La nuova filosofia della natura
Misure, variazioni ed equazioni differenziali

Mariano Giaquinta

Mariano Giaquinta
Professore Emerito
Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri, 7
I-56100 Pisa
mariano.giaquinta@sns.it

Indice

Prefazione

Questo volume fa parte di tre volumetti — indipendenti ma con un filo conduttare comune — che intendono presentare alcuni temi di storia della matematica e alcuni temi di matematica nel contesto storico, dagli antichi greci agli inizi del 1900; quindi, storia e soprattutto matematica con le sue argomentazioni e deduzioni che utilizzano soltanto metodi del puro ragionamento logico, senza l'uso di evidenze geometriche o numeriche o retoriche, dimostrazioni, anche se non sempre nel senso in cui lo intendiamo oggi.

Alla base di questi tre volumetti c'è anche il desiderio di presentare questi temi alla riflessione soprattutto degli insegnanti e degli studenti di matematica e, auspicabilmente, dei colleghi, con la speranza che il distacco storico e il senso del poi rendano i fatti esposti fruibili e di aiuto alla riflessione.

Ma c'è di più. Come ogni attività umana, la matematica è una attività che si svolge all'interno di una società che evolve storicamente, e fatti come quelli relativi alla sua o alle sue *verità*, al senso da attribuire al *dimostrare* sono condizionati dal tempo e dalle conoscenze già acquisite. Ci sono però delle caratteristiche specifiche della matematica:

- Si tratta di una scienza *cumulativa*: non ci sono rivoluzioni che cancellano una teoria in favore di un'altra, come nelle scienze sperimentali (sempre che si concordi che vi siano rivoluzioni nelle scienze sperimentali). Ci possono invece essere, e ci sono stati, cambiamenti di prospettiva.
- Il processo storico consiste nel selezionare e nell'inglobare in un contesto più ampio e *astratto* le conoscenze note, magari alla fine di lunghi periodi di *sperimentazione*.
- I matematici, o almeno alcuni di essi per primi, sanno anche capire quando il processo *localmente* è arrivato alla fine con delle *"verità" condivise unanimemente* dall'intera comunità.

Se guardiamo alla storia della matematica, ma anche all'apprendimento elementare, vediamo infatti due aspetti che si susseguono e, spesso, coesistono e che possiamo identificare, con il senno di poi e con i limiti connaturati alle schematizzazioni, come una fase *sperimentale* o *procedurale* e una fase di *astrazione* o di *concettualizzazione* o di *oggettivazione*: una sorta di *dualità operazionale/strutturale* che si manifesta anche nel dibattito se la matematica si *inventi* o si *scopra*, riconducibile alle visioni epistemologica e ontologica di Aristotele e di Platone. Nella prima fase si sperimentano e ci si abitua a procedure e dimostrazioni che permettono di ottenere risultati, che poi diventeranno casi particolari, utilizzando ipotesi al momento evidenti e che in un periodo successivo non lo saranno più e suggeriranno la necessità di ulteriori *motivazioni*. Successivamente, la maturazione delle idee porta ad una fase di *astrazione* o *concettualizzazione* o *oggettivazione*. Nel seguito vedremo vari esempi. Ovviamente il processo non è lineare nel tempo né nella esplicita comprensione delle vari fasi e spesso ha richiesto molto tempo. Ad esempio, gli *Elementi* di Euclide presentano la matematica (elementare) che probabilmente si è sviluppata nell'arco di due o tre secoli. Il *Calcolo infinitesimale* introdotto alla fine del 1600 trova una sua presentazione ragionevole e coerente alla fine del 1800, dopo due secoli di intenso uso.

Nella maturazione delle tecniche e delle idee, spesso quel che era evidente lo è sempre meno. Intervengono spesso nuove scoperte, che, quando rilevanti, si trasformano in nuovi oggetti matematici. Si ha allora un passaggio ad un grado di maggiore astrazione, che permette di inglobare lo sviluppo precedente, senza più preoccuparsi esplicitamente di tutti i dettagli raccolti nel corso dello sviluppo; e poi si ricomincia ad un livello di astrazione superiore. Questo processo di selezione e chiarificazione di fatti e concetti spesso riduce migliaia di pagine a poche pagine, tramite la formazione di un linguaggio *essenziale*, *preciso* e *sintetico*. Di conseguenza, per avere speranza di capire occorre spesso studiare e digerire una lunga sequela di concetti di livello inferiore. Tuttavia, questo è uno svantaggio con cui si deve convivere: rende più difficile la gestione dei concetti che ne derivano e rende necessaria, di volta in volta, la costruzione di nuove visioni che per buona parte non possono che essere personali. Da qui derivano sicuramente parte delle difficoltà a capire gli scritti di matematica, anche da parte degli addetti ai lavori, e le difficoltà a ripercorrere lo sviluppo storico in tempi e spazi ragionevoli e, ancor più, a dare una presentazione storica delle verità acquisite. Ciononostante una presentazione storica ha il vantaggio di essere utile alla comprensione e alla riflessione sul senso e, ovviamente, sulle motivazioni e l'origine di molti concetti e metodi della matematica.

Quanto detto offre indubbiamente spunti di riflessione e, soprattutto, questioni che impongono risposte che potremmo definire *pedagogiche*. Innanzi tutto che cosa è elementare e cosa non lo è; cosa quindi sia opportuno insegnare in un primo momento e cosa sia opportuno rimandare, e quali siano i modi più efficaci e magari divertenti per insegnare questi fatti elementari e non; servirà poi una riflessione sulla natura, ad esempio psicologica, dell'apprendimento matematico; servirà definire le finalità e gli obiettivi da raggiungere; serviranno anche dei metodi di valutazione atti a verificare se gli obiettivi siano stati raggiunti o meno, e così via. Esistono una vasta letteratura e una altrettanto vasta sperimentazione (come sempre, più o meno interessanti e utili) connesse alle domande poste; ma è sempre presente il rischio di trasformare esigenze giustissime in una nuova disciplina accademica, magari dimenticandosi dell'oggetto principale in questione, nel nostro caso la matematica. Comunque, non essendo purtroppo l'autore un esperto in questi argomenti, in questi volumetti non ci sarà nessuna proposta o suggerimento nelle direzioni indicate dalle questioni appena poste. Tuttavia questo non ci esime dal ribadire alcune considerazioni ben note sulla utilità dell'insegnamento della matematica.

Parafrasando dalla Prefazione di [43], la matematica con la sua storia di più di 2500 anni è sicuramente una delle componenti fondamentali della nostra civiltà come la filosofia, la letteratura, le religioni, le arti, le scienze in generale, non solo quelle naturali ma anche quelle sociali, e la tecnologia; si può anzi dire che tutta la nostra vita in realtà, anche in modo nascosto, si fonda sui risultati di questa scienza:

- è utile, anzi essenziale, a fini pratici; nel tempo e particolarmente oggi buona parte della tecnologia che utilizziamo o vediamo utilizzata non sarebbe stata possibile senza un'enorme e spesso raffinata quantità di matematica;
- è la struttura portante e sostiene il carico principale del ragionamento scientifico ed è al centro delle più importanti teorie scientifiche; si può dire che molta parte della fisica o della chimica non ci sarebbero senza matematica; ma ormai essa è rilevante anche nelle scienze sociali come quelle comportamentali, l'economia, le scienze politico-sociologiche, o quelle relative all'analisi delle situazioni di rischio;
- ha fortemente contribuito a determinare la direzione e il contenuto di buona parte del pensiero filosofico; molti filosofi sono stati anche matematici o, comunque, fortemente interessati alla matematica; infatti, essendo la matematica l'espressione fondamentale della razionalità, essa è anche espressione della filosofia, perlomeno se questa vuole essere filosofia razionale;
- ha generato la nostra logica a partire dai greci, passando per le raffinatezze medievali, alle riflessioni metodologiche rinascimentali, alle intuizioni leibniziane fino a Bolzano e Cantor e ai grandi logici-matematici del XIX e XX secolo Frege, Russell, Hilbert, Gödel solo per citare pochi nomi, tanto da poter dire che oggi la logica è un ramo della matematica;
- infine, ha influenzato nel corso dei secoli stili pittorici, musicali, architettonici e anche letterari.

Ma, come sempre, c'è di più. Nelle parole del platonico Proclo, cfr. [101],

> Questa è quindi la matematica: essa suscita in voi le forme invisibili dell'anima, dà vita alle proprie scoperte, sveglia la mente e purifica l'intelletto; essa porta alla luce le nostre idee

> intrinseche, essa elimina l'oblio e l'ignoranza che sono con noi fin dalla nascita.

e in quelle di Robert Musil, cfr. [85],

> Tutto il nostro progresso civile è nato con il suo [della matematica] aiuto [. . .]. Ma soltanto se, invece di guardare all'utilità esterna, consideriamo nella matematica stessa la proporzione fra le parti utilizzate e le parti non utilizzate scorgeremo l'altro volto, il volto autentico, di questa scienza. Il volto non finalizzato, ma antieconomico e passionale [. . .]. La matematica è un'ostentazione di audacia della pura ratio; uno dei pochi lussi oggi ancora possibili. [. . .] Alleghiamo un piccolo esempio [. . .]. I pionieri della matematica ricavarono da certi principi delle idee utilizzabili. Da quelle idee nacquero induzioni, tipi di calcolo, risultati. I fisici ci misero su le mani e ne ricavarono nuovi risultati. Alla fine arrivarono i tecnici, accontentandosi spesso di questi risultati, ci fecero su dei nuovi calcoli e crearono le macchine. Ma ad un tratto, quando ogni cosa era stata realizzata per il meglio, saltan su i matematici [. . .] e si accorgono che nelle basi di tutta la faccenda c'è qualcosa che non torna. Proprio così, i matematici guardarono giù al fondo e videro che tutto l'edificio è sospeso in aria [. . .]. A questo scandalo intellettuale il matematico reagisce in modo esemplare: lo sopporta con orgogliosa fiducia nella pericolosità del proprio intelletto [. . .]. Noialtri dopo l'Illuminismo ci siamo persi di coraggio. È bastato un piccolo fallimento per farci voltare le spalle all'intelletto, e permettiamo a ogni esaltato zuccone di tacciare di vano razionalismo le aspirazioni di D'Alembert e Diderot. Andiamo in visibilio per il sentimento e diamo addosso all'intelletto.

In effetti per più di duemila anni una certa familiarità con la matematica è stata considerata parte indispensabile del patrimonio intellettuale di ogni persona colta, mentre oggi molte persone colte rifiutano la matematica anche come oggetto di *interesse culturale*. Agli inizi del ventesimo secolo Henri Poincaré già scriveva, cfr. [100]

> Un fatto ci deve meravigliare o, meglio, ci dovrebbe meravigliare se non fossimo ormai abituati ad esso. Come può essere che ci siano persone che non capiscono la matematica? Se la scienza invoca solo le regole della logica, quelle accettate dalle menti ben educate, come è possibile che in così tanti siano impervi ad essa come molti insegnanti di scuola media ci testimoniano?

Nell'ambito di una scuola più formativa che informativa, l'esposizione alla matematica e al suo sviluppo con il fluire di ragionamenti logici, la necessità continua di un esame critico e del controllo del contesto e delle ipotesi nelle quali si produce una tesi, l'attenzione nell'evitare tautologie e ragionamenti circolari ecc., è un formidabile strumento per lo sviluppo delle competenze per comprendere la realtà. A questo fine basterebbe forse esporre gli studenti ad alcune delle problematiche già note che si sono imposte nei secoli, piuttosto che costringere i più a risolvere spesso problemi dove lo studente è ridotto a semplice esecutore se non altro perché i dati forniti sono sempre quelli necessari e sufficienti per la conclusione. Volendo proseguire con l'insegnamento per problemi, sarebbe di gran lunga più utile fornire più dati o anche, perché no, meno dati del necessario, in modo da lasciare spazio alla sperimentazione e all'invenzione. E comunque perché non dedicare un po' di tempo ad illustrare il ruolo della matematica nello sviluppo culturale complessivo? In fondo non tutti sono particolarmente vogliosi di esercitarsi per acquisire gli aspetti più tecnici e di questo bisognerà pur tener parzialmente conto.

In questi volumetti, come già detto, si parlerà di matematica o, meglio, di alcuni problemi specifici, con particolare riferimento a come sono stati affrontati nei vari periodi storici, con errori e argomentazioni non necessariamente 'matematiche' nel senso in cui lo intendiamo oggi, analizzando le ragioni sia interne alla matematica sia esterne che hanno motivato l'introduzione di nuove idee e tecniche. Come detto, l'idea guida è stata quella di fornire momenti di *riflessione* all'insegnante che vorrà dedicare del tempo alla loro lettura e trarre magari stimoli di lavoro — in fondo, alla fine le responsabilità delle scelte restano dell'insegnante, ed è giusto che sia così — e, più in generale, a quanti hanno voglia di riflettere su queste cose. .

Veniamo ora al contenuto dei tre volumi. *Aspetti della matematica prima del Calcolo* [51] comincia col discutere il problema dell'area per le figure geometriche nella matematica greca, la soluzione geometrica trovata dai Greci con la teoria delle proporzioni e, soprattutto, il metodo di esaustione nei contributi di Archimede. Prosegue col discutere la rinascita della matematica in Europa a partire dal dodicesimo secolo, l'uso di metodi infinitesimali, l'evoluzione della nozione di curva, l'introduzione del concetto di variazione, . . . , fatti che delineano un cambiamento verso una visione sempre più *analitica* della matematica, e ancora una serie di questioni che, viste a posteriori, sembrano delineare l'esigenza di un calcolo differenziale e integrale. *La nuova filosofia della natura. Misure, variazioni ed equazioni differenziali* [53] riguarda la nascita del Calcolo con Newton e Leibniz e quindi la sintesi di variazione e integrazione che si realizza con le *equazioni differenziali*, che portano alla nuova visione matematica del mondo: la *meccanica razionale* e la *gravitazione universale*. Infine, *Funzioni e numeri* [52], partendo dai grandi successi del Settecento, soprattutto nella descrizione del mondo reale, le equazioni differenziali delle vibrazioni, delle onde, del calore e del potenziale gravitazionale, analizza la nuova visione delle funzioni in termini di *frequenze* che, oltre a richiedere risposte a molte questioni, impone un ripensamento, in termini di *rigore* e non solo, delle nozioni di continuità, differenziabilità e integrazione, che troveranno un riequilibrio nella nuova e più astratta teoria della misura a fine Ottocento e inizio Novecento. Parte di questo sviluppo si ricollega alla fondazione delle nuove università nello spirico humboldtiano, che si prefiggono di educare e avviare alla ricerca e quindi richiedono una presentazione organica del materiale da presentare agli studenti. Il volume si chiude con un piccolissimo sguardo su una piccolissima parte di un nuovo mondo che si sta aprendo, la matematica del ventesimo e ventunesimo secolo.

Come detto fin dall'inizio, i tre volumetti possono essere letti e utilizzati separatamente, ma il tema guida e allo stesso tempo unificante che ci ha guidato sono le equazioni differenziali come sintesi di una visione matematica del mondo, le equazioni differenziali in quanto equazioni che coinvolgono gli elementi differenziali, cioè le variazioni delle funzioni, e l'integrazione, cioè il processo inverso che in modo 'naturale' porta, dopo un lungo cammino, alla nuova *teoria della misura* che idealmente ci riporta al problema iniziale dell'area per gli antichi greci.

Il lettore troverà ulteriori informazioni, anche sulla letteratura primaria e secondaria, ad esempio in [43] [44] da cui è tratto molto materiale dei primi due volumetti[1]. Per quanto riguarda il terzo volume, molto materiale è tratto da [58] [59] [61] [63] [64] e più in generale dalle opere citate in Bibliografia. Una fonte di informazioni è ovviamente la "rete" dove si possono trovano molte opere qui citate e non, contributi di esperti e meno esperti su qualunque argomento qui trattato (un esercizio utile potrebbe essere quello di separare contributi interessanti da contributi meno interessanti o non corretti). Ovviamente enorme è la letteratura *tecnica* che presenta in modo formale e coerente, nel linguaggio matematico contemporaneo, quanto viene solitamente raggruppato e denominato come *Analisi Matematica*; per ovvi motivi l'autore non può che "propagandare" [47] [46] [48] [49] [50].

Mi piace concludere questa prefazione ringraziando Giuseppe Modica, a cui sono legato da una lunga amicizia e collaborazione scientifica, per aver letto varie stesure di questi volumetti, aver eliminato molti errori e aver contribuito ad

[1] Qui mi sembra opportuno fare qualche osservazione. A mio parere – da una parte a sostegno della tesi che in vari problemi matematici importanti ci sia *a posteriori* una sorta di filo conduttore attorno a cui tentativi, errori, sperimentazione, idee, concetti e presentazione formale si diramano in direzioni a volte non buone o non corrette e a volte prefigurando quelle corrette, e questo fin dalla matematica ellenica, e dall'altra per una migliore comprensione delle motivazioni che hanno portato agli argomenti discussi nel terzo volume – i primi due volumetti [51] [53] sono da ritenere parte integrante e utili all'intera opera non solo dal punto di vista degli argomenti discussi ma anche perché operativamente spesso cercano di instaurare un confronto-rapporto tra la rappresentazione informale e la presentazione formale su questioni relativamente più semplici di quelle discusse nel terzo volume [52].

Avendo discusso in un contesto più ampio vari aspetti della matematica dal periodo ellenistico fino alla fine del Settecento in [43] e [44], come detto, molto materiale è tratto appunto da quei volumi, spesso letteralmente. Infatti, essendo questi volumi diretti soprattutto a studenti ed insegnanti e non avendo pretese accademiche, se non la speranza che il lavoro fatto potesse essere apprezzato anche da colleghi accademici, non mi sembrava opportuno riferirsi semplicemente a [43] e [44], che assieme assommano a circa 950 pagine, e limitarsi ad aggiungere quanto già non presente.

Ma, essendomi stato comunicato che erano state sollevate difficoltà relativamente alla pubblicazione dei primi due volumetti, ho accettato l'offerta di pubblicare a stampa solo il terzo volume e ho deciso di mettere a disposizione dei lettori interessati i primi due volumetti all'indirizzo `homepage.sns.it/giaquinta/`.

una migliore selezione e presentazione di vari argomenti. Gli errori che ancora restano sono ovviamente da imputare all'autore.

Un ringraziamento va alle *Edizioni della Normale* che hanno accettato di pubblicare il terzo volume, mentre i primi due volumetti si possono trovare all'indirizzo `homepage.sns.it/giaquinta/`.

Firenze, Dicembre 2018

CAPITOLO 1

Il calcolo infinitesimale

L'invenzione – o, come pensano alcuni, la scoperta – del *nuovo calcolo* è una delle componenti fondamentali che caratterizzano la *rivoluzione scientifica* del Seicento. Il calcolo fu creato da Newton e da Leibniz in maniera indipendente l'uno dall'altro e è possibile vedere, nelle due formulazioni, differenze concettuali e formali tanto da far parlare di due invenzioni diverse. Il consolidamente e gli sviluppi del secolo XVIII e XIX permettono comunque di riconoscere lo stesso calcolo che, nel tempo e a seconda dei sostenitori, prende nomi diversi: *calcolo delle differenze* o *calcolo differenziale*, *calcolo infinitesimale*, *calcolo differenziale e integrale* o, semplicemente, *calcolo*.

Molti matematici, grandi e meno grandi, furono coinvolti nello sviluppo di idee, di problematiche e di tecniche rilevanti nell'invenzione del calcolo, e molti altri saranno coinvolti per quel che riguarda il suo consolidamento e per una sua ragionevole fondazione concettuale che, possiamo dire, si realizza alla fine del XIX secolo. Per comodità del lettore riassumiamo brevemente il contesto culturale (matematico) in cui *nasce* il calcolo, cfr. [43] [51].

- Nel Seicento la nozione di *curva* subisce cambiamenti notevoli e una sempre maggiore algebrizzazione; con motivazioni puramente matematiche o meccanico-cinematiche vengono introdotte molte nuove curve e classi di curve; vengono introdotti metodi di rettificazione e quadratura sempre più generali, metodi per lo studio delle tangenti e delle normali e, infine, ci si chiede anche di determinare curve per cui siano note relazioni sulle loro tangenti. In conclusione, si può dire, si è alla ricerca di metodi generali e unificanti per lo studio di questi problemi.
- Vengono introdotte quantità evanescenti, e quantità finite sono rappresentate come somme infinite; si opera con quantità evanescenti la cui somma infinita è finita.
- Diventa sempre più centrale l'esigenza di comprendere e definire nei loro aspetti sia teorici che sperimentali nozioni quali quelle di forza, di velocità e di movimento.

Senza esagerare, possiamo dire che la svolta operata da Newton e da Leibniz nelle direzioni appena indicate, come pure le implicazioni filosofiche e politico-sociali – più in generale culturali – che derivano dalle loro azioni e dalle loro opere sono di enorme importanza.

Dal punto di vista tecnico il calcolo di Newton e Leibniz è una specie di apparato analitico per lo studio delle curve e delle variabili definite sulle curve. Per noi oggi il calcolo riguarda le *funzioni*: è il calcolo della derivata o dell'integrale di una funzione. Ma, per quanto possa sembrare strano, il concetto di *funzione* appare solo dopo Leibniz e Newton. Anche successivamente, con Johann Bernoulli e Leonhard Euler, le funzioni sono solo una sorta di componente di una formula, cioè espressioni che dipendono da costanti e da una quantità variabile. Scrive Bernoulli, cfr. [8], [9] II, p. 241:

> Qui chiamiamo funzione di una quantità variabile una quantità composta in un modo qualunque da questa quantità variabile e da costanti.

Sostiene Eulero, cfr. [30]:

> Una funzione di una quantità variabile è un'espressione analitica composta in un modo qualunque dalla quantità variabile e da quantità costanti.

Ancora, in [33]:

> Se una quantità dipende da altre in modo che se queste cambiano essa cambia, la prima si dice funzione delle altre. Questa termiologia è generale e include tutti i modi in cui una quantità può essere determinata da altre.

Ma per avere una definizione moderna di 'funzione' bisognerà aspettare il XIX secolo con Lejeune Dirichlet, Augustin-Louis Cauchy e Bernhard Bolzano, e, soprattutto, il dibattito che coinvolge matematici come Emile Borel, René Baire e Henri Lebesgue negli anni attorno al 1900.

In realtà è Leibniz a introdurre il termine matematico *funzione* [75], ma sembra che le funzioni di Leibniz siano le funzioni di una curva, cioè indichino le quantità definite da una curva. C'è da dire che anche il concetto di curva non è ben definito nel Seicento ed in parte nel Settecento. È una sorta di concetto primitivo geometrico, a volte descritto appunto in modo geometrico, a volte in modo cinematico, a volte come luogo di zeri o come categoria di oggetti, come le curve geometriche e le curve trascendenti. Oggetto del calcolo erano comunque le curve e le quantità variabili definite su una curva, come l'ascissa x, l'ordinata y, la sottotangente t, la tangente τ, la lunghezza d'arco s, l'area Q, la normale n e così via, cfr. Figura 1.

1.1. *Il calcolo di Newton*

ISAAC NEWTON (1643-1727)[1] è oggi noto per la formulazione della *meccanica*

[1] L'anno di nascita è in accordo con il calendario Gregoriano che però fu adottato in Inghilterra solo nel 1752; per questo viene anche data come anno di nascita il 1642 in accordo con il

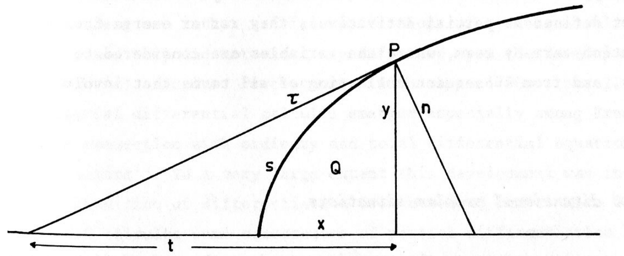


FIGURA 1. Una curva e le sue variabili.

e della *teoria della gravitazione universale* e per l'invenzione del *calcolo*, da cui le prime due dipendono fortemente. Pubblicò relativamente poco durante la vita, ma tenne note di tutte le sue riflessioni. Questi manoscritti, prevalentemente ordinati da Newton stesso a vantaggio dei posteri, sono giunti a noi; è stato quindi possibile per gli studiosi seguire, quasi mese per mese, l'evoluzione delle sue idee, ovviamente con interpretazioni spesso contrastanti, anche in dipendenza del successivo studio dei singoli manoscritti. Il risultato è che oggi abbiamo a disposizione un'enorme quantità di scritti di Newton e un'ancor più enorme quantità di libri e lavori dedicati allo studio di questo materiale, cfr. [110] [111] e per un breve resoconto [44]. In questo capitolo illustreremo il calcolo di Newton, rimandando a più avanti per la meccanica e la gravitazione. Rinunceremo a scrivere sulla vita di Newton, anche se la sua biografia, si veda [111] [44], ci aiuterebbe a capire meglio la sua opera scientifica e, soprattutto, il suo carattere, i legami con l'ambiente culturale e sociale che lo circonda e la disputa con Leibniz.

