

La matematica, il ragionamento dell'incerto e la discrezionalità

Hykel Hosni e Stefano Marmi
Scuola Normale Superiore, Pisa

To be a good mathematician, or a good gambler, or good at anything, you must be a good guesser.

(George Pólya)

Introduzione

La tentazione di ricorrere al modello di rigore fornito dalla matematica nel dirimere tra il vero e il falso, e ancor più tra il certo e l'incerto, è molto forte. Definizioni matematiche o tratte da quei suoi rami "applicati" che sono la probabilità e la statistica fanno ormai parte di codici e di regolamenti, non solamente nell'ambito bancario e finanziario.

Tutto ciò è comprensibile e per chi come chi scrive si occupa di matematica è anche molto lusinghiero. Ma ci sono alcune precisazioni e alcune cautele che è bene richiamare, anche a costo di sembrare un po' pedanti.

Innanzitutto è bene ricordare che, pur con una certa semplificazione, tra tutti gli scienziati naturali il matematico gode di alcune caratteristiche particolari:

- I matematici hanno **certezze assolute**. Queste sono tali soltanto in virtù del fatto che
- la matematica è un **sistema chiuso**: i principi fondamentali sono enunciati una volta per tutte, includendo persino le regole formali del ragionamento logico-deduttivo.
- La fonte della verità in matematica è quindi nella **coerenza logica**, mentre nelle scienze naturali è nell'**esperienza**.
- Tutti gli oggetti matematici devono avere **definizioni precise**. Una dimostrazione dovrebbe poter essere trasformata in un codice binario verificabile su un calcolatore.
- Il ragionamento logico-deduttivo è governato dal **principio di non-contraddizione**: il lavoro di ricerca del matematico si fonda sulla fede che le diverse teorie matematiche non siano in contraddizione tra di loro.

Malgrado questi principi così unici e peculiari tra le scienze, anche la verità matematica, che aspira all'eterno, ha un suo sviluppo diacronico, ben diverso dalla presentazione sincronica che viene fatta nei manuali e nelle aule universitarie. Come un'araba fenice, periodicamente alcune parti di essa muoiono

per rinascere più feconde dalle ceneri di una visione prima universalmente condivisa dai matematici ma poi abbandonata. Così è per la matematica e per le altre scienze naturali, nelle quali i paradigmi si succedono tra crisi, rivoluzioni e consolidamenti.

Questa descrizione un po' semplicistica dei principi che governano il ragionamento matematico è utile e diventa particolarmente interessante quando la si confronta con l'azione del giurista: vi sono chiaramente delle affinità di metodo. Ad esempio sia il matematico che il giurista tengono in grande considerazione la struttura complessiva dell'edificio logico di una teoria o di un codice. Ma le differenze sono sostanziali ed ineludibili: il linguaggio del legislatore non è necessariamente **rigoroso** né **completo** (Bobbio, 1950) anche se aspira al rigore e alla completezza.

Anche se può sembrare un po' ingenuo c'è un più profondo terreno che unifica l'azione di entrambi: la ricerca del **vero** e della **conoscenza**. Quando si scende dal terreno dei principi e delle teorie a quello della pratica e della decisione, previsioni, supposizioni e stime sono l'oggetto abituale del pensiero in tutte le circostanze pratiche della vita

L'attendibilità di queste previsioni è costantemente ridiscussa: gli strumenti matematici su cui fondarsi si specializzano e la probabilità e la statistica occupano un ruolo centrale. Il loro impiego è indispensabile ma non è privo di rischi: nei casi concreti la probabilità di un evento è quasi sempre inaccessibile e l'unica base quantitativa di partenza per una sua stima è data dalle frequenze con le quali gli eventi si presentano. Una base che a volte può essere decisamente poco salda.

Scrive (con la sua usuale *vis polemica*) Nassim Taleb in un suo recente saggio:

“Statistical and applied probabilistic knowledge is the core of knowledge; statistics is what tells you if something is true, false, or merely anecdotal; it is the "logic of science"; it is the instrument of risk-taking; it is the applied tools of epistemology; you can't be a modern intellectual and not think probabilistically—but... let's not be suckers. The problem is much more complicated than it seems to the casual, mechanistic user who picked it up in graduate school. Statistics can fool you. In fact it is fooling your government right now. It can even bankrupt the system (let's face it: use of probabilistic methods for the estimation of risks did just blow up the banking system).” (Taleb, 2008)

In questo lavoro affronteremo così alcuni aspetti fondamentali relativi alla questione dell'incertezza, sia nella decisione individuale che nell'interazione tra agenti. Cercheremo però di farlo da una duplice prospettiva.

In primo luogo analizzeremo il fondamento dell'analisi quantitativa dell'incertezza evidenziando la sinergia tra logica e probabilità. Il presupposto è

che l'incertezza sia una componente inevitabile dell'interazione tra agenti razionali e che in questo contesto il ragionamento logico deduttivo debba estendersi fino ad abbracciare quello probabilistico. Prendere atto dell'onnipresenza dell'incertezza nella formulazione logico-matematica dei problemi di decisione e interazione tra agenti ci permette di assumere una posizione critica nei confronti *dell'altamente improbabile* che, usando un'espressione resa popolare da Nassim Taleb, chiameremo Cigno Nero¹.

Sullo sfondo di questa cornice concettuale mostreremo, nella seconda parte del lavoro, come un'attenta formulazione dei problemi di decisione e interazione permetta al tempo stesso di (i) rendere ponderabili alcuni fattori che ne determinano i fattori di rischio e (ii) mettere in evidenza alcune misure atte a disincentivare comportamenti altamente rischiosi.

