima. LN riconoscono che è una domanda filosofica, al centro della filosofia della matematica e degli interessi dei filosofi. Ci si aspetterebbe quindi che venisse trascurata in un libro di scienza empirica, come questo vuole essere, invece di essere proposta come una delle domande fondamentali. A quanto pare interessa molto a LN dal momento che vi tornano sopra in continuazione, in una polemica che appare curiosa dal momento che essi stessi affermano che non è possibile confutare una fede.

[9]p. 1.
[10]p. 3.

Ma nello stesso tempo sostengono di confutarla, tanto è vero che anticipano che "le nostre *conclusioni*[11] saranno" che gli esseri umani non hanno accesso ad alcuna matematica trascendente[12].

Le conclusioni non devono attendere il dipanarsi dell'analisi, perché dipendono dal seguente semplice argomento: i meccanismi cognitivi che producono la matematica sono disponibili solo alle menti degli essseri viventi, per cui la matematica prodotta non può essere parte di una matematica platonica, che se esistesse sarebbe solo "letterale"[13].

Quindi resta solo quella basata sulla mente-cervello. E quest'ultima non può essere parte di una matematica platonica.

La conclusione è un *non sequitur*, perchè non è giustificato in alcun modo che la matematica platonistica sia diversa da quella basata su mente-cervello. Anzi era stato detto prima, come uno degli elementi della mitologia, che quella esistente è una parte di quella trascendente. Giustificare il fatto che la mente-cervello non possa produrre nulla di validità trascendente richiederebbe come minimo una discussione più precisa di cosa s'intende con "trascendente", a meno che di nuovo non si risolva in una definizione: trascendente = non accessibile alla mente-cervello.

LN sono sicuri che se si vuole rispondere alla domanda sulla natura della matematica, intesa come questione scientifica riguardo a un elemento del mondo empirico, l'unica risposta è la loro[14].

Con questo intendono o possono intendere due cose; la prima è che l'unica risposta è quella che eventualmente dà la scienza cognitiva; la seconda è che la scienza cognitiva dà una sola risposta, e che è la loro. In generale la scienza non dà mai una sola risposta, e tanto meno definitiva.

---

[11] Corsivo aggiunto.

[12] p. 4.

[13] p. 4. Maggiori chiarimenti su questa caratterizzazione verranno forse dal seguito; probabilmente vuol dire che non ha significato, perché il significato è situato e il trascendente non è situato, ma se è da intendere così allora la questione è risolta con una definizione.

[14] p. 3.

4 Matematica e attività umane

Prima di immergerci nell'esposizione di LN, è utile ricordare che, nella loro formulazione generalissima, le tesi sul carattere situato della matematica (della mente *tout court* per la scienza cognitiva) lungi dall'essere estranee ad una comunità che sarebbe costituita solo da platonisti impenitenti suonano piuttosto come la scoperta dell'acqua calda.

Si potrebbe ricordare John Stuart Mill in tempi vicini a noi e tutta la tradizione empirista prima di lui, che risale ad Aristotele; si potrebbero ricordare i *sassolini* dei Greci che hanno dato origine al *calcolo*; più in generale la logistica, prima aritmetica greca.

La logistica[15] era una scienza del numero, e comprendeva precisamente l'arte del calcolo. Essa trattava di "cose numerate" piuttosto che di "numeri", a parte l'uno: trattava il 3 come una terna e il 10 come una decina; ma copriva le quattro operazioni e le frazioni, ed era usata per risolvere problemi pratici di commercio. Alcuni problemi tramandati fino a noi riguardano la divisione di certe quantità di mele tra persone, o il peso di orci. I problemi portano ad equazioni lineari e in qualche caso all'analisi indeterminata. Al di là della logistica, il resto degli argomenti teorici, la vera e propria aritmetica, con poche eccezioni era trattata in simbiosi con la geometria.

Ci siamo soffermati sulla logistica perché il lettore faccia in seguito un confronto con quanto dicono LN sull'origine dell'aritmetica, ma non potendo fare una storia della matematica o della filosofia della matematica, ci limitiamo ora a riportare alcuni brani del pensiero di un matematico contemporaneo che passa per un formalista[16].

> La matematica inizia con interrogativi e problemi che hanno a che fare con aspetti combinatori e simbolici dell'esperienza umana. Alcuni di questi aspetti risultano essere sistematici e intrinseci piuttosto che arbitrari o legati ad un solo contesto. Sono essi che diventano la materia della matematica elementare. Da questo punto di partenza l'argomento si sviluppa fino a diventare l'analisi deduttiva di un gran numero di strutture formali molto diverse tra loro ma reciprocamente collegate.

[15] Si veda Sir Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics*, Dover, New York, 1981, vol. I, pp. 13-6.

[16] S. Mac Lane, "Mathematical models: A sketch for the philosophy of mathematics", *Amer. Math. Monthly*, **88**, 1981, pp. 462-71.

Queste strutture sono state derivate dall'esperienza in molti stadi succesivi; per astrazione da numerose osservazioni del mondo, dei problemi che pone e dell'interconnessione di questi problemi. Queste osservazioni possono essere descritte come aventi origine da una varietà di attività umane, ciascuna delle quali conduce più o meno direttamente a una corrispondente parte della matematica:

Conteggio	: aritmetica e teoria dei numeri
Misura	: numeri reali, calcolo, analisi
Forma	: geometria, topologia
Costruzione	: simmetria, gruppi
Stime	: probabilità, teoria della misura, statistica
Moto	: meccanica, calcolo dinamica
Calcolo	: algebra, analisi numerica
Argomento	: logica
Rompicapo	: combinatoria, teoria dei numeri
Raggruppamento	: teoria degli insiemi, combinatoria

Queste varie attività non sono affatto completamente separate; esse interferiscono in modi complessi . . . Le due parti di questa tabella dovrebbero essere messe in corrispondenza, e in parte già lo sono, con diverse frecce di collegamento.

. . . concludiamo che la matematica è iniziata da varie attività umane che suggeriscono oggetti ed operazioni (addizione, moltiplicazione, confronto di misure) e così conducono a concetti (numeri primi, trasformazioni) che quindi sono inseriti in sistemi assiomatici (aritmetica di Peano, geometria euclidea, il sistema dei numeri reali, teoria dei campi ecc.). Risulta che questi sistemi codificano proprietà più profonde e non evidenti delle varie attività umane che ne sono all'origine. Per esempio, la nozione di gruppo, benché assiomaticamente molto semplice, rivela proprietà comuni al moto (gruppi di rotazione e di traslazione) alla simmetria (gruppi di cristalli) e alle manipolazioni algebriche (gruppi di Galois, gruppi di Lie per le equazioni differenziali). Similmente molti altri concetti matematici (come quello di funzione, o di ordine parziale) sono sia semplici di struttura sia pervasivi nelle applicazioni. Semplicità ed applicabilità sono rese effettive dal trattamento formale delle nozioni relative.

> ...
>
> [Riassumendo provvisoriamente] La matematica parte da una varietà di attività umane, ne estrae un numero di nozioni che sono generiche, non arbitrarie, e formalizza tali nozioni e le loro molteplici relazioni.
>
> A causa dell'elaborato sistema integrato che formano le idee, ciascuna nozione matematica è legata alla sua origine empirica in molteplici modi. Di conseguenza, nessuna descrizione semplicistica della matematica può essere adeguata.

Una citazione analoga può essere estratta da uno scritto maggiormente elaborato[17].

> Questo [primo] capitolo, partendo dallo studio di numero, spazio, tempo e moto ha condotto alla descrizione di diverse nozioni formali ...
>
> Queste nozioni formali nascono in larga misura da interessi prematematici che possono benissimo essere descritti come "attività culturali umane". Per questa ragione, la nostra analisi della genesi della Matematica metterà in evidenza un certo numero di tali attività.
>
> Spesso chiarisce molto il dire che un'attività dà origine in un primo momento a qualche "idea" nebulosa che alla lunga viene formalizzata, eventualmente formalizzata in più di un modo. Per esempio il processo di contare suggerisce l'idea del "successivo" - il prossimo oggetto da contare o il prossimo numero da usare o la prossima cosa in qualche lista ordinata ... L'idea "successivo" appare poi in altre forme: il primo ordinale al di là di un dato insieme di ordinali, il prossimo passo in un programma per calcolatore.
>
> Questo tipo di fonte della forma matematica ... può essere riassunto in una tabella, dove ogni attività suggerisce un'idea e la sua susseguente formalizzazione:

[17] S. Mac Lane, *Mathematics Form and Function*, Springer, Berlin, 1986.

Attività	*Idea*	*Formulazione*
Collezionare	Collezione	Insieme
Contare	Successivo, prossimo	Successore, ordine Numero ordinale
Confrontare grandezze	Enumerazione	Biiezione Numero cardinale
Calcolare	Combinazione di numeri	Regole addizione Regole moltiplicazione Gruppo abeliano
Riordinare	Permutazione	Biiezione Gruppo di permutazioni
Tempo	Prima e dopo	Ordine lineare
Osservare	Simmetria	Gruppo di trasformazioni
Costruire, dare forma	Figure; simmetria	Collezioni di punti
Misurare	Distanza; estensione	Spazi metrici
Muoversi	Cambiamento	Moto rigido Gruppo di trasformazioni Tasso di cambiamento
Stimare	Approssimazione	Continuità Limite
	Vicinanza	Spazio topologico
Selezionare	Parte	Sottoinsieme Algebra di Boole
Argomentare	Dimostrare	Particelle logiche
Scegliere	Caso	Probabilità
Azioni successive	Seguito da	Composizione Gruppo di trasformazioni

La tabella vuole essere indicativa, non dogmatica. Con "idea" s'intende qualcosa che abbia un contenuto intuitivo; esso può servire da vettore per il ben noto fenomeno della "intuizione matematica". La stessa idea può emergere da disparate attività ed essere il sostegno di diverse differenti formalizzazioni.

Anche dopo che le nozioni matematiche di base sono state sviluppate da queste attività ed idee, continuano ad esserci stimoli dal

> di fuori della matematica. Spesso prendono la forma di problemi matematici che sorgono in altre scienze e richiedono l'applicazione della matematica ...
>
> Alcune nozioni matematiche formali hanno un'origine più complessa. Rientra tra queste la nozione di "insieme". L'idea di una collezione è certamente presente quando contiamo, ma a questo livello non si può dire che sia un utile candidato alla formalizzazione [segue la descrizione di vari contesti in cui lo studio di insiemi si presenta in modo naturale][18].

La tesi esposta da Mac Lane della produzione umana della matematica rende attuale il problema dell'incredibile efficacia della matematica, a cui non si può rispondere appellandosi ad esempio ad armonie prestabilite:

> Come mai succeede che importanti aspetti del mondo reale possono in effetti essere analizzati accuratamente per mezzo di austere deduzioni dagli assiomi? In altre parole, come è possibile che la logica calzi il mondo; come si può rendere ragione della straordinaria e inaspettata effettività della matematica formale?
>
> La domanda può essere formulata anche per casi particolari espliciti:
>
> Come mai il calcolo formale della meccanica newtoniana del moto dei corpi risulta aderire al loro effettivo movimento?
>
> Come mai succede che le proprietà teoriche dei problemi dei valori al contorno per le equazioni differenziali descrivono così bene molti aspetti dell'elettricità, dell'ottica, della meccanica, dell'idrodinamica e dell'elettrodinamica?
>
> Come mai il calcolo differenziale sembra funzionare sia per la fisica che per i problemi di massimo locale dell'economista?[19]

L'ultima esemplificazione del problema dell'effettività è ben scelta in quanto rende banale e non accettabile la risposta semplicistica che la matematica funziona perché è estratta dalle attività concrete nel mondo. Il mondo degli economisti non esiste da sempre e ovunque.

[18]pp. 34-6.
[19]pp. 466.

Ci siamo dilungati con la citazione per far vedere come i matematici siano ben consapevoli della natura umana della matematica e della sua origine in attività fisiche o culturali ma sempre della vita quotidiana.

Un altro autore che conduce una feroce battaglia contro il platonismo e la trascendenza è Reuben Hersh[20]. I suoi bersagli polemici sono i miti della unità, universalità, certezza, oggettività. Anch'egli ha una serie di tesi "umanistiche", negazioni di quelle "platonistiche":

- La matematica è umana ... integrata nella natura umana.
- La matematica non è infallibile.
- Gli oggetti matematici sono una varietà speciale degli oggetti storico-sociali.
- ...

Hersh come si capisce si colloca nel filone sociologico: gli oggetti matematici devono la loro oggettività alle istituzioni sociali.

> Gli oggetti matematici sono stati creati dagli esseri umani. Non arbitrariamente ma a partire dalle attività che si possono fare con gli oggetti matematici pre-esistenti e a partire dalle necessità delle scienze e della vita quotidiana.

Quindi Hersh non ha nulla da dire sulla formazione di questi oggetti; citando Durkheim egli distingue tra gli stati di coscienza che derivano dall'interno dei nostri organismi e quelli che derivano e sono oggettivizzati dalla società, tra i quali rientrano quelli che si riferiscono alla matematica.

Per il passaggio cruciale dalla matematica pratica e informale a quella formale, ad esempio dagli aggettivi numerali ("due mele") ai sostantivi ("due è primo), Hersh si limita a ricordare che tutti, da Aristotele in poi, fanno riferimento a qualche forma di astrazione. La società sanziona la legittimità, ma non spiega la formazione.

Oltre ai matematici, altri che non provengono dalla scienza cognitiva ma dall'etnologia o dalla psicoterapia rilevano il legame della matematica con il corpo[21], innanzi tutto nel contare ("un numero equivale in primo luogo

[20] R. Hersh, *Che cos'è davvero la matematica* (1997), Baldini&Castoldi, Milano, 2001.

[21] Si veda ad esempio la psicoterapeuta Anne Siety e il suo *Matematica, mio terrore*, Salani, Milano, 2003.

ad una serie di dita", ma anche l'intero corpo può intervenire), o nei giochi dei bambini con le biglie che non sono altro che una versione aggiornata dei sassolini greci. Siamo ben avvertiti che le parole della matematica sono anche legate allo psichismo, alle emozioni.

Purtroppo le affermazioni sull'origine concreta della matematica nelle attività corporee o quotidiane sono, a tutt'oggi, sempre al più delle allusioni, espressioni di buon senso, se non di banalità.

Pare lapalissiano che qualcosa che è prodotto dall'uomo dipenderà dalle capacità dell'uomo, e quindi dal suo cervello, a meno naturalmente di pensare che esiste un'anima indipendente, soffiata nel corpo al momento della concezione o dopo 14 giorni, e di cui non si sa nulla, se non che è capace di cogliere il divino e quindi, perché no, una matematica divina.

Ma è difficile andare al di là delle connessioni indicate da Mac Lane, in gran parte scontate, e nessuno l'ha ancora fatto. Si sfruttano i riferimenti storici (i misuratori di aree egiziani, i calcoli economici babilonesi) ma si va poco avanti a spiegare come sorgono le idee.