Newton comincia a scrivere di matematica intorno al 1664 sotto l'influenza di Wallis, ma la prima presentazione del calcolo che Newton abbia pubblicato si trova nei *Principia* 1687 [86], Libro I Sezione I. Gli scritti newtoniani di maggiore interesse sul calcolo, già terminati all'inizio degli anni 1670, furono invece pubblicati solo successivamente. Per comodità del lettore ricordiamo le opere principali.

- Nel 1669 Newton scrive il trattato *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* [95] II, pp. 206-247, che fu pubblicato solo nel 1711 [88].

calendario giuliano al tempo in vigore: in questo modo l'anno di nascita di Newton coincide con l'anno di morte di Galilei

- Ritornando sulle sue ricerche sulle tangenti e sulle quadrature, nel 1671 Newton scrive il lungo trattato *De Methodis serierum et fluxionum*, [95] III, pp. 32-329. Il trattato sviluppa il metodo delle flussioni, in modo fortemente correlato al metodo delle serie (all'inizio Newton include ed espande il *De Analysi*), e le applicazioni di questa nuova arte analitica allo studio della natura delle curve. Il trattato fu pubblicato solo nove anni dopo la sua morte, a cura e nella traduzione inglese di John Colson [92] nel 1736.
- Tra il 1691 e il 1692 Newton scrive il *Tractatus de quadratura curvarum*, [95] VIII, pp. 92-167, ampliando un precedente *De quadratura*, in cui riespone le sue idee sul calcolo. Spesso questo trattato è indicato come riferimento per il calcolo di Newton – una traduzione italiana si può trovare in appendice al volume di Guido Castenuovo [16] che include anche una traduzione del lavoro di Leibniz [73]. Parti furono inserite nel *De Algebra Tractatus historicus et practicus* di John Wallis in [109]; successivamente nel 1704, il trattato fu pubblicato come una delle appendici — l'altra è la *Enumeratio linearum tertii ordinis* — dell'*Opticks* [87].
- A tutto questo andrebbe aggiunta parte della corrispondenza relativa alla disputa sulla priorità con Leibniz e, in particolare, le due famose lettere inviate da Newton a Oldenburg per Leibniz, note come *Epistola Prior* del 13 Giugno 1676 e *Epistola Posterior* del 24 Ottobre 1676, oltre al rapporto finale della Royal Society, noto come *Commercium Epistolicum* [90] – una riproduzione si trova in [60], che può essere considerata l'ultima opera matematica di Newton.

Newton ha tre redazioni principali del calcolo infinitesimale: la prima è quella del *De Analysis*, composta nel 1669 ma pubblicata nel 1711; la seconda, in cui compare la terminologia e la notazione delle flussioni, è contenuta nel *De Methodis serierum et fluxionum*, redatto nel 1671 e pubblicato postumo; la terza, in cui si trova il metodo delle prime e ultime ragioni, appare nel *De quadratura*; quest'ultimo metodo è quello seguito nei *Principia*, pubblicati nel 1687.

1.1.1. *Il metodo delle serie infinite*

L'uso delle serie è piuttosto antico, Archimede usa la serie geometrica per la quadratura della parabola, nel Seicento Mengoli calcola la somma di molte serie telescopiche. Sulla base di specifici esempi (trattati più o meno nello stesso tempo, ad esempio, da James Gregory, da Gregorio di San Vincenzo, da Mercator e da Leibniz) Newton sviluppa *metodi generali* – metodo di interpolazione, di divisione, di estrazione della radice, dei coefficienti indeterminati, di integrazione termine a termine – trovando gli *sviluppi in serie* di potenze praticamente di tutte le funzioni conosciute (le potenze, le radici, le funzioni circolari e le loro inverse, i logaritmi e gli esponenziali) e li mette alla base della sua *teoria* *delle quadrature*. Non solo, essendo la quadratura l'inverso della derivazione, li mette alla base della risoluzione del *problema inverso* del calcolo: *determinare la fluente dalla flussione*. Vediamo ora alcune esemplificazioni; su alcune e su altre torneremo in seguito in modo un po' più sistematico.

1.1. *La serie binomiale*. Partendo dalla *formula del binomio*, che possiamo far risalire a Pascal 1654

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \tag{1.1}$$

dove, ricordiamo,

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}, \qquad \forall k,\ 0 \le k \le n,$$

Newton, usando metodi di interpolazione, di induzione e di analogia alla maniera di Wallis, trova uno sviluppo in serie infinita del tipo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ della funzione $\sqrt{1-x^2}$, il cui grafico è il semicerchio superiore di centro l'origine e raggio 1,

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \dots$$

In realtà, giustamente non soddisfatto della procedura di interpolazione, Newton verificò la formula in due modi diversi: mostrando che il prodotto del termine a destra per se stesso dà $1-x^2$ e applicando il metodo dell'estrazione della radice a $1-x^2$, si veda più avanti.

Più in generale, egli trovò (vedi 7.1 Capitolo 7) quella che oggi chiamiamo la *formula della serie binomiale*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ |x| < 1. \tag{1.2}$$

per esponenti α razionali, $\alpha = p/q$, dove

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} & \text{se } k \ge 1. \end{cases}$$

1.2. *Il metodo dei coefficienti indeterminati*. Volendo sviluppare $\sqrt{1+x}$ Newton pone

$$\sqrt{1+x} = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \cdots$$

Elevando al quadrato e ordinando il secondo membro secondo le potenze crescenti della x, si ottiene

$$1 + x = 1 + 2ax + (a^2 + 2b)x^2 + (2c + 2ab)x^3 + (2d + 2ac + b^2)x^4 + \cdots$$

da cui, uguagliando i coefficienti delle varie potenze

$$2a = 1, \quad a^2 + 2b = 0, \quad c + ab = 0, \quad 2d + 2ac + b^2 = 0, \dots,$$

deriva

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots.$$

1.3. *Il metodo di quadratura*. Rifacendosi a Wallis, Newton pone allora alla base del suo metodo di quadratura le seguenti tre regole:

1. L'area sottesa dalla curva $y = ax^{m/n}$ calcolata da 0 a x è $n/(m+n)ax^{(m+n)/n}$.
2. Se y è somma (finita o infinita) di altre quantità $y = y_1 + y_2 + \dots$, l'area sotto y è la somma delle aree di tutti i termini $y_1, y_2, \dots$
3. Se la curva ha equazione $f(x,y) = 0$ si svilupperà y nella forma $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha_k}$, dove gli α_k sono razionali, e si applicheranno le regole 1 e 2.

Relativamente alla terza regola osserviamo che questo è quanto di meglio si possa sperare, anche se non è ovvio che si possa effettivamente fare: nel caso dell'equazione polinomiale $y^2 - x^3 = 0$ abbiamo infatti o $y = x^{3/2}$ o $x = y^{2/3}$.

1.4. *Metodo della divisione*. Cerchiamo lo sviluppo in serie di $1/(1+x)$. Dividendo 1 per $1+x$, otteniamo come quoziente 1 e resto $-x$; dividendo il resto $-x$ per $1+x$ otteniamo x come quoziente e x^2 come resto; continuando così si otterrà quindi

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots,$$

che, come dice Newton, è valida per x vicino a zero, per noi per $|x| < 1$. Per x grande si potrebbe scrivere

(1.3)
$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\Big(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \dots\Big) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \dots$$

1.5. *Metodo della radice*. Consideriamo ancora una volta $\sqrt{a^2+x^2}, a > 0, x$ vicino a 0. Scriviamo

$$\sqrt{a^2+x^2} = a + \Gamma_0,$$

allora, elevando al quadrato,

$$a^2 + x^2 = a^2 + 2a\Gamma_0 + \Gamma_0^2.$$

Ignoriamo ${\Gamma_0}^2$ — per x vicino a zero Γ_0 è vicino a zero, quindi ${\Gamma_0}^2$ è ancora più vicino a zero — ottenendo

$$a^2 + x^2 \simeq a^2 + 2a\Gamma_0,$$

cioè

$$\Gamma_0 = \frac{x^2}{2a}.$$

Scriviamo ora

$$\sqrt{a^2+x^2} = a + \frac{x^2}{2a} + \Gamma_1$$

per cui, elevando ancora al quadrato,

$$a^2+x^2 = a^2+x^2+\frac{x^4}{4a^2}+2(a+\frac{x^2}{2a})\Gamma_1+\Gamma_1^2;$$

ignorando i termini Γ_1^2 e $x^2/(2a)\Gamma_1$ (più vicini a zero di quanto non lo sia x^4), troviamo allora

$$\Gamma_1 = -\frac{x^4}{8a^3}.$$

Ripetendo l'argomento, cioè scrivendo

$$\sqrt{a^2+x^2} = a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\Gamma_2$$

e ignorando, come si direbbe oggi, *gli infinitesimi di ordine superiore*, si trova

$$\Gamma_2 = \frac{x^6}{16a^5},$$

cioè

$$\sqrt{a^2+x^2} \simeq a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}.$$

Continuando così si ritrova lo sviluppo in serie di $\sqrt{a^2+x^2}$.

Diamo ora qualche applicazione che Newton fa delle sue regole.

1.6. *Sviluppo del logaritmo*. Consideriamo l'iperbole

$$y = \frac{1}{1+x}.$$

Come ben noto al tempo di Newton, l'area sotto l'iperbole $y = \frac{1}{1+x}$ nell'intervallo $[0,x]$ è il *logaritmo di* $x+1$. Poiché

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-\dots,$$

applicando le Regole 1 e 2 troviamo

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

1.7. *Area del cerchio*. Abbiamo

$$\sqrt{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{1/2}{k}x^{2k}$$

per cui

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}\binom{1/2}{k}.$$

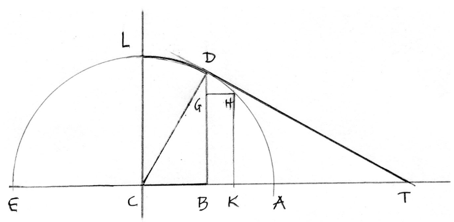


FIGURA 2. Lunghezza dell'arco di circonferenza.

1.8. *Lunghezza dell'arco di circonferenza.* Con riferimento alla Figura 2 si voglia calcolare la lunghezza dell'arco LD della semicirconferenza $ADLE$. In termini moderni, posto $CB =: x$, vogliamo determinare lo sviluppo in serie di potenze di x dell'arco il cui seno è x, cioè di $\arcsin x$. Newton essenzialmente — quanto presentiamo qui, tranne che per varianti irrilevanti, è quello che fa Newton — considera il "momento della base" GH e il "momento dell'arco" DH, cioè GH e DH infinitamente piccoli e identifica DH con il segmento corrispondente sulla tangente, e dalla similitudine dei triangoli DGH, DBT e CBD ricava

$$HD : GH = DT : DB = DC : BD = 1 : \sqrt{1-x^2}.$$

Dalla serie binomiale

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^{2n}, \qquad |x| < 1$$

ricava per somma o integrazione (l'arco come somma di infinitesimi d'arco)

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} t^{2n}\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned} \tag{1.4}$$

per $|x| < 1$. Con il *metodo della inversione delle serie*, cioè da

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

trovando per gli opportuni b_k

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k,$$

egli determina quindi lo sviluppo in serie di $\sin x$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

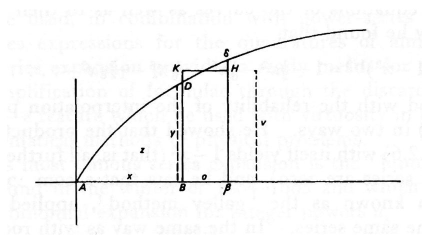


FIGURA 3. Giustificazione della Regola 1.

Newton applicò il metodo delle serie a molti esempi proponendo *algoritmi* per la quadratura, il calcolo delle tangenti e della curvatura di varie curve, in termini moderni, sviluppando così gli algoritmi di derivazione per le curve *algebriche*.

1.9. *Sulle regole*. La Regola 1, al di là della apparente presentazione algebrica del calcolo fa uso, come da aspettarsi, degli *infinitesimi*.

Con riferimento alla Figura 3, $AB = x$, $BD = y$, Area$ABD = z$, siano $B\beta = o$ e Area$BkHb = ov$ in modo che Area$BD\delta\beta =$ Area$BkHb = ov$. Egli considera, ad esempio, una curva per cui

$$z = \frac{2}{3}x^{3/2} \quad \text{equivalentemente} \quad \mathrm{z}^2 = \frac{4}{9}\mathrm{x}^3.$$

Allora si ha anche

$$(z+ov)^2 = \frac{4}{9}(x+o)^3$$

da cui, semplificando e dividendo per o si ottiene $2zv+ov^2 = \frac{4}{9}(3x^2+3xo+o^2)$. Prendendo $B\beta$ *infinitamente piccolo* per cui $v = y$ e o nullo, concludiamo $2zy = 4/3x^2$, cioè

$$y = x^{1/2}.$$

Nell'argomento precedente si può leggere tra le righe il *teorema fondamentale del calcolo*

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x).$$

In realtà è stata usata l'osservazione piuttosto evidente che, se $A_f(x)$ indica l'area sotto il grafico di f nell'intervallo $[0,x]$, che per altro non è mai stata definita, allora

$$\frac{d}{dx}A_f(x) = f(x)$$

e questo diventerà un teorema quando si definirà l'integrale e l'area e, soprattutto, si introdurranno le funzioni. Nella Regola 2, apparentemente innoqua, vediamo quella che per noi è il teorema di integrazione termine a termine per le serie di potenze. Infine, in relazione alla Regola 3, è da menzionare, anche se noi non ne discuteremo qui, il metodo del *poligono di Newton*, come è noto oggi. Esso appare sia nel *De Analysi* che nel *De Methodis* e fu pubblicato nel Capitolo 94 dell'*Algebra* di Wallis. Si tratta di un algoritmo, che risulterà rilevante in geometria algebrica – dove appare anche come *teorema di Puiseux*, dal matematico francese Victor Puiseux (1820–1883) – che permette, data un'equazione algebrica

$$f(x,y) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i y^j = 0,$$

di esprimere y come una serie

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{\alpha_k},$$

dove gli α_k sono numeri razionali.

1.1.2. *Il metodo delle flussioni*

Tra il 1670 e il 1671 Newton scrive un lungo trattato, il *De Methodis Serierum et Fluxinum*, che nella parte iniziale include il *De Analysi* e quindi passa a illustrare la sua *arte analitica* per discutere problemi tipici relativi allo studio delle curve.

Alla base del nuovo approccio, che Newton sviluppa tra il 1670 e il 1671, c'è il *fluire del tempo* e la descrizione cinematica delle curve: le curve e più in generale le quantità matematiche sono generate dal fluire continuo del tempo. Come poi scriverà all'inizio del *De quadratura curvarum* nel 1704

> Considero in questo lavoro le grandezze matematiche non come costituite di parti piccole a piacere ma come generate da un moto continuo. Le linee vengono descritte non mediante addizione di parti, ma per moto continuo di punti; le superfici per moto di linee; i solidi per moto di superfici, gli angoli per rotazione dei loro lati; i tempi per flusso continuo e così in altri casi analoghi. Queste generazioni hanno veramente luogo in natura, e si osservano ogni giorno nel movimento dei corpi.

In questo approccio cinematico, come pure nella sua formulazione geometrica già presente nel *De Methodis* ma prevalente nei *Principia* e nel *De quadratura*, appare evidente un tentativo da parte di Newton di dare un appropriato fondamento alla sua arte analitica che elimini il ricorso agli infinitesimi che saranno sostituiti dalle *quantità evanescenti*.

Tre sono gli elementi costitutivi della teoria: le quantità generate tramite un flusso, chiamate *fluenti* ad esempio $x = x(t)$, le velocità chiamate *flussioni* denotate $\dot{x}$, i *momenti* delle quantità fluenti, quelli che per Leibniz sono $\dot{x}dt$ e Newton indica con $\dot{x}o$, gli addendi infinitamente piccoli tramite cui quelle quantità crescono durante ciascun intervallo infinitamente piccolo di tempo:

> Considero che il tempo fluisca o cresca per flusso continuo e che le altre quantità crescano continuamente nel tempo e da questa flussione del tempo do il nome di flussioni alle velocità con cui tutte le altre quatità crescono. Ed è anche dai momenti di tempo che do il nome di

momenti alle parti di ogni altra quantità generata in momenti di tempo. Descrivo il tempo mediante una qualsiasi quantità che fluisca uniformemente.

A proposito dei momenti, scrive più in dettaglio nel *De Methodis*

I momenti delle quantità fluenti (cioè le loro parti indefinitamente piccole per addizione delle quali esse crescono nei singoli spazi di tempo indefinitamente piccoli) stanno come le velocità del fluire. Poiché se il momento di una quantità, come x, è espresso dal prodotto della sua velocità m e della quantità infinitamente piccola o (cioè mo), i momenti delle altre v,y,z saranno espressi da vo,yo,zo considerato che vo,xo,yo,zo, stiano tra loro come v,x,y,z.

Avverte infine Newton che non va identificato il tempo del calcolo flussionale con il tempo reale: ogni quantità fluente la cui flussione è costante ($\dot{x} = \mathrm{cost}$) può essere usata come tempo flussionale.

Nel *De Methodis* Newton applica queste sue idee, in congiunzione con il metodo delle serie, a vari problemi tipici — come, trovare massimi e minimi di quantità, determinare le tangenti ad una curva, la curvatura e il raggio di curvatura di una curva e calcolare le aree di figure curvilinee o le lunghezze di curve, usando vari tipi di coordinate — riducendoli ai seguenti due problemi generali:

- *Problema 1.* Data in modo continuo (cioè per ogni tempo) la lunghezza dello spazio, trovare la velocità del moto in ogni tempo proposto.
- *Problema 2.* Data in modo continuo la velocità del moto, trovare la lunghezza dello spazio descritto ad ogni tempo proposto.

Egli procede per esempi specifici, enunciando algoritmi di risoluzione e giustificando questi algoritmi. Noi presenteremo solo alcuni esempi a scopo illustrativo, cominciando dal Problema 1 che Newton riformula come:

Data una relazione tra due quantità fluenti, determinare la relazione tra le flussioni.

Si noti che negli enunciati le formulazioni di Newton sono in accordo con il metodo geometrico classico, sono le dimostrazioni ad usare gli ingredienti infinitesimi dei momenti.

1.10. *Il metodo diretto delle flussioni*. Consideriamo con Newton l'equazione polinomiale che lega le due quantità fluenti x e y

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0. \tag{1.5}$$

La ricetta che Newton dà, cioè l'equazione che lega le due flussioni $\dot{x}$ e $\dot{y}$, è essenzialmente la stessa di quella proposta da Johann Hudde in una delle appendici dell'edizione latina della *Geometria* di Descartes a cura di De Beaune e di Frans van Schooten e, nel caso che stiamo considerando, porta a

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0.$$

Questa equazione dà anche

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}.$$

E se l'equazione contiene radici? Come, ad esempio, nel caso dell'equazione

$$y^2 - a^2 - x\sqrt{a^2 - x^2} = 0.$$

Newton scrive

$$z := x\sqrt{a^2 - x^2}$$

ottenendo

$$y^2 - a^2 - z = 0 \quad \text{e} \quad a^2x^2 - x^4 - z^2 = 0.$$

Applicando l'algoritmo a queste equazioni polinomiali trova

$$2\dot{y}y - \dot{z} = 0 \quad \text{e} \quad 2\mathrm{a}^2\dot{\mathrm{x}}\mathrm{x} - 4\dot{\mathrm{x}}\mathrm{x}^3 - 2\dot{\mathrm{z}}\mathrm{z} = 0;$$

eliminando $\dot{z}$ e sostituendo il valore di z, ottiene quindi

$$2\dot{y}y + (-a^2\dot{x} + 2\dot{x}x^2)/\sqrt{a^2 - x^2} = 0,$$

che è l'equazione cercata.

Ovviamente il metodo funziona in presenza di più di un radicale, anche se diventa più lungo in funzione di quanti radicali compaiono (bisognerà risolvere un sistema di equazioni pari al numero dei radicali presenti per ricondursi a equazioni polinomiali). Osserviamo che nel metodo descritto sono implicite le regole per il calcolo delle flussioni per la somma $(\dot{x + y}) = \dot{x} + \dot{y}$, per il prodotto $(\dot{xy}) = \dot{x}y + x\dot{y}$, e per le potenze $(\dot{x^\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}\dot{x}$.

Newton dà anche una dimostrazione della regola precedente affermando:

> Un'equazione che esprime una relazione tra due quantità fluenti x e y esprimerà la stessa relazione tra $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$, cosicché x e y potranno essere sostituite con $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ nell'equazione in considerazione.

Nel caso dell'equazione (1.5), dopo aver sostituito x e y con $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$, annullato il termine $x^3 - ax^2 + axy - y^3$, diviso per o e eliminati i termini nei quali compare ancora o, si ottiene facilmente

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$$

che è appunto l'equazione per le flussioni.

Pur non avendo dubbi sulla certezza del risultato, la dimostrazione precedente agli occhi di Newton ha il difetto di usare gli infinitesimi, probabilmente per questo egli cercò un fondamento più valido alla sua arte nel *metodo delle prime e ultime ragioni* e in un *approccio più geometrico*. Ma prima di passare a questo diamo ancora un esempio e facciamo qualche commento sul *Problema 2*.

1.11. *Le tangenti*. Vediamo come il metodo delle flussioni permette di determinare la tangente ad una curva in un punto (meglio la sottotangente). Con riferimento alla Figura 4 sia ED una curva la cui equazione è data in termini dell'ascissa $x = AB$ e dell'ordinata obliqua $y = BD$. Se l'ordinata si muove di uno spazio infinitamente piccolo nella posizione $b\partial$ (parallela a BD) di modo che aumenta del momento $c\partial$, AB cresce del momento Bb che è uguale a Dc.

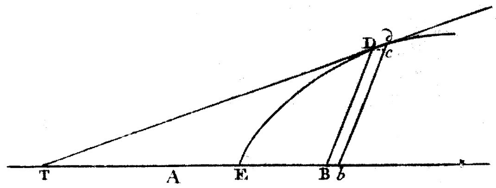


FIGURA 4. Determinazione della tangente o, più esattamente, della sottotangente a una curva.

Newton ora afferma che la linea che prolunga $D\partial$ dell'arco ED taglia l'asse delle ascisse in T e che questa linea tocca la curva in D e ∂ ed è la tangente. Quindi osserva che, essendo i triangoli $Dc\partial$ e TBD simili, si ha

$$\frac{TB}{BD} = \frac{Bb}{c\partial}.$$

Ora, l'algoritmo delle flussioni applicato all'equazione che definisce la curva permette di determinare il rapporto $\dot{x}/\dot{y}$ che non è altro che il rapporto dei momenti dell'ascissa e dell'ordinata, per cui conclude che

$$TB = y\frac{\dot{x}}{\dot{y}}.$$

Newton applica questo argomento a varie curve.

1.12. *Il problema inverso*. Il problema inverso, consistente nel passare dalla curva alle aree o dalla flussione alla fluente e, più in generale nella soluzione di un'*equazione differenziale*, è molto più complesso. Newton sa bene che mentre la flussione di una fluente razionale è ancora razionale l'inverso non è vero: la quadratura di $1/(1+x)$ porta al logaritmo. Il problema diventa allora, quali curve sono quadrabili? Ovviamente, ogni tavola che per una fluente dà la sua flussione letta all'inverso diventa una tavola per la quadratura. Newton sviluppa vari artifici piuttosto raffinati (come, ad esempio, cambiamenti di variabile) per lo studio della quadratura delle curve, e in specifici casi ricorre all'integrazione di un'equazione differenziale. Ad esempio, se vale una relazione del tipo

$$f(x, \dot{y}/\dot{x}) = 0$$

con f polinomiale, sarà possibile scrivere $\dot{y}/\dot{x}$ come serie di Puiseux di x e quindi quadrare almeno localmente vicino a zero.

Nel *De quadratura* studierà in generale la possibilità di quadrare curve del tipo $y = x^{\vartheta}R^{\lambda}S^{\mu}T^{\nu}$ dove R, S, T sono espressioni della forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{nk}$, ma noi non entreremo in dettagli. Ricordiamo infine che intorno al 1690 Newton formulò metodi per il calcolo approssimato delle aree nel contesto dei suoi studi sull'interpolazione, cfr. ad esempio [88]. L'idea di fondo è che, fissati $n+1$ valori y_i della fluente $y = f(x)$, possiamo costruire un polinomio $p(x) = a_0 +$

$a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ che interpola la funzione $y = f(x)$, cioè che sia tale che $y_i = y(x_i) = p(x_i)$. L'area delimitata da $p(x)$, che possiamo facilmente calcolare, approssima allora l'area di $f(x)$, almeno se n è grande.