Il tema del rischio nell'interazione razionale è del tutto generale ma non privo di connessioni dirette con l'argomento specifico di questo volume. Come sottolineato in da [DONI-MORI nel CAP. x DI QUESTO VOLUME] l'analisi economica degli appalti pubblici parte dalla descrizione di un problema di interazione (nel caso specifico di *contrattazione*) tra agenti che esibisce una particolare asimmetria. Il committente pubblico, benché sia a tutti gli effetti identificabile come attore individuale, deve rispondere nei processi decisionali inerenti la gara d'appalto, a vincoli di natura sociale. In astratto, quindi, possiamo vedere lo schema di interazione sottostante le gare di appalti pubblici come una forma di interazione ibrida in cui il contraente decide secondo parametri di interesse individuale, mentre il committente decide sulla base dell'interesse pubblico (sociale, opposto quindi a individuale).

Prendendo questo aspetto ibrido come caratteristica fondamentale dell'analisi dei processi decisionali interattivi nella situazione degli appalti pubblici, identificheremo uno dei componenti fondamentali nella determinazione del rischio correlato agli appalti pubblici nella possibilità di *free-riding*. Il Cigno Nero rimane un evento la cui realizzazione tipicamente elude le nostre capacità di previsione quantitativa. Tuttavia, nel caso specifico dell'interazione ibrida che coinvolge interessi individuali e sociali, è possibile mitigarne gli effetti potenzialmente disastrosi attraverso opportuni meccanismi di disincentivo del comportamento che ne determinano le condizioni favorevoli di realizzazione.

L'incertezza e il rischio giocano un ruolo fondamentale nella *contrattazione* tra agenti anche in assenza di possibilità diretta di *free-riding*. In particolare l'impossibilità in linea di principio di prevedere *tutte* le circostanze future e i costi elevatissimi implicati nell'identificazione di clausole sufficientemente articolate determinano **l'incompletezza di fatto** di ogni contratto. Chiuderemo

¹ Taleb riprende un celebre esempio che Karl Popper ha usato per illustrare i limiti intrinseci del verificazionismo in filosofia della scienza. Taleb associa due caratteristiche fondamentali al Cigno Nero: bassissima probabilità e impatto elevatissimo. Torneremo ampiamente su questo nella prima parte dell'articolo.

questo lavoro mostrando come alcune questioni aperte nella *teoria* delle probabilità condizionali siano strettamente collegate al tema del ragionamento strategico nei contratti incompleti.

Tutti gli uomini sono mortali, gli uccelli tipicamente volano e alcuni cigni sono neri

Due visioni estreme e tra loro inconciliabili sembrano oggi coesistere nella percezione sia scientifica che popolare della matematica e del suo ruolo nelle applicazioni quotidiane. Da una parte troviamo la visione della matematica come la scienza infallibile e deduttiva per eccellenza. Dall'altra, la visione della matematica come *fashionable nonsense* – una sorta di codice autoreferenziale che poco o nulla ha a che vedere con il mondo reale. La prima è ben radicata nella nostra cultura popolare ed è sostenuta in alcuni circoli accademici (specificamente in alcune scuole di filosofia della matematica). La seconda viene alimentata, a volte anche con fare interessato e intimidatorio, negli ambienti più direttamente connessi all'applicazione dei *modelli matematici*, prima fra tutte l'economia e la finanza².

Entrambe le posizioni pur non essendo prive di spunti interessanti peccano di eccessi. In questa prima parte del lavoro cercheremo di chiarire, senza entrare in argomenti sofisticati, il ruolo del metodo logico-deduttivo nella caratterizzazione matematica del ragionamento in condizioni di incertezza.

Il mito della scienza deduttiva

Nella percezione comune, scientifica e non, la matematica è spesso vista come la scienza deduttiva e rigorosa per eccellenza. Osservando un matematico al lavoro, tuttavia, è facile convincersi del fatto che questa visione è per certi aspetti caricaturale. L'attività di ricerca matematica, al pari di qualsiasi altra attività scientifica, tipicamente inizia dall'osservazione di particolari fenomeni (di natura fisica, sociale oppure propriamente matematica) e procede per tentativi e correzione degli errori verso l'astrazione, la generalizzazione, la sistematizzazione del proprio dominio di indagine. L'idea che l'attività del matematico si riduca alla definizione, assiomatizzazione e deduzione rigorosa delle verità che caratterizzano il *corpus* della propria disciplina è nella migliore

² Ad esempio, ancora una volta Taleb attacca senza molti mezzi termini l'identificazione del *rischio* con quanto un modello (benché utile e fondamentale) prescrive:

the applications of the sciences of uncertainty to real-world problems has had ridiculous effects I have been privileged to see it in finance and economics. Go ask your portfolio manager for his definition of "risk," and odds are that he will supply you with a measure that excludes the possibility of the Black Swan—hence one that has no better predictive value for assessing the total risks than astrology (we will see how they dress up the intellectual fraud with mathematics).