I matematici sono invece bravi (alcuni) a spiegare come poi dalle idee sorgono le formalizzazioni, e i veri e propri concetti matematici; Mac Lane infatti dopo le osservazioni riportate non torna più sull'argomento, e si dedica invece allo studio dei concetti formali, del loro raffinamento e diversificazione e delle mutue relazioni e fecondazioni.

Sarebbe molto desiderabile che l'analisi fosse approfondita nella direzione carente, cioè proprio verso i meccanismi cognitivi e possibilmente cerebrali. Non basta dire che la matematica è prodotta dalla mente umana, o dal cervello; già Kant insegnava che sono le nostre menti ad imporre l'universalità di aritmetica e geometria. Dagli scienziati cognitivi ci si aspettano indicazioni più precise e soprattutto scientificamente fondate.

L'attesa per una chiarificazione del genere, anche solo abbozzata, spiega la grande attenzione che è stata dedicata al libro al momento della sua pubblicazione, "un tentativo senza precedenti di basare la matematica avanzata sul funzionamento del cervello" (R. Hersh). Purtroppo sul funzionamento del cervello come vedremo non c'è nulla che riguardi la matematica avanzata. Sarebbe già molto se si avesse qualche indicazione sulla matematica elementare.

LN ricordano nel primo capitolo le recenti scoperte relative al senso della numerosità innato. Per saperne di più si deve consultare il recente libro di

S. Dehaene[22].

Il senso della numerosità è innato perché si manifesta nei primi giorni di vita e si ritrova in molti animali; esso permette di riconoscere numerosità diverse sotto al 4, e anche di eseguire le più semplici addizioni e sottrazioni, sotto quella soglia.

La caratteristica più interessante è la subitizzazione (*subitizing*) o risposta immediata di fronte a piccoli insiemi, senza eseguire calcoli non solo simbolici ma neanche analogici. Al di sopra di 4 iniziano fenomeni di distorsione o approssimazione del senso della numerosità.

Che il senso della numerosità sia innato vuol anche dire che non è legato ad un tipo particolare di percezione, visiva, uditiva o tattile, è transpercettivo. Quindi non è attivato da particolari circuiti senso-motori. Questo fatto è da tener presente come un problema quando si afferma che i calcoli e la manipolazione di concetti si collegano all'attivazione di circuiti senso-motori.

Anche nelle ricerche neurofisiologiche e psicologiche che mettono in luce la dotazione matematica innata manca sempre il passaggio al formale.

Al massimo viene messo in luce qualche fenomeno curioso di interferenza del senso della numerosità con l'aritmetica simbolica.

Si può dire che, nonostante i molti progressi e le interessanti informazioni sul funzionamento del cervello in occasione di prestazioni matematiche, anche formali, come l'individuazione di diverse aree cerebrali interessate e della loro attivazione coordinata, poco o nulla ancora si sa sulla formazione dei concetti e degli algoritmi matematici.

Il libro di LN promette di rivelare il *link* mancante.

[22]Si veda S. Dehaene, *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*, Oxford univ. Press, Oxford, 1997, trad. it. *Il senso del numero*. Si veda anche G. Lolli, "La matematica, la mente, il cervello", *Boll. UMI*, Sez. A, n. 2, 2000, pp. 121-46, oppure "Il cervello matematico", *Nuova Civiltà delle Macchine*, **18**, n. 3, 2000, pp. 70-85.

5 L'anello mancante

LN affermano che molti meccanismi cognitivi che non sono specificamente matematici sono all'opera nella caratterizzazione di idee matematiche; tra di essi, elencano quelli usati per idee come "relazioni spaziali, raggruppamenti, valutazioni di piccole quantità, moto, distribuzione di cose nello spazio, orientamento del corpo, manipolazioni di oggetti, quali rotazioni e stiramenti, ripetizione di azioni e altre simili". Constatano dunque che "le idee matematiche ... sono spesso radicate nell'esperienza quotidiana"[23].

Notiamo una volta per tutte che LN hanno la cattiva abitudine di usare parole come "spesso", "molte" quando sarebbe desiderabile una migliore precisione.

Come si vede, sono quasi le stesse attività indicate da Mac Lane, a parte che si parla di idee più che di attività e che tutto si svolge nell'inconscio cognitivo: il formare mucchi è collegato all'idea di classe, la rotazione all'aritmetica dei numeri complessi, il movimento e l'avvicinamento a una meta alla derivata e al limite.

Non basta tuttavia neanche secondo LN limitarsi a tali ovvie costatazioni. Occorre chiedersi, e rispondere

> esattamente, quali concetti quotidiani quali e meccanismi cognitivi sono usati ed esattamente in che modo nella concettualizzazione inconscia delle idee tecniche della matematica?[24]

La risposta è precisa e netta, e semplice: la metafora.

Le "scoperte rivoluzionarie degli ultimi anni" nelle scienze cognitive di cui LN fanno tesoro sono la mente situata e il pensiero metaforico. Incominciamo da quest'ultimo (l'incarnazione della mente è più una posizione filosofica che non una scoperta):

> Nella maggior parte dei casi gli esseri umani concettualizzano i concetti astratti in termini concreti, usando idee e modi di ragionare radicati nel sistema senso-motorio. Il meccanismo attraverso il quale l'astratto è compreso in termini di concreto si chiama *metafora concettuale*[25].

[23] p. 29.
[24] p. 29.
[25] p. 5.

La metafora concettuale è "un meccanismo cognitivo che ci permette di ragionare su una cosa di una specie come se fosse di un'altra"[26].

La metafora non è solo un fenomeno linguistico, bensì si riferisce ai pensieri. Il suo significato preciso è quello di *un'applicazione situata transsettoriale che conserva inferenze*[27].

Con questo s'intende "un meccanismo neurale che permette di usare la struttura inferenziale di un dominio concettuale per ragionare su di un altro, per esempio quella della geometria per fare aritmetica". Il primo esempio proposto è la metafora che "I numeri sono punti su una retta".

Nella definizione di metafora concettuale si presentano al lettore due ambiguità.

La prima è che a distanza di poche righe le due citazioni ci prospettano la metafora concettuale prima come un meccanismo per comprendere l'astratto attraverso il concreto, e subito dopo come un meccanismo per comprendere un dominio in termini di un altro, ma magari allo stesso livello di astrattezza. L'esempio della metafora dalla geometria all'aritmetica pare ovviamente del secondo tipo.

L'ambiguità è voluta, anche se non per questo meno fastidiosa, perché LN intendono spiegare tutta la matematica con un solo meccanismo concettuale (anche se il motivo di tale orientamento metodologico, discutibile, non è chiaro). La prima accezione di metafora concettuale servirà per i concetti fondamentali; la seconda per la riduzione di tutta la matematica, per quanto astratta, allo stesso unico meccanismo di produzione.

Ma se il primo tipo di metafora si può considerare situato, il secondo no[28], e tuttavia LN non fanno alcuna differenza tra di essi.

Un'altra perplessità consiste nel fatto che da una parte di parla di "concetti quotidiani", dall'altra ci viene detto che si tratta di "meccanismi neurali", ma senza alcuna indicazione, né ora né in seguito, di come e dove si realizzi il radicamento neurale. Sembra quasi che per definizione i concetti quotidiani siano meccanismi neurali.

Un'unica volta si fa di nuovo un riferimento esplicito ai circuiti neurali: alle pp. 29-45 sono descritti i concetti elaborati dalla scienza cognitiva per

[26] p. 6.

[27] *A grounded, inference-preserving cross-domain mapping*, p. 6.

[28] Il fatto che un'applicazione sia detta situata perché ha una corrispondenza neurale non significa nulla; tutto per un materialista ha un correlato neurale; un'applicazione dovrebbe essere chiamata situata se a livello neurale si ha un collegamento tra aree senso-motorie e altre.

spiegare il funzionamento e il radicamento della metafora.

Nel nostro linguaggio (con varianti per ogni linguaggio particolare) l'uso di alcune parole che hanno a che fare con relazioni spaziali, visione, contenimento, e movimento si decompone secondo LN nel contributo di alcuni primitivi, che appaiono universali.

Ad esempio la frase "il bicchiere è *sul* tavolo" è scomposta in una simultanea presenza di affermazioni o riconoscimento di posizione (sopra, più in alto) di contatto e di sostegno. Si parla di schemi cognitivi che stanno dietro al pensiero. In particolare quelli menzionati sono schemi di immagine, il primo di orientamento, il secondo topologico (assenza di lacune), il terzo dinamico (forze).

Analogamente quando si dice "dentro", "in", "nel" o "fuori" ecc. interviene uno schema di contenimento, che è articolato nella presenza di un interno, una frontiera e un esterno, sempre indissolubilmente presenti.

Tali schemi sono sia concettuali che percettivi e costituiscono il legame tra il linguaggio e i sensi, tra il linguaggio e la percezione spaziale; gli schemi di immagine costituiscono un ponte tra linguaggio e ragionamento da una parte e visione dall'altra. Come capita spesso con i concetti di LN, la loro funzione tende tacitamente ad espandersi: gli schemi di immagine si adattano alla percezione visiva, ma si possono anche imporre in altre situazioni, come quando si dice ad esempio che "vediamo uno sciame di api in giardino e non c'è alcun contenitore".

Inoltre gli schemi di immagine hanno una logica incorporata su cui torneremo.

Altri schemi sono quelli del controllo motorio e della origine-cammino-meta.

L'importanza di tali osservazioni per la matematica situata è secondo LN la seguente: concetti collegati al contenimento e all'orientamento sono importanti in matematica, ma non sono esclusivi della matematica, bensì sono usati nel linguaggio in generale.

> Come ogni altro concetto, essi sorgono solo per via di meccanismi neurali nel tipo appropriato di circuiteria neurale. Di particolare interesse è il fatto che una circuiteria neurale evoluta per altri scopi sia una parte intrinseca della matematica, il che suggerisce che la matematica incarnata non esiste indipendentemente da altri concetti incarnati della vita quotidiana. Al contrario, la matematica sfrutta le nostre capacità adattive - capacità di

> adattare altri meccanismi cognitivi per gli scopi della matematica[29].

Queste osservazioni non sono nuove; nel citato libro di Dehaene si trovano esempi precisi del fenomeno che le stesse aree del cervello sono legate sia ad attività matematiche che ad altre, spaziali o linguistiche, oppure che quelle matematiche con lo sviluppo invadono aree diversamente finalizzate.

La formulazione di LN rispetto a quella della neurofisiologia è più vaga per quando riguarda localizzazione e prove dell'adattamento o della sovrapposizione, mentre è più decisa nel sostenere che (in certi casi) si attivano gli stessi circuiti neurali. Probabilmente, se e nella misura in cui questo è vero, si realizza anche come minimo un concorso di altre aree, ad esempio quelle dedicate alle elaborazioni simboliche.

Ma la nostra curiosità sarebbe quella di sapere quali sono questi circuiti e quando si attivano. Le indicazioni della neurofisiologia sono ancora provvisorie e *tentative* e non si possono far passare per acquisizioni scontate. Occorrerebbe come minimo allegare a prova i reperti di *imaging* del cervello. Quando si vede un bicchiere sul tavolo e si dice che si vede un bicchiere sul tavolo si attivano aree del cervello corrispondenti ai tre schemi indicati? Gli schemi stessi, come quello topologico, hanno circuiti dedicati? Se sì vorremmo che LN ce lo dicessero.

Se non c'è un radicamento fisiologico tutto questo è *wishful thinking*, oppure sono ipotesi, per quanto probabilmente fruttuose.

L'argomento di LN comunque appare circolare. Si scompongono affermazioni comuni complesse con un'analisi che porta a primitivi elementari, i quali sono espressi in termini che sono matematici: orientamento, contenimento, topologia, forze. Quindi si constata, come fosse una scoperta o una sorpresa, che la matematica fa uso di questi concetti. Questo rilievo sulla circolarità è di grande importanza, per un'opera che ha ambizioni teoriche e fondazionali, e merita soffermarsi su di esso, perché è alla base di una possibile alternativa alla impostazione di LN.

Consideriamo il caso dello schema del contenimento; esso ha secondo LN una logica incorporata espressa dalle due affermazioni:

1. Dati due schemi di contenimento A e B e un oggetto X, se A è in B e X è in A, allora X è in B.

[29] p. 33.

2. Dati due schemi di contenimento A e B e un oggetto Y, se A è in B e Y è fuori di B, allora Y è fuori di A.

"Logica incorporata" (*built in*) significa che "non dobbiamo fare operazioni deduttive per trarre tali conclusioni. Esse sono auto-evidenti dalle immagini" della Figura 2.1 associata[30]. Che siano evidenti in base ad una figura spiega forse perchè lo schema di contenimento sia chiamato uno schema di immagine. Non è chiaro peraltro se le due leggi proposte siano le uniche che costituiscono la logica di "in" o ce ne siano altre (la 2 è logicamente equivalente alla 1 per contrapposizione, ma non è detto se invece qui siano pensate indipendenti oppure siano state sdoppiate solo a scopo di illustrazione).

Ma veniamo alla figura. Essa ci mostra prima in (a) figurativamente un bicchiere dentro una caraffa e una pallina dentro il bicchiere e una fuori della caraffa. Ma ad essi è affiancato in (b) il disegno di due insiemi uno contenuto nell'altro, con il commento:

> Noi concettualizziamo i contenitori fisici in termini di contenitori cognitivi, come è mostrato in (b) ... Gli schemi di contenimento sono le strutture cognitive che ci permettono di dare senso ai familiari diagrammi di Venn.

Capire questa chiosa sarebbe un gran passo nella comprensione di tutto il pensiero di LN, ma non è facile. Innanzi tutto nel primo disegno la caraffa e il bicchiere sono chiamati schemi di contenimento, i quali dopo diventano strutture cognitive; il che fa pensare che il soggetto sia in grado di vedere (o applicare) uno schema attraverso l'oggetto concreto. Se siamo in grado di vedere da (a) le leggi 1 e 2, come viene ivi affermato, i contenitori di (a) non sono fisici, ma schemi. Solo il secondo disegno con i diagrammi di Venn tuttavia fa affermare che noi concettualizziamo i contenitori fisici come contenitori cognitivi. I contenitori cognitivi sarebbero dunque i diagrammi di Venn.

Ma i diagrammi di Venn sono un concetto e una tecnica matematica inventata nel tardo Ottocento[31]; se sono loro i contenitori cognitivi, non si può dire che la matematica usa lo schema di contenimento per capire i concetti di appartenenza o inclusione. È esattamente il contrario (in questo

[30] pp. 31-3.

[31] Meglio sarebbe dire diagrammi di Eulero-Venn, e ancora, perché quelli proposti sono solo rappresentazioni di insiemi, le tradizionali "patate", ma non i classici diagrammi di Eulero-Venn con le caratteristiche usate per i sillogismi.

esempio): usiamo un concetto matematico per capire la generalità che si presenta nel discorso concreto del contenere.

Il caso su cui LN si dilungano di più è quello del controllo motorio e del lavoro di Narayanan[32] e di nuovo si rileva una non risolta circolarità.