1.1.3. *Il metodo delle prime e ultime ragioni*

La matematica del movimento, in qualche modo giustificata dall'effettivo verificarsi dei fenomeni, espressa dalla fluente u, dalla flussione $\dot{u}$ e dai momenti, che moltiplicati per gli infinitesimi temporali $\dot{u}o$ e sommati, danno lo spazio o l'area sottesa dalla curva, non sembrano soddisfare Newton. Nei *Principia* infatti, riferendosi al *De Quadratura*, riformula il suo calcolo in termini di *rapporto delle prime e ultime ragioni* e, in definitiva, in termini *geometrici*, con il chiaro intento di fondare la sua nuova arte sulla geometria, quasi con un ritorno a Barrow e, a suo dire, agli Antichi. Il metodo delle prime e ultime ragioni viene presentato da Newton nella Sezione I del primo Libro dei *Principia*, ma prima di illustrarne qualche dettaglio conviene rileggere il commento dello stesso Newton nello *Scolio* alla fine della prima sezione del primo libro dei *Principia*, [94], pp. 152-154:

> [...] In verità ho premesso questi lemmi per sfuggire alla noia di dedurre, secondo l'usanza dei vecchi geometri, lunghe dimostrazioni per assurdo. Col metodo degli indivisibili le dimostrazioni sono rese più brevi. Ma poiché l'ipotesi degli indivisibili è piuttosto ardua, e poiché quel metodo è stimato meno geometrico, ho preferito ridurre le dimostrazioni delle cose seguenti alle prime e ultime somme e ragioni di quantità evanescenti e nascenti, ossia ai limiti delle somme e ragioni, e premettere, perciò, il più brevemente possibile, le dimostrazioni di quei limiti. Questo stesso, infatti, viene fatto anche col metodo degli indivisibili; ed essendo stati dimostrati i principi, li possiamo già usare in modo più sicuro. Perciò se nel seguito mi capiterà di considerare le quantità come costituite da particelle determinate, o mi capiterà di prendere segmenti curvilinei come retti, vorrò significare non particelle indivisibili ma divisibili evanescenti, non somme e ragioni di parti determinate, ma sempre limiti di somme e ragioni; e la forza di tali dimostrazioni si richiamerà sempre al metodo dei lemmi precedenti. Si obietta che non esiste l'ultimo rapporto di quantità evanescenti, in quanto esso, prima che le quantità siano svanite non è l'ultimo, e allorché sono svanite non c'è affatto. Ma con lo stesso ragionamento si può giustamente sostenere che non esiste la velocità ultima di un corpo che giunga in un certo luogo, dove il moto finisce. La velocità, infatti, prima che un corpo giunga nel luogo non è l'ultima, e quando vi giunge non c'è. La risposta è facile: per velocità ultima si intende quella con la quale il corpo si muove, non prima di giungere al luogo ultimo nel quale il moto cessa, né dopo, ma proprio nel momento in cui vi giunge: ossia, quella stessa velocità con la quale il corpo giunge al luogo ultimo e con la quale il moto cessa. Similmente, per ultime ragioni delle quantità evanescenti si deve intendere il rapporto delle quantità non prima di diventare nulle e non dopo, ma quello col quale si annullano. Parimenti, anche la prima ragione delle quantità nascenti è il rapporto col quale nascono. E la prima e ultima somma è quella con cui iniziano e cessano di essere (ossia di essere aumentate o di essere diminuite). Esiste un limite che la velocità alla fine del moto può raggiungere ma non superare. Questa è l'ultima velocità. E un identico limite è il rapporto di tutte le quantità e proporzioni incipienti ed evanescenti. E poiché questo limite è certo e definito, il problema

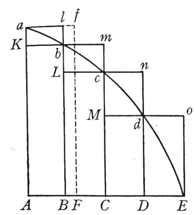


FIGURA 5. Lemma II, Sezione I Libro I dei *Principia*.

di determinarlo è veramente geometrico. In quanto, tutto ciò che è geometrico può essere assunto legittimamente per determinare e dimostrare gli altri problemi geometrici.
Si può anche obiettare che se vengono date le ultime ragioni delle quantità evanescenti, saranno date anche le ultime grandezze, e in tal modo ogni quantità sarà costituita da indivisibili, contro quanto Euclide dimostrò circa gli incommensurabili nel decimo libro degli *Elementi*. Questa obiezione, però, si basa su una falsa ipotesi. Le ultime ragioni con cui quelle quantità si annullano non sono in realtà le ragioni delle ultime quantità, ma i limiti ai quali le ragioni delle quantità decrescenti si avvicinano sempre, illimitatamente, e ai quali si possono avvicinare per più di qualunque differenza data, e che, però, non possono mai superare, né toccare prima che le quantità siano diminuite all'infinito. La cosa si capisce più chiaramente nell'infinitamente grande. Se due quantità, delle quali è data la differenza, vengono aumentate all'infinito, sarà data la loro ultima ragione, soprattutto la ragione di uguaglianza, e, tuttavia, non saranno date le quantità ultime o massime delle quali questa è la ragione [...]

In quest'ultimo passo, come in altri analoghi, spesso si è voluto vedere un'anticipazione della moderna teoria dei limiti. C'è però da tener presente che qui il contesto è geometrico e l'algoritmo di limite è solo intuitivamente delineato.

La Sezione I del Libro I dei *Principia*, dedicato al metodo delle prime e ultime ragioni che, sostituendo le *quantità indivisibili* con le *quantità evanescenti* (grandezze che tendono a zero (?)) dà una fondazione geometrica del calcolo, contiene undici lemmi e uno Scolio finale, di cui abbiamo riportato una buona parte. L'approccio sembra essere archimedeo, nel senso che sembra di essere in presenza del metodo di Archimede, almeno nella sua forma seicentesca, in formulazione dinamica. L'intero metodo si basa infatti sul Lemma I, cfr. [94], p. 141, dimostrato in modo classico per assurdo:

LEMMA I. Le quantità, come anche i rapporti fra quantità, che costantemente tendono all'uguaglianza in un qualsiasi tempo finito e prima della fine di quel tempo si accostano l'una all'altra più di una qualsiasi differenza data, divengono infine uguali.

Dal Lemma II al Lemma V si discute della quadratura delle curve. Sulla base del Lemma I, nel Lemma II, Newton stabilisce con riferimento alla Figura 5:

LEMMA II. Se in una figura qualsiasi, $AacE$, delimitata dalle rette Aa, AE e dalla curva, acE, vengono inscritti un qualsiasi numero di parallelogrammi Ab, Bc, Cd, ecc. con le basi AB, BC, CD, ecc. uguali, e con i lati Bb, Cc, Dd, ecc. paralleli al lato Aa della figura; e si completano i parallelogrammi $aKbl, bLcm, cMdn$, ecc., allora, se la larghezza di questi parallelogrammi diminuirà e il loro numero aumenterà all'infinito, dico che le ultime ragioni

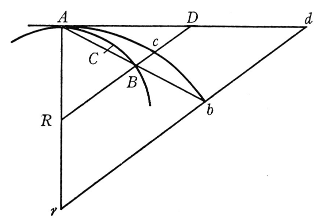


FIGURA 6. Lemma VII, Sezione I Libro I dei *Principia*.

che hanno fra di loro la figura inscritta *AKbLcMdD*, quella circoscritta *AalbmcndoE*, e quella curvilinea *AabcdE*, sono ragioni di uguaglianza.

I lemmi successivi stabiliscono che non è necessario che le larghezze dei parallelogrammi siano uguali e che, per l'uguaglianza di due figure, basta che i rapporti delle somme dei parallelogrammi inscritti tendano a essere uguali.

I Lemmi finali, dal VI all'XI riguardano infine le ragioni fra le corde e gli archi e tra triangoli evanescenti, da cui deduce

LEMMA X. Gli spazi descritti da un corpo spinto da una qualunque forza finita, tanto che quella forza sia determinata e immutabile, quanto che la medesima sia di continuo aumentata o diminuita, sono, al primo inizio del moto, proporzionali al quadrato dei tempi.

Facendo riferimento alla Figura 6, riportiamo solo i Lemmi VI e VII.

LEMMA VI. Se un arco qualsiasi *ACB* di posizione data è sotteso dalla corda *AB* e in qualunque punto *A*, al mezzo di una curvatura continua, viene toccato dalla retta *AD*, prolungata da entrambe le parti, e se i punti *A* e *B* si accostano fra loro fino a congiungersi, dico che l'angolo *BAD*, contenuto fra la corda e la tangente, verrà diminuito all'infinito e da ultimo diventerà evanescente.
[Questa è la dimostrazione:] Se infatti quell'angolo non divenisse evanescente, l'arco *ACB*, insieme alla tangente *AD*, conterrebbe un angolo uguale a quello rettilineo, e di conseguenza la curvatura nel punto *A*, contro l'ipotesi, non sarebbe continua.

LEMMA VII. Ferme restando le medesime cose, dico che l'ultima ragione fra l'arco, la corda e la tangente è, scambievolmente, una ragione di eguaglianza.
[Questa è la dimostrazione:] Infatti, mentre il punto *B* si accosta al punto *A* si supponga sempre che *AB* e *AD* siano prolungati fino ai punti lontani *b* e *d*, e si tracci *bd* parallela alla secante *BD*. Sia l'arco *Acb* sempre simile all'arco *ACB*; essendo stati congiunti i punti *A* e *B*, l'angolo *dAb*, per il lemma precedente, diventerà evanescente: allora, le rette sempre finite *Ab* e *Ad*, e l'arco intermedio *Acb* coincideranno, e per conseguenza saranno uguali. Per la qual cosa, le rette *AB* e *AD* e l'arco intermedio *ACB*, sempre proporzionali ai precedenti, diventeranno evanescenti e avranno per ultima ragione l'uguaglianza.

Nei *Principia* Newton ritornerà sul calcolo differenziale solo nel Lemma II della Sezione II del Libro II, nel mezzo della discussione del moto dei corpi ai quali viene opposta resistenza proporzionale alla velocità, quando dà le regole per il calcolo dei momenti, cioè le regole di derivazione.

LEMMA II Il momento di una quantità generata è uguale ai [alla somma dei] momenti dei singoli lati che la generano moltiplicati ogni volta per gli esponenti delle potenze dei medesimi lati e per i coefficienti.

Ci sono due ragioni per soffermarsi su questo lemma. La prima è la dimostrazione che Newton ne dà, che ovviamente si basa su *una compensazione di errori*. La dimostrazione inizia così:

Un qualsiasi rettangolo AB aumentato con un moto continuo quando si sottraggono dai lati A e B la metà dei momenti $1/2a$ e $1/2b$, diviene $A-1/2a$ per $B-1/2b$, o $AB-1/2aB-1/2bA+1/4ab$; ma non appena i lati A e B vengono aumentati con altre metà di momenti, il rettangolo diventa $A+1/2a$ per $b+1/2b$ o $AB+1/2aB+1/2bA+1/4ab$. Da questo rettangolo si sottragga il primo rettangolo: rimarrà l'eccedenza $aB+bA$. Dunque con gli interi incrementi a e b si genera l'incremento del rettangolo $aB+bA$.

Al punto X del suo *The Analyst*, 1734 [3], George Berkeley (1685-1753) criticherà questa dimostrazione:

Ma è evidente che il Metodo diretto e vero per ottenere il Momento o Incremento del Rettangolo AB è di prendere i Lati incrementati per i loro interi Incrementi e moltiplicarli, $A+a$ per $B+b$, il Prodotto $AB+aB+bA$ è il rettangolo incrementato; conseguentemente, se sottraiamo AB, il resto $aB+bA+ab$ sarà il vero Incremento del Rettangolo, esso eccede quello precedentemente ottenuto [da Newton] con un metodo illegittimo e indiretto per la quantità ab. E questo succede universalmente qualunque siano le Quantità a e b, grandi o piccole, Finite o Infinitesime, Incrementi, Momenti o Velocità. Né vale dire che ab è una quantità piccola: poiché ci è stato detto in *rebus mathematicis errores quam minimi non sunt contemnendi*[2].

La seconda ragione è lo Scolio che segue il Lemma II. Nelle prime due edizioni dei *Principia* Newton riconosceva esplicitamente i contributi di Leibniz alla creazione del calcolo infinitesimale. Citava il suo carteggio con Leibniz del 1676, menzionava il crittogramma in cui aveva celato il suo metodo e aggiungeva

Quell'uomo eccellentissimo rispose che aveva anche lui trovato un metodo analogo, e mi comunicò il suo metodo, che poco differiva dal mio se non per le parole e per le notazione da lui usata.

Nella terza edizione questo riconoscimento viene completamente soppresso e sostituito con

In una mia lettera al Signor J. Collins, datata 10 dicembre 1672, in cui descrivevo il metodo delle tangenti che sospettavo identico a quello di Sluse, allora non ancora reso pubblico, aggiunsi: Questo è una particolarità, o piuttosto un corollario del metodo generale che si estende, senza alcuna difficoltà di calcolo non solo alle tangenti da condurre a curve qualsiasi, sia geometriche sia meccaniche o comunque relative a linee rette o altre curve, ma anche alla risoluzione di altri più astrusi generi di problemi intorno alle curvature, aree, lunghezze, centri di gravità delle curve, ecc., né (come il metodo dei massimi e minimi di Hudde) è ristretto a quelle sole equazioni che sono libere da quantità irrazionali. Intrecciai tale metodo con quello mediante cui stabilisco di studiare le equazioni riducendole a serie infinite. Fin qui la lettera.

2 La citazione latina è dal *De Quadratura* di Newton.

E queste ultime parole riguardano il trattato che su queste cose ho scritto nell'anno 1671. Il fondamento di questo metodo generale è contenuto nel lemma precedente.

1.2. *Il calcolo di Leibniz*

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ è forse l'ultimo pensatore universale. Si occupò di logica — anticipando di circa due secoli aspetti degli sviluppi logico-matematici della seconda metà dell'Ottocento; questi contributi cominciarono però a essere divulgati soltanto agli inizi del Novecento [20] quando era ormai tardi perché potessero esercitare ogni influenza, ma risultarono importantissimi per la comprensione della filosofia leibniziana, cfr. [104] —, di matematica — fu con Newton l'inventore del calcolo infinitesimale —, di filosofia naturale — a Leibniz può esser fatto risalire il concetto fisico di *azione* e il *principio di minima azione* — e, soprattutto di metafisica — a volte ci si riferisce a Leibniz come all'ultimo grande metafisico. Egli si occupò anche di astronomia, di chimica e di geologia; di botanica, di psicologia, di medicina e di storia naturale; di giurisprudenza, di etica e di filosofia politica; di storia, di lingue europee e di cinese, di linguistica, di etimologia e di filologia; di teologia. Dedicò molto tempo ad un'ampio spettro di attività pratiche: dalla riforma del diritto alla riunificazione delle chiese, dalla diplomazia alle riforme istituzionali, dalla progettazione di nuovi tipi di carrozze e di sistemi di drenaggio dell'acqua nelle miniere dello Harz, alla costruzione di una macchina calcolatrice più raffinata di quella di Pascal, all'organizzazione di società scientifiche e accademie, alla vendita di calendari e alla coltivazione dei bachi da seta utili per finanziarle.

Leibniz non pubblicò molto durante la sua vita e le sue opere sono state edite soprattutto dopo la sua morte. A partire dal 1923 l'Accademia delle Scienze a Berlino sta pubblicando le opere complete di Leibniz, previste in circa 120 volumi [78]. Relativamente alle opere matematiche menzioniamo [77] [17] [11] [55]. Per ulteriori informazioni rimandiamo, ad esempio, a [83] [84] e [44]

1.2.1. *Il calcolo: introduzione*

Nel mese di ottobre del 1684 Leibniz pubblica sugli *Acta Eroditorum* di Lipsia il lavoro *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*[3] [Nuovo metodo per i massimi e minimi, nonché per le tangenti, che non

[3] Questo lavoro è stato ristampato più volte e tradotto i varie lingue; in appendice a [16] si trova una traduzione in italiano a cura di Ettore Carruccio, un'altra traduzione si trova in [25], essenzialmente riportata in [44].

si arresta davanti alle quantità fratte o irrazionali, e per quelli un singolare genere di calcolo] che segna la nascita del *calcolo infinitesimale*.

La *Nova methodus* è un articolo molto breve (solo sei pagine), con molti errori di stampa (successivamente corretti da Leibniz) che contribuirono a renderne inizialmente difficile la comprensione; soprattutto ha una struttura *algoritmica* che omette ogni spiegazione e che, come vedremo, operativamente usa nozioni *infinitesimali* ma logicamente forse si spiega e motiva meglio, come lo stesso Leibniz sembra suggerire nella *Historia et origo calculi differentialis* e vedremo fra poco, in termini delle sue idee filosofiche di *concetto completo* e *principio di continuità*. Come Leibniz sosteneva la sua metafisica è tutta matematica nel senso che argomentazioni e concetti matematici spesso si estendono o si generalizzano ad argomentazioni metafisiche o forniscono illustrazioni metafisiche; viceversa, anche se egli sostiene che bisogna evitare la metafisica nel fare matematica, la sua metafisica e, soprattutto la sua logica, influenza come vedremo la sua matematica.

La *Nova Methodus* comincia così:

> Siano dati, cfr. Figura 7, l'asse AX e più curve come VV, WW, YY, ZZ, le cui ordinate VX, WX, YX, ZX, normali all'asse, siano chiamate rispettivamente v, w, y, z. Il segmento AX, tagliato sull'asse, sia chiamato z.
> Le tangenti siano VB, WC, YD, ZE, le quali incontrano l'asse rispettivamente nei punti B, C, D, E.
> Ora si indichi con dx un certo segmento preso arbitrariamente, e si indichi con dv (o dw, o dy, o dz) il segmento che sta a dx, come v (o w, o y, o z) sta a XB (o XC, o XD, o XE), cioè dv (o dw, o dy, o dz) è la differenza delle v (o delle w, o delle y, o delle z).
> Fatte queste premesse, le regole del calcolo saranno le seguenti:
> Sia a una quantità costante, sarà $da = 0$ e $d(ax) = adx$.
> Se $y = v$ (ossia se un'ordinata qualsiasi della curva YY è uguale ad una qualsiasi ordinata simmetrica della curva VV) sarà $dy = dv$.
> Ora l'*Addizione* e la *Sottrazione*: se
> $$z - y + w + x = v$$
> risulterà
> $$d(z - y + w + x) = dz - dy + dw + dx.,$$
> La *Moltiplicazione*,
> $$d(xv) = xdv + vdx,$$
> ovvero, posto $y = xv$, sarà
> $$dy = xdv + vdx,$$
> poiché è ad arbitrio usare la forma xv oppure, al posto di questa, abbreviando, la lettera y.
> Si deve osservare che, in questo calcolo, x e dx sono trattati come y e dy o qualsiasi altra variabile e il suo differenziale.

Segue la *regola della divisione*

$$d\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{ydv - vdy}{y^2},$$

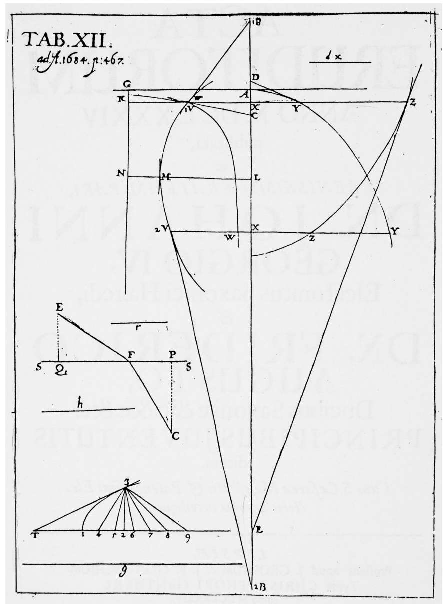


FIGURA 7. Tavola dalla *Nova methodus*.

e, come conseguenza, la regola della *differenziazione delle potenze*: se $y = x^n$, n intero
$$dy = nx^{n-1}dx,$$
più in generale, se $y = x^{n/m}$ cioè $y^m = x^n$, allora $my^{m-1}dy = nx^{n-1}dx$ cioè ancora
$$dy = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}.$$
Questo permette di differenziare espressioni che contengono somme, prodotti e radici. Il lavoro si conclude derivando con il nuovo calcolo la legge di rifrazione dal *principio di tempo minimo* di Fermat e risolvendo il cosiddetto *problema di de Beaune* su cui ritorneremo più avanti, avendo però prima fatto le seguenti osservazioni sul suo metodo:

> La dimostrazione di tutte le regole esposte sarà facile per chi è versato in questi studi [nei quali] finora la seguente unica cosa non è stata sufficientemente ponderata: che si possono riguardare dx, dy, dv, dz, come proporzionali alle differenze, ossia agli aumenti o alle diminuzioni istantanee di x, y, v, z (rispettivamente).
> Ne risulta che, data una qualsiasi equazione, si può scrivere subito la sua equazione differenziale. Ciò avviene sostituendo ad ogni *termine* (cioè ad ogni parte che concorra a formare l'equazione soltanto con addizioni e sottrazioni) semplicemente la quantità differenziale del termine. Invece per un'altra quantità (che non sia essa stessa un termine, ma concorra a formare un termine) si deve usare la sua quantità differenziale, per formare la quantità differenziale del termine stesso; non però semplicemente, ma con l'algoritmo fin qui esposto. Invero i metodi finora pubblicati non presentano tale passaggio; per lo più infatti usano un segmento, come

> DX, o un altro analogo, ma non il segmento dy, che è il quarto proporzionale dopo DX, XY, dx, e in questo modo scompigliano tutto. Quindi [quei metodi] prescrivono di fare sparire per prima cosa le quantità frazionarie e irrazionali (nelle quali entrano le variabili). È pure evidente che il nostro calcolo si estende alle curve trascendenti [cioè] che non si possono ricondurre al calcolo algebrico, o che non sono di grado determinato. E ciò in modo generalissimo, senza ricorrere ad alcuna particolare ipotesi, che non sempre si verifica, purché si ritenga in genere che trovare la tangente è condurre una retta che congiunga due punti aventi una distanza infinitamente piccola, ossia tracciare il lato prolungato di un poligono infinitangolo, che per noi equivale alla curva.
> Quella distanza infinitamente piccola, poi, può sempre essere espressa mediante un certo differenziale noto, ad esempio dv, o mediante una relazione con questo, cioè per mezzo di una certa tangente nota.
> In particolare, se y fosse una quantità trascendente, ad esempio un'ordinata di una cicloide, ed essa entrasse in un calcolo per mezzo del quale fosse determinata proprio l'ordinata z di un'altra curva e fosse richiesto dz, o, per mezzo di questo, la tangente di quest'ultima curva, in ogni caso bisognerebbe determinare dz per mezzo di dy e si avrebbe dy, poiché si ha la tangente della cicloide.
> Proprio la tangente della cicloide, inoltre, se si immaginasse di non averla ancora, potrebbe in modo simile esser ricavata col calcolo da una proprietà data dalle tangenti del cerchio.

In altre parole gli infinitesimi, nascosti nelle dimostrazioni diventano i parametri fondamentali per descrivere le curve tramite i differenziali dx e dy. Ad ogni curva $F(x,y) = 0$ possiamo associare la sua equazione differenziale che avrà una forma del tipo

$$A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0.$$

Risolto il problema della tangente, il problema fondamentale diventa ora quello *inverso delle tangenti*: da quest'ultima equazione risalire alla forma *chiusa* $F(x,y) = 0$ della curva, quando questo non sarà possibile è l'equazione differenziale che *definisce* la curva. Ripetiamo, questioni esistenziali sono in linea di principio ignorate nel Seicento. Questo sarà il problema fondamentale attorno a cui ruoteranno la geometria delle curve e delle superfici, la meccanica, l'idrodinamica, l'astronomia, in breve, l'intero universo delle scienze fisiche e questo sarà l'approccio preso fin da subito dai matematici continentali e, soprattutto, da Jakob e Johann Bernoulli e da Eulero (assieme a molti altri) che cambieranno il corso della matematica e della fisica. Anche Newton aveva introdotto un metodo che unito al metodo degli sviluppi in serie portava alla risoluzione in linea di principio di tutte le equzioni differenziali polinomiali anche se queste soluzioni avevano carattere locale. Questo assieme alla disputa sulla priorità e superiorità del metodo di Newton rispetto a quello di Leibniz (finita con una sentenza della Royal Society emessa con Newton presidente) a favore di Newton, convinse i newtoniani (forse non Newton, che suggeriva di usare gli sviluppi in serie quando non era possibile trovare la soluzione in forma chiusa) che, il problema inverso essendo in linea di principio risolto in termini di sviluppi in serie, la questione vera fosse dare certezza al metodo stesso. Non rinunciando al metodo universale degli sviluppi in serie e isolandosi, i matematici britannici si preclusero la via verso i nuovi sviluppi del calcolo. Così scrive Johannes Bernoulli a Leibniz il 29 luglio 1713, cfr. [14] pp. XXI-XXII:

> Ora un certo Cheyne [nel *Methodus fluxionum inversa*] se ne va in giro a dire che negli ultimi venti o trenta anni non abbiamo pubblicato nulla, che non sia un'ennesima ripetizione o al più un corollario di poco peso di ciò che Newton aveva trovato prima; quasi che per noi non fosse rimasto nulla da fare e che non siano di nessun pregio le cose che abbiamo pubblicato, e delle quali in Newton non si trova la minima traccia, come le catenarie, le velarie, le isocrone paracentriche, le brachistocrone, le nuove proprietà della cicloide e i suoi innumerevoli segmenti quadrabili, il calcolo degli esponenziali e il metodo di differenziarli, la misura delle coevolute, il moto trattorio e reptorio, la riduzione delle curve alle circolari, e innumerevoli altre questioni che gli inglesi in parte tentarono, ma con tutto il loro calcolo delle flussioni hanno lasciato irrisolte, come si vede dal solo problema della catenaria e della trasformazione delle curve, al quale hanno sudato per lungo tempo senza produrre altro che turpi paralogismi.