(Taleb, 2007)

delle ipotesi fortemente restrittiva. Il matematico ungherese George Pólya autore, tra l'altro di celeberrimi volumi di introduzione al ragionamento matematico, è stato uno dei più convinti sostenitori dell'importanza del ragionamento euristico *analogico-induttivo* in matematica, di cui dà un larghissimo numero di esempi provenienti da varie aree della matematica nei due volumi dal titolo *Patterns of Plausible Inference* (Pólya, 1954). Bruno de Finetti, uno dei maggiori matematici italiani del secolo scorso e sul cui lavoro torneremo diffusamente più tardi, era talmente avverso all'idea che la matematica, e in particolare la statistica, si riducesse ad assiomi adottati per “convenienza matematica” e “regolette pronte all'uso” che negli ultimi anni della sua carriera arrivò a scrivere un articolo-sfogo sulla rivista *Tuttoscuola* dal titolo *Rischi di una “matemattica” di base “assiomatica”* (de Finetti, 1978).

Da dove viene quindi il mito della certezza assoluta garantita dalla matematica? Senza nemmeno provare a rendere giustizia alle centinaia di volumi dedicati al tema, per i nostri scopi è sufficiente insistere sulla natura *intrinsecamente condizionale* della verità, e quindi della certezza, matematica. Il metodo logico-deduttivo su cui si basa la percezione della certezza matematica di per se stesso non può in nessun modo garantire che le conclusioni di un argomento – per esempio la dimostrazione di un teorema – siano *assolutamente* certe. Il teorema di Pitagora è “vero” (nella geometria euclidea) in modo subordinato alla “verità” degli assiomi da cui lo abbiamo dedotto e quindi resterà tale fin tanto che (oppure in tutte quelle situazioni in cui) riterremo opportuno *accettare* la verità delle proposizioni da cui lo deriviamo -- i postulati di partenza. In buona sostanza questo è il concetto che sta dietro la nozione matematica di conseguenza logico-deduttiva: la certezza sta nel metodo, a patto ovviamente che venga applicato correttamente, non nelle conclusioni. I teoremi di tutta la matematica e in generale di tutte le discipline assiomatizzate, sono verità condizionali, subordinate cioè alla nostra disposizione ad accettare, ritenere vere, postulare, eccetera, le ipotesi di partenza.

Su questo sfondo diventa relativamente facile rendere conto, almeno in parte, del mito della certezza matematica in relazione al metodo logico-deduttivo. Il matematico, come scienziato, si trova nella posizione assai privilegiata di manipolare dati di partenza che per comodità chiameremo *perfetti*. Un algebrista che si trovi a lavorare con uno *spazio vettoriale*, per esempio, ha a disposizione una serie di definizioni, di proprietà e di regole che è certo di poter applicare nel suo ragionamento. In questo senso, il ragionamento matematico su oggetti matematici ricade in quella che de Finetti chiamava la *logica del certo*.

Per quanto paradossale ciò possa sembrare a prima vista, il campo di applicazione più importante e fecondo del ragionamento logico-deduttivo è quello dei dati *imperfetti* in opposizione alla perfezione dei dati matematici.

Questo è il contesto in cui ci dobbiamo calare per studiare il concetto di interazione tra agenti razionali nel mondo reale.

Sulla certezza pratica

Quando prenotiamo un volo aereo non prendiamo seriamente in considerazione l'ipotesi di non arrivare a destinazione, e quindi di conseguenza prenotiamo l'albergo, pianifichiamo il soggiorno, prenotiamo il viaggio di ritorno. Magari chiediamo a qualcuno di lasciarsi libero per quella data, così potrà venire a prenderci all'aeroporto. Casi analoghi sono all'ordine del giorno nell'interazione tra agenti. Quando guidiamo l'auto su una strada statale non prendiamo in considerazione l'ipotesi che la vettura che sta sopraggiungendo nella direzione opposta sia guidata da una persona che ha appena deciso di suicidarsi lanciandosi a tutta velocità contro la prima auto che incontra. In buona sostanza agiamo in tutte le situazioni pratiche della nostra vita *come se* fossimo certi che determinati eventi --che pure *sappiamo non essere impossibili*-- non si verificheranno: semplicemente non prendiamo quella circostanza in considerazione.

In statistica e nella ricerca operativa un punto di contatto che viene sovente indicato tra il ragionamento deduttivo e quello probabilistico è il concetto di *certezza pratica*. Riducendo il concetto alla sua essenza, si considera “praticamente certa” la realizzazione di un evento la cui probabilità viene considerata sufficientemente alta (arbitrariamente vicina a 1). Per converso, un evento la cui probabilità è stimata a un valore arbitrariamente vicino a 0 viene considerato *praticamente impossibile*. Il ragionamento basato sulla certezza pratica, quindi prende le mosse da una probabilità vicina ai valori estremali e procede mediante deduzione a conclusioni che vengono trattate *come se fossero certe*.

Come dicevamo in apertura di sezione, il ragionamento basato sulla certezza pratica è una componente essenziale della nostra attività quotidiana di agenti (razionali). Si tratta in realtà di una nozione pre-teorica, che prescinde cioè dalla nostra capacità di quantificarla o addirittura assiomatizzarla: essere in grado di decidere, pianificare, interagire a partire da dati imperfetti è una condizione necessaria alla nostra vita sociale. Parleremmo di un altro mondo se non assumessimo che gli esseri umani (e molti animali) possiedono questa capacità.