Ci viene detto che tutti i programmi per il controllo motorio contemplano vari stadi, o condizioni, come: preparazione, inizio, interruzione, ripresa, obiettivo, completamento, stato finale. Questa superstruttura comune mette in luce le proprietà necessarie per un sistema di controllo motorio neurale, naturale o artificiale. Narayanan si è accorto che la stessa struttura si ritrova in quello che i linguisti hanno chiamato "aspetto", ovvero la strutturazione degli eventi. Dunque la stessa struttura neurale usata nel controllo di schemi motori complessi può anche essere usata per ragionare su eventi e azioni.

Secondo LN il lavoro di Narayanan è la prova che i sistemi di controllo per i movimenti dei corpi hanno le stesse caratteristiche necessarie per fare inferenze razionali nella struttura degli eventi. Ma questo non significa che gli stessi circuiti neurali siano usati per entrambe le prestazioni, e neanche che siano sovrapposti o che si attivino in parallelo. Se sì, di nuovo vorremmo delle evidenze; ma di nuovo sarebbe irrilevante: non è da queste eventuali osservazioni neurologiche che Narayanan ha tratto le sue conclusioni, bensì, ci viene detto, dall'esame di programmi. Siamo a un livello di descrizione molto astratto, parliamo di modelli formali.

L'applicabilità di uno stesso modello formale a diverse situazioni è una proprietà tipica della matematica; non può servire a provare qualcosa sulla formazione del modello astratto né che le diverse situazioni modellate coincidano in altre caratteristiche che in quelle messe in luce dal modello.

Infine abbiamo l'ammissione che manca ancora l'elemento più importante, che consiste nei simboli. I simboli per LN sono significativi in virtù dei concetti a cui si attaccano, e questi sono dati in termini cognitivi. Su questa assunzione si basa gran parte della trattazione di LN. Ma "quelle strutture cognitive dovranno alla fine aver bisogno di una spiegazione neurale di come il cervello le crea sulla base della struttura neurale e delle esperienze corporee e sociali"[33].

A quanto pare non l'hanno ancora, e affrontare un discorso sulla matematica con una tale carenza è veramente coraggioso.

Ad ogni modo nel corso dell'esposizione ogni tanto è ripetuto con certezza

[32] pp. 34-7.

[33] p. 49.

che "ogni applicazione metaforica è caratterizzata neuralmente da un insieme fissato di connessioni che collegano i domini concettuali"[34], cosa che non è affatto stata provata.

Ad esempio si afferma quanto segue:

> Se a un bambino si dà un gruppo di tre blocchi, il bambino subitizza automaticamente e inconsciamente che sono tre. Se se ne toglie uno, il bambino subitizza il restante gruppo come due di numero.
>
> Tali esperienze ... coinvolgono correlazioni tra addizione e aggiunta di oggetti e tra sottrazione ed estrazione di oggetti.
>
> Tali correlazioni regolari, ipotizziamo, risultano in connessioni neurali tra operazioni fisiche senso-motorie come il togliere un oggetto da una collezione e operazioni aritmetiche come la sottrazione di un numero da un altro. Tali connessioni neurali, crediamo, costituiscono una metafora concettuale al livello neurale[35].

Credono e ipotizzano, e magari avranno ragione, ma nel seguito queste affermazioni sono ripetute senza qualificazione dubitativa ogni volta che si parla di una metafora, a ribadire la funzione incarnante di quest'ultima.

Le leggi logiche ad esempio

> sono entità cognitive e come tali incarnate nella struttura neurale che caratterizza gli schemi di contenimento[36].

Notiamo peraltro che le affermazioni suddette, oltre che non provate, come del resto sarebbe ammesso se fossero dichiarate ipotesi, sono vaghe e imprecise. Le "correlazioni tra addizione e aggiunta di oggetti e tra sottrazione ed estrazione di oggetti" dovrebbero essere correlazioni neurali; tra quali aree? Con qualsiasi metafora incarnata si dovrebbero attivare simultaneamente i circuiti dell'operazione fisica e altri; è plausibile, ma non è portato alcun elemento probatorio sperimentale. Certo si sa che gli infanti hanno le capacità ricordate, fino alla numerosità quattro, ma il collegamento tra la formazione di gruppi e il conteggio non è individuato a livello neurale; se nel conteggio entrano numeri col loro nome, e non solo il riconoscimento di uguaglianza o

[34] p. 60.
[35] pp. 54-5.
[36] p. 135.

diversità, diverse sono le aree che vengono attivate simultaneamente. Questi legami fisici o circuiti fissi dovrebbero essere indicati e provati, e non lo sono.

6 Vari tipi di metafora

Le metafore non servono solo a parlare, ma anche a capire. Uno dei risultati principali della scienza cognitiva secondo LN è che "i concetti astratti sono *tipicamente*[37] compresi, attraverso una metafora, in termini di concetti più concreti". La metafora concettuale viene chiamata in questo modo, se abbiamo inteso bene, perché non è detto, proprio per la sua funzione di comprensione, e non solo di abbellimento linguistico.

L'affetto ad esempio si concettualizza in termini di calore, e si esprime con parole corrispondenti ("è stata fredda con me", "hanno rotto il ghiaccio"); l'importanza in termini di grandezza ("è un grande lavoro"); la somiglianza con la vicinanza (gli esempi sono migliori in inglese, ad esempio nell'uso dell'aggettivo *close*); le difficoltà con il peso ("un fardello").

Ci sarebbe da discutere, perché è fuori di dubbio che le metafore indicate intervengono, e pesantemente[38], nei discorsi su queste nozioni astratte, ma se si deve spiegare cosa significano tali concetti è difficile che si ricorra alla metafora: per spiegare cosa vuol dire che una persona vuole bene ad un'altra non si dice che sente caldo; per spiegare cosa è una difficoltà non si dice che è un peso, anche se chi è in difficoltà si esprime così. In verità si concettualizza con discorsi infarciti di termini concreti il vissuto soggettivo (cioè uno si esprime così quando parla di se stesso), e non sorprende allora che si usino riferimenti corporali e fisici, ma forse la trattazione dei concetti in sé richiede altro.

C'è un'espressione illuminante a questo proposito, ed è "fuor di metafora". Quando si chiede a qualcuno di parlare fuor di metafora significa che la metafora non aiuta a capire, al contrario, e che è possibile esprimersi senza uso di metafore.

Una parola occorre ripetutamente, ossessivamente, nell'esposizione, ed è "concettualizzare". Confessiamo di non aver chiaro il suo significato. Sembra voler dire "comprendere in termini di", ma negli esempi le metafore sono usate più per esprimere che per comprendere. Un concetto astratto può essere presentato con molteplici riferimenti ad atti o comportamenti o realtà concrete che ricadono sotto di esso, e relative metafore (ad esempio l'amore di una madre per il figlio con l'alimentazione, le effusioni, la protezione e simili) ma non si identifica con nessuno di questi né con la loro somma, e lo

[37] Corsivo aggiunto.

[38] Metafora.

si sa (si può capire che una madre non ama un figlio anche se rispetta tutte quelle specifiche).

Dietro alla ingannevolmente semplice affermazione che "i concetti astratti sono tipicamente compresi, attraverso una metafora, in termini di concetti più concreti" si nasconde una teoria della conoscenza che non è esplicitata, riguardo soprattutto all'introduzione di concetti astratti nuovi (come potrebbe essere per il primo che ha parlato di "amore" oppure come è il caso particolarmente importante della matematica).

Possiamo accettare che ci sia tanta verità in questa osservazione, ma non nel modo assoluto ed esclusivo che viene sostenuto.

Non potrebbe anche valere il viceversa? Un caso significativo, perché coinvolge proprio la matematica, è segnalato da A. Siety. Ci si serve spesso della matematica per parlare dell'essere umano, ad esempio quando si allude all'equazione personale di qualcuno. Una citazione di Proust:

> Non era meglio che, dei gesti che facevano, delle parole che dicevano, della loro vita, della loro natura, cercassi di descrivere la curva e di estrarne la legge?[39]

Altri esempi, dove come minimo l'astratto è concettualizzato in termini astratti (se si considera la malattia come un concetto astratto, come sembra plausibile) si possono ricavare dalla *Malattia come metafora* di Susan Sontag.

All'interno della matematica poi, sono molto interessanti, e numerosi, i casi nei quali è l'astratto che permette di chiarire o capire il concreto.

Per procedere nell'esposizione di LN, occorre introdurre una terminologia tecnica sulle metafore.

La metafora si articola in un dominio fonte o origine (*source*), in un dominio bersaglio (*target*) e in una mappa dall'uno all'altro che, ci viene detto, conserva la struttura inferenziale.

Con questo si deve intendere probabilmente l'insieme dei tipi di inferenza che si fanno di solito in un dominio. Una struttura inferenziale infatti non è la struttura di un dominio, ma del modo come ragioniamo a proposito del dominio. Forse LN si esprimono in questo modo perché pensano alle inferenze che sono implicite nell'uso di parole fondamentali quando si parla di un dominio, come nell'esempio di "in".

Una metafora è formulata in generale nella forma "X è Y", o

[39] cit. da A. Siety, cit.

gli X sono Y,

dove X sono elementi del dominio bersaglio e Y del dominio fonte.

Uno dei primi esempi dettagliati portati ad illustrazione è la metafora "Le categorie sono contenitori", per mezzo della quale noi concepiamo o comprendiamo una categoria *come* un contenitore[40].

L'applicazione viene rappresentata con alcune corrispondenze la cui lista, come al solito, non si capisce se sia esaustiva o contenga solo esempi e casi significativi.

Nel caso della metafora in questione abbiamo una mappa

Fonte		*Bersaglio*
Regioni limitate	→	Categorie
Oggetti interni	→	Membri della categoria
Una regione dentro un′altra	→	Sottocategoria di una categoria

A questa mappa si associa la mappa inferenziale che contempla nell'ordine il terzo escluso, il *modus ponens*, il sillogismo disgiuntivo e il *modus tollens*.

Ogni oggetto$X$ o è nel contenitore A o è fuori di A	→	Ogni ente X o è nella categoria A o è fuori di A
Se l′oggetto X è in A e A è in B allora X è in B	→	Se l′ente Xè in A e A è in B allora X è in B
Se A è in B e B è in C allora A è in C	→	Se A è in B e B è in C allora A è in C
Se A è in B e l′oggetto Y è fuori di B allora Y è fuori di A	→	Se A è in B e l′ente Y è fuori di B allora Y è fuori di A.

Si ha addirittura coincidenza tra le formulazioni delle due colonne, a parte la sostituzione di "oggetto" con "ente" e la precisazione che a sinistra A e B sono contenitori e a destra categorie.

[40]pp. 43 ss.

La metafora proverebbe che “la logica booleana ingenua, che è *con*cettuale, sorge da un meccanismo *per*cettivo - la capacità di percepire il mondo in termini di strutture di contenimento”.

Sussistono forti dubbi che la cosa sia sensata, per quel che riguarda la fondazione situata, cioè che ci sia una priorità delle leggi di contenimento su quelle delle categorie, cioè che categorie e le leggi logiche siano introdotte o capite con questa metafora.

Nella storia, l’inizio dei discorsi sulle categorie, nella filosofia antica, deriva dal parlare di proprietà godute o no dagli individui, non dell’appartenere o no a un insieme.

Nei sillogismi si dice sempre “tutti gli A sono B” non “A è contenuto in B”, che è terminologia tarda, e deriva dalla matematica ($A \subseteq B$).

Si ha a proposito di questo esempio lo stesso fenomeno che con i diagrammi di Venn (d’altra parte sono la stessa cosa), cioè resta il dubbio che sia la matematica ad aiutare (o ad essere compresente ne) la comprensione dei contenitori, o regioni limitate di spazio in generale.

Oltre alle metafore concettuali dal concreto all’astratto ce ne sono di altri tipi, o meglio con altre caratteristiche, visto che sono tutte chiamate concettuali.

Innanzi tutto, mentre si penserebbe che le metafore concettuali siano il modo per introdurre i primi e fondamentali concetti astratti della matematica, a partire dalla dotazione aritmetica innata non simbolica e dalle attività corporee, siamo subito avvertiti di aspettarci di più. La metafora concettuale, questa volta evidentemente con origine non concreta, “è il meccanismo cognitivo centrale di estensione dall’aritmetica alle applicazioni più sofisticate dei numeri [trigonometria, calcolo infinitesimale, geometria analitica]”.

Per capire l’aritmetica stessa occorreranno anche metafore che hanno fonti matematiche non numeriche, geometriche e insiemistiche ad esempio, e lo stesso vale per i fondamenti insiemistici.

Non viene detto come queste metafore, in cui la fonte non è concreta, ma si compongono e si sovrappongono a livelli multipli, conservino l’incarnazione, né che cosa garantisca che venga conservata.

In seguito sarà detto che si tratta di un altro tipo di metafore, chiamate *metafore di collegamento* (*linking metaphor*).

Un’altro concetto è quello di *miscela concettuale*, quando si ha una corrispondenza tra due domini, ma l’applicazione va nei due sensi sia per i domini che per le strutture inferenziali. Allora si parlerà di *miscela metaforica* (*metaphorical blend*).

Si capisce già che questo concetto sarà il *deus ex machina* onnipresente, il che solleva gli stessi dubbi delle metafore a fonte non concreta per quel che riguarda l'incarnazione.

Infine esistono metafore che secondo LN introducono elementi nel dominio bersaglio.

L'esempio proposto è quello dell'amore come impresa (di affari), dove gli innamorati sono soci (*partner*), una relazione d'amore è una società per affari (*business*), i profitti della relazione sono i profitti di un'impresa e così via.

Non pare l'esempio più felice. Non ho mai sentito parlare dei profitti di una relazione amorosa, neanche in inglese, ma forse gli *yuppies* parlano così dei loro amori.

Secondo LN, mentre nel campo dell'amore non ci sono profitti né lavoro, la metafora li introduce prendendoli dal campo economico.

Con tutta la buona volontà, l'esempio non sembra stare in piedi. Non ci sarà la parola "lavoro" (*work*) nel vocabolario amoroso, ma quando si parla di "metterci del lavoro nella relazione" si esprime qualcosa che nel campo[41] dell'amore c'è, e si può esprimere ad esempio come "impegno", o "dedizione", "applicazione", "coltivare" (più che il *business* potrebbe entrarci il *farming* o il *gardening*).

In seguito verranno altri esempi dalla matematica, e saranno ancora più discutibili.

Verranno anche altri tipi di metafore, ad esempio quelle *ridefinizionali*[42], e forse ancora altre che ora ci sfuggono.

Ma ora esaminiamo le metafore prime e più importanti che hanno a che fare con la matematica.

[41] Metafora.
[42] Cantor, p. 150.

7 Le metafore fondanti

La dizione "metafore fondanti" non è traduzione del tutto felice del termine originale *grounding metaphor*, che si riferisce alle metafore che "permettono la proiezione dalle esperienze quotidiane ai concetti astratti"[43], a differenza di quelle di collegamento.

