Presentazione di *Da Euclide a Gödel*

Accademia delle Scienze, Torino 13 giugno 2005

Interventi di Andrea Cantini e Ettore Casari

Replica di

Gabriele Lolli

Per il pubblico che non ha letto il libro aggiungo qualche informazione generale a quelle proposte dai relatori.

La motivazione del libro è, come capita spesso, dettata dalle origini occasionali. A Euclide sono arrivato andando all'indietro. Dovevo fare alcune lezioni al Master in Comunicazione scientifica dell'Università, e naturalmente a me di cosa chiedono di parlare se non di Gödel? Ma per inquadrare il lavoro di Gödel occorre parlare del programma di Hilbert per la dimostrazione di non contraddittorietà, e per illustrare quest'ultimo occorre descrivere la proliferazione delle teorie assiomatiche di fine Ottocento e la rivoluzione nel metodo assiomatico allora verificatesi. Parlare di rivoluzione del metodo assiomatico fa drizzare i capelli, tutti pensano che la matematica sia l'unico luogo felice dove non ci sono rivoluzioni; viene la curiosità di sapere come era la matematica prima della rivoluzione. Se si va ancora indietro si vede che la pratica matematica non si adeguava al mito del metodo assiomatico euclideo che tuttavia era sempre ritualmente riconosciuto come modello, e questa divergenza si manifesta subito dopo Euclide: in tutti gli argomenti non geometrici, dall'aritmetica di Archimede ai numeri negativi di Diofanto al calcolo infinitesimale alla proiettiva i matematici si confrontano con la necessità di organizzare il loro lavoro basandosi molto di più su varie soluzioni logiche via via inventate che non sulla evidenza dei postulati.

Questo lungo lavorio culmina a fine Ottocento, con una accelerazione intrinsecamente guidata, nella codifica del metodo ipotetico deduttivo.

La storia dell'emergere della natura logica della matematica costituisce tuttavia solo una metà del libro. L'altra è dedicata a ciò che dai risultati di Gödel si irraggia verso il futuro, per due motivi. Uno è che in generale i grandi risultati di solito non solo chiudono una problematica, evento che di per sé potrebbe avere solo un interesse storico, ma aprono prospettive nuove, e in questo sta il loro valore. L'altro motivo è che ciò è particolarmente vero per Gödel, e che se non si riconosce la fecondità del suo lavoro si finisce per darne una valutazione non solo riduttiva ma scorretta.

La ricezione dei teoremi di Gödel mostra un paradosso che è segno della malattia della nostra cultura. Mentre Gödel realizza uno sconvolgente successo e potenziamento della ragione, il suo lavoro è spesso presentato come una prova a sostegno del relativismo e della debolezza della stessa.

Quello che chiamo successo della ragione consiste nella capacità di riconoscere e trattare la distinzione tra linguaggio e metalinguaggio, nel domare e dominare il fenomeno dell'autoriferimento piegandolo a strumento di ragionamento non paradossale, come era stato fino ad allora. E soprattutto nel fornire gli strumenti per una trattazione precisa e rigorosa, addirittura matematica di questo aspetto della nostra facoltà linguistica razionale.

Tale possibilità deborderà oltre i confini della matematica, anche con il contributo di altri grandi pensatori, Alfred Tarski, Rudolf Carnap, ... ma sarà particolarmente feconda nella matematica, e con conseguenze epocali per la nostra civiltà.

Si capisce allora perché, di nuovo come capita quasi sempre con i grandi teoremi, quello che è veramente importante non è l'enunciato dei teoremi, e neanche il problema a cui danno risposta, ma la loro dimostrazione, perché è nella dimostrazione che si colgono i germi del nuovo.

In questo caso ciò è vero in modo particolare, dal momento che la dimostrazione è basata su tecniche e soluzioni del tutto originali usate per la prima volta nella storia.

Tali tecniche, riassumibili nella cosiddetta aritmetizzazione, sono la parte pesante di calcolo; occorre eseguirli, una volta, anche se ora con la saggezza di poi sono disponibili trattazioni più dirette nella teoria dei linguaggi formali, nata da quei calcoli per le esigenze dell'informatica (sempre, in matematica, le prime tecniche sono perfezionate, trasformate e rese più accessibili - se non altro per le necessità dell'insegnamento, prima forma di divulgazione); occorre eseguirli per lo stesso motivo per il quale si fanno esercizi di risoluzione delle equazioni, non per allenarsi a risolverle, cosa che non si farà mai nella vita, ma perché così si impara che cosa sono le equazioni.