Il punto diventa delicato nel momento in cui il ragionamento basato sulla certezza pratica passa da strumento di sopravvivenza quotidiana, a fondamento dell'analisi quantitativa del rischio. E' opinione largamente diffusa³ che la recente, e al tempo della scrittura di questo saggio, perdurante crisi economico-finanziaria globale scatenata dal tracollo del sistema creditizio statunitense sia dovuta almeno in parte alla certezza pratica *errata* che l'andamento del mercato

³Si veda, ad esempio, (Shiller, 2008).

immobiliare non potesse subire inflessioni rilevanti. Il mondo dei mercati finanziari fornisce numerosi altri esempi di impossibilità che si verificano: lunedì 19 ottobre 1987 l'indice Dow Jones ebbe una flessione del 22.61 %. La probabilità che si verificasse quell'evento, assumendo una distribuzione normale dei rendimenti giornalieri dell'indice e calibrandola sulla storia passata, era stimabile intorno a uno su 10^{87} , un numero così piccolo da non essere in realtà immaginabile⁴.

La necessità di distinguere *matematicamente* tra certezza assoluta (logica) e certezza pratica (probabilistica) costituisce uno dei cardini dell'impostazione soggettivista data alla statistica da Bruno de Finetti. Parafrasando una delle sue ultime lezioni, tenuta all'Istituto Nazionale di Alta Matematica di Roma nel 1979, si potrebbe dire che l'errore da evitare consiste nel confondere il "nulla" con "la più piccola quantità a cui riusciamo a pensare"⁵.

Per comprendere a pieno la portata dell'idea di de Finetti, è opportuno ricordare come questa fosse ortogonale rispetto a una tradizione fortemente consolidata che risale almeno alla *Ars Conjectandi* di Jakob Bernoulli (1713) e che ha trovato una sintesi teorica nel cosiddetto *principio di Cournot*: un evento di bassissima probabilità è *trascurabile* poiché non si verificherà (Cournot, 1843)⁶.

Il lunedì nero 1987 è soltanto uno degli innumerevoli esempi che, con schiacciante evidenza, mettono a nudo la fallacia del ragionamento basato sulla certezza pratica. Ovviamente non c'è nulla di errato nel dire, parlando di un evento, che lo si ritiene "praticamente impossibile". Il problema nasce nel momento in cui questo venga elevato a *principio generale* che giustifichi lo statistico, il *risk manager* o qualsiasi altro professionista dell'incertezza ad

⁴ "It is a number outside the scale of nature. You could span the powers of ten from the smallest subatomic particle to the breath of the measurable universe – and still never meet such a number" (Hudson & Mandelbrot, 2004, p4).

Si veda anche il divertente articolo (Dowd, Cotter, Humphrey, & Woods, 2008) i cui autori si divertono un po' alle spese della venerabilissima Goldman Sachs:

"One of the more memorable moments of last summer's credit crunch came when the CFO of Goldman Sachs, David Viniar, announced in August that Goldman's flagship GEO hedge fund had lost 27% of its value since the start of the year. As Mr. Viniar explained, "We were seeing things that were 25-standard deviation moves, several days in a row."

A questo proposito il Financial Times del 13/8/2007 commentò sarcastico:

"That Viniar. What a comic. According to Goldman's mathematical models, August, Year of Our Lord 2007, was a very special month. Things were happening that were only supposed to happen once in every 100,000 years. Either that ... or Goldman's models were wrong" (Bonner, 2007)

Tranne che i giornalisti, si sa, non sono a proprio agio con i numeri: un evento simile si dovrebbe verificare ogni 10^{135} anni e non ogni $10^5=100000$ anni.

⁵ Cfr. *Probabilità fisica e complessità* in (de Finetti, 1995).

⁶ In una celebre lezione del 1919 Paul Lévi asserì che il principio di Cournot costituisce l'unica connessione tra la probabilità e il mondo empirico.

attribuire probabilità 0 a un evento “praticamente impossibile”. Così facendo questi lo trasforma in un evento *logicamente impossibile* e quindi lo dichiara irrilevante ai termini della valutazione del rischio derivante da quella valutazione probabilistica. Le conseguenze di questo errore logico sono ovvie e ben documentate dall’attuale crisi economico-finanziaria globale.

Piccole Probabilità

A dispetto della sofisticatezza dei modelli statistici che girano sui calcolatori dei *risk manager* di tutto il mondo, le complicazioni teoriche connesse alle “piccole probabilità” sono ad oggi tutt’altro che risolte. Ci soffermeremo brevemente su due esempi. Mentre il primo mette in relazione la nostra incapacità di gestire il Cigno Nero con l’inadeguatezza della teoria classica della decisione razionale, il secondo riguarda il problema delle conclusioni che possiamo trarre dalle nostre conoscenze incerte: la condizionalizzazione su evidenza incerta.

Roberto Magari, uno dei più importanti algebristi italiani del secolo scorso, ha dedicato buona parte della sua ultima produzione scientifica al problema della corretta formalizzazione delle piccole probabilità nella teoria della decisione (Magari, 1986). In termini del tutto intuitivi, la sua critica alla teoria della decisione “classica” consiste nel rivendicare il ruolo degli eventi “altamente improbabili” e delle azioni “infinitamente importanti”⁷. Questi per loro natura sfuggono alle maglie larghe di una formalizzazione essenzialmente guidata dal principio della “convenienza matematica” secondo cui si tende a subordinare il significato della formalizzazione all’esigenza di renderla matematicamente maneggevole. Ciò che Magari auspicava, ma che non visse sufficientemente a lungo per realizzare a pieno, era un’estensione della teoria della decisione razionale a campi *non archimedei*. Intuitivamente queste sono strutture matematiche in cui è possibile esprimere “l’infinità” di certe grandezze. Soltanto una teoria delle decisioni così estesa ci permetterebbe, in linea di principio, di *quantificare* gli effetti disastrosi (utilità infinitamente negativa) di eventi praticamente impossibili (probabilità infinitesima).