La parole "fondazione" ha nella filosofia della matematica significati vari ma diversi dal *grounding*. Le metafore fondanti sono ad ogni modo le metafore che *affondano* le radici della matematica nel terreno del concreto, e possiamo usare il termine in questo senso.

LN si chiedono quali capacità siano necessarie per passare dalla dotazione innata del senso della numerosità alla matematica vera e propria. Per la sola attività del contare, elencano: capacità di raggruppamento, di ordinamento, di accoppiamento, memoria, capacità di capire la fine di un processo, assegnazione di numeri (all'ultimo oggetto contato), comprensione dell'indipendenza del conteggio dall'ordine.

Fino a 4 non c'è bisogno di contare, l'assegnazione della cardinalità avviene per subitizzazione, ma secondo LN "subitizziamo le dita usate per contare", estrapolazione linguistica coraggiosa ancorché insensata.

Oltre a 4 serve una capacità di fare raggruppamenti di tipo iterato ("mettere insieme gruppi percepiti o immaginati a formare gruppi più grandi"[44]) e infine occorre la capacità di assegnare simboli (parole) ai numeri.

In compiti aritmetici più avanzati del contare intervengono poi altre capacità che sono individuate nella capacità di fare metafore e di eseguire miscele concettuali.

Quindi LN passano ad affrontare le metafore fondanti, soffermandosi su quella che dicono essere la più importante, cioè la metafora "L'aritmetica è collezione di oggetti". Dicono che è la più importante perché la correlazione di gruppi e contare è pervasiva nell'esperienza della prima infanzia. Questa è la metafora che introduce, o fa capire, i numeri.

Notiamo una palese inconsistenza; è detto che le metafore servono per compiti più difficili del contare, in particolare per introdurre i numeri; ma per contare occorrono le capacità sopra elencate, che già contemplano la comprensione del numero, anzi sia dell'ordinale sia del cardinale.

Sulla delicatissima e complicata capacità di contare LN dicono solo quanto

[43]pp. 52-3.
[44]p. 52.

sopra riportato. Torneremo sull'argomento quando spiegheremo come il contare sia essenziale per la formazione del numero, e per colmare le aporie del rendiconto di LN.

Prima di esaminare la metafora "L'aritmetica è collezione di oggetti", si consideri tuttavia che più oltre apparirà che essa è solo una delle metafore fondanti di base dell'aritmetica e ce ne sono altre tre da esaminare[45].

Quindi ci sono diverse metafore fondanti di base; sorgerà spontanea la curiosità di sapere se sono in tutto quattro, o se le quattro esaminate sono solo esempi di una varietà di metafore di base, e poi ancora che rapporto sussiste tra di esse; se vengono usate in simultanea, o se si alternano a seconda di certi problemi, e quali, *et coetera*.

7.1 Aritmetica come collezione di oggetti

Pensiamo che la metafora sia chiara e familiare, e anche ovvia, nel senso che la metafora è indubbiamente presente nei discorsi aritmetici; forse in inglese l'intervento del linguaggio delle collezioni è ancora più evidente, perché lo stesso verbo *to add* significa sia aggiungere che addizionare, mentre noi per i numeri non usiamo tanto spesso "aggiungere", salvo che per 1, al posto di "addizionare". Ma oltre al verbo ci sono altre parole che derivano dalle collezioni, come "più grande" per la relazione d'ordine.

Soffermiamoci allora su alcune particolarità della metafora. Ci viene detto ad esempio che nella mappa che costituisce la metafora, in cui a collezioni di oggetti dello stessa grandezza corrispondono numeri, alla collezione più piccola corrisponde il numero 1, l'unità.

Si prova un senso di grande arbitrarietà. Perché la più piccola collezione non è quella vuota? Si dirà che $\emptyset$ è un concetto complicato, ma anche quello della collezione con un solo elemento lo è. Nello sviluppo dell'insiemistica entrambe hanno sollevato lo stesso tipo di difficoltà. L'insieme unitario $\{a\}$ in quanto distinto dall'oggetto a continua ancora oggi a turbare ogni studente.

Un oggetto non è una collezione di oggetti; vero è che togliendo oggetti da una collezione si ottengono collezioni finché non si arriva a un solo elemento; ma il ragionamento *naive* in questo caso è che non si ha più una collezione. Oppure perché non continuare e togliere anche quello?

Questa metafora ad ogni modo, secondo LN, non permette di concettualizzare lo 0; quindi 0 dovrà venire da qualche altra parte, e viene l'idea che le

[45]p. 65.

quattro preannunciate metafore dovranno collaborare.

La metafora che i numeri *sono* collezioni sembra molto forte, ed insolita: si sente dire, è stato detto da tanti (Aristotele), che i numeri sono collegati alle collezioni, ma dire che sono collezioni è molto più forte che non dire ad esempio che i numeri sono segmenti, che corrisponde meglio almeno ad una verità storica: c'è stato un tempo in cui i matematici dicevano che i numeri erano segmenti, nessuno ha mai detto che i numeri sono collezioni (salvo nell'insiemistica moderna dove tutto è insieme, ma ai numeri come insiemi si arriva con un lungo percorso e certo non la si vorrà prendere come metafora fondante). Non lo ha mai detto nessuno che conti; se qualcuno l'ha detto nell'Ottocento, si è preso gli strali di Frege. Nell'aritmetica pitagorica e pre-pitagorica i numeri erano fatti con i sassolini, ma non erano insiemi, si potrebbe dire che erano strutture: avevano una disposizione spaziale e si distinguevano in numeri lineari, triangolari, rettangolari (si veda 7.4).

La metafora non dice neanche che i numeri sono *come* collezioni, ma proprio che sono collezioni. Per quanto a proposito dei predicati fosse stato detto che concepiamo i predicati come collezioni. Viene da esprimere una perplessità generale che si può inserire qui in mancanza di un posto migliore. Le metafore creative come abbiamo visto introducono oggetti nel dominio bersaglio, che tuttavia come dominio esiste e pare ben definito. Le metafore fondanti di cui la presente è un esempio sembrano invece creare tutto il dominio bersaglio. La questione si collega a quella di capire cosa significa "concettualizzare", se debba voler dire anche "formare concetti" e non la sappiamo risolvere.

Dalla metafora delle collezioni ad ogni modo invece di accontentarsi di quello che può dare si vuole ricavare tutta l'aritmetica o quasi; ad esempio il fatto che si possa contare indefinitamente deriverebbe dal fatto, o legge del dominio delle collezioni, che si possono aggiungere collezioni indefinitamente.

Uno penserebbe che si possono aggiungere finché se ne hanno, o finché ci stanno nel contenitore entro cui siamo; ma tutti i contenitori noti hanno dimensioni finite. L'universo stesso probabilmente. Quale esperienza concreta ”rebbe mai a questa idea di collezioni arbitrariamente grandi?

L'estensione aritmetica arriva fino alla moltiplicazione, che non è così ovvia come l'addizione. L'addizione è ovviamente collegabile all'unione di insiemi (disgiunti, qui non lo si dice ma siccome le collezioni sono da intendere come di oggetti fisici, si può pensare che si tratti sempre di collezioni disgiunte - con esiziali conseguenze tuttavia per la metafora dei predicati come collezioni, peraltro non prese in esame).

Lo è meno (collegabile ai contenitori) la sommatoria, o somma generalizzata, perché l'unione di un insieme di insiemi mal si accorda con l'idea dei contenitori: se uno immagina un insieme di mele come un sacco di mele, e poi un insieme di sacchi di mele, per fare l'unione deve eliminare i sacchi, cioè le pareti dei contenitori che invece sembrerebbero parte integrante dei contenitori e non si capisce dove spariscano.

La moltiplicazione, come sarebbe indotta dalla metafora, è illustrata con l'esempio di 3 collezioni di 5 oggetti, che danno una collezione di 15 oggetti, o mettendoli tutti insieme (*pooling*), o aggiungendo una collezione alla volta (addizione ripetuta).

La moltiplicazione può essere spiegata agli studenti con simili manipolazioni degli insiemi ma non ha certamente tale origine.

Interrogarsi sulle origini è un problema, in questo contesto, perché nella trattazione si parla di origini concettuali, con il rinvio, quando serve a convincere il lettore, all'esistenza di connessioni neuronali (richiamate proprio nel corso della discussione della moltiplicazione) ma si vorrebbe capire anche il collegamento con le origini storiche. La questione delle origini storiche e del rapporto con quelle che sono presentate come origini concettuali o fisiche non è mai affrontata nel corso del libro, ed è ripetutamente violentata dagli esempi.

Ad esempio se, come vedremo, la logica viene dalle classi, il fatto che da una contraddizione segue qualunque proposizione (una delle prime domande a cui LN hanno promesso di rispondere) può solo avere spiegazione nella proprietà che la classe vuota è contenuta in ogni classe. Come ragionavano allora gli Stoici che conoscevano *ex falso quodlibet* ma non avevano ancora concettualizzato la classe vuota? Gli esempi si potrebbero moltiplicare.

L'origine storica della moltiplicazione è nella misura delle aree (su cui torneremo ma su cui LN non dicono nulla).

Per vedere la moltiplicazione come addizione ripetuta occorre, come peraltro è riconosciuto[46], una miscela della metafora della collezione e di numeri; una miscela su cui sarebbe opportuno soffermarsi in modo più problematico, come su tutte le miscele concettuali, su cui invece LN sorvolano come se fossero qualcosa di scontato e naturale. Come abbiamo già osservato a proposito ad esempio dei diagrammi di Venn, le miscele concettuali sono in realtà presenti, e non riconosciute da LN, in molti dei casi fondamentali trattati; la miscela dell'iterazione costituisce poi forse il meccanismo principe della prima

[46]p. 61.

matematica.

A tal punto, come abbiamo già suggerito, da mettere in crisi l'idea stessa di LN delle metafore fondanti. Non appena si va al di là della affermazione "I numeri sono collezioni" e forse dell'addizione, le operazioni concrete nel dominio fonte richiedono esse stesse un poco di aritmetica.

Ad esempio la rappresentazione in una base richiede il concetto o la formazione di raggruppamenti; questi devono però essere fatti con un criterio matematico.

Si consideri questa situazione, nota agli storici: gli antichi Egizi sapevano trattare in modo efficiente le progressioni geometriche, perché avevano un modo molto conveniente di eseguire moltiplicazioni iterate[47]. Essi sapevano che ogni numero si può scrivere come somma di 1, 2, 4, 8, ... Si ricordi che non avevano una rappresentazione posizionale, ma questa proprietà la conoscevano, e la proprietà equivale a conoscere di fatto la rappresentazione binaria dei numeri. Ai numeri in base 2 corrisponde la stessa rappresentazione analogica che in base dieci, con i raggruppamenti che sono ora non di gruppi multipli di dieci ma di gruppi multipli di due. Con questa semantica essi potevano inventare i loro algoritmi per la moltiplicazione, che si riduceva a iterare raddoppio e somma; l'idea dei raggruppamenti è dunque potente, ma in primo luogo non è strettamente legata alla notazione posizionale, e in secondo luogo dipende invece da un'altra idea fondamentale, che i raggruppamenti si devono fare comunque in gruppi le cui dimensioni crescenti siano ciascuna un multiplo della precedente (dieci volte, oppure due volte). Altrimenti non serve a niente. La rappresentazione mediante raggruppamenti, lungi dal poter essere fondante della nozione di numero, richiede, per essere concepita, la nozione di multiplo. Le analogie sussistono tra concetti che sono già in parte intrisi di matematica.

A proposito della rappresentazione posizionale dei numeri, vale la pena ricordare che LN la discutono quando parlano di numerali e calcolo[48], ma la liquidano con una battuta, cioè introducendo una nuova metafora: "I numeri sono somme di prodotti di numeri piccoli per multipli della base". Data la struttura delle metafore, il dominio di questa dovrebbe essere l'insieme delle somme di prodotti di numeri piccoli per multipli della base [*sic*]. Non solo le definizioni, come si incominciava a sospettare, sono per LN tutte metafore,

---

[47]Già nel papiro Rhind; si veda ad esempio E. Maor, *Trigonometric Delights*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1998.

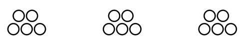
[48]p. 83.

ma anche i teoremi.

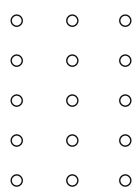
Che dalla metafora delle collezioni vengano tutte le leggi dell'addizione e della moltiplicazione e delle inverse è molto dubbio; si consideri il caso della commutatività della moltiplicazione, fatta con la versione non miscelata del *pooling*.

LN danno per scontato che l'esperienza quotidiana ci insegna che tre collezioni di cinque oggetti sono la stessa cosa di cinque collezioni di tre oggetti; per capirlo si possono certo fare delle manipolazioni di oggetti, ma sono manipolazioni astute e non ovvie, che non capita di fare nella vita comune.

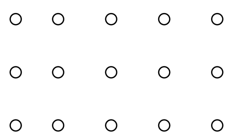
Date tre collezioni di cinque elementi



occorre probabilmente, perché LN non lo dicono, disporre i loro elementi in questo modo:



quindi guardare alla disposizione, girando il foglio o girando intorno ad essa, in modo da vederla così:



Cosa vuol dire allora che la commutatività del *pooling* è una legge del dominio sorgente? Non compare nei discorsi comuni sulle collezioni. La si scopre solo se si ha già una capacità di ragionamento combinatorio che, al di là del semplice collezionare, porta alla costruzione del prodotto cartesiano.

Manipolazioni di questo genere si fanno opportunamente per spiegare le proprietà della moltiplicazione agli studenti, spesso sono illuminanti, ma questo di per sé non vuol dire che siano l'origine.

Una delle ambiguità del libro, e motivo forse del fascino che sembra avere presso le persone interessate alla didattica, sta proprio nel fatto che certe idee relative alle metafore che sono suggerimenti didattici buoni (ancorché peregrini) vengono scambiate con spiegazioni delle origini situate. Non c'è bisogno di questo per riconoscere l'utilità didattica di certe metafore e anche di certe forzature delle stesse.

Forzature nel senso che non sono nel linguaggio concreto, ma il linguaggio concreto si presta ad estensioni, guidate però dalle necessità del bersaglio, non autogene. Invece spesso LN fanno loro queste estensioni e dicono che sono nella metafora ma cosa c'è in una metafora? Quello che normalmente si usa nel parlato o quello che è deducibile o estrapolabile da esso?

7.2 La metafora dello zero

Qui si raggiungono livelli esilaranti. Siccome non c'è la collezione vuota, siccome l'assenza di oggetti non è per LN una collezione, "dobbiamo concettualizzare l'assenza di collezioni come una collezione. Serve una nuova metafora. Una metafora che crea qualcosa dal nulla"[49].

<u>LA METAFORA DELLA COLLEZIONE ZERO</u>

Mancanza di oggetti $\rightarrow$ Collezione vuota

Continua: "data questa metafora come input, la metafora 'L'aritmetica è collezione di oggetti' manderà la collezione vuota su un numero, lo zero".

Non è mai detto cosa significa che una metafora prende come input un'altra metafora. Forse vuol dire che c'è una composizione, l'uso consecutivo di due metafore?