1.2.2. *Il calcolo: metafisica e tecniche*

Le quantità infinitamente piccole del calcolo furono criticate anche nel Continente e lo stesso Leibniz presentò di volta in volta immagini diverse: infinitamente piccole come le grandezze fisiche trascurabili, come riconducibili all'esaustione archimedea, come nozioni ideali, come finzioni; ma probabilmente i differenziali di Leibniz hanno la loro origine, oltre che nell'uso matematico, nella sua filosofia e, più precisamente, nei seguenti tre elementi chiave di natura logico-metafisico:

- Per tutta la vita Leibniz aspirò ad una *characteristica universalis*, cioè ad un linguaggio con una struttura che permettesse di ridurre i pensieri in forma matematico-combinatorica e le operazioni mentali in un *calculus ratiocinator* capace di verificare la correttezza dei ragionamenti e, allo stesso tempo, di funzionare come *ars inveniendi*.
- Tutte le proposizioni sono riducibili alla forma soggetto-predicato, una proposizione soggetto-predicato è vera se e solo se il predicato è incluso o *inerisce* nel soggetto: *predicato inest subjecto*. Ogni *ente* è essenzialmente la sua descrizione ed è caratterizzato in modo *funzionale*, è quello che fa: l'*ente* è il suo *concetto completo*. Una curva è tutto quello che *inerisce* in essa, posizione, lunghezza, tangenti, normali, ...: è il suo *concetto completo*; una curva specifica viene identifica da (e si identifica con) relazioni tra i suoi elementi.
- Il terzo elemento è il *principio di continuità* che Leibniz formula come:

  > Io prendo per certo il seguente postulato: in ogni transizione con finale è permesso istituire un ragionamento generale in cui il termine finale sia incluso.

Ciò in accordo con il saggio *Historia et origo calculi differentialis* che Leibniz scrisse durante il periodo della disputa e non pubblicò (si veda [17] per una

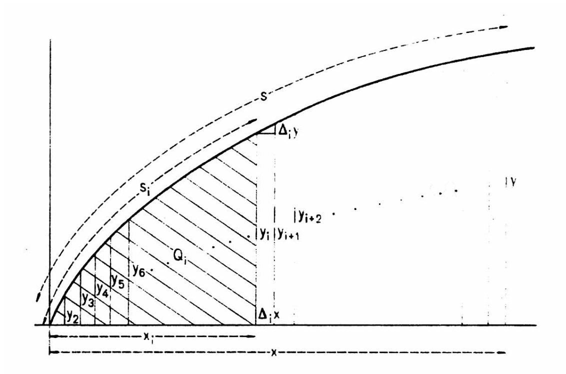


FIGURA 8. Curve e suddivisioni.

edizione inglese) in cui descrive l'origine metafisica dei differenziali, le tecniche d'uso e i problemi connessi, si veda [11], cfr. anche [10] in [59], e [44].

Origine. Consideriamo due successioni di numeri $\{x_i | i = 0, 1, \ldots\}$ e $\{y_i | i = 0, 1, \ldots\}$. Possiamo produrre la *successione delle differenze* tramite un operatore differenza Δ

$$\Delta\{x_i\} := \{\Delta_i x\} \quad \text{dove} \quad \Delta_i x := x_i - x_{i-1}$$

e la *successione delle somme* tramite l'operatore somma Σ

$$\Sigma\{y_i\} := \{\sum_{j=1}^{i} y_j\}.$$

Se assumiamo, cosa sempre possibile $x_0 = 0$, allora $\Sigma\Delta\{x_i\} = \{x_i\}$.

Consideriamo ora una curva, cfr. Figura 8. Possiamo applicare la costruzione precedente ad una suddivisione delle ascisse $\{x_i\}$, delle ordinate $\{y_i\}$, ma, di fatto, ad ogni *quantità variabile* della curva, come la lunghezza s_i o un'area Q_i associata alla curva. L'idea di Leibniz è di *trasporre* questa costruzione *discreta* alle *quantità variabili continue* x, y, s, o Q, — ad esempio immaginando la curva come poligono con infiniti lati — producendo tramite differenze 'momentanee' nuove *quantità variabili* 'infinitesime' ma della stessa dimensione della linea dx, dy, ds, o dQ e, tramite somma, nuove quantità variabili continue — nell'integrazione si sommano infiniti termini, tutti infinitesimi —: l'operatore Δ si trasforma nell'operatore d e l'operatore Σ nell'operatore *integrale* $\int$, per cui

$$\int dx = x \quad \text{e} \quad d\int y dx = y.$$

In linea di principio le quantità variabili dx, dy, ds, o dQ dipendono dalla curva e dalle suddivisioni scelte, ma conservano gli 'stessi rapporti' indipendentemente dalla suddivisione, per cui, in base al *principio di continuità*, già del resto invocato in qualche modo se non per produrre i dx almeno per dedurne le proprietà, i rapporti tra le nuove quantità variabili dx, dy, ds, o dQ *ineriscono* alle quantità variabili della curva x, y, s, o Q, tramite la suddivisione e, in ultima analisi ineriscono, alla curva: se non un ricorso al principio di inerenza del predicato al soggetto, si evidenzia, in queste argomentazioni, attribuibili sostanzialmente a Leibniz, un riferimento alla nozione di *concetto completo*.

Come vedremo fra poco, i rapporti di differenziali secondi dipendono dalle suddivisioni. Quando i Bernoulli iniziarono lo studio analitico della curvatura di una curva — la questione era affrontata geometricamente da Newton e Huygens —, Leibniz si preoccupò di esprimere la curvatura come rapporto di differenziali primi di rapporti di diffferenziali, mostrando che la curvatura è indipendente dalle suddivisioni e *inerente* alla curva.

Un'ultima osservazione. Insistiamo sul fatto che a essere introdotti sono i differenziali dx e dy e così via e non, come pure potrebbe sembrare, soprattutto a chi conosce gli sviluppi successivi, la *derivata*, o semplicemente il rapporto $\frac{dx}{dy}$ che semplificherebbe molto le questioni. Per questo punto di vista bisognerà aspettare ancora molto, in particolare l'affermarsi del concetto di *funzione*, concetto alla cui affermazione contribuirà appunto questa esigenza di semplificazione.

L'integrale. Più complesso sarà il processo di formazione dell'idea moderna di *integrazione*. Noi siamo abituati a definire l'integrale come un'operazione sulle funzioni e dedurre che questa operazione è l'inverso della derivazione. Ciò presuppone la nozione di funzione e una buona definizione dell'*area* del sottografico delle figure (o di almeno alcune figure che consideriamo buone), nozioni che sarano chiare solo nell'Ottocento, sotto la spinta di varie esigenze che si originano nel Settecento e si consolidano nell'Ottocento e che per il momento non discutiamo. Per Leibniz l'integrale è la somma di quantità infinitamente piccole, mentre dai Bernoulli in poi l'integrale è l'inverso del differenziale, si veda [4]: l'integrale di un differenziale è quella quantità da cui questo differenziale si origina per differenziazione. Il problema della quadratura appare, conformemente alla tradizione, come *problema* e non come *operazione*. L'integrale come operazione inversa è utile per risolverlo: una figura viene immaginata suddivisa in parti piccole (strisce o triangoli o anche trapezoidi, ad esempio), pensati come differenziali dell'area; si tratta allora di esprimerli tramite una indeterminata, un'espressione del tipo $f(u)du$ per qualche variabile u : l'area viene quindi data dall'integrale $\int f(u)du$ inteso come somma infinita di elementi infinitesi, ma di dimensione lineare.

Il teorema di trasmutazione Ad esempio, con riferimento alla Figura 9, consideriamo la curva $Occ'C$, in notazione moderna $y = y(x)$, con *triangolo caratteristico* cdc' in c. La sua quadratura è data dalla somma delle strisce $bcc'b'$, ma può anche essere ottenuta come somma dei triangoli Occ' più l'area del

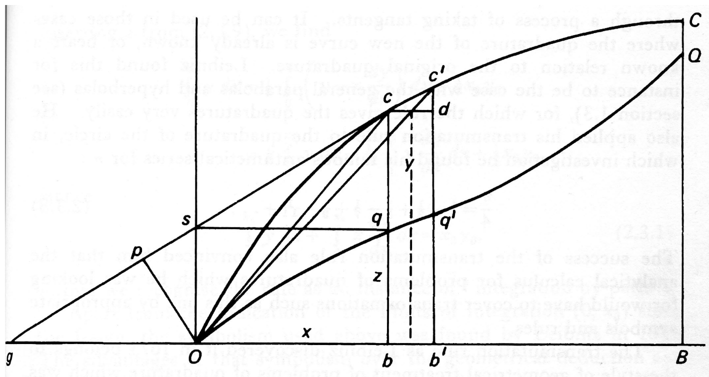


FIGURA 9. Metodo delle trasmutazioni.

triangolo OBC (che, se indichiamo OB con x_0 e BC con y_0, è semplicemente data da $\frac{1}{2}x_0y_0$). Poiché il triangolo caratteristico cdc' è simile al triangolo Osp, deduciamo

$$\text{Area}(Occ') = \frac{1}{2}cc' \times Op = \frac{1}{2}cd \times Os = \frac{1}{2}bqq'b',$$

dove $Oqq'Q$ è il luogo degli q, quindi

$$\text{Quadratura}(Occ'C) = \frac{1}{2}\text{Quadratura}(Oqq'Q) + \text{Area}(OCB).$$

Questa è la regola di *trasmutazione di Leibniz*, che possiamo anche scrivere come

$$\int_0^{x_0} ydx = \frac{1}{2}\int_0^{x_0} zdx + \frac{1}{2}x_0y_0$$

o, tenendo conto che

$$d(xz) = zdx + xdz,$$

come

$$\int_0^{x_0} ydx = -\frac{1}{2}\int_0^{x_0} xdz + \frac{1}{2}x_0z_0 + \frac{1}{2}x_0y_0.$$

Facendo il percorso inverso sarebbe facile vedere che, poiché $z = y - x\frac{dy}{dx}$, la regola di trasmutazione non è altro che una semplice applicazione della formula di *integrazione per parti* o di differenziazione del prodotto. Ma quello che qui interessa, e interessava soprattutto Leibniz, è che in questo modo la quadratura del cerchio viene ricondotta a una integrazione razionale. Infatti, se la curva y è un quarto di cerchio $y = \sqrt{2x - x^2} \quad x \in [0,1]$ troviamo

$$z = y - x\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} \quad \text{cioè} \quad x = \frac{2z^2}{1+z^2},$$

e $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$, per cui

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 y dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x dz + 1 = 1 - \int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2}.$$

Da

$$\frac{z^2}{1+z^2} = z^2(1 - z^2 + z^6 - z^8 + \dots) = z^2 - z^4 + z^8 - z^{10} + \dots$$

ricaviamo quindi

$$\int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots$$

e, in definitiva, la *serie di Leibniz per* π

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots.$$

Per le serie di segno alterno Leibniz argomenterà anche sulla convergenza, *criterio di Leibniz.*

Differenziali di ordine superiore. I differenziali come gli integrali sono quantità variabili di cui possiamo a loro volta considerare differenziali e integrali. Più precisamente, gli operatori Δ e Σ possono essere iterati:

$$\Delta\Delta\{y_i\} := \Delta_i^2 y,$$

dove

$$\Delta_i^2 y := \Delta_{i+1} - \Delta_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

e

$$\Sigma\Sigma\{y_i\} = \{\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} y_k\}.$$

Ma le cose ora si complicano. Ci sono molti modi di approssimare una curva con poligoni; ad esempio, possiamo approssimarla con
(a) poligoni con lati uguali,
(b) poligoni che hanno uguali le proiezioni dei lati sull'asse x,
(c) poligoni che hanno uguali le proiezioni dei lati sull'asse y.

Questa indeterminazione si preserva nell'estrapolazione all'infinito come possibilità di scelte da specificare sui differenziali primi; ad esempio, ai casi (a), (b) e (c) precedenti corrispondono le scelte
(a) ds costante,
(b) dx costante,
(c) dy costante.

Ovviamente, le regole di calcolo dei differenziali non risentono delle suddivisioni che si scelgono, come pure i rapporti fra i differenziali primi associati ad una curva, infatti, con riferimento alla Figura 1, sappiamo che

$$dx : dy : ds = t : y : \tau,$$

conseguentemente, se dx, dy, ds e dx^*, dy^*, ds^* sono indotti da due differenti progressioni delle variabili, abbiamo

$$dx : dx^* = dy : dy^* = ds : ds^*.$$

Ne risentono invece i differenziali di ordine superiore e di conseguenza le *equazioni differenziali* associate ad una curva. Ad esempio per la curva $y = x^2$ troviamo, per una qualunque suddivisione

$$dy = 2xdx, \quad ddy = 2(dx)^2 + 2xddx, \quad d^3y = 6dxddx + 2xd^3x;$$

se dy è costante cioè $ddy = 0$

$$dy = 2xdx, \quad 0 = 2(dx)^2 + 2xddx, \quad 0 = 6dxddx + 2xd^3x;$$

mentre, se dx è costante cioè $ddx = 0$,

$$dy = 2xdx \quad ddy = 2(dx)^2 \quad d^3y = 0.$$

Gli esempi mostrano chiaramente che scelte opportune delle suddivisioni possono semplificare le equazioni differenziali corrispondenti ad una curva; d'altro canto la stessa equazione, se specificata con differenti suddivisioni, definisce curve diverse. Si pone quindi il problema di come passare da un'equazione all'altra.

A noi oggi appare chiaro come la scelta di una suddivisione corrisponde alla scelta di una variabile indipendente da cui le altre dipendono — questo sarà in effetti uno degli elementi che spingerà verso l'introduzione della nozione di *funzione* —, così la scelta dy costante corrisponde a

$$1 = 2xx' \quad 0 = 2(x')^2 + 2xx'' \quad 0 = 6x'x'' + 2xx'''$$

in cui x', x'' ecc. sono le derivate di x come funxione di y cioè di $x = \sqrt{y}$. Similmente la scelta dx costante corrisponde a considerare y come funzione di x, $y = x^2$

$$y' = 2x \quad y'' = 2 \quad y''' = 0.$$

Il confronto con la definizione oggi comune di derivata permette di rendersi conto delle difficoltà ad operare con i differenziali di ordine superiore. La *derivata* di una funzione $y = f(x)$ è oggi definita come

$$\frac{dy}{dx} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

mentre la *derivata seconda* è introdotta come derivata della derivata; ma può anche essere introdotta equivalentemente come

$$\frac{d^2y}{dx^2} := \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+2h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)]}{h^2}.$$

Se si sostituisse il numeratore a destra con l'espressione più generale

$$[f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1)] - [f(x+h_1) - f(x)]$$

ci sarebbe il problema della scelta del denominatore, si potrebbe scegliere h_1^2 o h_2^2 o ancora $h_1 h_2$. Ma nessuna scelta condurrebbe all'esistenza del limite quando $h_1 \to 0$ e $h_2 \to 0$ (si provi ad esempio con $f(x) = x$) tranne nel caso $h_1 = h_2$, equivalente nel linguaggio leibniziano, a dx costante. Conseguentemente, solo in questo caso c'è una relazione tra il differenziale secondo ddy e la derivata seconda di y come funzione di x.

Ancora la suggestiva regola di semplificazione della derivata di funzione composta, $y = y(x(t))$,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

valida per le derivate prime, non vale per le derivate seconde. Infatti una regola simile per le derivate seconde dovrebbe essere

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2;$$

ma questa equazione è interpretabile come relazione tra derivate seconde solo se entrambi dx e dt sono costanti, cioè solo se la trasformazione $x(t)$ è *lineare affine* $x = at + b$. La formula corretta è invece:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2}$$

il cui ultimo termine appunto si annulla se $x = at + b$.

Ancora, avendo tacitamente assunto che la funzione y fosse 'continua', risultava naturale che

$$\Delta y = y(a+h) - y(a)$$

fosse un infinitesimo al più della stesso ordine di h, in termini moderni

$$\Delta y = y(a+h) - y(a) = O(h).$$

Similmente si tendeva ad assumere che

$$\Delta^2 y = y(a+2h) - 2y(a+h) + y(a) = O(h^2).$$

Ma chi garantisce la condizione di 'continuità' del differenziale primo? Risultava quindi necessario assumere una certa regolarità sulle suddivisioni, perché il calcolo funzionasse. Ad esempio, approssimando una curva con un poligono di lati alternativamente h e $2h$, la successione delle differenze seconde sarebbe $\{h, -h, h, -h, \dots\}$, estrapolando all'infinito il differenziale secondo dds risulterebbe dello stesso ordine del differenziale primo ds.

Dovrebbe risultare chiaro che operare con il nuovo calcolo e particolarmente con i differenziali di ordine superiore fu per molto tempo, diciamo, almeno problematico, fino all'introduzione delle *derivate*.

Ritorneremo nel seguito sul calcolo differenziale leibniziano; per il momento ci fermiamo qui.

Il continuo Come per i differenziali, anche per il *continuo* Leibniz presenta immagini diverse in connessione con istanze diverse ma in qualche modo correlate, senza però mai presentare una teoria unificatrice o teorie definitive nei contesti relativi. Possiamo identificare almeno quattro contesti diversi: il continuo in matematica, in fisica, nella realtà e nell'ambito dei *principi dell'ordine generale* o, in definitiva, nell'analisi metafisica. Il problema del continuo è fortemente legato a quello dell'infinito e risposte ingenue producono immediatamente contraddizioni; il costante appello di Leibniz ad indagare la composizione del *labirinto del continuo* è appunto collegato all'esigenza di risolvere questa serie di contraddizioni, si veda, oltre alle opere generali su Leibniz già citate, [21] [54].

Leibniz ripropone i classici e noti argomenti che mostrano, in base al principio che *la parte è minore del tutto*, che l'assunzione di un continuo di indivisibili porta a conclusioni assurde — un cateto e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo hanno lo stesso numero di punti, a cui Leibniz risponde dicendo che infinito non è un numero —, cercando di caratterizzare il continuo in termini di infinitesimi o sostanzialmente in modo simile ad Aristotele, cfr. [51]; per Leibniz le parti del continuo debbono essere *cointegrate*. La caratterizzazione del *punto* avviene in termini di concetto completo: il punto è quello che è 'comune' a tutti gli intervalli che gli sono intorno.

1.3. *I Bernoulli*

Come detto, i matematici furono subito interessati al nuovo calcolo e gli sviluppi, quasi sempre legati allo studio di problemi geometrici o meccanici che trovarono la loro formulazione in termini di equazioni differenziali, furono sorprendenti. Raffinati fatti vengono però usati come chiari (modulo ripensamenti e successivi approfondimenti); procedure non sufficientemente motivate e spesso sbagliate nella loro generalità portano ad affermazioni non solo vere ma importanti, e spesso in contesti diversi. Ad essere coinvolti furono molti matematici, solo per citare alcuni di quelli più importati, ma va sottolineato che il processo coinvolse molte più persone, citiamo in Inghilterra, oltre a Newton, Taylor e Maclaurin, nel Continente europeo i fratelli Jakob e Johann Bernoulli, il marchese de l'Hôpital, che scrisse il primo trattato sul calcolo *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes curves*, Hermann, i figli e il nipote Nikolaus di Jakob Bernoulli, i figli Nikolaus e Daniel di Johann; la presenza per un certo periodo di questi ultimi a Padova e Venezia contribiuì, ad esempio, a svecchiare l'insegnamento, sonnolento e rivolto al passato, nelle università e nei collegi religiosi, favorendo un timido riformismo ad esempio con Manfredi e Malfatti, ma alla condanna di Pio VI delle riforme delle Assemblee francesi i matematici italiani ritratteranno ogni apertura riformista. Ma, soprattutto, va citato Leonhard Euler studente di Jakob e Johann Benoulli. A cui seguiranno d'Alembert, Lagrange e Laplace, per citare solo alcuni dei matematici con un ruolo rilevante prima e durante la rivoluzione francese. La riflessione critica dell'Ottocento porterà a identificare i fatti fondamentali del calcolo e a darne una presentazione logico-deduttiva che costituisce la presentazione attuale del primo e parte del secondo corso di *Analisi matematica*.

Risulta allora evidente come non sia possibile qui seguire questo sviluppo storico un po' in avanti e un po' indietro, per un tentativo in questo senso, teso soprattuto a mostrare la complessità degli sviluppi del calcolo si può, ad esempio, vedere [44]. Pur non analizzando con sufficiente dettagli gli sviluppi iniziali del calcolo nel continente e, in particolare, i contributi dei fratelli Jakob e Johann Bernoulli, come pure quelli dei figli e nipoti (la famiglia Bernoulli occuperà la scena scientifica fino alla seconda metà dell'Ottocento) esemplificheremo alcuni risultati nel seguito, si veda il Capitolo 2, in particolare la Sezione 2.4 e la Sezione 2.5.2, e il Capitolo 3.

1.4. *La visione di Eulero*

In questa sezione illustriamo la visione del calcolo di Eulero, visione che permeerà la ricerca per tutto il Settecento e oltre.

Eulero (1707-1783) è unanimemente riconosciuto come il più importante matematico e fisico matematico del Settecento e uno dei più grandi di tutti i tempi. Nasce a Basilea, studia con Jakob Bernoulli (assieme a Johann Bernoulli), nel 1727 accetta di spostarsi presso l'Accademia di Pietroburgo, dove già operavano Jakob Hermann e Daniel Bernoulli, e ci resta per quattordici anni. Nel 1741 decide di accettare l'offerta di Federico II, che voleva rilanciare l'Accademia di Berlino, e si sposta a Berlino. Nel 1766 ritorna a Pietroburgo dove resterà fino alla sua morte. Eulero lavorò in tutti i rami della matematica conosciuti al tempo, contribuì a crearne di nuovi (Calcolo delle variazioni, Topologia combinatoria e Teoria dei grafi) e alla fondazione del moderno calcolo differenziale e integrale e della moderna meccanica; iniziò assieme a Lagrange e Legendre il processo che portò a porre la teoria dei numeri come una delle importanti discipline della matematica. Molti dei temi di Eulero sono vivi ancora oggi e, cosa ancora più sorprendente, alcuni hanno suscitato nuova attenzione e interesse.

Sicuramente Eulero è il più prolifico matematico di tutti i tempi. Il catalogo di Paul Heinrich Fuss (1797-1855) del 1843 elencava circa 750 opere di Eulero, il catalogo definitivo di Gustav Eneström (1852-1923) del 1913 elenca 868 opere (memorie e libri) a cui vanno aggiunti 12 quaderni di appunti e vari frammenti scoperti più recentemente che portano il totale a 886, più le lettere (ed è da considerare che nel 1766 sei casse di manoscritti e lavori andarono perdute nel viaggio per nave verso Pietroburgo). La pubblicazione delle opere complete di Eulero, divisa in quattro serie, è iniziata nel 1911, sotto gli auspici dell'Accademia delle Scienze della Svizzera, ed è ancora in corso. La prima serie, *Opera mathematica*, 29 volumi, contiene le opere di 'matematica pura'; la seconda serie, *Opera mechanica et astronomica*, 31 volumi, è dedicata alla meccanica e all'astronomia; la terza serie, *Opera physica, Miscellanea*, 12 volumi, è dedicata a vari argomenti di carattere fisico; la serie quarta è divisa in due parti, *Commercium epistolicum*, prevista in 9 volumi, a cui sono da aggiungere i due volumi di lettere raccolte da P.H. Fuss [40], e *Manuscripta*, prevista in 7 volumi.[4]

Risulta evidente che una biografia scientifica di Eulero sarebbe così complessa e lunga da eccedere ogni ragionevole limite. Per cui, anche la letteratura su Eulero è allo stesso tempo ampia, esistono molti saggi che illustrano accuratamente aspetti della sua vita e delle sue opere; primi fra tutti i saggi introduttivi ai volumi dell'*Opera Omnia*, esistono poi vari *memorial* in occasione di anniversari della nascita e della morte o opere collettive come [12] o anche di autore singolo come [22]. Per ulteriori riferimenti sulla vita e le opere di Eulero rimandiamo il lettore a [44].