L’imponderabilità della sua realizzazione unita all’elevatissimo impatto delle sue conseguenze sono esattamente le caratteristiche che secondo Taleb caratterizzano il Cigno Nero. Non sorprende quindi che i nostri migliori modelli statistici non siano in grado di gestire *praticamente* il Cigno Nero: nonostante alcuni recenti sviluppi molto promettenti⁸ in quella direzione, non abbiamo

⁷ È interessante notare come Magari considerasse il suo lavoro come un capitolo della Teoria Morale, come il testimonia il titolo del volume citato, *Morale e metamorale. Un approccio probabilistico ai problemi morali*.

⁸ Un contributo essenziale allo sviluppo di questa linea di ricerca che per molti aspetti è ancora agli albori, è dato dal lavoro dell’economista Peter J Hammond. Si veda, per un’introduzione, (Hammond, 1999).

ancora a disposizione una *teoria* della decisione sufficientemente espressiva per catturarne gli aspetti essenziali.

Il secondo esempio di *impasse* teorica rilevante per la nostra discussione e che mette in luce la nostra mancanza di comprensione teorica delle piccole probabilità chiama in causa il concetto di *probabilità condizionali*. Uno dei momenti fondamentali nello sviluppo della moderna teoria delle probabilità è costituito dall'apparizione sulla scena del *Teorema* (o *Regola*) di Bayes da cui prende il nome quell'ambito della moderna teoria statistica conosciuta appunto come *Statistica Bayesiana*. Il risultato, niente più di un'ovvia conseguenza delle proprietà fondamentali che definiscono una funzione di probabilità, permette di calcolare (da qui l'appellativo di Regola) la probabilità di un evento *sulla base dell'evidenza pertinente*. La Regola di Bayes è il fulcro dell'apprendimento induttivo dal momento che consente di aggiornare le nostre probabilità in modo che queste riflettano le osservazioni che riteniamo rilevanti.

Se, come spesso accade, si interpreta il concetto di “evidenza” (o “osservazione”) come un evento di probabilità 1, la Regola di Bayes ci permette di aggiornare le nostre probabilità soltanto in relazione a osservazioni che riteniamo *certe*. Questo mal si addice a osservatori altamente fallibili quali siamo noi esseri umani.

Il problema della condizionalizzazione su osservazioni incerte è stato affrontato nella seconda metà degli anni '60 da Richard Jeffrey che ha proposto una generalizzazione della regola di Bayes nota oggi come *Regola di aggiornamento di Jeffrey*. Questa permette a un agente di aggiornare la propria probabilità in risposta a eventi a cui associa probabilità strettamente maggiore di 0, ma eventualmente minore di 1. La regola di Jeffrey costituisce una generalizzazione di quella di Bayes dal momento che le due sono equivalenti se si attribuisce probabilità 1 all'osservato.

Se questa elegante generalizzazione ci permette di condizionalizzare su eventi anche altamente improbabili, dal punto di vista concettuale rimane aperto il significato della condizionalizzazione su un' “evidenza praticamente impossibile”, un'operazione necessaria se vogliamo inquadrare in il Cigno Nero in una cornice teorica adeguata. Un interessante sviluppo attuale della questione si trova nello studio della *zona critica* condotto dal logico David Makinson.⁹

Conclusione preliminare: La logica dell'Incerto

Trasformare la certezza pratica in certezza assoluta è un errore logico, una cattiva applicazione del modello probabilistico di quantificazione dell'incertezza. L'errore è logico nella misura in cui si compie un'inferenza non valida: non c'è

⁹ (Makinson, 2010; Makinson, 2010)

nessuna buona ragione per passare da una probabilità piccola quanto si vuole alla probabilità nulla, propria unicamente dell'evento contraddittorio.

La probabilità come *logica dell'incerto* combina quindi il rigore matematico del metodo logico-deduttivo con la concretezza del ragionamento basato su dati imperfetti. Da una parte si giustifica la quantificazione probabilistica dell'incertezza, che rende affrontabile matematicamente il problema di elaborare previsioni complesse basate sulla mancanza di informazioni rilevanti – il ragionamento statistico-induttivo. Dall'altra parte l'applicazione del ragionamento statistico-induttivo è vincolato a criteri di razionalità che delimitano il campo di applicazione di tale ragionamento. In questo senso de Finetti distingue tra *calcolo delle probabilità*, cioè l'applicazione della matematica al ragionamento in condizioni di ignoranza dalla *teoria delle probabilità* il cui compito principale è quello di definire il concetto stesso di probabilità. La teoria delle probabilità deve dunque guidare la scelta dei parametri iniziali (i dati di partenza dell'inferenza induttiva) secondo i criteri di razionalità che le sono propri. Qui la matematica si incontra con il mondo reale attraverso il concetto di modello. Ogni particolare applicazione del modello probabilistico, per esempio nella previsione del rischio derivante dalla stipulazione di un contratto con un determinato contraente dalla reputazione non completamente positiva, dovrà essere attentamente valutata sulla base dei dati disponibili e soprattutto dovrà mantenere sempre visibili i parametri iniziali da cui dipende il rischio.

Terminata questa fase delicata di descrizione matematica del problema, subentra il calcolo vero e proprio delle probabilità che porta al risultato quantitativo.