Ma ancora prima, tornando alla nuova metafora, quale ne è la sorgente? Il bersaglio è quello delle collezioni ma la sorgente è misteriosa. C'erano già

[49]p. 64.

dei problemi con le metafore creative, ma qui sono clamorosi. Le metafore creative creano enti nel dominio bersaglio, ma questa crea oggetti nel dominio fonte, anzi l'intero dominio fonte (a cui opportunamente non si dà nome: dovrebbe contenere un unico ente, la mancanza di oggetti. Oh spirito di Federico di Tours! Oh ombra di Heidegger!).

LN ammettono che la metafora è artificiale, congegnata *ad hoc* (*concocted*) per fare l'estensione. Ma se lo è chi la fa? Il cervello? Il cervello di LN o il cervello di ciascuno? Sotto quale esigenza incarnata? Le metafore non dovrebbero nascere naturali?

Ci si chiede comunque, se la composizione sia ancora *grounding* e in che senso, dove è il concreto, in quali circuiti neuronali è codificata l'assenza di oggetti.

LN commentano tranquilli che la metafora creativa è comune in matematica per creare nuovi oggetti, ma questa oltre a non rientrare nelle metafore creative non è una metafora matematica, ché da una parte la fonte è oscura e dall'altra il bersaglio è il dominio concreto delle collezioni.

Pare ad ogni modo da questo modo di procedere che contrariamente a quanto si era pensato, ad una collaborazione cioè delle varie metafore per completare l'arsenale dei concetti aritmetici, ogni metafora, con qualche aiuto *concocted*, debba dare tutto. Vedremo in seguito che di nuovo non è così perché i numeri negativi verranno da una metafora ma non dalle altre, così come lo 0 verrà anche da un'altra. Non si capisce allora perché questa delle collezioni non sia rimpolpata (*fleshed out*) anche con i negativi, oltre che con lo 0.

7.3 Aritmetica come costruzione di oggetti

Questa seconda metafora confessiamo che non la capiamo; si rivelerebbe nell'uso di espressioni come "se metti insieme 2 e 2 ottieni 4" e corrisponde alla costruzioni di oggetti. Non è chiaro che cosa s'intenda con oggetti e costruzione di oggetti. "Concettualizziamo i numeri come oggetti fatti di parti". In qualche senso è vero, ma che cosa sono nella realtà gli oggetti concreti? Le loro parti spesso, anzi quasi sempre, non sono omogenee all'oggetto, mentre per i numeri è così, ed è difficile immaginare oggetti con tale proprietà. L'unico esempio proposto mi sembra che sia il Lego, e i componenti del Lego sono ben diversi dagli oggetti che si costruiscono, come i mattoni sono diversi dalle case.

Quando si sottraggono parti ad un oggetto è per avere un altro oggetto diverso. Immaginare esperienze comuni in cui si sottraggono parti che sono tutte uguali tra loro è difficile; forse se si è costruito un muro troppo alto, si tolgono un po' di mattoni. Ma quando le parti sono tutte uguali tra loro, si ha piuttosto una collezione.

Un'osservazione minore riguarda l'oggetto "intero più piccolo" che darebbe l'uno; rientra un tale ente nell'esperienza umana?

Le connessioni con la metafora delle collezioni ovviamente ci sono anche per LN, perché per costruire un oggetto mettendo insieme le parti si deve avere una collezione di oggetti (parti, ripetiamo, non omogenee né tra loro né all'oggetto).

Ma quello che si vorrebbe capire è come queste due metafore intervengono interagendo e sostenendosi a vicenda o alternandosi con diverse funzioni nella costruzione dell'aritmetica. Di questo non è detto nulla. Si dice che quella degli oggetti dà qualcosa di più, ad esempio le frazioni[50].

Allo spezzare un oggetto in n parti (non è precisato se debbano essere uguali) corrisponde la concettualizzazione della frazione $1/n$ (naturalmente anche in questo caso si tratta già di una miscela di oggetti e numeri). Se si rimettono insieme si ottiene di nuovo l'oggetto, da cui la legge $n \cdot 1/n = 1$.

Non si capisce perché non si potrebbe ugualmente dividere una collezione in n collezioni e ci debba essere bisogno di quest'altra metafora.

7.4 Segmenti

Veniamo finalmente a quella che dovrebbe essere davvero la metafora più importante, quella dei numeri come segmenti, misurati da un'unità di misura[51].

Dovrebbe essere la più importante se non altro perché alle origini della matematica greca è stato così. Ancora in Euclide i numeri sono segmenti, soprattutto gli irrazionali, dopo la scoperta dell'incommensurabilità. Prima erano liste di sassolini, o diverse disposizioni spaziali degli stessi, numeri lineari, triangolari, quadrati.

Poi i pitagorici hanno scoperto che se il lato del quadrato era una lista finita di sassolini, la diagonale non poteva esserlo. Ne è venuta la metafora che i numeri sono segmenti (divisibili all'infinito); metafora e non definizione dal momento che è sempre stata usata da allora, per due millenni, con la coscienza infelice; metafora non *grounding* perché i segmenti sono geometrici,

[50] p. 67.
[51] pp. 68-71.

non fisici.

L'intero spazio (o almeno il piano) entrava nella metafora geometrica, perché la moltiplicazione era ovviamente l'area del rettangolo. Il prodotto di due numeri lineari era un numero rettangolare. Il prodotto di due segmenti non era un segmento, come pretenderebbe la metafora di LN secondo cui la moltiplicazione di due segmenti A e B è il segmento che si ottiene riportando A volte il segmento B, di nuovo con una miscela essenziale di segmenti e numeri.

Della metafora di LN non convince neanche la produzione di 1 come corrispondente del segmento unità di misura; non sembra che ci voglia molto a capire che l'unità di misura si può cambiare, e quindi dovrebbe venirne un'idea della relatività dell'uno, di cui però non c'è traccia.

Per avere l'unità minima bisognerebbe rappresentare i numeri, o farli corrispondere, o dire che sono liste di sassolini, soluzione per l'appunto scartata dall'umanità perché la metafora *grounding* si è scontrata con l'intelletto.

A questo proposito esilarante è anche la discussione di LN secondo cui per Eudosso "$\sqrt{2}$ esiste come numero". Le cose sarebbero andate nel seguente modo.

Si tenga presente la metamorfosi della metafora che consiste nel miscelare fonte e bersaglio[52]. Come avviene tale miscela, quando, sotto quali stimoli, perché non sempre? Non si sa. Quando fa comodo.

Ora Eudosso ha usato "implicitamente" la miscela "Numeri/Segmenti fisici" ed ha concluso, secondo LN, che in corrispondenza alla diagonale del quadrato deve esistere un numero. Così sono nati i numeri irrazionali, nel 370 a.C.!

7.5 Aritmetica come moto lungo un cammino

Il movimento lungo un cammino parte da un'origine, che dà quindi lo zero senza bisogno di un atto creativo, e vede i numeri come posizioni sul cammino (*point location*) e le operazioni aritmetiche come movimenti lungo il cammino.

Non è facile accettare che questa sia una metafora di base per i numeri. Quando si è incominciato a tenere conto della durata e lunghezza dei viaggi, a spezzarli in tappe, non si sono allora usati i numeri per questo, invece che al contrario?

[52] p. 70. La definizione appare un po' diversa da quella del *blend* metaforico, dove l'applicazione va nei due sensi, ma i due domini sono tenuti distinti, ma forse è ritenuta equivalente.

I cammini sono segmenti, quindi questa è in un certo senso la metafora di prima, ma con l'aggiunta del movimento tra i due estremi, dall'origine alla fine. Si tratta di nuovo di un *blend* bidirezionale, anche se non è detto. Lo si vede dalla definizione dell'addizione, che richiede di muoversi da A per una distanza uguale alla distanza che B ha dall'origine; quindi bisogna che tali distanze siano numeri, e non solo viceversa.

Questa metafora è quella che secondo LN permette di parlare di una relazione d'ordine; ma anche quella dei segmenti graduati lo permetterebbe. $\angle$

La metafora del movimento invece, oltre allo zero, produce anche i numeri negativi, perché ovviamente si può andare avanti e indietro. Basta che l'origine del viaggio sia messa in un punto che non sia un estremo.

Infatti LN dicono che quella del moto è stata *crucial*[53] per fornire una comprensione unitaria dei numeri (positivi e negativi); non è chiaro se *crucial* voglia dire solo importante oppure essenziale. Ce ne sono altre che si prestano alla stessa illustrazione intuitiva dei numeri negativi.

Merita soffermarsi su "è stata", come se proprio questa metafora sia stata usata per l'introduzione dei numeri negativi, in una data precisa. Secondo LN l'estensione ai numeri negativi fu fatta da Bombelli nel Cinquecento, grazie alla metafora del moto.

"Oggi, è difficile immaginare che ci fu un tempo in cui tale metafora non era generalmente accettata dai matematici!"

Infatti è difficile capirlo, perchè non è vero, se il tempo a cui si riferiscono LN non è quello preistorico, ma quello precedente Bombelli. L'attribuzione a Bombelli o a chiunque altro di una metafora per la spiegazione dei numeri $\angle$ negativi è molto discutibile. Le cose sono andate diversamente.

L'algebra dei greci poteva evitare i numeri negativi perché era un'algebra geometrica; i numeri misuravano o erano grandezze geometriche, i problemi derivavano da problemi geometrici, e le soluzioni erano costruzioni geometriche, quindi i numeri erano positivi. Ma nella soluzione di problemi aritmetici con origini pratiche, magari nella logistica, i numeri negativi facevano capolino.

I problemi dell'*Aritmetica* di Diofanto sono gli stessi problemi concreti della logistica, trattati nell'aritmetica pura (si veda oltre); come fondazione per i numeri negativi Diofanto usa un abbozzo di metodo assiomatico, dando le regole per una cosa che chiama "deficienza": ad esempio deficienza più deficienza uguale deficienza, deficienza per deficienza uguale disponibilità

[53] p. 73.

(positiva).

Se una metafora è in gioco, non è quella del moto ma quella delle quantità. Verso il Mille Al-Karaji userà una terminologia analoga di eccesso e mancanza.

Un secolo prima di Bombelli, Luca Pacioli introduce i numeri negativi in modo meno consapevole di Diofanto, ma pur sempre postulando la regola dei segni, con la ben nota mnemotecnica:

Piu via piu sempre fa piu
Meno via meno sempre fa piu
Piu via meno sempre fa meno
Meno via piu sempre fa meno

che Bombelli semplicemente ripete alla lettera, scambiando qualche riga.

Le metafore che hanno accompagnato i numeri negativi hanno sempre utilizzato la quantità, con l'aggiunta di una modalità positiva o negativa. Anche Eulero nel Settecento usa la metafora dei crediti e debiti, per mezzo della quale egli giustifica le operazioni con i numeri relativi; e la considerava proprio una metafora, non una vera definizione, tanto è vero che auspicava: "sarebbe certo della massima importanza in tutto lo sviluppo dell'Algebra che ci si formasse un'idea precisa delle quantità negative di cui abbiamo parlato". Sia per esporre che per capire, in matematica non ci si accontenta una metafora.

Ma ammesso che fosse vero quanto dicono LN, ci si chiede che cosa pensano che sia successo. Non c'erano prima di Bombelli le giuste connessioni neuronali, benché si parlasse in qualche caso di numeri con il segno meno? e come si sono stabilite? per un atto di casualità evolutiva che ha colpito i geni di Bombelli o in quel periodo un po' tutti? E subito dopo in tutti i nuovi nati c'erano lamarckianamente le connessioni neuronali? Se la metafora era usata anche prima, era prima una metafora non incarnata?

8 Il G4

Ora che ci sono tutte le metafore fondanti che LN ritengono di base, si può cercare di capire meglio la loro azione e i loro rapporti.

Le metafore danno luogo a particolari forme di espressione, ad esempio "incomincia [a contare] da", come in un viaggio; ma le stesse forme di espressione non si applicano in altre metafore. Da una parte si usa un verbo, e un insieme di locuzioni collegate, dall'altra se ne usa un altro; eppure tutte sviluppano la stessa matematica, come per un'armonia prestabilita.

Si potrebbe pensare che vi sia collaborazione, in fondo una dà qualcosa di più di un'altra, lo zero oppure i numeri negativi. Ma le metafore possono anche essere in contraddizione tra di loro, problema che sfugge all'attenzione di LN; ad esempio se lo zero viene dalla metafora della collezione vuota, allora il sottrarre da zero, dalla collezione vuota, è qualcosa che nessuno sforzo di *stretching* può ammettere.

Le quattro metafore ad ogni modo sono dichiarate indipendenti da LN. A quanto pare se ce ne fossero solo tre non cambierebbe nulla, almeno per l'aritmetica dei numeri naturali, e lo stesso se ce fosse all'opera una sola. Ed è curioso che manchi del tutto (se non andiamo errati) qualsiasi accenno al battito del cuore, così importante per molti (Brouwer).

Il fatto che le G4 - così indicate da LN - siano quattro sembra solo accidentale, oppure dovuto al fatto che gli autori hanno individuato solo queste; potrebbero essercene altre.

LN spiegano l'origine dell'aritmetica nel seguente modo[54]: l'aritmetica innata, che permette addizione e sottrazione fino a 4, viene utilizzata nelle prime esperienze umane nei quattro domini da loro presi in considerazione, peraltro diversi e indipendenti tra di loro. Visto che tale aritmetica funziona in tutti, ciascuno è adatto per l'estensione, e *ciascuno* provoca l'estensione[55].

La base dell'estensione è costituita dalle "correlazioni nell'esperienza quotidiana dell'aritmetica innata e dei domini delle [rispettive] fonti". Le esperienze sono quelle di costruire oggetti, fare dei passi e più tardi usare bastoncini, dita e braccia per misurare lunghezze. La fusione (*conflation*) di aritmetica innata ed esperienze innesca le metafore.

La spiegazione dell'origine situata delle leggi aritmetiche è tutta qui, in due paragrafi.

[54]pp. 77-8, nel capitolo intitolato "Da dove vengono le leggi dell'aritmetica".

[55]Corsivo aggiunto.

Esponiamo alcune perplessità, in spirito costruttivo, dal momento che è del tutto credibile (diremmo ovvio) il contributo del corpo e delle esperienze corporee nella formazione e comprensione dei primi concetti aritmetici. Bisogna evitare di renderlo incredibile con teorizzazioni sbagliate.

Innanzi tutto occorre essere meno vaghi e più cauti sull'aritmetica innata. LN continuano a dire che essa permette l'addizione e la sottrazione fino a 4, ma questo se ci si pensa è molto poco. Intanto 4 è già il confine dove inizia l'indeterminazione, quindi si deve scendere a 3; operazioni sotto a 3 non è che se ne possano fare molte oltre al $+1$, -1 o -2. Con queste restrizioni non si riesce a formulare e riconoscere alcuna legge di quelle che poi la mappa costituente la metafora dovrebbe trasformare in leggi dei numeri; fa eccezione la commutatività e forse associatività dell'addizione[56], ma solo del tipo $1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1$, nella forma

$$\circ \quad \circ\circ = \circ\circ \quad \circ$$

Inoltre l'aritmetica innata non ha nomi neppure per i primi tre numeri, neanche in versione aggettivale, si esprime per subitizzazione.