Il resto della dimostrazione, l'argomento che sfiora come un equilibrista il paradosso, è noto, ed anche facile e divertente, soprattutto nella forma in cui lo espongo, seguendo l'antinomia di Richard, che ha il merito di prestarsi bene alle varianti delle analoghe dimostrazioni relative ai problemi indecidibili dell'informatica.

Ma la parte veramente importante è quella *hard*, perché è in essa che sono impliciti (e necessari perchè l'aritmetizzazione funzioni - non basta assegnare numeri ai simboli, occorre definire in modo matematico tutte le nozioni e le operazioni della sintassi) e in parte già espliciti gli argomenti che costituiranno la teoria della calcolabilità come un capitolo di quanto è definibile nell'aritmetica.

Questo è il vero importante sottoprodotto della dimostrazione di Gödel. La teoria matematica della calcolabilità è già pronta a disposizione prima che compaiano i calcolatori. Succede come con le coniche rispetto alla meccanica celeste; la differenza è che le coniche erano sepolte nel patrimonio matematico e dimenticate, tant'è che Keplero per trovare la curva che interpolasse i suoi dati la cercava nella forma dell'"ovale"; invece in questo caso le stesse persone che hanno costruito la teoria hanno anche subito costruito le macchine (Turing e l'*ACE*).

Detto questo sulla struttura del libro, è vero che in esso si può rilevare, come ha notato Casari, una vena polemica, che si può cercare di spiegare.

La polemica è rivolta non tanto al mondo della cultura in senso lato o alla filosofia della matematica quanto proprio all'ambiente matematico. Io non ci tengo a difendere una particolare filosofia della matematica; per rispondere a Cantini che me lo ha chiesto, è vero che nel libro si respira una valorizzazione della posizione nota come "deduttivismo "o "*if-thenism*"(la concezione della matematica fondata sulla conseguenza logica: i teoremi sono le proposizioni che sono conseguenza logica degli assiomi, presentati come un sistema formale), ma solo perché la filosofia ufficiale la snobba come poco raffinata, come una delle posizioni del *working mathematician*, quale in effetti è; ad esempio è teorizzata da Enriques e da tutti i sostenitori del metodo assiomatico.

Io ritengo che la matematica sia una produzione umana; Cantini ha ricordato con giusta svalutazione le filosofie della matematica neo-empiriste o orientate al sociale che sono fiorite negli ultimi anni; il tratto curioso delle posizioni genericamente dette "umaniste"(Reuben Hersh) nei confronti della matematica è che tutte danno per scontato che nel parlare di "umano"si debba automaticamente eliminare e combattere la ragione e la logica. A me sembra invece che l'essenza dell'umano, naturalmente quando acquisisce l'anima intellettiva, per dirla con Tommaso, non certo quando è un agglomerato di otto cellule, sia la ragione. Di conseguenza il potenziamento della ragione realizzato come abbiamo detto da Gödel rappresenta una grande opportunità, non ancora del tutto sfruttata, e penso che nei confronti della matematica ci si debba porre nella disposizione di coltivare la metamatematica, cercando di cogliere tutte le illuminazioni che ci può dare.

La metamatematica è uno sviluppo coerente della impostazione assiomatica della fine dell'Ottocento. Allora si contrapponevano due atteggiamenti, entrambi con radici e giustificazioni nella storia immediatamente precedente, ma sostanzialmente inconciliabili.

Con drastiche semplificazioni, da una parte si trovavano i sostenitori del metodo genetico: per questi le nozioni matematiche, soprattutto quelle moderne astratte, ma innanzi tutto i sistemi numerici, erano (una costruzione della mente che tuttavia dava un'impressione di solidità, e veniva esternizzata e reificata in) una realtà oggettiva, che permetteva al matematico un accesso diretto e privilegiato di conoscenza. Sempre semplificando, si tratta della posizione poi qualificata come platonista[1].