1.4.1. *Meccanica e calcolo*

Nel 1736, viene pubblicata la *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*, Meccanica o scienza del moto esposta analiticamente, [28], che Eulero aveva completato, ventisettenne, nel 1734, durante il suo primo periodo a Pietroburgo. È la prima opera in cui si tratta la meccanica del punto materiale in forma *analitica* e in cui viene formulato un intero programma per lo studio della meccanica dei corpi rigidi e dei corpi continui che Eulero perseguirà per larga parte della sua vita. Assieme al precedente *Calculus differentialis* [27] del 1727 e ai successivi *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* [29] del 1744 con applicazioni del calcolo alla ricerca di curve che godano di proprietà di minimo, alle *Introductio in analysim infinitorum* [30] del 1748 e *Institutiones calculi differentialis* [33] del 1755, la *Mechanica* segna l'inizio di una riflessione *unitaria* sul calcolo e sulla meccanica.

4 Molte delle opere di Eulero, anche in traduzione inglese, si trovano nel sito *The Euler Archive* `www.eulerarchive.org` .

Dopo aver identificato la *meccanica* come la scienza del moto, Eulero scrive nella prefazione – i passi che seguono sono riportati nella traduzione di [81] p. 58 e seguenti – quanto segue:

> In tempi recenti, dopo l'invenzione dell'analisi infinitesimale, entrambe le scienze (statica e dinamica) hanno fatto così grandi progressi che le scoperte di una volta … quasi scompaiono di fronte ad essi. Tuttavia, queste molteplici scoperte, per mezzo delle quali queste discipline sono state finora accresciute e innalzate, sono disseminate in così tante opere che risulta difficilissimo raccoglierle e leggerle per lo studioso di queste cose. Inoltre, cosa che genera grandissimo fastidio, alcune cose vengono proposte senza alcun ricorso all'analisi e alle dimostrazioni, altre sono celate dietro dimostrazioni fin troppo intricate e preparate secondo la maniera degli antichi, altre ancora, per la verità, vengono derivate da principi non appropriati e poco genuini in modo che non possano essere esaminate e interpretate che con grande fatica e dispendio di tempo.

Eulero ricorda quindi le opere di Varignon e di Wolff, e ancora di Hermann della cui opera, *Phoronomia*, pur apprezzando l'ampiezza, lamenta il ricorso a dimostrazioni geometriche. Continua:

> in modo non molto diverso sono scritti anche i *Principia* di Newton, per mezzo dei quali la scienza del moto ha compiuto grandissimi progressi. Ma in tutte le opere composte senza far uso dell'analisi, e specialmente in quelle di meccanica, capita che il lettore, nonostante sia convinto della verità delle cose che vengono esposte, purtuttavia non può comprenderne l'essenza in maniera sufficientemente chiara e distinta, cosicché le stesse questioni, se pur mutano di pochissimo … possono a fatica essere da lui risolte, a meno che egli non si serva dell'analisi e non dimostri le stesse proposizioni con metodo analitico. La stessa cosa, senz'altro, mi capitò di osservare avendo intrapreso lo studio dei *Principia* di Newton e della *Phoronomia* di Hermann in modo tale che, sebbene mi sembrasse di aver compreso abbastanza bene la soluzione di moltissimi problemi, pure non avrei potuto risolvere problemi anche di poco diversi.

Prosegue quindi affermando che, da tempo, ha lavorato per reinterpretare analiticamente quanto fatto da altri in modo sintetico. Ciò gli ha anche permesso di accrescere la conoscenza sia della meccanica sia dell'analisi e, in questo modo, è pervenuto a porre un ordine e una suddivisione, che distingue corpi liberi di muoversi da corpi che non sono liberi, ma soprattutto in accordo con la natura dei corpi. Nei primi due volumi della *Mechanica* studierà il moto di corpi infinitamente piccoli come se fossero punti, procederà quindi a studiare corpi di grandezza finita, sia rigidi che flessibili e, infine, corpi estesi completamente liberi. I due volumi della *Mechanica* sono appunto dedicati al moto dei *punti materiali*. Come metterà bene in evidenza nello *Scolio generale* del primo capitolo i principi disponibili sono utili alla trattazione del moto dei punti materiali:

> è dunque chiaro di quali argomenti ci si debba occupare in meccanica e come siano molte le cose che ancor ora sono state neppure sfiorate. Infatti, oltre al moto dei punti, le cose finora trattate sono così poche che di certo quasi tutte debbono ancora essere scoperte e fatte derivare dai principi.

1.4.2. *Il calcolo*

Per quanto riguarda il calcolo, Eulero sembra riferirsi direttamente a Leibniz di cui riprende il *calcolo delle differenze e delle somme*, ma con importanti varianti:

- il dato di partenza non sono più le *curve* ma le *funzioni*, questo fa sì che il calcolo sia svincolato dalla geometria o dal moto e, nello stesso tempo, motiva l'insistere di Eulero, e poi di Lagrange, nel rifiuto di ogni ricorso alle figure;
- parallelamente i *differenziali* non sono più oggetti *inerenti* alle curve, ma costruzioni matematiche che, caratterizzate operativamente, permettono, come dice Eulero, di vedere il calcolo differenziale come un caso speciale del calcolo delle differenze con una sorta di *aritmetizzazione del calcolo*[5].

L'*Introductio*, che, come scritto nella prefazione, sviluppa temi che sono assolutamente richiesti per l'analisi rendendo il lettore conscio in modo quasi impercettibile dell'idea dell'infinito, pone alla base dell'approccio di Eulero la nozione di *funzione*:

> Una funzione di una quantità variabile è un'espressione analitica composta in un modo qualunque dalla quantità variabile e da quantità costanti.

Di fatto, il significato del termine funzione cambierà nel tempo e si adatterà in termini di generalità alle esigenze specifiche, così nelle *Istitutiones* Eulero chiamerà funzioni

> quelle quantità che dipendono da altre in modo da cambiare quando queste cambiano,

specificando che questa definizione include tutti i possibili modi in cui una quantità possa essere determinata da altre.

Nel primo volume dell'*Introductio*, Eulero distingue le funzioni in funzioni algebriche e trascendenti: le prime sono formate a partire da variabili e costanti tramite le quattro operazioni elementari (somma, sottrazione, prodotto e divisione), elevazione ad una potenza e estrazione di radice o, infine, tramite la soluzione di una equazione polinomiale; le seconde sono quelle definite tramite esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e, in generale, tramite integrali. Discute le funzioni a più valori anche se prevalentemente tratterà funzioni a un valore. Dedica vari capitoli alle funzioni polinomiali e, soprattutto alla rappresentazione di funzioni in serie,

> poiché la natura delle funzioni polinomiali è ben compresa, se altre funzioni possono essere espresse nella forma $A+Bz+Cz^2+\dots$, esse sembrano porsi nella forma migliore perché la nostra mente possa afferrarne la loro natura, anche se il numero dei termini è infinito.

[5] La terminologia, presa in prestito dal processo di fondazione del calcolo dell'Ottocento, in questo contesto è mutuata da [105].

Egli sembra convinto, anzi afferma, che ogni funzione può essere espressa come serie infinita (per noi serie di potenze) e, fra i capitoli più interessanti del primo volume, ci sono sicuramente quelli dedicati agli sviluppi infiniti delle funzioni esponenziali, logaritmiche e trigonometriche, su cui ritorneremo. Una conseguenza è che, quando si specifica un valore dell'indeterminata, una serie infinita identifica un 'numero'.

Il secondo volume dell'*Introductio* è dedicato alla geometria analitica, cioè alle applicazioni dell'analisi alla geometria, allo studio delle curve e delle superficie.

È nelle *Institutiones* che Eulero discute il *calcolo differenziale* come opera di *pura analisi*, cioè senza nessun riferimento alle curve o alla meccanica, basandolo, come dice egli stesso, sui *veri principi*. Per Eulero il calcolo differenziale studia gli *incrementi evanescenti* o, come apparirà presto chiaro, *rapporti* di incrementi evanescenti, che ancora identificano 'numeri' nella visione di Eulero. Scrive Eulero nella prefazione alle *Institutiones*:

> Se x designa la quantità variabile, tutte le altre quantità che in qualunque modo dipendono da o sono determinate da x si chiamano funzioni. Esempi sono x^2, il quadrato di x, o ogni altra potenza di x, e, in effetti, ogni quantità composta con queste potenze in qualunque modo, anche in modo trascendente, composta di modo che, quando x cresce o decresce, la funzione cambia. Una domanda sorge naturalmente: se la quantità x cresce o decresce di quanto cambierà la funzione, sia che cresca o decresca? Per i casi più semplici la risposta è semplice. Se la quantità x è aumentata della quantità ω, il suo quadrato x^2 aumenterà di $2x\omega+\omega^2$. Quindi la crescita di x sta alla crescita di x^2 come ω sta a $2x\omega+\omega^2$, cioè come 1 sta a $2x+\omega$. In modo simile, consideriamo il rapporto di crescita di x con la crescita o decrescita di una qualunque funzione di x, infatti l'indagine su questo tipo di rapporti di incrementi è non solo importante ma è il fondamento di tutta l'analisi. Ritorniamo all'esempio x^2, con incremento $2x\omega+\omega^2$ quando x cresce di ω per cui il rapporto è $2x+\omega$ a 1. Da questo dovrebbe esser chiaro che più piccolo prendiamo l'incremento ω di x più il rapporto si avvicina a $2x$ su 1, senza, però, mai arrivare ad esso se non quando ω si annulla completamente. Da questo capiamo che, se l'incremento della variabile x va a zero, allora l'incremento di x^2 si annulla, ma il rapporto resta $2x$ a 1. Quello che abbiamo detto per la funzione x^2 vale per qualunque funzione di x; cioè, quando gli incrementi si annullano all'annullarsi dell'incremento di x, questi hanno un rapporto certo e determinabile. In questo modo siamo portati alla definizione di *calcolo differenziale*: *è un metodo per determinare il rapporto degli incrementi evanescenti che una funzione assume quando alla variabile, di cui lei è funzione, viene dato un incremento evanescente*. È manifesto a quelli che non sono estranei a questo argomento che il vero carattere del calcolo differenziale è contenuto in questa definizione e può essere dedotto da essa.
>
> Quindi il calcolo differenziale tratta non tanto gli incrementi evanescenti, che sono semplicemente zero, ma rapporti e proporzioni mutui. ...
>
> Perché questi rapporti possano meglio essere tenuti assieme e rappresentati nei calcoli, gli stessi incrementi evanescenti, sebbene siano nulli, sono rappresentati da certi simboli, e assieme a questi simboli non c'è nessuna ragione di non dargli un nome. Sono chiamati *differenziali* e, siccome sono senza quantità sono anche detti *infinitesimi*. ... [Con riferimento alle notazioni precedenti] se scriviamo dx per ω, il differenziale di x^2 diventa $2x\,dx$. In modo simile si vede che il differenziale di x^3 è uguale a $3x^2\,dx$ e in generale per x^n è $nx^{n-1}\,dx$. Per qualunque altra funzione di x possa esser prodotta il calcolo differenziale dà regole per trovare

il differenziale.

Nei primi due capitoli delle *Institutiones*, Eulero discute il calcolo degli incrementi, o se si vuole l'*operatore differenza* Δ applicato alle funzioni sulla base della decomposizione equidistribuita

$$x, x+\omega, x+2\omega, x+3\omega, \dots,$$

pervenendo alle formule

$$\begin{aligned} \Delta f(x,\omega) := f(x+\omega) - f(x) &= P(x)\omega + Q(x)\omega^2 + R(x)\omega^3 + \cdots \\ \Delta\Delta f(x,\omega) &= Q(x)\omega^2 + R(x)\omega^3 + \cdots \\ \Delta^3 f(x,\omega) &= R(x)\omega^3 + \cdots . \end{aligned}$$

A questo punto Eulero opera una sorta di *transizione*, passando dalle differenze ai differenziali, e trova quindi

$$\frac{df}{dx} = P(x) + Q(x)dx + R(x)dx^2 + \cdots ,$$

cioè, in accordo con il calcolo dei dx ($dx = 0$ e $P(x) + dx = P(x)$),

$$\frac{df}{dx} = P(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = Q(x), \quad \frac{d^3 f}{dx^3} = R(x)$$

o, equivalentemente,

$$df = P(x)\,dx, \quad d^2 f = Q(x)\,dx^2, \quad d^3 f = R(x)\,dx^3.$$

Nei capitoli 4, 5, 6 Eulero sviluppa, sulla base del calcolo delle differenze, un calcolo dei differenziali, che guarderà come un caso speciale del calcolo delle differenze[6]. In questo senso al calcolo sono attribuibili le connotazione di *chiaro* e, soprattutto, di *necessariamente vero* e riterrà corretto pensare e lavorare con i dx, in questo in accordo con Leibniz, come se fossero differenze finite, tranne che per alcuni fatti specifici.

Concludiamo con alcuni passi delle *Istituzioni* [33], Capitolo 4, 132-134 dell'edizione inglese, in cui Eulero espone il modo di operare con i differenziali:

> Dalla definizione di y, una funzione di x, noi determiniamo il valore della funzione p che moltiplicata per dx dà il differenziale primo dy. [...] Dato $dy = pdx$, il differenziale di pdx dà il differenziale secondo d^2y. Quindi, se $dp = qdx$, poiché dx è costante, abbiamo $d^2y = qdx^2$

6 Nel capitolo 7 tratta funzioni di più variabili e il calcolo per esse, mentre nel capitolo 8 tratta dei differenziali di ordine superiore, anche nel caso di suddivisioni non uniformi

$$x, x+\omega, x+\omega+\eta, x+\omega+\eta+\mu, \cdots .$$

Infine, i capitoli 3 e 9 sono dedicati rispettivamente al problema del continuo, dell'infinito e dell'infinitamente piccolo e alle equazioni differenziali.

[Eulero scrive qui e nel seguito dx^2 per $dxdx$ e similmente per dx^n] [...], se $dq = rdx$, allora $d^3y = rdx^3$. [...]
[Queste sono le notazioni attuali, ad esempio per la derivata seconda $\frac{d^2f}{dx^2}$, ma qui si faccia attenzione a non confondere dx^2 cioè $(dx)^2$ con $2xdx$.]
È quindi chiaro che le espressioni Pd^2y^2 e $Qdyd^3y$ sono *omogenee*. Infatti d^2y^2 è il quadrato di d^2y, d^2y è omogenea a dx^2, quindi d^2y^2 è omogenea a dx^4; poiché dy è omogenea a dx e d^3y è omogenea a dx^3, abbiamo che il prodotto $dydy^3$ è omogeneo a dx^4. Similmente possiamo affermare che

$$\frac{Pd^3y^2}{dxd^2y} \quad \text{e} \quad \frac{Qd^5y}{dy^2}$$

sono omogenee. [...]
Se in qualche calcolo interviene la somma dei seguenti due termini

$$\frac{Pd^3y}{dx^2} + \frac{Qd^2y^2}{dy},$$

il secondo termine, confrontato al primo, può essere eliminato, e solo il primo termine Pdy^2/dx^2 conservato nella computazione. Infatti c'è un rapporto di eguaglianza tra le espressioni

$$\frac{Pd^3y}{dx^2} + \frac{Qd^2y^2}{dy} \quad \text{e} \quad \frac{Pd^3y}{dx^2},$$

poiché, quando esprimiamo il rapporto, abbiamo

$$1 + \frac{Qdx^2d^2y^2}{Pdyd^3y} = 1, \quad \text{poiché} \quad \frac{Qdx^2d^2y^2}{Pdyd^3y} = 0.$$

I nuovi concetti della meccanica trovano ora la loro formulazione nel nuovo contesto: il movimento come una funzione che lega spazio e tempo, la velocità come differenziale della spazio rispetto allo scorrere continuo e uniforme del tempo (o come coefficiente di proporzionalità tra dx e dt) e l'accelerazione, in modo simile, come differenziale della velocità rispetto al tempo. Ma per Eulero vale di più: c'è una relazione di *compatibilità* tra le varie nozioni meccaniche solo se c'è una qualche *rappresentazione analitica*, di conseguenza ogni affermazioni meccanica sarà necessariamente vera, essendo basata su principi necessariamente veri.

1.4.3. *La meccanica del punto materiale*

La *Mechanica* di Eulero si apre con due capitoli, *Sul moto in generale* e *Sugli effetti delle forze su un punto libero*, in cui vengono stabiliti gli elementi di base che resteranno invariati nei successivi sviluppi della teoria. Il trattato è organizzato in Definizioni dei concetti di base, corrispondenti in qualche modo agli assiomi euclidei; Proposizioni divisi in Teoremi, che introducono nuove idee, o Problemi, che trattano specifiche situazioni; Corollari che aggiungono commenti alle affermazioni e alle dimostrazioni o trattano casi speciali ed, infine, Scolia che sono note di carattere più generale. Il primo capitolo inizia con la definizione di moto:

> Moto è la traslazione di un corpo dalla posizione che occupa ad un'altra. Il corpo è in quiete se rimane nella stessa posizione.

La nozione fondamentale è quella di *corpo*. Commenta Eulero, la posizione che un corpo occupa è una proprietà specifica di quel corpo, come pure il moto o la quiete; infatti nessun corpo può esserci che non si muova o non sia in quiete. Continua, quindi, dicendo che la posizione occupata dal corpo è parte dello spazio senza limiti che costituisce l'intero universo, che appare come una sorta di nozione ideale di *spazio assoluto* immobile o, piuttosto, di *riferimento assoluto*, utile nella discussione del moto e della quiete; ma subito passa a considerare *riferimenti relativi* in quiete o in movimento tra loro, preoccupandosi di puntualizzare, per tutto il capitolo, che riferimenti in moto uniforme l'uno rispetto all'altro sono indistinguibili. Osserva quindi, usando lo stesso argomento di Leibniz, che il moto non può che essere continuo:

> Ogni corpo che si sposta da un posto ad un'altro con moto assoluto o relativo, deve occupare tutte le posizioni intermedie e non può immediatamente arrivare alla posizione finale.

Infatti, perché un corpo possa arrivare *immediatamente* alla posizione finale, necessariamente dovrebbe annientarsi nella posizione iniziale e riprodursi in quella finale: questo è contrario alle leggi di natura, tranne che si convenga su un miracolo. Una conseguenza è che per passare da una posizione ad un'altra serve del *tempo* e per specificare l'intero movimento serve anche conoscere il *cammino* di ogni parte del corpo (si pensi ad una sfera che ruoti attorno ad un suo asse o ai corpi deformabili) quindi una *legge di moto* $s = s(t)$ o $t = t(s)$.

Eulero discute quindi il *moto uniforme* (spazi uguali percorsi in tempi uguali) e conclude affermando che

> In un moto con non importa quale non-uniformità, i più piccoli elementi di distanza sono considerati attraversati da moti uniformi. Infatti, come in geometria gli elementi delle linee curve sono considerati essere elementi di linee rette, così in meccanica il moto non uniforme si risolve in infiniti moti uniformi[7].

Come abbiamo visto questo si esprime come

$$ds = vdt$$

ed Eulero discute, infatti, varie occorrenze di questa relazione.

Il resto del capitolo è dedicato a provare e commentare quello che noi oggi chiamiamo il *principio di inerzia*:

> Un corpo rimane nel suo stato di quiete assoluto, tranne che sia disturbato da cause esterne.
> Un corpo che si muove di moto uniforme assoluto continuerà a muoversi con la stessa velocità e direzione, tranne che sia disturbato da cause esterne.

[7] Ricordiamo, come più volte osservato, che lo sviluppo di un calcolo differenziale *puro* va di pari passo con gli sviluppi della meccanica e rappresenta una sorta di sintesi o di astrazione di elementi comuni alla geometria e alla meccanica.

Lo stesso vale per i moti relativi sempre che il sistema relativo sia in quiete o si muova di moto rettilineo uniforme.

Questa proprietà dei corpi di mantenere il loro stato di quiete o di moto uniforme è chamata da Eulero l'*inerzia del corpo*, precisando che non si tratta di una forza.

Non discuteremo queste *dimostrazioni* che vengono basate sul *principio di ragion sufficiente*. Più che dimostrazioni, esse appaiono come argomentazioni in favore dell'affermazione che non possiamo non assumere che [...]. Per una presentazione affascinante di questi concetti il lettore è fortemente invitato a leggere le lettere 69-79 del primo volume di [37] pp. 225-265.

Appare chiaro da quanto appena esposto che il movimento è (anzi deve essere) descritto in termini di incrementi finiti e infinitesimi dello spazio e che la relazione meccanica assunta è la stessa

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{o} \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

L'analisi porta quindi a distinguere tre possibili tipi di moto e, conseguentemente, tre possibili *stati* di un corpo:

- quiete, corrispondente a $v = 0$, in particolare, $dv = 0$,
- moto uniforme, corrispondente a $v = \text{costante} \neq 0$, in particolare, ancora $dv = 0$,
- moto non uniforme, corrispondente a $dv \neq 0$, indipendentemente dall'annullarsi o meno di v.

Tutto questo è indipendentente da qualunque teoria delle forze, contrariamente a quanto accadeva per Newton e per Leibniz. Eulero conserva la distinzione tra principi *interni* al corpo ed *esterni*, ma le forze sono escluse dall'insieme delle proprietà interne dei corpi. Le proprietà interne sono descritte in termini di relazioni tra le parti del corpo e le proprietà esterne in termini di relazione con gli altri corpi, escludendo ogni motivazione metafisica. Così un corpo unico nello spazio non può che essere in quiete o muoversi di moto uniforme e solo un mondo con più corpi può mostrare la presenza di forze[8].

Il primo capitolo, che sviluppa quella che oggi chiamiamo *cinematica*, in contrapposizione con la *dinamica*, che dipende da una teoria delle forze o delle

[8] Infatti un moto non uniforme richiederebbe una ragione sufficiente che può consistere o nella presenza di un altro corpo o nello spazio stesso, ma quest'ultima situazione è esclusa da Eulero: come riferimento lo spazio è neutrale. Inoltre, Eulero ammetterà solo forze di interazione ed escluderà interazioni istantanee (per Eulero non esistono corpi duri o anelastici) e interazioni a distanza: la gravità non è dovuta alla mutua attrazione dei corpi, ma alla pressione dell'etere che riempie lo spazio.

interazioni, si conclude con uno *Scolio generale* che può essere letto come il programma di Eulero per la meccanica[9]

> Queste leggi del moto, che un corpo osserva quando viene lasciato a se stesso nel perseverare nella quiete o nel moto sono propriamente attinenti ai corpi infinitamente piccoli, che possono essere considerati puntiformi. Infatti, in corpi di dimensione finita, in cui le singole particelle sono animate da vari moti, una data particella cercherà di obbedire alle leggi del moto, cosa che però non è sempre possibile a causa dello stato del corpo. Perciò il corpo seguirà quel moto che risulta dai tentativi delle varie parti che lo compongono e, a causa dell'insufficienza dei principi, quel moto non può ancora essere determinato e la sua trattazione va rimandata al seguito. La diversità dei corpi ci fornirà pertanto la suddivisione primaria del lavoro. Infatti per primi considereremo i corpi infinitamente piccoli, che possono essere considerati come punti. Affronteremo poi i corpi di dimensione finita che sono rigidi e non subiscono deformazioni della loro figura. In terzo luogo tratteremo dei corpi flessibili. In quarto luogo, dei corpi che possono estendersi e contrarsi [i corpi elastici]. Come sesta parte, invero, tratteremo del moto dei fluidi.

Come già detto, Eulero ritiene i principi disponibili al momento utili solo alla trattazione del moto dei *punti materiali* e prosegue:

> È dunque chiaro di quali argomenti ci si debba occupare in meccanica e come siano molte le cose che ancora ora non sono state neppure sfiorate. Infatti, oltre al moto dei punti, le cose finora trattate sono così poche che di certo quasi tutte debbono (ancora) essere scoperte e fatte derivare da principi.

Il secondo capitolo della *Mechanica*, *Sugli effetti delle forze su un punto libero*, si apre con la definizione di forza,

> la forza è ciò che mette in moto un corpo in quiete o ne altera il moto

e discute i principi del moto che userà nel corso dell'opera. Nell'esporli terremo conto anche di formulazioni successive di Eulero, ad esempio [34], avendo modo, così, di semplificare la presentazione senza alterarne lo spirito.

Per un corpo che si muove lungo una linea retta la condizione

$$\frac{dds}{dt^2} = 0$$

(o meglio $\frac{dds}{dt\,dt}$ e per noi oggi $\frac{d^2s}{dt^2}$) è equivalente, come abbiamo visto, al moto per inerzia, mentre, sempre per un moto lungo una retta, se vale la condizione alternativa

$$\frac{dds}{dt^2} \neq 0,$$

il corpo non può muoversi solo sotto l'influenza dell'inerzia e la grandezza dds/dt^2 deve essere determinata da una *causa esterna*. Osserviamo che vi è una necessaria logica opposizione tra principi interni e principi esterni. Ora

[9] La traduzione è quella di [81] p. 60-61

Eulero sa che gli incrementi finiti di velocità hanno la forma

$$\Delta v(t) = f(t)\Delta t + g(t)\Delta t^2 + \dots$$

per opportune $f(t)$, $g(t)$, ... che non dipendono dall'incremento Δt. La formula precedente, troncata al finito, dà solo un'approssimazione della variazione di velocità, ma nella sua espressione differenziale diventa la *formula esatta*

$$dv(t) = f(t)dt \quad \text{o} \quad \frac{dds}{dt^2}(t) = f(t).$$

In particolare, risulta chiaro secondo Eulero che il principio galileiano o newtoniano, che mette in relazione la variazione del moto con la forza, non è un principio *sperimentale* ma *necessario*.