In secondo luogo, occorre essere meno vaghi sui tempi. Nel periodo in cui possiede solo l'aritmetica innata, poche sono le esperienze senso-motorie accessibili all'infante.

L'estensione delle prime esperienze e la fusione con l'aritmetica inizia e si accompagna con il contare. Pensiamo all'esperienza del compiere i primi passi; all'inizio il bambino ne fa uno o due al massimo; l'educatore inizia a scandire: 1, 2. Quando il bambino riesce a farne una piccola serie, si potrà scandire fino a 4, 5 e così via.

La scansione avviene con la recita della serie numerica. Si creano e si propongono e s'insegnano i nomi per i numeri, nomi utilizzati in modo del tutto diverso da quello delle altre parole note, dei nomi comuni; questo avviene contando; si conta anche senza contare nulla, o se si vuole contando i numeri; questa è la base per la formazione degli ordinali.

La cantilena del contare, quando ancora non si sa niente dei numeri, ha come è noto a tutti una funzione importante per la successiva introduzione dei i discorsi sui numeri, ma sull'argomento LN non dicono niente.

[56] LN dicono che non vale, perché con tre addendi si supera il 4, ma questo caso almeno è disponibile - anche se potrebbe rientrare nella commutatività.

La recitazione dei numeri porta ad accompagnare con i loro nomi le prime estensioni delle esperienze fisiche di base. A questo stadio i numeri non ci sono ancora non solo perché non si sa cosa siano i nomi recitati, ma anche perché non possono ancora essere il prodotto delle metafore, ammesso che lo siano.

In generale, per impadronirsi della terminologia di un dominio, prima eventualmente di trasportarla metaforicamente ad un altro, occorre che i discorsi del dominio fonte siano abbastanza sviluppati, in modo da essere entrati nel linguaggio corrente e familiare.

Non si può adottare e adattare il linguaggio dei viaggi quando i viaggi consistono di due passi, e il linguaggio dei viaggi non c'è ancora.

L'unico argomento di LN è che l'aritmetica innata, sotto a 4, funziona indipendentemente in ciascun dominio. Pensiamo invece che per permettere la metafora si diano due condizioni; innanzi tutto che le esperienze in ciascun dominio siano abbastanza ricche e sviluppate, e in secondo luogo che nell'estensione di queste esperienze ai di là dei limiti dei primi mesi di vita intervenga qualche forma di espressione numerica che non è quella minima innata.

Ma questo modo di guardare all'origine delle metafore va contro la posizione di LN, e in effetti mina la tesi complessiva, per il motivo che cercheremo di illustrare.

Soffermiamoci in particolare sulla tesi che ciascuna metafora darebbe origine da sola ai numeri e all'aritmetica.

La tesi è poco plausibile ma è importante per LN, al punto che fanno carte false per ricavare tutte le leggi di somma e prodotto da ciascuna, anche con metafore non *grounded*, creative e miscelate. Il motivo pare essere il seguente.

Per tutti è ovvio che ci sono diversi discorsi metaforici sui numeri, con provenienze diverse, ma tutti in larga misura compatibili e spesso mescolati o sovrapposti. C'è un'ipotesi naturale, vedremo quale, per spiegare tale fenomeno ma LN non vogliono introdurla, perché diminuirebbe la funzione fondante della metafora.

Quando si trattano questioni di numerosità nei diversi domini, in un caso si parla di grandezza, in un caso di lunghezza e così via.

Quindi quando si fanno discorsi aritmetici si sta parlando di cose diverse a seconda della metafora che si usa, in una caso di collezioni, in un caso di segmenti.

All'interno di un dominio si possono sviluppare al massimo i nomi per i numeri aggettivali; può darsi che si arrivi a dire che una collezione di due mele è più piccola di una collezione di cinque mele, ma non si arriva al 2 e al 5. Il passaggio cruciale per ottenere l'aritmetica è il passaggio dall'aggettivo al sostantivo.

Esistono come è noto lingue in cui le parole per i numeri sono diverse a seconda della natura di quello che si misura.

Non c'è bisogno di andare lontano, nelle isole del Pacifico o al tempo dei Sumeri. Proprio la logistica greca offre un esempio calzante, e permette di constatare l'evoluzione all'interno della stessa società.

La logistica, dice Gemino[57], considera le proprietà dei numeri in riferimento agli oggetti sensibili; e per questa ragione applica ad essi nomi adattati dagli oggetti misurati, chiamandoli [i numeri] a volte meliti (da $\mu\tilde{\eta}\lambda o\nu$, pecora o mela) a volte fialiti (da $\phi\iota\acute{\alpha}\lambda\eta$, coppa, orcio)[58].

L'aritmetica pura, non logistica, nasce quando viene in mente, cioè proprio nel cervello, di introdurre un nuovo nome sostantivato, che poi si usa non solo e non tanto in tutti i domini quanto in un dominio nuovo.

Ai numeri che sono sostantivi si adattano i diversi linguaggi metaforici piegati dalla grammatica a riferirsi agli stessi soggetti.

Per spiegare questa mossa si potrebbe fare l'ipotesi che intervenga e sia di aiuto il riconoscimento che i discorsi relativi alla numerosità nei vari domini hanno delle somiglianze strutturali; questo vorrebbe dire però che si vede la struttura astratta, al di là dell'uso di verbi ed espressioni diversamente fondanti. Ma il riconoscimento di una stessa struttura tira in ballo la vecchia astrazione, che LN non accettano.

Pensare a introdurre una forma di astrazione richiederebbe che una sola metafora non è sufficiente, da cui la tesi di LN sull'indipedenza delle G4.

Se ciascuna metafora è autosufficiente, si pone tuttavia il problema di spiegare come tutte diano la stessa cosa, e LN non lo spiegano.

Da domini così diversi e con parole e discorsi così diversi dovrebbe venire fuori qualcosa di diverso. Tanto più che quando diciamo che i numeri sono collezioni, secondo LN intendiamo proprio dire che sono collezioni[59]. In ciascuna delle G4 i numeri sono cose del mondo[60] e quindi cose ben diverse da

[57]Cfr. Heath, cit., p. 14.

[58]Sono i problemi della logistica formulati in questi termini che si ritrovano in Diofanto in linguaggio aritmetico puro, come se avesse capito che si poteva fare astrazione dal contesto.

[59]p. 80.

[60]Anzi questa circostanza dà origine a una nuova metafora, che "I numeri sono cose del

una metafora all'altra.

Per LN le relazioni tra i quattro domini esistono solo grazie ai numeri, dopo che si è estesa l'aritmetica e non prima. Questo è giusto, ma non per il motivo che adducono, che è confuso. Essi affermano prima che esistono isomorfismi tra i domini delle G4, parola grossa e imprecisa; poi si correggono e affermano che gli isomorfismi esistono solo come composizione dell'applicazione di ciascun dominio con i numeri. Tuttavia questo presuppone che i numeri non siano più cose del mondo, in un caso collezioni e nell'altra lunghezze, perchè altrimenti l'isomorfismo si stabilirebbe direttamente tra i domini.

Le corrispondenze tra i quattro domini invece sussistono perché nello sviluppo delle esperienze in questi domini, su dimensioni maggiori di quelle della subitizzazione, che da sola non fa scattare l'esigenza di ipostatizzare i numeri, interviene già una parvenza di numero.

---

mondo" appunto.

Seconda parte

Dalla seconda parte in avanti, il libro è dedicato alla matematica superiore, e più che di scienza cognitiva si occupa di filosofia della matematica. Gli autori sviluppano quella che chiamano l'analisi delle idee matematiche, che naturalmente protestano essere un prodotto della loro indagine empirica di scienziati cognitivi; ma abbiamo già capito che si tratta di girare sempre la stessa frittata, *metaphors galore* ed *everywhere* in tutte le combinazioni possibili e *blend* sempre più astratti e di ordine superiore.

Nella seconda parte di questo commento non insisteremo più a fare le pulci alle singole metafore, gli esempi che abbiamo visto mostrano a sufficienza che strumento spuntato e pasticciato si riveli nelle forzature a cui viene sottoposto[61].

Poco ci interessa ad esempio rilevare che, dopo aver presentato la metafora "I numeri sono punti sulla retta", LN affermino che "la geometria analitica non esisterebbe senza di essa"[62], quando la metafora che interviene nella geometria analitica è casomai che "I punti della retta sono numeri".

Né è il caso di rompersi la testa per capire cosa significhi la seguente osservazione: le G4 inducono una metafora più generale "I numeri sono cose del mondo", da cui segue la legittima inferenza che i numeri sono entità reali, parte dell'universo. Ne segue quello che è il nucleo del platonismo, incluso ad esempio la credenza che le verità matematiche (relative ad oggetti del mondo) sono scoperte e non create.

Il commento di LN, impegnati come si ricorderà a distruggere il platonismo, è che "è ironico che dallo studio empirico dei numeri come prodotto della mente segua che è naturale per le persone credere che i numeri non siano un prodotto della mente"[63].

L'ironia farà sorridere, ma mi sembra un riso coi denti inchiavardati. Il messaggio è preoccupante; è possibile che la mente ci inganni in questo modo? succede solo per la matematica o anche in altri campi?

Ma è poi vero o LN si sono lasciati tirare dal desiderio di costruire un paradosso? In fondo nessuno crede che l'affetto sia una cosa dello stesso genere del calore, nonostante la metafora relativa.

[61] Le osservazioni che si riveleranno insopprimibili le relegheremo in nota.

[62] p. 6.

[63] p. 81.

Giocare coi paradossi è pericoloso se non si padroneggia la logica; quello proposto da LN è solo un caso di *reductio ad absurdum* debole[64]. Se il cervello produce una matematica che è correttamente pensata, dal cervello, come una cosa non prodotta dal cervello, questo significa che il cervello produce sistematicamente credenze false. È allora legittimo credere che le affermazioni della scienza siano false, in particolare quelle della scienza cognitiva. In particolare non è vero che il cervello produce la matematica.

Non è il caso di soffermarsi ancora su dispute del genere; ma vale la pena capire quale immagine della matematica gli autori ci propinano attraverso la loro analisi delle idee matematiche.

Prima di iniziare l'esame delle varie branche, esprimiamo qui una perplessità generale sul mistero della geometria - geometria euclidea, quella che con l'aritmetica rappresenta la prima matematica ad essere acquisita. LN non ne parlano mai. Forse danno per scontato che sia così fisica che la sua natura incarnata sia ovvia, ma si vorrebbe sapere quale metafora la porta in essere ("I segmenti sono bastoncini"? o corde tese?). Il concetto geometrico di segmento (come quello di linea) interviene nelle metafore fondanti, un altro caso in cui il dominio concreto è descritto per mezzo di concetti matematici.

Ma questa trascuratezza rivela forse una strana idea della matematica a cui LN fanno riferimento, come già faceva sospettare la lista iniziale di domande "fondamentali". LN diranno che loro sono scienziati cognitivi e la matematica la prendono dai matematici, ma in realtà la prendono da una filosofia della matematica (proprio quella contro cui vogliono combattere) oppure da sistemazioni che, la storia insegna, sono sempre provvisorie nell'enfasi che pongono sull'una o sull'altra disciplina.

[64] La tautologia $(A \to \neg A) \to \neg A$.

9 Algebra

L'algebra è il paradiso dello scienziato cognitivo, ché riesce a spiegarla compiutamente in base a tre cose che sono il suo pane: metonimia, metafora e teorie del senso comune.

9.1 Variabili

Una prima osservazione di LN sull'algebra, intesa come calcolo letterale, con le espressioni, riguarda la variabile[65]. LN fanno giustamente notare che l'uso delle variabili è presente anche nel linguaggio comune al di fuori della matematica; non si tratta di una scoperta originale, perché è ovvio il parallelo tra le variabili e i pronomi indeterminati, anche in presenza di quantificatori; LN però individuano e indicano il fenomeno linguistico soggiacente nella metonimia.

La metonimia in questione è chiamata "Ruolo per individuo".

Quando si dice "Quando viene il ragazzo che consegna le pizze, dagli la mancia" è in gioco uno schema concettuale "Ordinare una pizza da asporto" in cui compare un ruolo, quello del "ragazzo che consegna la pizza"; la mancia consiste nel dire di dare la mancia a un individuo, identificato però dal ruolo.

Una metonimia del genere, certo presente nel linguaggio comune, non compare tuttavia nell'analisi logica della frase che porta alla formalizzazione usata in matematica. Quello che LN chiamano ruolo viene riconosciuto come un predicato, P per "essere un ragazzo che porta la pizza", e "il ragazzo che porta la pizza" è reso da $P(x)$, corrispondente a "uno che P" o "quello che P".

Non sembra perciò che la metonimia "Ruolo per individuo" sia la spiegazione migliore della variabile matematica.

9.2 Assiomi ed essenze

Tutti gli enti matematici sono concettualizzati come oggetti, quindi hanno un'essenza, secondo la teoria ingenua (o del senso comune, *folk theory*) sulla natura del mondo che LN fanno risalire alla filosofia pre-Socratica [*sic*], senza però indicare alcun nome prima di Platone.

[65]p. 74.

Secondo la teoria ingenua ogni oggetto o ente ha un'essenza. Le metafore di base per caratterizzare le essenze sono tre, "Le essenze sono sostanze", "Le essenze sono forme", "Le essenze sono schemi di cambiamento".

Ad esempio l'essenza di un albero consiste nell'essere di legno (sostanza), nell'avere radici, tronco e rami e foglie (forma) e una particolare evoluzione vitale (schema di cambiamento)[66].

Dopo aver presentato le metafore dell'essenza, LN ci dicono che Aristotele avrebbe presentato l'essenza delle categorie con definizioni, intendendo con "definizione" l'enunciazione delle condizioni necessarie e sufficienti per appartenere alla categoria. Non si capisce come le definizioni quali strumento per esprimere l'essenza si accordino con le metafore; certamente non sembrano metafore e sono diverse dalle tre metafore di base; eppure sarebbero come vedremo la mossa tipica della matematica.

> Euclide trasportò la teoria delle essenze in matematica con grande risonanza. Egli sosteneva che solo cinque postulati caratterizzavano l'essenza dell'argomento della geometria piana[67].

Questo è vero solo se si legge Euclide alla luce della teoria della scienza di Aristotele, e si vedono le sue definizioni come caratterizzanti il *genus* della disciplina. Ma si tratta di una lettura *naive*; Euclide non presenta alcuna considerazione metodologica, ed è molto più probabile che i suoi assiomi e definizioni volessero esprimere i risultati delle operazioni con riga e compasso. Finché è durata l'influenza della filosofia, prima aristotelica poi razionalista, è tuttavia vero che gli assiomi di una teoria sono stati concepiti in questo modo e l'interpretazione dell'assiomatica di Euclide nella *folk theory* resta quella di LN.