L'altra corrente era quella del metodo assiomatico. Su questa, con l'invenzione da parte di Hilbert della metamatematica come strumento e strategia per dimostrare, in primo luogo, la non contraddittorietà delle teorie fondamentali, si è innestata la logica matematica che con le sue tecniche e i suoi risultati (non solo quelli di Gödel) rende sempre più difficile la vita al platonismo.

I platonisti muovono ai logici l'accusa di relativismo, per quel che riguarda le idee matematiche (la logica insegna che non c'è una nozione univoca di "numero naturale") contrapponendo agli insegnamenti della logica la loro esperienza. I matematici, non solo i platonisti, forniscono resoconti di una sensazione cogente di realtà per gli oggetti di cui si occupano, qualcosa che si vede e si tocca, si conosce. Questi resoconti sono familiari, condivisibili, ma non possono essere presi come una prova, neanche filosofica, di esistenza di quella realtà. Altrimenti i resoconti dei mistici, o anche solo delle persone credenti, sarebbero una prova dell'esistenza di Dio. Qualcuno ha cercato di usare tale argomento, ma si tratta di una nota fallacia, di un argomento *ad populum*. Gli ontologi sostengono l'esistenza degli oggetti sociali astratti, ma questi oggetti, la cui realtà è sperimentata da tutti, si incontrano sempre e solo in qualche ufficio con una pratica da sbrigare.

---

[1] In verità il metodo genetico ha molto a che fare anche con il logicismo - questo è il motivo della parentesi di sopra, che vuole alludere a un'alternativa - ma questo a sua volta, dopo l'epoca d'oro, si è diluito in forme meno raffinate di realismo. Si veda G. Lolli, *Filosofia della matematica*, Il Mulino, 2002.

Prendere sul serio i resoconti di sensazioni significa studiarli per capirli, indipendentemente dalla adesione a quanto viene riportato; così ad esempio si può studiare scientificamente la psicologia del misticismo religioso. La logica della metamatematica è lo strumento principale per lo studio delle teorie, le quali sono i resoconti di quelli che dicono di descrivere una realtà oggettiva.

La metamatematica insegna che nessuna teoria (seria) è categorica, che quasi tutte quelle importanti sono incomplete, . . . e così via. La teoria degli insiemi non solo non è completa, ma tra le proposizioni indecidibili ce ne sono che riguardano proprietà di base delle strutture fondamentali: non possiamo neanche sapere quanti sono i numeri reali. Quale è allora l'universo degli insiemi che il platonista dice di conoscere e per la cui descrizione si limita ai largamente insufficienti, dimostrabilmente, assiomi di Zermelo-Frankel?

Il matematico allora con fastidio si scuote di dosso questi noiosi grilli parlanti. Lo ha mostrato Bourbaki con la sua strategia schizofrenica: dichiarare negli scritti sui fondamenti la sua adesione al metodo assiomatico, premettere agli *Éléments* un linguaggio formale, e gli assiomi di una teoria, quella degli insiemi, e poi dimenticarsene.

Ma dimenticandosene, si perdono anche i contributi positivi, perché la metamatematica non ha prodotto solo i teoremi limitativi; realizzando in parte, o in alcune direzioni, e in altre non previste, gli auspici del suo fondatore Hilbert, la metamatematica ha fornito risultati e strumenti importanti per la comprensione dell'attività matematica e anche per l'ottenimento di teoremi classici. Cito soltanto i cosiddetti metodi non standard, o tutti i nuovi concetti elaborati dalla metamatematica dell'algebra.

Per esorcizzare il male, i matematici danno la colpa del relativismo alla logica, e quindi come tutti i fondamentalisti non la studiano e non la fanno studiare. Per evitare i suoi insegnamenti, ne escludono l'insegnamento. In questo modo impediscono di svolgere un'analisi scientifica di una delle più importanti attività umane, che resta opportunamente circondata del suo alone di mistero.