Dalla logica dell'incerto alla discrezionalità: due esempi

Secondo il celebre adagio di Benjamin Franklin, oltre alla morte e alle tasse non v'è certezza¹⁰. Contrariamente all'effetto ricercato, l' adagio è per certi aspetti apertamente ottimista e assume addirittura i connotati dell'ingenuità se per la “certezza” delle tasse intendiamo l'aspettativa che ogni attore individuale si conformi oltre ogni ragionevole dubbio all'atteggiamento socialmente cooperativo. In ogni economia intesa in senso lato, quindi in ogni scenario di interazione sociale in cui abbia senso parlare di costi e utilità (previste) personali, c'è una tendenza pervasiva da parte degli individui a deviare dal comportamento puramente cooperativo per perseguire il proprio interesse personale evitando di partecipare al costo¹¹.

La saggezza popolare (italiana) ci ricorda che l'opportunità fa l'uomo ladro mentre nella visione microeconomica del mondo la situazione è così frequente da

¹⁰Benjamin Franklin in una lettera a Jean-Baptiste Leroy del 1789 scrive

“In this world nothing can be said to be certain, except death and taxes.”.

¹¹Oltre al classico (Hardin 1982) si veda (Marwell e Oliver 1993) per un'attenta analisi dei dati empirici sull'argomento.

essere descritta e studiata con il proprio nome: si tratta del cosiddetto problema del *free-riding*.

Esempio. Si considerino cinque amici seduti allo stesso tavolo per cena. Betta ha il vizio del fumo, gli altri commensali no e anzi ne siano infastiditi. Supponiamo per semplicità che la cena si stia svolgendo in un'abitazione privata e che quindi non ci siano vincoli che rendano illegale l'atto di fumare. Passa la prima portata e Betta come di rituale desidera fumare. L'atto di accendere una sigaretta andrebbe a vantaggio di Betta (diciamo realizzando un'utilità strettamente positiva e maggiore dell'atto opposto di non fumare) e al tempo stesso introdurrebbe un "costo" (utilità negativa) sugli altri commensali a cui -- e questo è il punto fondamentale -- Betta non partecipa. Quindi, accendendo la sua sigaretta, Betta introdurrebbe unilateralmente un'*esternalità* nell'"economia" della cena e si comporterebbe da *free-rider*.

Nonostante la sua semplicità l'esempio mette chiaramente in luce la caratteristica fondamentale dell'atteggiamento opportunistico (opposto a cooperativo) che sta alla base del fenomeno del *free-riding* che appunto consiste nell'ottenere (la previsione di) un beneficio personale distribuendo unilateralmente il costo di tale beneficio sulla società.

Nella situazione di interazione ibrida tipica degli appalti a committenza pubblica, a cui abbiamo fatto riferimento nella prima parte di questo articolo si danno sovente condizioni favorevoli al *free-riding*. In tali situazioni, infatti, si crea una condizione per cui un individuo si trova a decidere, attraverso una qualche forma di delega, nell'interesse collettivo. Questo può portare sia all'introduzione di esternalità (come nell'esempio di Betta), che alla moltiplicazione incontrollata dei fattori di rischio.

Possiamo illustrare brevemente il punto tornando al sopra citato fenomeno dei mutui *subprime*. L'effetto disastroso del meccanismo che ha innescato l'attuale crisi economico-finanziaria è riconducibile in primo luogo, come sottolineato dal già citato (Shiller, 2008), a un'eccessiva propensione al rischio. Questa, semplificando, è stata dovuta essenzialmente alla convinzione condivisa tra gli "esperti" che una flessione significativa dell'indice complessivo del mercato immobiliare sarebbe stato praticamente impossibile. Da qui la concessione di mutui ad altissimo rischio di *default*. Si è trattato chiaramente di un'istanza della fallacia della certezza pratica. All'ignoranza si è aggiunto rapidamente il dolo. Forti della loro certezza pratica, gli operatori finanziari, dai singoli *broker* fino a importanti e venerabili istituti di credito, hanno distribuito attraverso una cartolarizzazione sconsiderata dei derivati il rischio connesso alla potenziale (e altamente probabile!) insolvenza dei clienti *subprime*. In questo modo hanno reso di fatto impossibile qualsiasi gestione sensata del rischio puntando alla

massimizzazione miope del profitto sul breve termine. Così, questi operatori hanno fatto *free-riding* introducendo un'esternalità pagata da tutto il sistema, prima quello finanziario e poi, cosa che ha reso drammatica e globale la crisi, tutto il sistema economico e sociale dei paesi capitalisti.

È evidente che la riduzione delle opportunità di *free-riding*, in questo come in tutti i casi in cui gli individui coinvolti possono pesare (negativamente) sull'utilità sociale costituisce uno strumento essenziale nella gestione del rischio sociale. In prima battuta si potrebbe pensare, e questa è stata forse la prima reazione alla crisi dei *subprime*, che il rischio incontrollato connesso alle opportunità di *free-riding* potesse essere annullato mediante opportuna legislazione. Ma, come abbiamo ricordato in apertura, questa soluzione è viziata in partenza dall'incompletezza del linguaggio del legislatore.

Un'alternativa concettualmente più robusta, e quindi potenzialmente molto più efficace, consiste nella costruzione di meccanismi di *disincentivo del free-riding*. Una prospettiva promettente in questa direzione emerge dall'analisi delle cosiddette *istituzioni informali*. Prendiamo nuovamente l'esempio di Betta. Invece di sanzionare formalmente, diciamo mediante una multa, l'indebita accensione della sigaretta sembra più opportuno, anche se indubbiamente è molto più difficile, facilitare il consolidamento di una struttura informale che renda *deprecabile* l'azione di Betta. Con questo non si intende, anche se non lo si esclude, un giudizio di tipo morale. Quel che conta ai fini del disincentivo al *free-riding* è la percezione secondo la quale, attuando un comportamento di tipo opportunistico, un individuo esibisce un comportamento antisociale per contrastare il quale i membri della comunità sono disposti a investire risorse personali. In assenza di una sanzione codificata, la decisione di questi ultimi sarà quindi chiaramente discrezionale¹².