> Di qui venne l'idea che ogni argomento di matematica dovesse essere caratterizzato nella sua essenza in questo modo, una breve lista di assiomi, prese come verità, da cui tutte le altre verità relative allo stesso argomento potessero essere dedotte.

[66]Le pietre non hanno l'ultima caratteristica, quindi forse basta una o l'altra per esprimere l'essenza, come in effetti sarà per l'algebra. Ma l'esempio addotto farebbe pensare che tutte e tre intervengano; almeno forma e sostanza sembrano attribuibili sempre agli oggetti. Vero è che Platone dirà che le essenze sono Forme, ma parlava di idee, non di oggetti.

[67]p. 109.

> La matematica come disciplina ha seguito la definizione aristotelica di "definizione" di un'essenza: una collezione di condizioni necessarie e sufficienti che rendono una cosa quello che essa è e da cui seguono tutte le sue proprietà naturali[68].

Le cose sono andate così, non fino a Gödel come dicono senza spiegazioni LN, ma fino alla fine dell'Ottocento e alla conquistata consapevolezza che gli assiomi non costituivano definizioni necessarie e sufficienti, in quanto ogni sistema di assiomi aveva sempre una pluralità di intepretazioni diverse; si sono chiamati definizioni implicite o definizioni descrittive[69].

Non è più ammissibile dopo Enriques, Hilbert etc. sostenere che

> Il metodo assiomatico assume che ogni sistema matematico può essere caratterizzato completamente da un'essenza - vale a dire da un numero relativamente piccolo[70] di proprietà essenziali[71].

Gli assiomi dei gruppi non stabiliscono affatto condizioni necessarie e sufficienti, se non per essere un gruppo, ma non caratterizzano alcun sistema matematico, se un sistema matematico, per anticipare gli esempi che vedremo, è qualcosa come l'aritmetica modulo 3 o l'insieme delle rotazioni.

I modelli non standard dell'aritmetica provano proprio che gli assiomi non stabiliscono condizioni necessarie e sufficienti per essere un numero naturale o la struttura dei numeri naturali.

Non pare coerente comunque sostenere con LN che il metodo assiomatico è nato in Grecia e non in altre civiltà *a causa* della centralità della teoria ingenua delle essenze nella filosofia greca[72]; esso casomai sarebbe nato - seguendo LN - dall'idea di Aristotele di esprimere l'essenza per mezzo di definizioni con condizioni necessarie e sufficienti, idea che non sembra appartenere alla teoria ingenua.

---

[68] pp. 109-10.

[69] Per una discussione del metodo assiomatico, si veda G. Lolli, *Da Euclide a Gödel*, Il Mulino, Bologna, 2004.

[70] Chissà perché LN continuano a mettere questa condizione; l'aritmetica e la teoria degli insiemi hanno infiniti assiomi.

[71] p. 118.

[72] p. 118.

9.3 Algebra ed essenza

L'algebra considerata da LN è l'algebra moderna, teoria delle strutture, dove ogni classe di strutture è individuata dai relativi assiomi.

L'algebra intesa in questo senso data dall'inizio del secolo; è ironico che il primo manuale di algebra moderna[73] sia apparso nel 1931, proprio l'anno di Gödel, che secondo LN segnerebbe la fine del metodo assiomatico.

"L'algebra concerne l'essenza. Essa fa uso della metafora ... 'L'essenza è la forma'. L'algebra è lo studio della forma o 'struttura' matematica ... essa è concettualizzata come caratterizzante le essenze negli altri rami della matematica"[74].

Alla prima lettura, tralasciando l'essenza, si potrebbe essere d'accordo, anche se sarà bene che gli insegnanti evitino simile terminologia. Ma gli autori vi ricamano sopra, esagerando.

La matematica per LN implicitamente assume una particolare metafora per l'essenza dei sistemi matematici: "L'essenza di un sistema matematico è una struttura algebrica astratta". Data una struttura, ad esempio quella dell'aritmetica modulo 3, l'algebra chiede quale sia l'essenza della struttura. L'essenza di una struttura matematica è considerata includere, nella considerazione dell'algebra, (i) gli elementi della struttura[75], (ii) il numero e tipo di operazioni, (iii) le proprietà essenziali delle operazioni.

Quando LN introducono una parola, questa diventa subito irrefrenabile ed onnipresente e moltiplica i suoi significati: succede con la metafora, ma ora anche con l'essenza. Prima l'essenza dell'algebra è dichiarata essere la forma o struttura. In matematica tuttavia si studiano sistemi (sarebbe opportuno ricordare da quando). Sistemi e strutture compaiono come sinomini in alcune frasi, come lo sono spesso nel gergo matematico, ma qui non dovrebbero, perché una struttura è l'essenza di un sistema.

L'essenza di una struttura, che è già un'essenza, deve essere una cosa ben strana, e infatti essa non è data da nessuna delle metafore dell'essenza, ma in altro modo, cioè con la caratteristica che in matematica comunemente si chiama il tipo o a-rietà della struttura ((i), (ii) e (iii) di sopra). Forse LN volevano dire, o avrebbero dovuto dire, che così si presenta l'essenza di una sistema, e quindi una struttura è caratterizzata da (i), (ii) e (iii) (comunque

[73] van der Waerden, *Moderne Algebra*.

[74] p. 110.

[75] Questo è impreciso, o falso, e neanche rispettato da LN, che nell'esempio seguente preciseranno solo il *numero* di elementi della loro struttura.

non una metafora), e così lo intenderemo.

LN propongono come illustrazione il sistema matematico che è costituito dall'insieme $\{0, 1, 2\}$ con l'addizione modulo 3, presentato con una tabella per l'addizione. Osservano che valgono per l'addizione le leggi associative e commutative, che c'è un elemento identico 0 e l'inverso.

L'essenza di questo sistema è l'insieme dei tre elementi, con una operazione binaria e le leggi riguardanti l'addizione (si suppone quelle elencate, ma non si sa come sono state scelte[76]). Ora però ci viene detto che l'algebra concerne *essenze generali*, un nuovo tipo di essenze, quindi essa studia una struttura con insieme $\{I, A, B\}$ e un'operazione $*$ che ha una tavola analoga alla precedente.

Questa struttura è chiamata *gruppo commutativo con tre elementi*.

Ora intervengono una serie di metafore dell'Essenza Algebrica, EA, di cui un esempio è "L'addizione modulo 3 è un gruppo commutativo con 3 elementi".

La mappa associata si può immaginare, manda $\{I, A, B\}$ in $\{0, 1, 2\}$, I in 0, $*$ in $+$ e così via.

Ricordiamo che nella specificazione del tipo di una struttura non si precisa in generale il numero di elementi; si può dire che l'algebra come teoria delle forme comprende una struttura "gruppo commutativo", ma non "gruppo commutativo con tre elementi". Questa è certo una struttura algebrica, ma rientra nei casi particolari, o nelle applicazioni. Perché LN abbiano scelto questo modo di esposizione è difficile capire; anche se vogliono partire dal sistema dell'aritmetica modulo tre, possono benissimo riconoscere in esso solo la struttura di gruppo commutativo, e quindi precisare come un accidente che è un gruppo con tre elementi. Forse fanno così perché vogliono scrivere la tabella per $*$ in analogia a quella per l'addizione; ma in tal modo danno un'idea sbagliata dell'assiomatica, oscurando il fatto che come sia $*$ non bisogna postularlo, segue dagli assiomi dei gruppi commutativi, se si può mettere la struttura di gruppo commutativo su un insieme di tre elementi.

Abbiamo detto sopra "riconoscere la struttura di gruppo commutativo" senza accorgerci che eravamo su un terreno minato. Infatti

[76] Gli autori direbbero che essi vogliono capire dal punto di vista cognitivo la matematica, e la prendono come è. Ma qui per una volta considerano anche la storia, e ricordano che prima si sono studiati sistemi particolari, quindi è intervenuta l'algebra. Dunque, prima dell'intervento dell'algebra, sopra descritto, l'aritmetica modulo 3 non era concettualizzata in questo modo.

> I matematici parlano dell'addizione modulo 3 come se fosse letteralmente un gruppo commutativo con tre elementi, o come "avente la struttura di un gruppo commutativo con tre elementi". Ma in una prospettiva cognitiva questa è un'idea metaforica.

Il concetto è reso più chiaro secondo LN da un altro esempio, quello delle rotazioni di un triangolo di 120, 240 e 360 gradi. Le rotazioni sono rotazioni.

> Per concettualizzare il triangolo come dotato di una struttura di gruppo occorre un modo molto speciale e per nulla ovvio di concettualizzare rotazioni, successioni di rotazioni e loro risultato in termini di una struttura gruppale astratta[77]. Dal punto di vista cognitivo - la prospettiva secondo la quale si concettualizza un genere di cose in termini di cose molto differenti - quello che occorre è proprio la mappa metaforica.

Se abbiamo capito bene, LN intendono che non si può dire, o che è impreciso, ingannevole, dire che l'insieme delle rotazioni ha la struttura di gruppo, ma che noi le comprendiamo come se fossero un gruppo.

La distinzione è alquanto forzata, perché quando un matematico afferma che l'aritmetica modulo 3 ha la struttura di gruppo non vuole affermare che essa possiede la struttura come si possiede una cosa, tenendola in tasca. Vuole dire che una delle prospettive possibili per studiare l'aritmetica modulo 3 è quella di considerare le proprietà gruppali dell'addizione, ma sa benissimo, e lo dimostra nella sua trattazione, che quella non è l'unica prospettiva. Sa ad esempio, come forse LN non sanno, che nell'aritmetica modulo 3 esiste anche un'altra operazione di moltiplicazione, e che quindi è possibile, se non doveroso, considerare anche altre strutture algebriche collegate alla sua aritmetica.

Ma che tipo di metafora sarebbe poi una EA? Non è più il caso a questo livello di preoccuparsi del radicamento, tuttavia è evidente che nelle metafore EA in generale, e negli esempi proposti, il dominio di origine (algebra) è più astratto del dominio bersaglio (sistemi matematici), sotto qualunque accezione (e comunque sotto quello usuale in matematica).

Come minimo ci dovrebbe essere una priorità di qualche genere, una precedenza temporale, una maggiore familiarità per usare i discorsi di un

[77] [In breve, per fare A occorre fare A].

dominio in un altro, e invece con le strutture algebriche le cose stanno al contrario.

Dicono LN:

> La struttura cognitiva di un'entità algebrica (un gruppo ad esempio) non è un'essenza che inerisce in altre strutture cognitive di entità matematiche (ad esempio collezione di rotazioni). Le rotazioni sono concettualizzate indipendentemente dai gruppi, e i gruppi indipendentemente dalle rotazioni[78].

Questo è vero solo in parte. Le strutture algebriche non sono concettualizzate indipendentemente dalle varie strutture (relativamente) concrete che le hanno precedute. L'idea di gruppo nasce dopo diversi esempi (certo non tutti) di sistemi matematici in cui una operazione binaria soddisfa le stesse proprietà.

Tali proprietà sono codificate negli assiomi dei gruppi, ed essi risultano veri in ciascuno dei sistemi prima considerati (e in altri). In alternativa, si dica che si forma l'idea di gruppo e si può usare la metafora che le rotazioni sono un gruppo, l'aritmetica modulo 3 è un gruppo ...

LN non dicono quali sono gli assiomi di gruppo ma forse sanno che sono le proprietà che mettono nella tabella della mappa metaforica.

Viene da dubitare che sappiano invece cosa è la metafora dell'essenza, se concludono il loro capitolo con l'affermazione

> La metafora - L'essenza di un sistema matematico è una struttura algebrica astratta - attribuisce essenza a strutture algebriche (come i gruppi) che sono mappate su altre strutture matematiche (collezioni di rotazioni)[79]

Prima era il gruppo che era l'essenza delle rotazioni, data dalla metafora, ora $\angle$
invece la metafora dà essenza ai gruppi.

Nella trattazione dell'essenza LN ricordano i gatti che giocando col gomitolo restano attorcigliati nel filo.

[78]p. 119.
[79]pp. 119-20.

10 Classi e logica simbolica

Su questo argomento c'è poco da dire, l'essenziale è già stato discusso a proposito della metafora dei contenitori. Una classe infatti è concettualizzata come l'interno di un contenitore. La metafora non sembra del tutto felice, perché in questo modo gli elementi della classe possono variare al variare del contenuto dei contenitori. Sembrerebbe più adatta la metafora delle collezioni, o dei mucchi di oggetti. Si tratta ad ogni modo di una metafora fondante.

Quindi LN ripetono la (più che) dubbia tesi che Aristotele avrebbe fatto uso della metafora "I predicati sono classi" e infine Boole avrebbe fatto uso della metafora "Le classi sono numeri".

Boole si sarebbe accorto che concettualizzando le operazioni di unione e intersezione come addizione e moltiplicazione le leggi commutative, associative e distributive dell'aritmetica sarebbero state vere per le classi. Per trovare un corrispondente di 0 e 1 rimpolpa la metafora inventando la classe vuota e la classe universale, ma anche così falliscono ancora le leggi di idempotenza.

A proposito, viene da chiedersi se nei discorsi sui contenitori cápiti mai se non ai folli di parlare di fare l'unione (o l'intersezione) di un contenitore A con A, con conseguente riconoscimento dell'idempotenza.

Fallisce anche la distributività dell'unione rispetto all'intersezione, ma di questo LN tacciono.

Allora Boole modifica la tavola dell'addizione e restringendola solo a $\{0, 1\}$ ottiene la validità di tutte le leggi delle classi (quali? quelle che conosceva, quelle su cui LN si sono soffermati? quelle che sono poi diventate gli assiomi della algebre di Boole?).

Le successive tappe descritte sono presentate come una storia realistica ma naturalmente non lo sono. Boole ha formulato leggi non per le classi ma come "leggi del pensiero", certamente in versione algebrica, ma nel senso del formalismo e di identità formali.

Le leggi che ha individuato non sono gli assiomi delle algebre di Boole[80] a cui si è arrivati in seguito con successive modifiche; non si è certo "rivolto all'algebra" nel senso dell'algebra astratta per trovare l'essenza delle classi.

In conclusione comunque la metafora di Boole sarebbe una metafora EA per le classi, affermando che la loro essenza è un'algebra di Boole. Ricordiamo

[80]Si veda T. Hailperin *Boole's Logic and Probability*, North Holland, Amsterdam, 1976.

che in matematica si dice che un'algebra di insiemi è un'algebra di Boole perché soddisfa (con $\sim, \cap, \cup, \emptyset, U$) gli assiomi delle algebre di Boole.

La storia continua con la logica simbolica, che concettualizzerebbe le proposizioni in termini di classi, "ogni proposizione P *essendo* (metaforicamente naturalmente) la classe degli stati dell'universo in cui P è vera"[81].

Non si capisce perché LN seguano questa strada difficile invece di usare la normale definizione semantica di soddisfazione data nella logica proposizionale, secondo cui a ogni proposizione si può associare (o la proposizione è metaforicamente) l'insieme delle interpretazioni che la soddisfano. Almeno le interpretazioni sono più dominabili degli stati dell'universo. Gli stati dell'universo, i cosiddetti mondi possibili, sono un'acquisizionze recente della semantica che serve soprattutto per le logiche modali.