Nessun problema se ci riferiamo a un corpo specifico. Come confrontiamo, però, le variazioni di velocità corrispondenti a corpi *diversi* nello stesso intervallo di tempo e sottoposti alla stessa forza? Eulero argomenta che corpi diversi hanno bisogno di forze differenti, proporzionali alla *quantità di materia* o *massa* per ottenere lo stesso effetto. Se facciamo agire la stessa forza su corpi diversi A e B, allora il rapporto delle due masse m_A e m_B è dato da $dv_A : dv_B = m_A : m_B$. Questo essenzialmente definisce la massa e trasforma $dv = f dt$ in

$$dds = \frac{F}{m} dt^2.$$

Oltre ai primi due capitoli, il primo volume della *Mechanica* contiene altri quattro capitoli e quattro sono i capitoli che costituiscono il secondo volume. Per essi ci limitiamo pertanto a brevi annotazioni. Il terzo capitolo del primo volume I.3, *Sul moto rettilineo di un punto libero sotto l'azione di forze assolute*, riguarda le equazioni del moto di caduta di un punto materiale sotto l'azione di varie forze gravitazionali e il moto centrale. Il capitolo I.4, *Sul moto di un punto libero in un mezzo con resistenza*, è dedicato al moto armonico con smorzamento. I.5, *Sul moto curvilineo di un punto sotto l'azione di forze di qualunque tipo*, contiene una descrizione in termini di componenti angolari e radiali del moto per forze generiche e, in particolare, per i moti centrali di Keplero, ritrovando in modo analitico molti dei risultati di Newton, e presenta materiale utile alla discussione del moto della Luna, in particolare, la decomposizione dell'accelerazione di un punto che si muove su orbite nello spazio a tre dimensioni. Infine, il capitolo I.6 riguarda *Il moto curvilineo di un punto in un mezzo con resistenza*. Il secondo volume tratta del moto vincolato di un punto materiale su una curva o su una superficie, e sviluppa aspetti del calcolo multidimensionale come anche del calcolo differenziale delle superfici.

Due osservazioni generali sono opportune. Più che integrare l'equazione del moto, nella *Mechanica* c'è una generica tendenza a ricondursi a *integrali primi*, conservazione del momento e dell'energia, da integrare. Inoltre, più che riconducendosi ad un riferimento cartesiano ortogonale, il moto è descritto in riferimenti che si ritengono più adatti alla situazione trattata e, in generale, ad un *riferimento mobile*, cioè in termini di tangente, normale e binormale e, quindi, di curvature.

Ritornando ancora una volta sulla nozione di corpo, per Eulero un *corpo* (termine che, a volte, usa come sinonimo di ente materiale) si distingue da qualunque altra cosa, anima o fantasma, tramite le seguenti proprietà: (i) l'*estensione* che implica continuità, (ii) la *mobilità*, ma ci sono enti estesi e mobili che non sono corpi, come l'ombra o l'immagine in uno specchio, (iii) l'*impenetrabilità* e (iv) l'*inerzia*[10]. Con questa nozione quindi, secondo Eulero, la meccanica assume un carattere di *necessità*.

[10] Eulero tenderà a caratterizzare i corpi in termine di *impenetrabilità*, includendo in questa nozione estensione e inerzia, e anzi identificando l'origine delle forze nell'inerzia o impenetrabilità, come del resto abbiamo sostanzialmente visto in termini matematici. Scrive in [32]:

> 8. Ogni causa che è capace di cambiare lo stato di un corpo si chiama *forza* e quindi, quando lo stato di un corpo cambia, dal riposo al movimento o, se già in movimento, cambia la velocità o la direzione, questo cambiamento deriva da una forza che si trova fuori dal corpo in un qualche altro soggetto.
>
> 32. Vediamo quindi che la sola impenetrabilità dei corpi è capace di fornire delle forze, tramite le quali lo stato del corpo può cambiare; e se questo succede, se ci domandiamo, da dove vengono le forze che determinano questi cambiamenti, si potrà rispondere arditamente che l'impenetrabilità dei corpi ne è la vera origine.

CAPITOLO 2

Il calcolo all'opera: equazioni differenziali

In questa sezione illustriamo alcuni dei risultati ottenuti tra la fine del Seicento e l'inizio del Settecento con il nuovo calcolo. Pur cercando di mantenere lo spirito e il senso delle argomentazioni del tempo useremo spesso notazioni moderne e cercheremo di mettere in evidenza gli aspetti delicati che hanno bisogno, col senso del poi, di ulteriore supporto o di argomentazioni diverse per ritenere corretto il risultato che ne consegue.

2.1. *Interpolazione*

Come abbiamo già detto, a partire da Wallis, con Gregory, con Newton e con Taylor vengono stabilite delle *formule di interpolazione* che portano in particolare alla *serie binomiale* di Newton e alle *formule di Taylor*. Ne illustriamo qui alcuni aspetti rilevanti.

2.1. *Polinomio interpolatorio di Newton*. Cominciamo con un esempio. Si voglia trovare un polinomio di terzo grado che prenda quattro valori assegnati, nell'ordine, y_0, y_1, y_2, e y_3, nei quattro punti $x_0 := 0$, $x_1 := 1$, $x_2 := 2$ e $x_3 := 3$. Tale polinomio avrà la forma

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

di cui sono da determinare appunto i 4 coefficienti A, B, C e D dalle condizioni

$$\begin{aligned} A &= y_0 \\ A + B + C + D &= y_1 \\ A + 2B + 4C + 8D &= y_2 \\ A + 3B + 9C + 27D &= y_3. \end{aligned}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda, la seconda dalla terza e la terza dalla quarta troviamo

$$\begin{aligned} B + C + D &= y_1 - y_0 =: \Delta y_0 \\ B + 3C + 7D &= y_2 - y_1 =: \Delta y_1 \\ B + 5C + 19D &= y_3 - y_2 =: \Delta y_2. \end{aligned}$$

Iterando la procedura, cioè sottraendo la prima equazione di questo gruppo dalla seconda e la seconda dalla terza, troviamo

$$2C + 6D = \Delta y_1 - \Delta y_0 =: \Delta^2 y_0$$
$$2C + 12D = \Delta y_2 - \Delta y_1 =: \Delta^2 y_1.$$

Infine, con un'altra iterazione, sottraendo la seconda equazione dalla prima, troviamo

$$6D = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 =: \Delta^3 y_0,$$

che ci dà il valore di D, mentre le prime equazioni di ogni gruppo ci permettono di ritrovare a ritroso C e B, di modo che il polinomio cercato, dopo qualche calcolo elementare, si trova essere

$$y = y_0 + \frac{x}{1}\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_0.$$

Non è difficile convincersi, ma lo vedremo fra poco, che in effetti il polinomio di grado n che prende i valori y_0 per $x = 0$, y_1 per $x = 1$, $y_2 = 2$, $\ldots$ e y_n per $x = n$ è dato da

$$y = y_0 + \frac{x}{1}\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \cdot + \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\Delta^n y_n.$$

2.2. *Differenze finite*. Sia $y = f(x)$ una funzione data e indichiamo con Δx un incremento, o meglio il *passo di incremento*, della variabile x. Definiamo *differenza prima* la quantità

$$\Delta y = \Delta f(x) := f(x + \Delta x) - f(x).$$

In modo simile definiamo le differenze di ordine superiore

$$\Delta^n y := \Delta(\Delta^{n-1} y), \quad n = 1, 2, \ldots$$

e, per convenienza, poniamo

$$\Delta^0 y := y.$$

Considerando Δ come un operatore che alla funzione y associa la funzione Δy, è facile verificare che Δ è *lineare*, cioè $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$ e per ogni costante λ vale $\Delta(\lambda u) = \lambda \Delta u$; inoltre, per n e m interi vale $\Delta^m(\Delta^n y) = \Delta^{m+n} y$. Immediatamente dalla definizione si ha anche

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x) = (1 + \Delta) f(x);$$

iterando si ottiene quindi

$$f(x + n\Delta x) = (1 + \Delta)^n f(x)$$

e, usando la formula del *binomio di Newton*

$$f(x + n\Delta x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \Delta^m f(x), \tag{2.1}$$

dove, ricordiamo

$$\binom{n}{m} := \begin{cases} 1 & \text{se } n = m = 0 \\ 0 & \text{se } n < m \\ \frac{n(n-1)\cdots[n-(m-1)]}{m!} & \text{se } n \geq m > 0 \end{cases}$$

è il generico *coefficiente binomiale*, cioè il numero di combinazioni di n elementi presi m a m.

La formula precedente esprime i valori della funzione al passo n della funzione $f(x)$ in termini delle differenze di vari ordini. In modo reciproco si trova anche

$$\Delta^n f(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f(x + i\Delta x). \tag{2.2}$$

2.3. *La formula di Gregory-Newton*. Fissiamo ora un punto x_0, e sia x un qualunque altro punto (che per semplicità supponiamo a destra di x_0.) Dividiamo l'intervallo $[x_0, x]$ in n parti uguali, di modo che il passo Δx_0 sia ora dato da

$$\Delta x_0 = \frac{x - x_0}{n},$$

e poniamo

$$x_i := x_0 + i\Delta x_0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

cosicché $x = x_0 + n\Delta x_0$. Allora la (2.1) si trasforma in

$$\begin{aligned} f(x) =& \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!}\frac{\Delta^2 f(x_0)}{\Delta x_0^2} + \cdots \\ &+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)}{n!}\frac{\Delta^n f(x_0)}{\Delta x_0^n} =: P_n(x). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Si verifica facilmente che il polinomio $P_n(x)$, chiamato spesso *polinomio interpolatorio di Newton*, verifica per ogni $k = 0, 1, \ldots, n$

$$P_n(x_k) = y_k = f(x_k),$$

dato che

$$P_n(x_k) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots \frac{k(k-1)\cdots 1}{k!}\Delta^k y_0 = (1 + \Delta)^k y_0 = y_k.$$

In altre parole, $P_n(x)$ è il polinomio di grado minore o uguale ad n che prende nei punti x_i i valori $P_n(x_i) = y_i$, dove $y_i := f(x_i)$.

2.4. *Formula di Taylor*. Ripartendo da (2.3), Taylor afferma che, quando il numero di suddivisioni dell'intervallo $[x_0, x]$ diventa infinito, cioè $n \to \infty$, per ogni k si ha

$$\frac{\Delta^k y_0}{\Delta x_0^k} \to \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

e
$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k) \to (x-x_0)^k,$$
quindi
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_0^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Osserviamo che, non solo il 'quindi' non sembra giustificarsi ovviamente, ma che questo tipo di argomentazione potrebbbe portare, in generale, ad assurdi: ad esempio, potremmo scrivere
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = 0 + 0 + \ldots = 0.$$

In termini moderni, formule del tipo
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^\infty a_{k,n} = \sum_{k=0}^\infty \lim_{n\to\infty} a_{k,n}, \quad \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty a_{k,n} = \sum_{k=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty a_{k,n}$$
o
$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y),$$
che scambiano l'ordine dei limiti, non sono vere, servono delle ipotesi perché lo diventino, cfr. ad esempio [46] [49].

2.5. *Formula di Maclaurin*. Maclaurin procede in modo diverso. Intanto egli è interessato alla formula di Taylor quando $x_0 = 0$
$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,$$
cosa che non è una vera restrizione. Scrive (ma noi leggiamo: parte dall'assunzione che)
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$
e, calcolando in $x = 0$, trova $a_0 = f(0)$. Derivando e calcolando in zero (si noti: si sta operando ancora uno scambio di limiti), trova quindi $a_1 = f'(0)$ e, in generale
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$
Quindi (noi leggiamo: se $f(x)$ ha uno sviluppo in serie di potenze centrato in zero, allora) il suo sviluppo è quello di Taylor (centrato in zero); la domanda è: tutte le $f(x)$ sono sviluppabili? Si scoprirà che la risposta è negativa. Non solo perché ci sono funzioni che hanno k derivate, e la k-sima derivata non ha derivata, ma perché ci sono funzioni non nulle che ammettono derivate di qualunque ordine con $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni k.

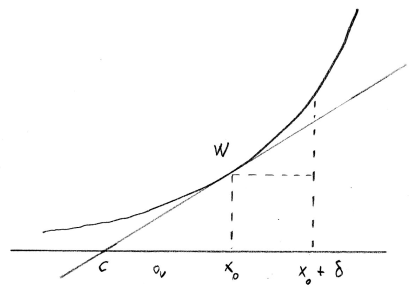


FIGURA 1. Il problema di de Beaune: esponenziale e logaritmo.

2.2. *Esponenziale e logaritmo*

Subito dopo la pubblicazione della *Geometrie*, nel 1638, Florimond de Beaune pone a Descartes il problema di determinare una curva la cui *sottotangente* sia una data costante a, cioè analiticamente trovare la curva y tale che

$$y\frac{dx}{dy} = a \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{a}$$

che come sappiamo è la curva esponenziale[1] $e^{x/a}$.

Questa è la soluzione che Leibniz ne dà alla fine della sua *Methodus*:

> Come appendice mi piace aggiungere la soluzione del problema proposto da F. de Beaune a Descartes e che egli affrontò nel Tom. 3 delle *Epistole*, ma non risolse. Trovare la curva WW di natura tale che, condotta all'asse una tangente WC, sia XC sempre uguale ad un segmento costante a.
> Ora XW, ossia w, sta a XC, ossia ad a, come dw sta a dx. Dunque, se dx (che si può prendere ad arbitrio) si assume costante, precisamente sempre uguale a b, cioè se le x o le AX crescono uniformemente, sarà $w = \frac{a}{b}dw$. Queste saranno proprio le ordinate w, proporzionali agli stessi dw, loro incrementi o differenze, cioè se le x sono in progressione aritmetica, le w saranno in progressione geometrica, oppure se le w sono numeri, le x saranno logaritmi: dunque la curva WW [in Figura 7] è la curva logaritmica.

Con Eulero [30] per risolvere il problema di de Beaune sostituiamo l'infinitesimo dx con una variazione finita δ piccola. Se $y = y(x)$ è la soluzione (ci sarà

[1] In realtà il problema originale portava all'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{y-x},$$

che, con un cambiamento di variabile, Descartes aveva ricondotto all'equazione 'sottotangente uguale costante' nelle nuove variabili.

Diverse varianti di questo problema furono considerate da Jakob Bernoulli intorno agli anni 1695 con a non costante.

una soluzione?), con riferimento alla Figura 1 avremo

$$y(x+\delta) \approx y(x) + y(x)\frac{\delta}{a} = y(x)\big(1+\frac{\delta}{a}\big).$$

Consideriamo ora due punti generici x_0 e x e, fissato N grande, dividiamo l'intervallo $[x_0, x]$ in N intervallini uguali $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, di modo che $\delta = x_{k+1} - x_k = 1/N$. Avremo allora

$$y_0 = y(x_0),\, y(x_0 + \delta/N) \approx y_0\big(1+\frac{\delta}{a}\big),\, \ldots\, y(x) \approx y_0\big(1+\frac{\delta}{a}\big)^N.$$

Semplificando – a posteriori si potrà recuperare il caso precedente – scegliamo $a = 1$ e $x_0 = 0$, siamo allora ricondotti a calcolare

$$\big(1+\frac{1}{N}\big)^N.$$

Saremmo ricondotti alla stessa situazione se ci chiedessimo "se una popolazione, con tasso di nascita meno tasso di mortalità costante, inizialmente conta y_0 abitanti, quanti abitanti avrà dopo x anni?" o "se si prendono in prestito dei soldi ad un certo tasso di interesse, quanto si dovrà restituire successivamente?".

Eulero comincia col considerare il caso $x = 1$. Dalla formula del binomio allora

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{1}{N}\Big)^N &= 1 + \frac{N}{N} + \frac{N(N-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{N^2} + \frac{N(N-1)(N-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{N^3} + \ldots\\ &= 1 + 1 + (1-\frac{1}{N})\frac{1}{2!} + (1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{N})\frac{1}{3!} + \cdots\\ &\quad + (1-\frac{1}{N})\cdots(1-\frac{k-1}{N})\frac{1}{k!} + \cdots\end{aligned}$$

A questo punto Eulero osserva che per N infinito (per trasposizione?) $\frac{N-1}{N}$ è uguale a 1 e conclude che la somma a secondo membro è (noi diremmo, per $N \to \infty$, $(1+1/N)^N$ tende al) *numero di Eulero*

$$e = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Come abbiamo già osservato l'argomento (di passaggio al limite) è pericoloso. Infatti la motivazione di Eulero è quanto meno oscura. Quel che conta infatti è che per ogni k

$$\Big(1-\frac{1}{N}\Big)\Big(1-\frac{2}{N}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k}{N}\Big)$$

tende a 1 crescendo, vedi 7.6 in Capitolo 7.

Non è chiaro in che senso e sia un numero; Eulero probabilmente risponderebbe nello stesso senso in cui $\sqrt{2}$ è un numero, infatti, come si vede facilmente, l'espressione

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

è limitata indipendentemente da n (ad esempio per confronto con la serie di Mengoli) ed è crescente, quindi definisce un numero (ma questo potrebbe non farci desistere e farci continuare a chiedere in che senso, ed Eulero, forse, risponderebbe che la serie è il numero). Si osservi come i 'numeri' $\sqrt{2}$ e e, come pure π, appaiono come l'oggettivazione di una procedura.

Tornando alla funzione esponenziale, Eulero con lo stesso argomento mostra che

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^{N} \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

D'altra parte, se x è razionale e N è tale che M:=N/x è intero, si ha

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^{N} = \left(1+\frac{1}{M}\right)^{Mx} = \left(\left(1+\frac{1}{M}\right)^{M}\right)^{x} \to e^x. \tag{2.4}$$

E la conclusione di Eulero, è che

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Osserviamo che la (2.4) dimostra che e^x è positivo per ogni intero x perché per N grande $1+x/N>0$.

Da questo sviluppo in serie è possibile dedurre tutte le proprietà dell'esponenziale che conosciamo, in particolare

$$e^0 = 1 \quad \text{e} \quad e^{x+y} = e^x e^y, \quad \text{per ogni coppia } x,y,$$

e anche che

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\frac{x^k}{k!} = \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} == \frac{d}{dx}e^x.$$

cioè e^x risolve l'equazione differenziale

$$y' = y.$$

Osserviamo che l'equazione differenziale $y'=y$ ha infinite soluzioni. Tutte le funzioni del tipo $y(x) = \lambda e^x$ sono soluzioni e non ve ne sono altre. Se infatti $y(x)$ è una qualunque soluzione di $y'=y$, allora

$$\left(\frac{y(x)}{e^x}\right)' = \frac{y'e^x - ye^x}{e^{2x}} = 0$$

quindi $y(x)/e^x$ non dipende da x, più precisamente, $y(x)/e^x = 1$ perché $y(0)/e^0 = 1$ – almeno se accettiamo che $f'=0$ implichi $f=\text{const}$. Osserviamo però che per arrivare in modo certo a questa affermazione, che è una conseguenza del *teorema di Lagrange* 'provato' appunto da Lagrange in [69], serve fare un lungo cammino, nel tempo (fine Ottocento) e anche nello spazio (pagine richieste per una esauriente spiegazione). Pertanto *il problema*

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{2.5}$$

ha soluzione unica che è la soluzione trovata prima e^x.

Per definire la funzione esponenziale, possiamo procedere di converso, partendo direttamente dall'equazione differenziale $y' = y$, in fondo essa "è la curva soluzione", nel senso del tipo di curva. Voremmo ritrovare la funzione esponenziale a partire dall'equazione differenziale senza utilizzare il fatto che ne conosciamo la soluzione. La cosa è possibile ma un po' più complicata. In Sezione 6.2.4 proveremo che esiste una soluzione in $\mathbb{R}$ del problema (2.5) e anzi che questa soluzione è unica e positiva. Chiamiamo questa soluzione $e(x)$. Si verifica ora che per $e(x)$ valgono tutte le proprietà che caratterizzano l'esponenziale

$$e(x+z) = e(x) \cdot e(z) \quad \text{per ogni} \quad x, z. \tag{2.6}$$

Per questo, per ogni fissato z poniamo $f_z(x) := e(x+z)/e(x)$ e osserviamo che $f_z(0) = e(z)$ e $f_z' = (e'(x+z)e(x) - e'(x)e(x+z))/e^2(x) = 0$, da cui $f_z(x) = e(z)$. Per n, m interi si deduce ancora dalla (2.6):

$$e(x^{n/m}) = e^{n/m}(x) \quad \text{e} \quad e(n/m) = e^{n/m}(1),$$

concludendo, almeno per gli x razionali

$$e(x) = (e(1))^x.$$

Estendendo la funzione $e(x)$ dai razionali a tutti i numeri (a quali? Si potrà fare? E come? Siamo nel pieno della continuità dei reali e delle funzioni) ed usando la formula di Taylor non è difficile concludere che posto

$$e(1) =: e \quad \text{si ha} \quad e(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Ulteriori proprietà ben note dell'esponenziale si possono ora dedurre 'facilmente', modulo le varie osservazioni fatte; ad esempio si deduce che la funzione e^x è strettamente crescente, in particolare per ogni y è possibile trovare unica x tale che $y = e^x$, la funzione che a y associa x tale che $y = e^x$ si chiama funzione *logaritmo* che indichiamo con $\log y$. Essendo $e^x > 0 \forall x$, il logaritmo è definito per ogni $y > 0$ e si ha:

$$\log e^x = x \quad \forall x, \qquad e^{\log y} = y \quad \forall y > 0.$$

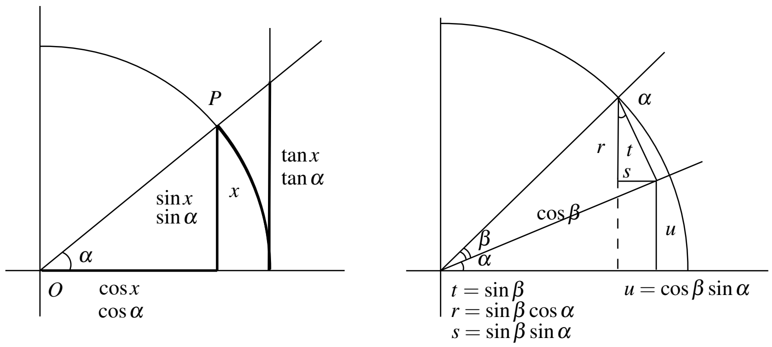


FIGURA 2. Definizione geometrica delle funzioni trigonometriche e dimostrazione della formula del seno della somma di due angoli.

Inoltre, derivando, $e^x(d\log)(e^x) = 1$, e scrivendo y al posto di e^x,

$$d\log y = \frac{1}{y},$$

ritornando così alle origini storiche.

Osserviamo che le funzioni λe^{ax}, a costante, sono tutte e sole le soluzioni di $y' = ay$, cfr. anche Sezione 5.1.

Ricordiamo che Nicolas Chuquet (1445-1488) e Michael Stiffel (1487-1567), rispettivamente in *Le triparty en la science des nombres* (1484) e in *Arithmetica integra* (1544), sono accreditati di essere stati i primi ad aver considerato trasformazioni di progessioni geometriche, 1, r, r^2, r^3, ... nella progressione aritmetica, 0, 1, 2, 3, ..., mentre per primo John Napier 1550-1617), in *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1664), introdusse i logaritmi e illustrò il loro uso per facilitare i calcoli astronomici. Henry Briggs considerò e costruì tavole dei logaritmi in base 10 – il logaritmo di un numero è l'esponente da dare a 10 per ottenere il numero stesso –; infine, agli inizi del 1600 anche Joost Bürgi (1522-1632), indipendentemente, inventò e sviluppò i logaritmi; si veda [64] pp.298-301. Nel 1647 nella sua *Opus geometricum* Gregoire de Saint-Vincent osserva che, se le aree sotto l'iperbole negli intervalli $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{i-1}, x_i]$, sono uguali, allora $1/x_0$, $1/x_1$, $1/x_2$, $1/x_3$, ..., $1/x_i$ sono in progressione geometrica; sulla base di questa osservazione il suo allievo Alfons A. de Sarasa (1618-1667) osserva allora che le aree sotto l'iperbole possono essere interpretate come logaritmi, Niccoló Mercator e Newton, come abbiamo visto, ottennero quindi lo sviluppo in serie di $\log(1+x)$, cfr. [64] p. 413.

Il modo più semplice per introdurre la funzione esponenziale è forse definire prima la sua funzione inversa, il *logaritmo* come soluzione della più semplice equazione differenziale, $y'(x) = \frac{1}{x}$, vale a dire partendo dal processo di integrazione, cfr. 7.8 Capitolo 7.