L'imponderabile e l'incompletezza dei contratti

Sfruttando e al tempo stesso generalizzando il lavoro di von Neumann e Morgenstern sull'utilità¹³, Nash ha dimostrato come la *soluzione* per un'ampia classe di interazioni strategiche caratterizzate dal conflitto di interesse tra le parti si riducesse all'identificazione di un *equilibrio* all'interno di uno spazio di scenari economici possibili. Il cuneo che ha permesso l'elaborazione di una così

¹² L'importanza delle istituzioni informali basate sulla reputazione e sulla fiducia reciproca tra gli agenti stanno assumendo un ruolo sempre più centrale nelle ricerche sul rapporto tra *welfare* individuale e sociale. Si vedano ad esempio (Arrow 1972; Camerer and Fehr 2006; Fehr 2008; Bracht and Feltovich 2007, Guiso, Sapienza, and Zingales 2008)

¹³ Oltre, ovviamente, alle nozioni classiche di equilibrio elaborate a partire dalla prima metà dell'Ottocento nell'ambito della cosiddetta economia marginalista.

elegante soluzione teorica è l'ipotesi secondo cui gli agenti sono congiuntamente a conoscenza della propria e altrui razionalità. "Razionalità", qui come in larga parte dell'economia "neoclassica" significa "massimizzazione dell'utilità prevista". I due articoli (Nash, 1950; Nash, 1951) segnano quindi la sintesi teorica di un lavoro di formalizzazione del concetto di scelta razionale nei termini di massimizzazione dell'utilità personale. Questo apre la strada all'applicazione della Teoria dei Giochi¹⁴ alla "pratica" generale della contrattazione in tutte le situazioni in cui due agenti si trovino in conflitto di interessi. Attraverso questa teoria è possibile ragionare sul comportamento degli agenti razionali rispetto a molti *schemi* di interazione senza doverne conoscere completamente i dettagli. Questo ci porta direttamente al tema dei contratti incompleti.

La nozione di Equilibrio che fa da sfondo alla moderna Teoria dei Giochi non è dunque che l'inizio della storia. Le successive generalizzazioni a situazioni di informazione asimmetrica, imperfetta e incompleta hanno permesso di estendere l'analisi basata sull'assunzione di razionalità avviata da Nash ad aspetti anche molto sofisticati della logica dell'incerto¹⁵.

Questo sfondo logico-matematico ha creato le condizioni favorevoli per la formulazione matematica di un'idea molto vicina a quella di Bobbio che abbiamo ricordato in apertura. Il concetto di equilibrio (anche nelle sue forme più generali) come soluzione ai problemi di contrattazione non è sufficiente a garantire che le parti si comportino come previsto dall'assunzione di razionalità di Nash. Dall'ipotesi di razionalità che porta alla selezione delle strategie che conducono all'equilibrio non segue che gli agenti si comporteranno effettivamente in quel modo. Se prendiamo la stipulazione di un contratto come soluzione di una contrattazione, questo significa che nessun contratto è *in linea di principio* completo.

Come osserva l'economista Jean Tirole

Almost every economist would agree that actual contracts are or appear quite incomplete. Many contracts are vague or silent on a number of key features [...] Indeed, I would argue that the difficulties encountered in conceptualizing and modeling incomplete contracting partly explain why the normative agenda of the eighteenth century political scientists - namely addressing the question of how one should structure political institutions - has made little progress in the last two centuries. (Tirole, 1999)

¹⁴ L'espressione Teoria dei Giochi entra di fatto nel mondo scientifico attraverso il poderoso volume (von Neumann & Morgenstern, 1944) il cui risultato principale in relazione al problema della contrattazione è il celebre *Teorema del Minimax*, che però si applica soltanto ai giochi a somma zero.

¹⁵ Si veda, per esempio, la nozione di *equilibrio correlato nei giochi bayesiani* (Aumann, 1987)

I motivi di tale incompletezza sono sostanzialmente due. Da una parte l'imponderabilità delle contingenze future. Il Cigno Nero ovviamente non può essere incluso direttamente nelle clausole dei contratti. D'altra parte, anche se assumessimo il completo determinismo dell'ambiente in cui viene stipulato il contratto, questo risulterebbe così complesso da renderlo economicamente impraticabile.¹⁶

Tornando al discorso generale, un individuo che intenda valutare prevedere il comportamento di un agente *data l'evidenza che ha stipulato un contratto* ricade nella condizionalizzazione su evidenza incerta.

La discrezionalità della decisione entra quindi prepotentemente sulla scena con due ruoli distinti.

- **Valutazione soggettiva del rischio.** I modelli statistici possono e devono essere utilizzati per la costruzione e la valutazione degli scenari possibili ma non per decretarne alcuni come trascurabili.
- Elemento discrezionale nella scelta dei **parametri di soddisfazione** oltre i quali le parti non possono ragionevolmente proseguire nella specifica dei dettagli contrattuali.