Si potrebbe in effetti sostenere che la colpa è della logica, ma questo significa che è colpa di come siamo fatti e la politica dello struzzo non risolve nulla. È vero che la logica del secondo ordine permette di definire in modo categorico le strutture fondamentali dei numeri e degli insiemi, ma a questo proposito vale l'antinomia della ragion pura così ben formulata da Casari:

> dilemma: o si riesce a dimostrare tutto (quello che è logicamente valido) riguardo a enti che però non si sa dire cosa sono, oppure si

> riesce a definire ciò di cui si vuole parlare ma allora non si hanno metodi per dimostrare tutto quello che è valido.

Il problema è *intriguing* e merita di essere al primo posta nell'agenda della filosofia della matematica, ma intanto i fatti sono questi: innanzi tutto la logica del secondo ordine richiede una dose di teoria degli insiemi su cui la nostra ignoranza è profonda ed essenzialmente ineliminabile, il che getta un'ombra sulla affidabilità delle definizioni di cui parla il secondo corno del dilemma; si può sempre dubitare che siano solo impressioni. In secondo luogo molte teorie sono formalizzate nella logica del primo ordine e la pluralità dei loro modelli è una ricchezza a cui i matematici non rinuncerebbero; rifiutare infine, o sottostimare i procedimenti meccanici disponibili per la deduzione nella logica del primo ordine sembra un atteggiamento strano nell'era dei calcolatori.

Il modo giusto di lavorare è quello di passare all'occorrenza secondo necessità da una logica all'altra, ma per farlo occorrerebbe conoscerle.

L'indicazione di base che deriva dalla metamatematica hilbertiana (liberalizzata) è quella di assumere le teorie come oggetto di studio matematico - gli oggetti simbolici del linguaggio e le strutture delle loro interpretazioni - senza vincoli precostituiti sulla metalogica.

A questo proposito viene opportuna una precisazione mai sufficientemente (e inutilmente) ripetuta. Considerare le teorie matematiche come sistemi formali per iniziare a fare metamatematica non significa sposare alcuna versione di formalismo; Hilbert stesso pensava che gli strumenti della metamatematica dovessero essere i metodi finitisti, vale a dire combinatori, cioè una matematica dotata di senso. Era per l'impossibilità di dare un senso all'infinito che egli proponeva il suo programma: prendere come oggetto di studio la struttura linguistica delle teorie (infinitiste), quindi quello che si chiama un sistema formale, e cercare di dimostrarne la non contraddittorietà, con una matematica contenutistica. Con il secondo teorema di incompletezza di Gödel si è preso atto che i metodi della metamatematica dovevano essere più forti delle teorie che si vogliono assumere come oggetto di studio. Questi stessi discorsi sulla forza delle rispettive teorie testimoniano che si pensa a teorie non formali: solo nel momento in cui diventano oggetto di studio le teorie sono rimpiazzate dalla loro struttura linguistica simbolica. La differenza tra noi e Hilbert è che non siamo più tanto preoccupati della affidabilità dei metodi, perché non pensiamo che il compito della matematica sia di dare certezze assolute, ma piuttosto chiarificazioni concettuali.

L'introduzione alla e della metamatematica sarebbe facile e naturale nel contesto ad esempio di un primo corso di algebra: invece di svolgere la trattazione in un linguaggio sostanzialmente naturale, basta inserire la distinzione tra formule e assiomi e discorso da una parte, e il loro significato (le strutture) dall'altra: entrambi tuttavia oggetti matematici, gli uni discreti, gli altri astratti. Si stabilisce quindi l'accostamento di due tipi di tecniche e una forma di ragionamento che nello svolgersi simultaneamente si interroga sul proprio svolgersi. Ogni passo comporta una sospensione[2], una *epoche*, che ci induce a guardare il passo che facciamo.

Questa piccola integrazione della disposizione mentale ordinaria fa scattare tesori di nuove intuizioni e punti di vista; per poterlo fare bisogna studiare e usare tante logiche, non nessuna. Siamo invece purtroppo di fronte a una chiusura totale (che sul piano filosofico si accompagna alla stantia ripetizione di posizioni pasticciate e indifendibili come il bourbakismo e i suoi eredi ancora più poveri) e che è preoccupante per il futuro. Non è la prima volta che si perdono conquiste del pensiero, e si devono aspettare secoli per riscoprirle.

La polemica dunque è del tutto motivata, e per quanto mi riguarda continuerò a farla nei limiti delle mie capacità.

[2]Come quando si sente una extrasistole.