2.3. *Le funzioni circolari*

Le funzioni *circolari* o *trigonometriche* coseno, $\cos x$, e seno, $\sin x$, sono definite geometricamente come le coordinate del punto P estremo dell'arco di lunghezza x a partire dal punto $(1,0)$ sulla circonferenza, prolungate per gli $x<0$ e per gli $x>2\pi$ periodicamente. Per gli x per cui $\cos x \neq 0$, cioè per $x \neq k\pi$, $k = \dots, -2, -1, 0, \pi, 2\pi, \dots$ si definisce poi la funzione *tangente* come $\tan x = \sin x/\cos x$, si veda Figura 2. Trovare relazioni fra queste funzioni, le ben note *formule trigonometriche*, diventa un problema di triangoli rettangoli o di calcoli algebrici, si veda sempre la Figura 2 per la dimostrazione delle formule di somma

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\\
\tan(x+y) &= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.
\end{aligned}$$

Eulero [30] nota che per iterazione da

$$\begin{aligned}
\sin(n+1)x &= \sin x \cos nx + \cos x \sin nx\\
\cos(n+1)x &= \cos x \cos nx - \sin x \sin nx.
\end{aligned}$$

si può dedurre (la cosa era stata già osservata da Abraham de Moivre (1667-1754) intorno al 1730) che

$$\begin{aligned}
\cos nx =& \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \sin^2 x \cos^{n-2} x\\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \sin^4 x \cos^{n-4} x - \dots\\
\sin nx =& n \sin x \cos^{n-1} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \sin^3 x \cos^{n-3} x\\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \sin^5 x \cos^{n-5} x - \dots
\end{aligned}$$

Come per l'esponenziale, Eulero scrive x/N al posto di x e sceglie $n = N$; per N grande sostituisce $1 - k/N$ con 1, e poiché

$$\sin x \approx 0 \quad \text{per} \quad x \to 0,$$

sostituisce $\sin(x/N)$ con 0 e

$$\cos^N(x/N) = \left(1 - \sin^2(x/N)\right)^{N/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{N}$$

con 1, ottenendo

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

che non sono altro che le serie di Taylor delle funzioni $\cos x$ e $\sin x$. In particolare,

$$d\sin x = \cos x dx, \quad d\cos x = -\sin x dx, \quad d\tan x = 1 + \tan^2 x$$

È possibile definire le funzioni circolari o trigonometriche come soluzioni di equazioni differenziali e più precisamente tramite il processo di integrazione o calcolo delle areee, cfr. 7.9 e 7.10 Capitolo 7

2.3.1. *Moto armonico semplice*

Le funzioni trigonometriche sono fortemente legate ai fenomeni periodici. Una tipica situazione è quella di una massa, che spostata da una posizione di equilibrio, subisce una forza che tende a restaurare la situazione iniziale. Possiamo pensare ad una forza elastica, ma lo stesso modello appare in sistemi di varia natura, biologici, economici, elettronici e, ovviamente, meccanici. Nel caso più semplice consideriamo un moto lineare (cioè in cui l'effetto di più forze si somma) in cui *la forza di ripristino è proporzionale allo spostamento*: si tratta della *legge di Hooke* e il moto risultante si chiama *moto armonico semplice*. Un modello specifico è quello di una massa m tenuta da una coppia di molle in equilibrio; se scegliamo l'origine come posizione di equilibrio, la legge di Hooke ci dice che la *forza elastica* di ripristino, se la massa si trova in y, è proporzionale a $|y|$ e più precisamente, essendo una forza di richiamo, è $-ky$, $k > 0$. In accordo con la *legge di Newton*, cfr. Sezione 4.1, il moto è descritto dall'equazione $my''(t) = -ky(t)$ che è più comodo scrivere come

$$y'' + \omega^2 y = 0, \qquad \text{dove} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2.7}$$

Questa è l'*equazione dell'oscillatore armonico*.

Si verifica immediatamente che le funzioni $\cos \omega t$, $\sin \omega t$, $t \in \mathbb{R}$, e più in generale tutte le funzioni

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \tag{2.8}$$

sono soluzioni dell'equazione dell'oscillatore armonico qualunque siano le costanti c_1 e c_2. Osserviamo che, posto $A := \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, il punto $(c_1/A, c_2/A)$ sta sul cerchio unitario, quindi esiste $t_0 \in [0, 2\pi[$ tale che

$$c_1 = A\cos\omega t_0,\ c_2 = A\sin\omega t_0, \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2},$$

quindi

$$y(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t = A\cos(\omega(t - t_0)). \tag{2.9}$$

In effetti *le funzioni in* (2.8) *sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione dell'oscillatore armonico*. Inoltre, le costant c_1, c_2 in (2.8), equivalentemente le costanti A e t_0 in (2.9), che individuano una particolare soluzione nella famiglia delle soluzioni, sono determinate dalla posizione e dalla velocità del sistema in un dato tempo. Quindi la posizione e la velocità della massa in un dato tempo fissano l'evoluzione del sistema per tutti i tempi nel futuro come nel passato.

Infatti, sia $y(t)$ una soluzione dell'equazione (2.7). Possiamo trovare una soluzione $z(t)$ di (2.7) del tipo (2.8) tale che

$$z(0) = y(0), \qquad z'(0) = y'(0),$$

scegliendo

$$z(t) = y(0)\cos\omega t + \frac{y'(0)}{\omega}\sin\omega t.$$

Se ora proviamo che $y(t) = z(t)\ \forall t$, abbiamo finito cioè $y(t)$ è del tipo (2.8). Poiché l'equazione (2.7) è *lineare* in y, cioè, se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono soluzioni di (2.7), allora ogni loro combinazione lineare $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$, c_1 e c_2 numeri qualunque, è ancora soluzione della stessa equazione, ritornando a $y(t)$ e $z(t)$, la loro differenza $w(t) := z(t) - y(t)$ è soluzione dell'equazione ed, infatti, del problema

$$\begin{cases} w''(t) + \omega^2 w(t) = 0, \\ w(0) = 0, \quad w'(0) = 0. \end{cases}$$

Moltiplicando l'equazione per w' si vede che l'*energia*

$$\frac{1}{2}((w')^2(t) + \omega^2 w^2(t)),$$

è costante in t, perché

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((y')^2(t) + \omega^2 y^2(t)) &= 2y'(t)y''(t) + 2\omega^2 y(t)y'(t) \\ &= 2y'(t)\Big(y''(t) + \omega^2 y(t)\Big) = 0. \end{aligned}$$

Se ora utilizziamo le condizioni iniziali abbiamo

$$(w')^2(t) + \omega^2 w^2(t) = (w')^2(0) + \omega^2 w^2(0) = 0 + 0 = 0 \qquad \forall t,$$

cioè, $y(t) - z(t) = w(t) = 0\ \forall t$.

In conclusione abbiamo provato

2.6. PROPOSIZIONE. *Le uniche soluzioni dell'equazione dell'oscillatore armonico*

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

sono le funzioni

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, dati comunque $a, b \in \mathbb{R}$, esiste un'unica funzione derivabile due volte $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che risolve il problema

$$\begin{cases} y''(t) + \omega^2 y(t) = 0 & \forall t \in I \\ y(0) = a, y'(0) = b. \end{cases}$$

Più precisamente, $y(t) = a \cos \omega t + (b/\omega) \sin \omega t$, $t \in \mathbb{R}$.

2.7. OSSERVAZIONE. In questo modo $\cos t$ e $\sin t$ sono caratterizzate dall'essere le uniche soluzioni rispettivamente dei *problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y''(t) + y(t) = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Potremmo quindi definire $\cos t$ e $\sin t$ in questo modo, modulo provare esistenza (e unicità, che abbiamo in effetti già provata) per il problema in (2.10).

Infine si noti che le oscillazione armoniche hanno periodo indipendente dall'ampiezza e pari a $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

2.3.2. *Moto circolare uniforme*

Probabilmente il più semplice e più noto moto periodico – modello di regolarità fin dal tempo degli antichi greci: eternamente uguale a se stesso – è il *moto armonico* o *moto circolare uniforme*, cioè, il moto di un punto materiale *vincolato* a muoversi su un cerchio con velocità di *modulo* costante. Rappresentiamo il cerchio come $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ e la posizione del punto al tempo t come il vettore $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$; allora il moto sul cerchio è descritto da una funzione $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con

$$|\mathbf{x}(t)| = 1, \qquad |\mathbf{x}'(t)| = c \in \mathbb{R},$$

dove $\mathbf{x}' := (x'(t), y'(t))$ è la velocità.

2.8. PROPOSIZIONE. *Sia $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ un moto sul cerchio $|\mathbf{x}| = R$. Allora la velocità $\mathbf{x}'(t)$ è tangente al cerchio e ortogonale al vettore posizione $\mathbf{x}(t)$. Inoltre, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) *$|\mathbf{x}'(t)|$ è costante lungo il moto, $|\mathbf{x}'| = c \in \mathbb{R}$, cioè il moto è un moto circolare uniforme,*
(2) *in ogni istante l'accelerazione $\mathbf{x}''$ è ortogonale alla velocità $\mathbf{x}'(t)$,*

(3) $\mathbf{x}$ *è una* mappa armonica *sul cerchio, cioè,*

$$-\mathbf{x}'' = \frac{|\mathbf{x}'|^2}{R^2}\mathbf{x}.$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che il *prodotto scalare* tra due vettori $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ si definisce come $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) := x_1x_2 + y_1y_2$ e che $(\mathbf{u}|\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2 = x_1^2 + y_1^2$ non è altro che la lunghezza, chiamata anche *norma* al quadrato di $\mathbf{u}$, $(\mathbf{u}|\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2 = x_1^2 + y_1^2$. Si verifica facilmente che

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = |u|\,|v|\cos\theta,$$

dove θ è l'angolo tra i due vettori. Segue che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ *sono perpendicolari se e solo se* $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = 0$. Assumendo le componenti di $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ differentiabili, si ha

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t)|\mathbf{v}(t)) = (x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t))' = (\mathbf{u}'|\mathbf{v}) + (\mathbf{u}|\mathbf{v}').$$

Differentiando l'identità $|\mathbf{x}(t)|^2 = R^2$, troviamo

$$2(\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}'(t)) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0,$$

quindi $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}$ sono perpendicolari.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Se $\mathbf{x}'$ ha modulo costante lungo il moto, differenziando (stiamo assumendo che $\mathbf{x}$ sia differenziabile due volte) $|\mathbf{x}'(t)|^2 = x'^2(t) + y'^2(t) = c^2$ troviamo

$$(\mathbf{x}''(t)|\mathbf{x}'(t)) = 2x'(t)x''(t) + 2y'(t)y''(t) = 0,$$

cioè l'accelerazione $\mathbf{x}''$ è perpendicolare alla velocità.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Poiché $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ sono perpendicolari deduciamo che $\mathbf{x}''$ e $\mathbf{x}$ sono paralleli (siamo nel piano), quindi

$$\mathbf{x}''(t) = \lambda(t)\mathbf{x}(t).$$

Per calcolare il *multiplicatore* $\lambda(t)$ moltiplichiamo l'equazione per $\mathbf{x}(t)$ trovando

$$R^2\lambda(t) = \lambda(t)(\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(t)) = (\lambda(t)\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(t)) = (\mathbf{x}''(t)|\mathbf{x}(t));$$

differenziando due volte l'identità $|\mathbf{x}(t)|^2 = R^2$, troviamo anche $(\mathbf{x}''(t)|\mathbf{x}(t)) + |\mathbf{x}'(t)|^2 = 0$, che, confrontata con l'uguaglianza precedente, dà $\lambda(t) = -\frac{|\mathbf{x}'(t)|^2}{R^2}$; in conclusione

$$\mathbf{x}''(t) + \frac{|\mathbf{x}'(t)|^2}{R^2}\mathbf{x}(t) = 0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Moltiplicando per $\mathbf{x}'$ l'equazione $\mathbf{x}'' + \frac{|\mathbf{x}'|^2}{R^2}\mathbf{x} = 0$, troviamo $(\mathbf{x}'|\mathbf{x}'') = -\frac{|\mathbf{x}'|^2}{R^2}(\mathbf{x}'|\mathbf{x})$, cioè,

$$\frac{1}{2}\,\frac{d|\mathbf{x}'|^2}{dt}(t) = -\frac{1}{2}\,\frac{|\mathbf{x}'|^2(t)}{R^2}\,\frac{d|\mathbf{x}|^2}{dt}(t) = 0.$$

Conseguentemente, $|\mathbf{x}'|$ è costante. $\square$

La Proposizione 2.8 ci dice che il moto circolare uniforme $\mathbf{x}$ sul cerchio con velocità di modulo costante v soddisfa l'equazione

$$\mathbf{x}'' + \frac{v^2}{R^2}\mathbf{x} = 0,$$

cioè, le componenti $x(t), y(t)$ di $\mathbf{x}(t)$ sono soluzioni dell'equazione dell'oscillatore armonico $x'' + \omega^2 x = 0$, dove $\omega = \frac{v}{R}$ è la *velocitá angolare* del moto.

Abbiamo quindi anche una caratterizzazione cinematica delle funzioni *seno* e *coseno*.

2.4. *Nuove curve ed equazioni differenziali*

Come abbiamo detto, gli anni iniziali dopo l'introduzione del calcolo si caratterizzano per lo studio di vari problemi, e quindi di varie curve, di difficile trattazione geometrica, via equazioni differenziali. Qui illustriamo tre esempi significativi e rilevanti storicamente.

2.9. *Isocrona di Leibniz*. Nel numero di settembre del 1687 delle *Nouvelles de la République des lettres*, Leibniz pone il seguente problema: trovare una curva $y(x)$ lungo la quale un corpo cade con velocità verticale costante, cioè per noi, $dy/dt = -b$, essendo sottointesa verso l'alto la direzione dell'asse delle y. Al problema fu data una risposta da Huygens, senza dimostrazione e spiegazione, e dallo stesso Leibniz nel 1689, ma in modo insoddisfacente, in quanto veniva congetturata la curva e poi verificato che in effetti aveva le proprietà richieste. In una formulazione più generale il problema fu risolto da Jakob Bernoulli nel 1690. In termini moderni la sua soluzione suona così: in accordo con le leggi di Galilei (estrapolate dal finito all'infinitamente piccolo, cfr. [51]) la velocità del corpo, che a quota zero è in quiete, a quota $-y$, è $v = \sqrt{-2gy}$, e, se $x = x(y)$ è la traiettoria e $s(t) = (x(y(t)), y(t))$ la legge del moto, si ha

$$-2gy = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1\right]\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1\right]b^2.$$

In particolare $y \leq -\frac{b^2}{2g}$ e si ha l'equazione a variabili separabili

$$dx = -\sqrt{-1 - \frac{2gy}{b^2}}\,dy$$

che si integra producendo una parabola di Neile.

$$x = \frac{b^2}{3g}\Big(-1 - \frac{2gy}{b^2}\Big)^{3/2}, \quad y \leq -\frac{b^2}{2g}.$$

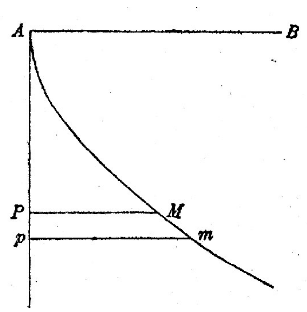


FIGURA 3. Illustrazione di Eulero per l'isocrona di Leibniz.

Riportiamo anche la soluzione di Eulero ([28] II, Proposizione 28, 1736), dove gli assi x e y sono scambiati e l'asse x (quello che indichiamo correntemente con y) è rivolto verso il basso. Eulero osserva che se $b^{1/2}$ è la velocità all'inizio della discesa il tempo in cui l'elemento Mm (cfr. Figura 3) è attraversato è $ds/\sqrt{b+2gx}$: si dovrà quindi avere $dx/\sqrt{b} = ds/\sqrt{b+2gx}$, cioè $\sqrt{b}dy = \sqrt{2gx}dx$, da cui ricava, per integrazione, $\beta y^2 = x^3$, dove $\beta = 9b/(8g)$.

Una trattazione più generale delle curve di tipo Leibniz (velocità verticale non costante) venne proposta da Jakob Benoulli negli *Acta Eruditorum* del 1694. Usando coordinate polari, Jakob Bernoulli riconduce il suo studio alla studio delle curve elastiche, si veda Sezione 2.5.2.

2.10. *La trattrice*. Racconta Leibniz che, durante il suo soggiorno a Parigi, Claude Perrault (1613-1688) — famoso per le sue opere in meccanica, anatomia e architettura, per la sua edizione di Vitruvio, per aver progettato il colonnato del Louvre, fratello del favolista Charles Perrault (1628-1703), uno dei protagonisti della *querelle des Aciens et des Modernes* in difesa dei moderni — propose il seguente problema: determinare la curva caratterizzata dalla proprietà che la sua tangente in ogni suo punto P interseca una retta data a distanza data a, vedi

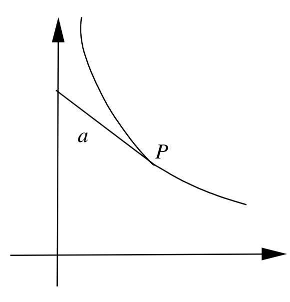
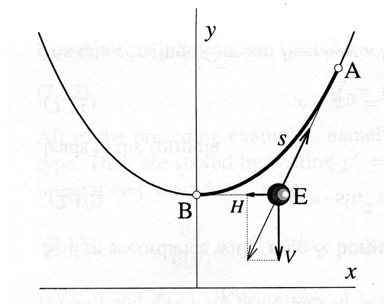


FIGURA 4. La trattrice.



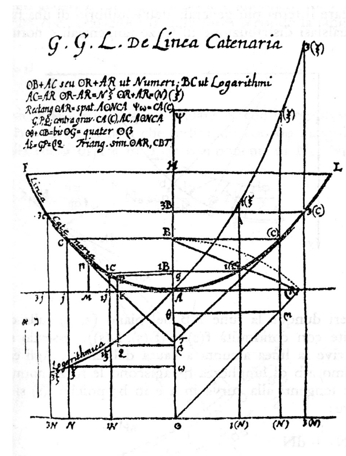


FIGURA 5. Catenaria: equilibrio delle forze e illustrazione da Leibniz.

Figura 4. Per illustrare la questione estrasse il suo orologio da tasca lo depose sul tavolo e cominciò a tirarlo con la catena lungo il bordo del tavolo.

Leibniz pubblica la sua soluzione del problema di Perrault nel 1693 ([76]), affermando che la conosceva già da tanto:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \quad \text{cioè} \quad -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\, dy = dx.$$

Per quadratura la curva si scrive in termini della curva logaritmica. Infatti, usando la sostituzione $\sqrt{a^2 - y^2} = v$, cioè $-ydy = vdv$, si calcola

$$x = \int_y^a \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi}\, d\xi = -\sqrt{a^2 - y^2} - a \log \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}.$$

Osserviamo che Leibniz cercò di utilizzare la trattrice come macchina per l'integrazione meccanica di integrali simili e, inoltre, che la superficie di rotazione della trattrice è la *pseudo-sfera di Beltrami* (1836-1900) che è localmente isometrica al *semi-piano di Poincaré* (1854-1912) e fu il primo modello della *geometria iperbolica* o di Lobachevski (1792-1856).

2.11. *La catenaria*. Quale è la forma che prende una catena appesa a due suoi estremi? Il problema ha origine nei *Discorsi* di Galilei, si veda ad esempio [43], il quale sembrava esser convinto che la forma fosse circa parabolica. Huygens, giovanissimo, mostra però che non può essere parabolica, lasciando aperta la questione. Intorno al 1690 il problema della catenaria diventa una sorta di problema test per il nuovo calcolo; ad esso tornarono ad interessarsi Jakob e Johann Bernoulli, Huygens e Leibniz. Nel 1691 Leibniz [74] e Johann Bernoulli [5] ne diedero la soluzione come applicazione del nuovo calcolo: Leibniz suggerisce una formula, un coseno iperbolico,

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{2}(b^{x/a} + b^{-x/a})$$

con $a = e$, mentre Johann Bernoulli fornisce due costruzioni della catenaria e ne enumera varie proprietà.

Un'osservazione dovuta al gesuita Ignace Garston Pardies (1636-1673), pubblicata nel 1673 in [97] e probabilmente nota negli ambienti di leibniziani stabiliva che il punto E di intersezione tra due tangenti per due punti qualunque A e B della catenaria giace sulla verticale passante per il centro di gravità della parte di fune sottostante la corda AB. Con riferimento alla Figura 5, poiché la massa in E è proporzionale ad s, il parallelogramma delle forze in E mostra che la pendenza in A è proporzionale alla lunghezza d'arco, cioè

$$c\dot{y} = s.$$

Il problema si riconduce quindi a quello di 'integrare' quest'ultima equazione differenziale. La cosa non è banale, trattandosi di una curva trascendente. Non seguiremo qui né Leibniz né Bernoulli: nello spirito di metodi successivi, ad esempio quelli di Riccati, sostituiamo la derivata $\dot{y}$ con una nuova funzione p, e trasformiamo l'equazione precedente, in termini differenziali, in un'equazione differenziale per p e x

$$c\,dp = ds = \sqrt{1+p^2}dx.$$

Integrando otteniamo

$$c\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int dx$$

cioè in termini di funzioni iperboliche, cfr. 7.11 Capitolo 7:

$$\operatorname{arcsinh} p = \frac{x-x_0}{c} \quad \text{o} \quad p = \sinh\frac{x-x_0}{c} \quad \text{e} \quad y = k + c\,\cosh\frac{x-x_0}{c},$$

in accordo con Leibniz.

2.5. *Curve piane*

Facendo un salto nel futuro, conviene qui fissare alcuni fatti che abbiamo già usato e altri nuovi relativi alle *curve piane*, si veda ad esempio [46] [48] [49]. Abbiamo visto varie immagini matematiche di una curva:

- Come *luogo gemetrico*, cioè identificate da una relazione

  $$F(x,y) = 0$$

  tra le coordinate dei punti della curva; la cosa risulta particolarmente utile quando si specifica la forma di F; ad esempio, quando F è un polinomio si parla di *curve algebriche* e si cerca di classificarle in base al grado del

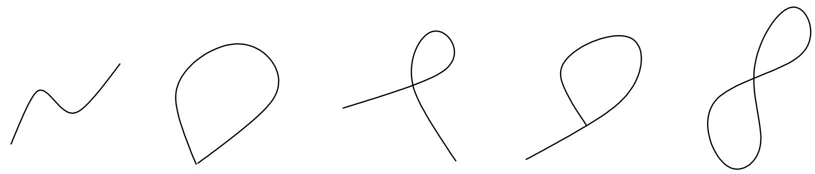


FIGURA 6. Alcune traiettorie: da sinistra, (a) curva semplice, (b) curva semplice chiusa, (c), (d), (f) curve non semplici.

polinomio: si scopre che polinomi di primo grado corrispondono a rette, di secondo grado alle coniche (incluse quelle degeneri, come ad esempio $x^2+y^2=0$ o $x^2-y^2=0$ o $(x-y)(x-y-1)=0$), quelle di grado 3 furono classificate da Newton, poi le cose si complicano leggermente e noi ci fermiamo.
- Come *deformazione continue* di un segmento, o di un segmento in cui identifichiamo gli estremi — osserviamo che senza l'ipotesi di continuità potremmo sparpagliare i sottoinsiemi del segmento e addirittura i punti un po' ovunque.
- Come insieme delle posizioni di un punto che si muove sul piano di un moto generico: in questo modo ci sono due informazioni che concorrono la *traiettoria* che il punto percorre e il *modo* in cui questa traiettoria è percorsa.

Si dimostra che, se F ha gradiente non nullo nei punti in cui $F=0$ allora *localmente* esso è il grafico di una funzione, più precisamente in un intorno di ogni (x_0,y_0) in cui $F(x_0,y_0)=0$ e, ad esempio, $F_y(x_0,y_0)\neq 0$, possiamo esplicitare y come funzione di x, cioè scrivere $y=\phi(x)$ e $F(x,\phi(x))=0$ — si tratta di una versione molto semplificata del *teorema delle funzioni implicite* a volte chiamato anche *teorema del Dini*. Chiaramente il grafico di una funzione $f:D_f\to\mathbb{R}$ si può vedere come la deformazione del dominio D_f; si può anche vedere come la traiettoria di un punto che si muove con legge oraria

$$\gamma(t)=\begin{cases} x=t, & t\in D_f\\ y=\gamma(t). \end{cases} \tag{2.11}$$

Risulta allora conveniente pensare ad una *curva* come ad una applicazione *continua* γ da un intervallo I di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ o, più in generale in $\mathbb{R}^n$; l'immagine si chiamerà la *traccia* o la *traiettoria* e si parlerà di γ come della *parametrizzazione* di $\Gamma:=\gamma(I)$: in questa situazione si parlerà quindi di *curva parametrizzata* o di *legge oraria del moto*.