Conclusioni

È del tutto ragionevole, nelle circostanze pratiche della nostra vita quotidiana, ignorare un evento la cui probabilità viene stimata come arbitrariamente vicina a zero. Così non può essere, però, nel caso in cui la valutazione probabilistica ha esattamente lo scopo di determinare i fattori di rischio, soprattutto sociali, derivanti da determinate decisioni. Trascurare l'imponderabile è una condizione necessaria per evitare l'immobilismo nelle azioni quotidiane, ma nella "scienza del rischio" questo assume i nefasti connotati della fallacia della certezza pratica.

Se è vero che i Cigni Neri esistono e non possono essere trascurati nella quantificazione dell'incertezza, ma che anzi ne devono guidare l'analisi matematica, è altrettanto vero che alcuni cigni sono meno neri degli altri. Per cogliere la differenza abbiamo suggerito una distinzione tra (i) l'evento propriamente imponderabile e (ii) gli effetti imponderabili di un dato insieme di circostanze. Nel primo caso siamo in quello che Taleb chiama Quarto Quadrante, il dominio cioè del selvaggiamente incerto. L'andamento del mercato azionario, l'avanzamento della ricerca scientifica, l'esplosione di pandemie, i fenomeni naturali su larga scala, abitano in questo che è propriamente il dominio

¹⁶ C'è un'interessante collegamento tra questa osservazione e un aspetto fondamentale del programma di ricerca che unisce economia e psicologia nello studio della cosiddetta *Razionalità Limitata*. Secondo il premio Nobel per l'economia Herbert Simon, se anche fosse possibile, in determinate circostanze, raggiungere una soluzione ottimale, questa potrebbe avere costi talmente elevati da renderne trascurabile l'utilità finale.

dell'esigualmente probabile. Nel secondo caso, invece, possiamo parlare di conseguenze imprevedibili di un insieme di circostanze che *prevedibilmente* può dare luogo a effetti potenzialmente catastrofici.

Nella veste di *ingegneri del rischio* dunque, siamo spesso di fronte all'imponderabile. Come comportarsi? Mediante l'analisi di alcuni esempi abbiamo mostrato come la discrezionalità giochi un ruolo di primo piano, sia attraverso l'inevitabile introduzione di elementi soggettivi nella valutazione del rischio, sia nella gestione e nella specifica del contesto normativo nel quale si viene ad operare.

Qui il matematico è costretto a fermarsi essendo giunto al limite delle sue competenze.

Riferimenti Bibliografici

Arrow, K. J. (1972). Gifts and Exchanges. *Philosophy and Public Affairs*, 1(4), 343-362.

Aumann, R. J. (1987). Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality. *The Econometric Society*, 55(1), 1-18.

Bobbio, N. (1950). *Scienza del diritto e analisi del linguaggio*. Edizioni di Comunità, Milano.

Bonner, B. (2007). 25 standard deviations in a blue moon. *Moneyweek*. Retrieved from www.moneyweek.com/file/37640/25-standard-deviations-in-a-blue-moon.html.

Bracht, J., & Feltovich, N. (2007). Efficiency in the trust game: an experimental study of precommitment. *International Journal of Game Theory*, 37(1), 39-72.

Camerer, C. F., & Fehr, E. (2006). When does "economic man" dominate social behavior? *Science*, 311(5757), 47-52.

Cournot, A. (1843). *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*. Hachette.

Dowd, K., Cotter, J., Humphrey, C., & Woods, M. (2008). How Unlucky Is 25-Sigma. *The Journal of Portfolio Management*, 34(4), 76-80.

Fehr, E. (2008). On the Economics and Biology of Trust. *IZA DP No.* 3895.

Guiso, L., Sapienza, P., & Zingales, L. (2008). Trusting the stock market. *Journal of Finance*, 63(6), 2257-2600.

Hammond, P. (1999). Non-Archimedean subjective probabilities in decision theory and games. *Mathematical Social Sciences*, 38(2), 139-156.

Hudson, R., & Mandelbrot, B. (2004). *The (Mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward*. Basic Books.

Magari, R. (1986). *Morale e metamorale. Un approccio probabilistico ai problemi morali..* CLUEB, Bologna.

Makinson, D. (2010). Conditional Probability in the Light of Qualitative Belief Change. In H. Hosni & F. Montagna, *Probability, Uncertainty and Rationality*. Pisa: Edizioni della Normale.

Makinson, D. (2010). Logical Questions behind the Lottery and Preface Paradoxes: Lossy Rules for Uncertain Inference. *Synthese*.

Nash, J. F. (1950). The Bargaining Problem. *Econometrica*, 18(2), 155-162.

Nash, J. F. (1951). Non-Cooperative Games. *Annals of Mathematics*, 54(2), 286-295.

Pólya, G. (1954). *Mathematics of Plausible Reasoning Volumes 1-2*. Princeton University Press.

Shiller, R. (2008). *The Subprime Solution: How Today's Global Financial Crisis Happened and What to Do about It*. Princeton University Press.

Taleb, N. N. (2007). *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable*. Random House.

Taleb, N. N. (2008). The Fourth Quadrant: A map of the limits of Statistics. *Edge. The Third Culture*. Retrieved from http://www.edge.org/3rd_culture/taleb08/taleb08_index.html.

Tirole, J. (1999). Incomplete contracts: where do we stand? *Econometrica*, 67(4), 741–781. The Econometric Society.

de Finetti, B. (1978). Rischi di una "matemattica" di base "assiomatica." *Tuttoscuola*, 4(62), 13.

de Finetti, B. (1995). *Filosofia della Probabilità*. Il Saggiatore, Milano.

von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1944). *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.