Ma la perplessità maggiore riguarda il fatto che normalmente la direzione di tutte queste metafore è rovesciata, a partire da quella di Aristotele. I sottoinsiemi di un universo U (le classi di LN) sono di solito introdotti agli studenti come insiemi di verità di proposizioni: a ogni proposizione $p(x)$, dipendente da una variabile, si associa l'insieme degli elementi che la soddisfano

$$X = \{x \in U \mid p(x) \text{ vera in } U\},$$

e le operazioni insiemistiche le loro proprietà dipendono da quelle logiche della negazione, congiunzione e disgiunzione.

Nel periodo dello sviluppo della logica simbolica di fine Ottocento, i vari autori consideravano equivalenti le due impostazioni, e la priorità tra classi e proposizioni come materia di preferenza. Non c'era e non c'è alcuna priorità concettuale[82].

[81] p. 131.

[82] Naturalmente si può sempre aggiungere che le metafore in questione sono bidirezionali.

11 Insiemi

La teoria degli insiemi è fondata da LN, oltre che sulla metafora dei contenitori, sulla metafora "Gli insiemi sono oggetti" - in modo da permettere di parlare di un insieme come elemento di un altro insieme.

Non si capisce la necessità di tale metafora dal momento che nella Figura 2.1a ci era stato mostrato un contenitore dentro ad un altro, e ci erano state presentate le leggi della logica (*built in* nello schema) di *in* nella forma "se il contenitore A è nel contenitore B ...".

Segue la definizione, *pardon* la metafora, che la coppia ordinata $\langle a, b\rangle$ è l'insieme $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Prima di questa, la coppia ordinata era concettualizzata attraverso lo schema del cammino (*path*), dall'origine a al termine b. Quest'ultima tuttavia, che tutti considererebbero una metafora, a differenza della definizione $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, misteriosamente non lo è per LN.

La metafora proposta tuttavia non sembra trasferire a $\langle a, b\rangle$ il discorso sulla prima e la seconda componente, la precedenza della sinistra sulla destra. Non si vede immediatamente che non è simmetrica, occorre dimostrarlo in maniera abbastanza intricata.

La metafora della coppia ordinata permette naturalmente di concepire le relazioni come insieme di coppie ordinate; per LN permette anche di concepire i numeri naturali come insiemi, attraverso la definizione di von Neumann, che riportano come metafora, e in cui come si può vedere la coppia ordinata non interviene per nulla[83].

L'unico altro argomento di teoria degli insiemi che viene discusso è la definizione di cardinalità.

Cantor inventò la metafora che avere lo stesso numero di elementi significa essere messi in corrispondenza biunivoca. Secondo LN questa è la prima volta che l'accostamento dei due concetti è espresso come una metafora; in effetti di solito lo esprimiamo come una definizione di "lo stesso numero di" o "la stessa cardinalità".

Secondo LN la metafora della corrispondenza biunivoca fa ricorso ad un concetto ben diverso (*very different*) dal nostro ordinario concetto di avere lo stesso numero di elementi.

Nel senso comune, ci dicono LN[84], A e B hanno lo stesso numero di elementi se "per ogni elemento di A si può togliere un corrispondente elemento

[83] Sulla questione LN ritornano a p. 151 per fare una tempesta in un bicchiere d'acqua, come vedremo.

[84] p. 142.

di B ed esaurire B".

Non sembra questa un'idea né una formulazione molto diversa da quella della corrispondenza biunivoca, sicché non è giustificata, o è autoreferenziale, la deplorazione rivolta da LN a quanti confondono gli studenti non facendo notare la grande differenza tra il termine tecnico metaforico di Cantor e la nozione ordinaria.

Ma la verità è che nessuno risponderebbe in questo modo; provare per credere; la nozione comune è un'altra; chiunque risponderebbe che A e B hanno lo stesso numero di elementi se contando i loro elementi si ottiene lo stesso risultato.

I numeri transfiniti per contare gli insiemi infiniti non c'erano ancora. Cantor notò che per gli insiemi finiti le due nozioni del contare e del mettere in corrispondenza biunivoca coincidono, e sfruttò l'equivalenza per definire i numeri infiniti per mezzo delle corrispondenze biunivoche. Un procedimento che sembra più sottile ed intelligente di una metafora arbitraria.

Dopo questo accenno a Cantor si passa subito alla teoria assiomatica di Zermelo-Fraenkel[85], per dire che nella visione formalista [*sic*] del metodo assiomatico si chiamano insiemi una qualunque struttura che soddisfi gli assiomi. In particolare gli insiemi non sono concepiti in base alla metafora dei contenitori. Ma siccome nell'uso comune prevale questa metafora, che "è coerente con gli assiomi" e che comporta $x \notin x$, "venne proposto" l'assioma di fondazione che lo implica[86].

A sottolineare lo stacco dalla metafora dei contenitori, viene dato risalto ad un'altra teoria, quella degli iperinsiemi[87]. Di questa non sono elencati gli assiomi se non per il cosiddetto assioma di anti-fondazione; gli altri ad ogni modo sono come in ZF.

I modelli più interessanti e intuitivi della teoria degli iperinsiemi utilizzano

---

[85] L'assioma di rimpiazzamento è chiamato assioma di specificazione, p. 142; l'assioma nella letteratura qualche volta si trova chiamato assioma di sostituzione, ma *specification* è una novità.

[86] In questo modo sembra che l'assioma di fondazione non rientri tra quelli di Zermelo-Fraenkel. In realtà non è così universale l'uso di separare l'assioma di fondazione da quelli di ZF, anzi prevale la posizione contraria.

[87] Questa teoria è iniziata con le ricerche di M. Boffa in Belgio sull'assioma di fondazione, e con quelle fondazionali di E. De Giorgi e dei suoi allievi F. Honsell e M. Forti sull'anti-fondazione. Della teoria si è impossessato poi il mondo anglosassone attribuendola a P. Aczel, ed essa è stata usata per formalizzare alcuni tipi di paradosso, visto che ammette cicli, in particolare da J. Barwise e L. Moss, che tuttavia non sono i creatori della teoria, come potrebbe sembrare dall'unico riferimento bibliografico di LN.

i grafi per rappresentare gli iperinsiemi, e lo stesso assioma di anti-fondazione è formulato in termini di grafi, che ammettono cicli o catene discendenti infinite. Non tutti i modelli sono necessariamente sistemi di grafi, come potrebbe sembrare dalla metafora che LN mettono alla base della teoria, la metafora che gli insiemi sono grafi[88] .

Non vale l'equazione iperinsiemi uguale grafi, come non vale insiemi uguale contenitori. Ma grazie al ricorso esclusivo alle metafore, LN tendono a vedere un solo modello per ciascuna metafora.

LN considerano il fatto che la teoria soddisfi gli assiomi di ZF (meno quello di fondazione), come prova che gli assiomi di ZF "non definiscono il nostro concetto ordinario di insieme come contenitore"[89].

Dovrebbero perciò essere grati all'assiomatica formalista che permette questa conclusione, ma non pare che lo siano.

Se avessero considerato l'esistenza di diversi modelli di ZF sarebbero potuti arrivare alla stessa conclusione anche senza dover ricorrere ad un'altra teoria, che non ha assolutamente l'importanza che sembrano attribuirle.

Ma è esagerata l'affermazione che

> Gli assiomi della "teoria degli insiemi" non si riferiscono, e non hanno mai avuto intenzione di riferirsi a quelli che ordinariamente chiamiamo "insiemi", che concettualizziamo in termini di contenitori.[90]

LN sembrano suggerire che siccome gli assiomi sono formali, allora non corrispondono a nessuna intuizione (così i matematici parlano di quelle che LN chiamano metafore), anche se hanno appena riconsociuto che sono compatibili con quella dei contenitori.

Ma gli assiomi della teoria degli insiemi non sono stati inventati in un colpo solo, come formule prive di significato, bensì proprio con l'intento di formalizzare discorsi intuitivi. Soltanto che sono nati dagli usi linguistici di un termine che erano plurimi, dipendevano in realtà da diverse intuizioni e producevano antinomie che derivavano dalla sovrapposizione di queste intuizioni; tra di esse un posto preminente ha avuto naturalmente quella delle collezioni.

[88]Sarebbe più corretto dire che gli iperinsiemi sono grafi, visto che questa è la teoria degli iperinsiemi.

[89]p. 148.

[90]p. 148.

Altrettanto preminente è stato il ruolo delle proprietà. L'assioma di estensionalità ad esempio non ha senso per i contenitori, mentre è cruciale per passare dalle proprietà alle loro estensioni. Le antinomime del principio di comprensione di Frege mostrano che non si può associare a ogni proprietà un contenitore.

Come abbiampo già visto, l'unione di due insiemi può corrispondere ad un'operazione su contenitori, ma l'unione di un insieme di insiemi no, nonostante e la sua importanza e la semplicità della sua definizione. La definizione dell'unione non sembra guidata (*driven*) da alcuna intuizione, ma dal linguaggio, che tratta il quantificatore esistenziale $\exists$ come una generalizzazione della disgiunzione $\vee$.

Per tornare infine alla coppia ordinata, LN notano che con la definizione di von Neumann per cui $1 = \{\emptyset\}$ e $2 = \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$, la coppia $\{1, 2\}$ è l'insieme $\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$; questo insieme è anche la coppia ordinata $\langle 0, 1\rangle$. Che confusione! – secondo loro.

Avrebbero potuto sollevare un caso anche con la coppia ordinata $\langle x, x\rangle$ che non è una coppia.

Si dimenticano di dire che questo è l'unico caso, con i numeri, che con numeri maggiori non succede e neanche con le terne; che la definizione di coppia ordinata presentata è solo una di quelle possibili; altre definizioni non danno questo problema, anche se possibilmente altri, sempre contenuti in uno o due casi[91].

Invece di dire che il caso è banale e non merita che vi si perda tempo, il loro commento è che dal punto di vista cognitivo non c'è alcun problema, perché differenti concetti metaforici possono avere la stessa origine. "Fuoco" può significare sia che uno è innamorato, nella metafora dell'amore come calore, sia che uno è vicino al successo (come nel gioco fuoco-acqua).

Questa del fuoco non sembra una situazione tanto innocua, a differenza dell'esempio matematico. Come sarebbe a dire che l'ambiguità di "Fuoco" non è un problema? può ad esempio essere pronunciato da o a proposito di un *gigolo* che sta per piegare una donna alle sue voglie e invece si finge innamorato.

Secondo LN dalla discussione si ricava che le metafore della coppia ordinata e quella dei numeri di von Neumann servono il loro scopo dando origine a matematica interessante e quindi sono accettabili come metafore. Alla

[91] Ad esempio si possono scegliere due insiemi distinti a e b e porre $\langle x, y\rangle = \{\{a, x\}, \{b, y\}\}$; si hanno allora anomalie con le coppie con componenti a o b.

faccia della chiarezza concettuale e dei meccanismi cognitivi.

Dunque tutta la discussione è stata una tempesta in un bicchiere d'acqua. Se c'è di mezzo una metafora tutto va bene. Invece ci sarebbero problemi nella definizione letterale della coppia ordinata. Quali non è detto, non se ne vedono[92], e non è neanche detto cosa sia una definizione letterale.

La morale della trattazione, che confessiamo di non aver capito, è che la matematica non è letteralmente riducible alla teoria degli insiemi preservando le differenze concettuali. Il problema segnalato a proposito della coppia ordinaria metterebbe in crisi il riduzionismo insiemistico.

Una "definizione letterale" sembrerebbe indicare una definizione che non è concepita come metafora.

> È importante distinguere tra definizione letterale e definizione metaforica. In verità ci sono talmente tante metafore concettuali usate in matematica che è estremamente importante capire bene cosa sono e tenerle distinte[93].

Non potrebbe essere detto meglio. Se solo tutti si attenessero a questo precetto. Credevamo di aver capito però che l'indagine cognitiva non volesse essere un contributo alla matematica ma solo alla sua comprensione. Le definizioni metaforiche non dovrebbero perciò essere un nuovo tipo di definizioni da affiancare a quelle usuali, casomai solo un'intepretazione della metafora soggiacente alla definizione. A quanto pare non è così.

---

[92] LN avrebbero potuto aggiungere per tranquilizzare il lettore che la coincidenza tra $\{1,2\}$ e $\langle 0,1\rangle$ non dà alcun fastidio matematico.

[93] p. 152.

Commiato

Il libro continua con due parti consistenti. Una è la trattazione dell'infinito, l'altra è una polemica ideologica contro la matematica moderna rappresentata dalla rigorizzazione e dall'aritmetizzazione dell'analisi.

La (scoperta della) metafora dell'infinito è stata per LN la spinta a scrivere il libro e ad affrontare la matematica nella sua globalità. La metafora è press'a poco così.

Da una parte il dominio origine è costituito da tutti i processi che terminano; dall'altra il dominio bersaglio è costituito da tutti i processi che vanno avanti all'infinito. La mappa metaforica trasporta dall'origine al bersaglio la fine dei processi, per cui tutti i processi che non terminano vengono ad avere una fine. La mappa è creativa, trasportando tuttavia solo la fine dei processi.

Non si capisce perché porti solo quello e non trasferisca anche altro, facendo sì che le leggi degli insiemi infiniti siano le stesse di quelle degli insiemi finiti.

Sarebbe bello seguire le fantasiose acrobazie che si prospettano. Ma purtroppo non abbiamo tempo né, sinceramente, voglia di continuare la discussione, e ci fermiamo qui. Sulla polemica ideologica abbiamo già fatto alcune osservazioni nella recensione di un precedente lavoro di LN, preparatorio dell'attuale libro[94], osservazioni che possono utilmente complementare quelle qui presentate.

Dopo aver chiosato il libro fino a p. 150 possiamo esprimere tuttavia una conclusione sostenuta dai riscontri testuali: mai abbiamo incontrato nella letteratura della o sulla matematica un testo che assommi tanta presunzione e prosopopea a tanta ignoranza e ingenuità. Alla matematica ci si dovrebbe avvicinare con timore e tremore, per le sue abissali difficoltà, tecniche e storiche. Se non si è in grado non dico di dominare la sua complessità, ma anche solo di orientarsi in essa, ci si dovrebbe astenere dal pontificare.

A ciò si aggiunga un'esposizione sciatta, *sloppy*, approssimativa, ripetitiva, imprecisa, senza rispetto delle regole dei riferimenti puntali, incu-

[94]*La metafora in matematica*, in *La parola al testo*, Scritti per Bice Mortara Garavelli, a cura di G. L. Beccaria e C. Marello, Edizioni dell'Orso, Alessandria, 2002, pp. 221-32. Il testo di LN è *The Metaphorical Structure of Mathematics*, in L. D. English (a cura di), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*, Lawrence Erlbaum Associates, London, 1997, pp. 21-89.

rante della concordanza interna di quanto viene affermando con la massima sicumera.