Vale la pena fare alcune osservazioni. Curve diverse possono avere la stessa traccia, ad esempio le curve $\gamma_1(t):=(t,0)$, $\gamma_2(t):=(t^3,0)$ e $\gamma_3(t):=(t(t^2-1),0)$, $t\in\mathbb{R}$ sono parametrizzazioni diverse dell'asse delle ascisse in $\mathbb{R}^2$ che danno moti diversi lungo l'asse delle x. In modo simile, le curve $\sigma_1(t) = (t^3, t^2)$ e $\sigma_2(t) = (t, (t^2)^{1/3})$, $t \in \mathbb{R}$, sono parametrizzazioni diverse del grafico di $\sqrt[3]{x}^2$. Si noti che σ_1 è una parametrizzazione che possiede infinite derivate, mentre σ_2 è solo continua, non ha derivata in tutti i punti: il fatto che la parametrizzazione abbia derivata in tutti i punti non implica che la traccia abbia tangente in tutti i punti. Questo non succede se la curva γ è *regolare* intendendo con questo che $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ per ogni t, sempre come conseguenza del teorema delle funzioni implicite.

Infine osserviamo che molte proprietà delle curve, in particolare quelle geometriche, sono indipendenti dalla parametrizzazione. Per questo si introduce la seguente definizione: siano I, J due intervalli e siano $\gamma \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ e $\delta \in C^0(J, \mathbb{R}^n)$ due curve,

- Siano δ e γ continue; diciamo che δ e γ sono C^0-*equivalent* se c'è una mappa uno-a-uno continua $h : J \to I$ tale che
$$\delta(s) = \gamma(h(s)) \qquad \forall\, s \in J.$$
- Siano δ e γ di classe C^1, cioè abbiano derivate continue; diciamo che δ e γ sono C^1-*equivalent* se esiste una mappa uno-a-uno $h : J \to I$ di classe C^1 con $h'(t) \neq 0\ \forall t \in J$ tale che $\gamma(s) = \gamma(h(s))\ \forall s \in J$.

Si dimostra allora:

- Due curve semplici con la stessa traccia sono C^0-equivalenti.
- Due curve di classe C^1 regolari sono C^1-equivalenti se e solo se sono C^0-equivalenti.

ed ancora

- Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una curva semplice regolare di classe C^1, sia $\Gamma := \gamma(I)$ la sua traccia, sia $x \in \Gamma$ e $t \in I$ tale che $\gamma(t) = x$; il *vettore tangente unitario* a γ in $x := \gamma(t)$ è definito come la velocità normalizzata in t
$$\tau_\gamma(x) := \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}, \qquad \gamma(t) = x.$$
e tutti e soli i vettori tangenti in x sono dati dai multipli di $\tau_\gamma(x)$.

2.5.1. *Lunghezza e ascissa curvilinea*

Si chiama partizione σ di un intervallo $[a, b]$ la scelta di un numero finito di punti $t_0, \ldots, t_N$ con $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$. Denotiamo con $\mathscr{S}$ la famiglia delle partizioni di $[a, b]$. Per ogni partizione $\sigma = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\} \in \mathscr{S}$ possiamo calcolare la lunghezza della linea poligonale, $P(\sigma)$ che congiunge i punti $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_N)$ nell'ordine elencato,
$$P(\sigma) := \sum_{i=1}^{N} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.$$

Sia $\gamma \in C^0([a,b];\mathbb{R}^n)$. Si chiama *lunghezza di* γ, si confronti con la lunghezza definita da Fermat, cfr. [51],

$$L(\gamma) := \sup\Big\{ P(\sigma) \,\Big|\, \sigma \in \mathscr{S} \Big\}$$

e si dice che γ è *rettificabile* o che γ ha *variazione totale finita* se $L(\gamma) < +\infty$.

In altre parole la lunghezza di una curva è l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte. Si vede facilmente che, se γ e δ sono equivalenti, allora $L(\gamma) = L(\delta)$. In particolare, γ e δ sono o entrambe rettificabili o no e la lunghezza di una curva semplice dipende solo dalla sua traccia.

Le curve continue non sono necessariamente rettificabili. Ad esempio, la curva grafico di f, $\gamma(x) = (x, f(x))$ dove

$$f(x) := \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{if } x \in]0,1], \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

ha lunghezza infinita. Infatti, se

$$x_n := \frac{1}{n\pi + \pi/2}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

la lunghezza di $\gamma_{|[x_{n-1},x_n]}$ è più grande di $x_n|\sin 1/x_n| = x_n$, quindi per ogni n

$$L(\gamma) \ge L(\gamma_{|[x_n,1]}) \ge \sum_{k=1}^{n-1} x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\pi + \pi/2},$$

cioè, $L(\gamma) = \infty$. Si noti che γ è continua ma $\dot\gamma$ non è limitata nell'intorno di 0.

2.12. TEOREMA. *Sia $\gamma \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$. Allora γ è rettificabile e*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(s)|\, ds.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma \in \mathscr{S}$ una partizione di $[a,b]$ e $P(\sigma)$ la lunghezza della linea poligonale corrispondente ad σ. Allora

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(s)\, ds,$$

quindi

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \le \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(s)|\, ds.$$

Sommando su i, concludiamo

$$P(\sigma) = \sum_{i=1}^{N} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \le \int_a^b |\gamma'(s)|\, dx$$

per σ arbitraria, cioè, $L(\gamma) = \sup_\sigma P(\sigma) \le \int_a^b |\gamma'(s)|\, ds < \infty$. Questo mostra che γ è rettificabile.

Resta da dimostrare che

$$\int_a^b |\gamma'(s)|\, dx \le L(\gamma) \tag{2.12}$$

o, equivalentemente, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una partizione σ_ε tale che

$$\int_a^b |\gamma'(s)|\, ds \le P(\sigma_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Osserviamo che per per ogni $s \in [t_{i-1}, t_i]$ abbiamo

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)\, dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t) - \gamma'(s))\, dt + \gamma'(s)(t_i - t_{i-1}),$$

di conseguenza

$$|\gamma'(s)| \le \frac{1}{t_i - t_{i-1}} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| + \varepsilon \tag{2.13}$$

purché si scelga la partizione $\sigma_\varepsilon := (t_0, t_1, \dots, t_N)$ in modo che

$$|\gamma'(t) - \gamma'(s)| \le \varepsilon \qquad \text{if } s,t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Ora, questa scelta è possibile poiché $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è uniformemente continua in $[a,b]$ per via del teorema di Heine–Cantor. Si conclude quindi integrando in s su $[t_{i-1}, t_i]$ e sommando su i. $\square$

Osserviamo che le *curve lipscitziane*, cioè le curve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ per le quali esiste $L > 0$ tale che

$$|\gamma(t) - \gamma(s)| \le L|t - s| \qquad \forall\, t,s \in [a,b],$$

sono rettificabili. Infatti, per ogni partizione γ, con $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ abbiamo

$$P(\sigma) = \sum_{i=1}^N |\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)| \le L(b-a).$$

Ma, molto più complesso è il problema di trovare una formula esplicita per la lunghezza di una curva lipschitziana e, più in generale (infatti non tutte le curve rettificabili risultano essere lipschitziane), di una curva rettificabile. Per questo bisognerà aspettare gli inizi del ventesimo secolo.

Concludiamo, con la formula per l'area di un grafico. Sia $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$. Il grafico di f, $G_f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $G_f(t) = (t, f(t))$, è regolare e $G'_f(t) = (1, f'(t))$. Quindi la lunghezza di G_f è

$$L(G_f) = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2}\, dx.$$

Ascissa curvilinea ed equivalenza

Sia $\gamma \in C^1([a,b]; \mathbb{R}^n)$ una curva C^1, regolare, $\gamma'(t) \ne 0\ \forall\, t \in [a,b]$. La funzione $s_\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ che dà la lunghezza del tratto di cammino $\gamma : [a,t] \to \mathbb{R}^n$,

$$s_\gamma(t) := L(\gamma; [a,t]) = \int_a^t |\gamma'(t)|\, dt,$$

si chiama *ascissa curvilinea* o *elemento d'arco* di γ. Si verifica che

(1) $s_\gamma(t)$ è una funzione definita in $[a,b]$ a valori in $[0,L]$ essendo L la lunghezza di γ, e che s_γ è non decrescente e derivabile in ogni punto con

$$s'(t) = |\gamma'(t)|,$$

(2) se γ è regolare, $\gamma'(t) \neq 0\ \forall\, t \in [a,b]$, allora $s_\gamma(t)$ è strettamente crescente; l'inversa $t_\gamma(s)$, $t_\gamma : [0, L(\gamma)] \to [a,b]$ è dunque strettamente crescente, t_γ è di classe C^1 e

$$t'_\gamma(s) = \frac{1}{|\gamma'(t_\gamma(s))|} \qquad \forall\, s \in [0, L(\gamma)]. \tag{2.14}$$

Consideriamo una curva regolare $\gamma \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ di lunghezza $L > 0$ con ascissa curvilinea $s_\gamma : [a,b] \to [0,L]$. Detta $t_\gamma : [0,L] \to [a,b]$ l'inversa di s_γ si chiama *riparametrizzazione di γ mediante l'ascissa curvilinea* la curva $\delta_\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^n$ data da

$$\delta_\gamma(s) := \gamma(t_\gamma(s)) \qquad s \in [0,L].$$

Si può vedere che δ_γ è l'unica curva equivalente a γ, con lo stesso verso di γ, e con $|\delta'_\gamma(s)| = 1$ per ogni $s \in [0,L]$. Più precisamente se $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ sono due curve C^1 equivalenti e con lo stesso verso e di lunghezza L, $\psi(s) = \varphi(h(s))\ \forall s \in [c,d]$, allora

$$s_\psi(s) = s_\varphi(h(s)),\ s \in [c,d], \quad \text{e} \quad \gamma_\psi(x) = \gamma_\varphi(x) \qquad \forall x \in [0,L].$$

Quindi in una classe di equivalenza di curve regolari con lo stesso verso esiste un unico rappresentante che è dato dalla legge di percorrenza uniforme del cammino individuato dalla curva: questa legge è data dalla parametrizzazione mediante l'ascissa curvilinea.

2.5.2. *Curvatura*

Elemento caratteristico[2] di una curva piana è il suo *raggio di curvatura* e il suo inverso, la *curvatura*, che misura in ogni punto quanto una curva curvi. La curvatura, in quanto essenzialmente misura della variazione della tangente, coinvolge differenziali del secondo ordine e, come sappiamo, le espressioni che coinvolgono differenziali di ordine superiore dipendono dalla suddivisioni delle variabili. Per questa ragione fin da quando Johann Bernoulli arrivò a Parigi nel 1691 con una formula per il raggio di curvatura si aprì un'ampia discussione che coinvolse Leibniz, Jakob Bernoulli e de l'Hôpital. Non entreremo nei dettagli, limitandoci ad illustrare le formule di Johann Bernoulli e di Leibniz e rimandando a [11] (pp. 35-53) per maggiori informazioni.

[2] Si dimostra ad esempio che, a meno di moti rigidi del piano, una curva è completamente determinata dalla sua curvatura, corrispondente all'idea 'intuitiva' che, fissato un punto di partenza e una direzione iniziale di moto, se conosciamo quanto in ogni istante curveremo allora conosciamo l'intero percorso.

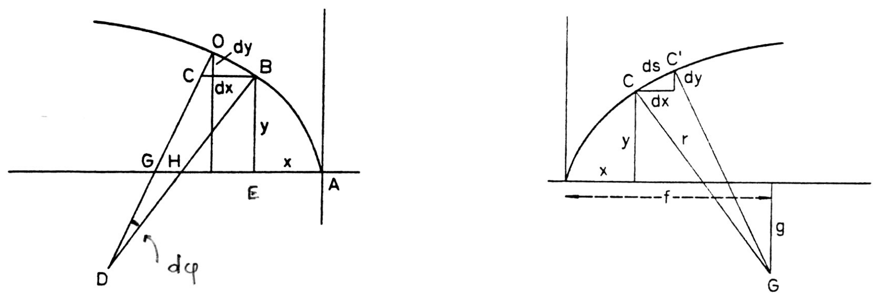


FIGURA 7. Il raggio di curvatura secondo Johann Bernoulli e secondo Leibniz

2.13. *Raggio di curvatura e curvatura*. Con riferimento alla Figura 7 a sinistra, Johann Bernoulli considera due semirette normali OD e BD uscenti da due punti infinitamente vicini O e B di una curva piana. Queste si incontrano nel *centro di curvatura D*. Si ha ora

$$AH = x + y\,\frac{dy}{dx}.$$

Se scegliamo dx costante, cioè $ddx = 0$,

$$HG = d(AH) = d(x + y\,\frac{dy}{dx}) = dx + \frac{dy^2 + yddy}{dx},$$

infine, posto $BD = r$, poiché (si noti $BC = dx + \frac{dydy}{dx}$)

$$BC = \frac{dx^2 + dy^2}{dx}, \quad HD = r - BH = r - \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \quad \text{e} \quad BC : HG = BD : HD,$$

si ricava la *formula aurea per il raggio di curvatura*

$$r = \pm\frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx\,ddy} = \pm\frac{ds^3}{dx\,ddy},$$

che possiamo anche scrivere, ma Bernoulli non fa, come

$$r = \pm(\frac{ds}{dx})^3 \;/\; (\frac{d^2y}{dx^2}) = \frac{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\ddot{y}},$$

avendo indicato con $\dot{y}$ la derivata dy/dx.

In corrispondenza di questa formula per il raggio di curvatura abbiamo la seguente formula per la *curvatura* stessa

$$k = \frac{\ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

avendo scelto come variabile indipendente la x.

Questo è quello che Jakob Bernoulli chiamerà il suo *teorema aureo* e che deriverà usando essenzialmente coordinate polari: si ha infatti, sempre con riferimento alla Figura 7,

$$\frac{1}{r} = \frac{d\phi}{ds} \quad \text{e} \quad \tan\phi = \frac{dy}{dx},$$

per cui

$$(1 + \tan\phi)\frac{d\phi}{ds}\,\frac{ds}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

quindi

$$(1 + \dot{y}^2)\frac{1}{r}\,\sqrt{1 + \dot{y}^2} = \ddot{y},$$

che è appunto la formula già trovata.

Jakob Bernoulli diede varie altre formule per il raggio di curvatura e studiò il problema delle trasformazioni di una formula nell'altra. Non discuteremo questo aspetto. Accenniamo solo brevemente alle formule di Leibniz che sono indipendenti dalle suddivisioni delle variabili e conseguentemente più complesse.

Con riferimento alla Figura 7 a destra, poiché CG è ortogonale alla curva ACC' abbiamo

$$r : (f - x) = ds : dy \quad \text{o} \quad r\,\frac{dy}{ds} = f - x.$$

Differenziando quest'ultima equazione, tenendo fissi r e f, si trova quindi

$$rd\frac{dy}{ds} = -dx \quad \text{o} \quad r = -dx/d(\frac{dy}{ds}).$$

In modo simile si ha anche

$$r = dy/d(\frac{dx}{ds}).$$

Poiché i rapporti di differenziali primi sono indipendenti dalle suddivisioni, abbiamo trovato due formule per il raggio di curvatura che sono indipendenti dalla decomposizione delle variabili.

2.14. *La linea elastica*. Con il breve lavoro *Solutio problematis curvaturae laminae elasticae a pondere appenso curvatae* di Johann Bernoulli, cfr. [103] pp. 621-622, comincia lo studio di problemi di *elasticità*, in cui sono rilevanti le relazioni tra tensione ed elongazione, anche se Johann sembra oscillare tra un modello unidimensionale e il modello tridimensionale della *trave*. Malgrado questo Bernoulli enuncia le sue assunzioni in modo esplicito e preciso.

L'asse di una trave elastica inizialmente occupa un segmento orizzontale AB. La trave è incastrata in A ed è caricata con un peso verticale P in B di modo che si possa curvare come in Figura 8. Per ipotesi (a) il peso del materiale è trascurabile rispetto alla forza P, (b) la sezione normale resta costante lungo l'asse della trave, (c) il materiale è egualmente resistente in ogni suo punto, (d)

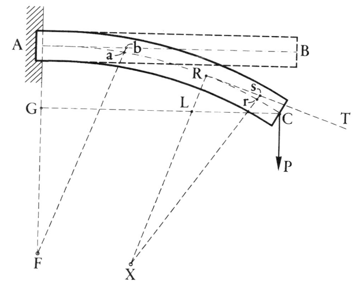


FIGURA 8. Trave incastrata.

l'estensione è proporzionale alle forze applicate. Bernoulli divide quindi l'arco AC in archi infinitesimi Aa, Rr ... uguali; naturalmente questi sono deformati in modo differente perché gli effetti della forza P decrescono quando ci si sposta verso A. Come misura della deformazione di ciascun elemento considera quindi la sua curvatura, rappresentata dagli angoli AFa, RXr, ... o, equivalentemente, dagli spostamenti normali ab, rs, ... Questi spostamenti debbono essere proporzionali alle distanze CG, CL dei punti G, L dalla linea di azione della forza P, quindi

$$CL : CG = rs : ab$$

e, essendo $Aa = Rr$,

$$CL : CG = \frac{rs}{Rr} : \frac{ab}{Aa}.$$

D'altra parte, dalla similitudine dei triangoli rRS, RXr e aAb, AFa, abbiamo

$$\frac{rs}{Rr} = \frac{Rr}{RX} \quad \text{e} \quad \frac{ab}{Aa} = \frac{Aa}{FA}$$

per cui ricaviamo

$$CL : CG = FA : RX \quad \text{o} \quad CL \cdot RX = CG \cdot FA = \text{costante} = a^2.$$

Usando coordinate cartesiane e la *formula aurea* per il raggio di curvatura

$$RX = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx\, d^2y},$$

concludiamo quindi con

$$-x\, \frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx\, d^2y} = a^2$$

che è equivalente all'equazione

$$xdx = -\frac{a^2\, dx^2\, d^2y}{(dx^2 + dy^2)^{3/2}} = -\frac{a^2\, \frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + (\frac{dy}{dx})^{3/2}\right)}\, dx.$$

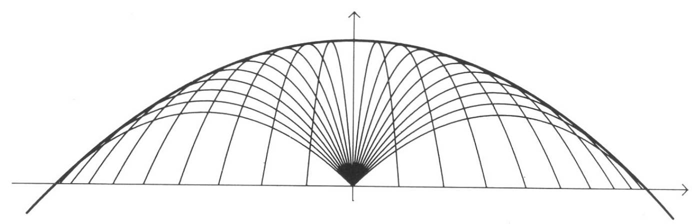


FIGURA 9. La parabola di sicurezza di Torricelli.

Questa equazione, integrata, dà

$$\frac{1}{2}\,x^2 = -\frac{a^2\,y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

che può essere esplicitata rispetto a y', ottenendo

$$y' = \pm\frac{x^2}{\sqrt{4a^4 - x^4}},$$

cioè la soluzione si esprime in termini di un *integrale ellittico*. La *teoria degli integrali ellittici* a partire da Eulero sarà un'importante area di ricerca per tutto l'Ottocento e oltre, ovviamente subendo molti cambiamenti di prospettive.

Prima di chiudere vale la pena osservare che per un'esplicita derivazione dell'equazione della trave da considerazioni di equilibrio tra tensioni e momento flettente bisognerà aspettare Eulero, si veda Sezione 3.2.4.

2.5.3. *Inviluppi, evolute ed evolventi*

Il calcolo porta anche ad una nuova visione delle nozioni di curva *evoluta* e *evolvente* o *involuta* discusse da Huygens e altri, cfr. [43], riconducendola e

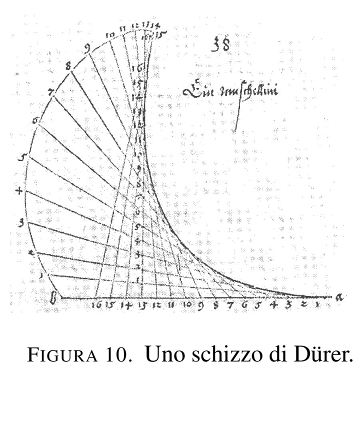


FIGURA 10. Uno schizzo di Dürer.

subordinandola a quella di *inviluppo* di una famiglia di curve. Di questo discutono alla fine del Seicento e agli inizi del Settecento Leibniz, i Bernoulli, de l'Hôpital, Newton e Hermann, tra gli altri. Osserviamo che la nozione di inviluppo di una famiglia di rette appare già in Dürer e in Torricelli come inviluppo delle traiettorie dei proiettili sparati da un cannone a diversi alzi, la parabola di sicurezza di Torricelli, cfr. [51].

Cominciamo con due esempi. Sul piano cartesiano si considerino le rette passanti per i punti $(a,0)$ e $(0,a_0-a)$ al variare di a. Queste creano una nuova curva, chiamata l'*inviluppo*, tangente in ogni punto ad una di queste rette, come illustrato dallo schizzo di Albrecht Dürer riportato in Figura 10.

Consideriamo dei raggi di luce provenienti dall'infinito, quindi verticali e paralleli, che si riflettono su di un semicerchio. Riflettendosi, questi ultimi producono un'interessante curva inviluppo, chiamata *caustica*. Come applicazione del calcolo le caustiche, sia di riflessione che di rifrazione, furono studiate sistematicamente fin dagli anni 90 del Seicento.

2.15. *Inviluppo di una famiglia di curve piane*. Sia data una famiglia di curve piane descritte implicitamente dall'equazione

$$F(x,y,a)=0$$

di modo che ad ogni valore a si associ una curva Γ_a che, avendo scelto le coordinate oppurtunamente, possa esser vista almeno localmente come grafico di una funzione $y=f(x)$. Consideriamo le curve Γ_a e Γ_{a+h}. I punti comuni risolvono ovviamente le equazioni

$$F(x,y,a)=0, \qquad F(x,y,a+h)=0$$

e, al variare di h, variano sulla curva Γ_a. I punti di Γ_a a cui tendono per $h\to 0$ si chiamano *punti caratterisitici* di Γ_a e sono caratterizzati dalle equazioni

$$F(x,y,a)=0 \qquad \frac{\partial}{\partial a}F(x,y,a)=0 \tag{2.15}$$

Sotto opportune ipotesi, su cui non ci soffermeremo, il luogo dei punti caratterisitici al variare di a è costituito da una curva I che in ogni suo punto è tangente a una curva Γ_a della famiglia ed è chiamata l'*inviluppo* della famiglia $F(x,y,a)=0$.

Diamo una giustificazione dell'ultima affermazione. Mettendoci nella situazione in cui le (2.15) possano essere esplicitate come

$$x=\phi(a) \quad y=\psi(a),$$

differenziando $F(\phi(a),\psi(a),a)=0$ otteniamo

$$F_a+F_x\,\phi'+F_y\,\psi'=0 \quad \text{cioè} \quad F_x\,\phi'+F_y\,\psi'=0,$$

che appunto dice che le rette tangenti a I e a Γ_{a_0} in P_0 coincidono.

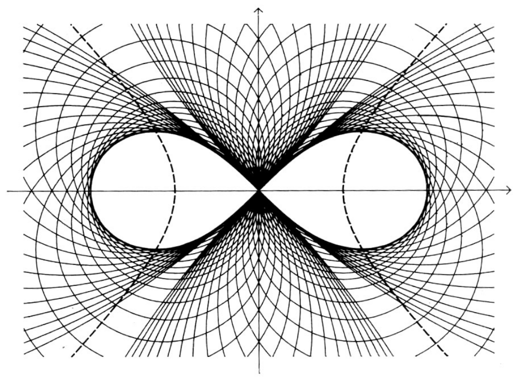


FIGURA 11. L'inviluppo dei cerchi che hanno centri sull'iperbole $y^2 - x^2 = 1$ e passano per l'origine è la lemniscata di Bernoulli.

2.16. *Evoluta e evolvente*. Data una curva γ con curvatura $k \neq 0$, il luogo dei suoi centri di curvatura (centri dei cerchi osculatori) si chiama *evoluta* di γ. Se γ è descritta in termine del parametro lunghezza d'arco s, l'equazione dell'evoluta è data allora da (stiamo qui usando le notazioni standard t per versore tangente e n per versore normale)

$$\varepsilon(s) = \gamma(s) + \frac{n(s)}{k(s)}.$$

Derivando si ha

$$\varepsilon' = \gamma' + \frac{n'\,k - n\,k'}{k^2} = \frac{k^2 t - k^2 t - nk'}{k^2} = -n\,\frac{k'}{k^2}$$

che ci dice che la normale alla curva γ è tangente all'evoluta. Il punto di tangenza è precisamente il centro di curvatura. Si può vedere, infatti, che l'evoluta è l'inviluppo delle rette normali alla curva, come del resto risulta chiaro dalla definizione di curvatura. Questa è infatti l'idea di Newton: identificare il luogo dei centri di curvatura con l'inviluppo delle normali alla curva.

Se denotiamo con σ la lunghezza dell'arco di evoluta, misurata da un punto arbitrario, cioè

$$\sigma(s) = \int_{s_0}^{s} |\varepsilon'(\tau)|\,d\tau,$$

abbiamo

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = |\varepsilon'|^2 = \left(\frac{k'}{k^2}\right)^2 = (\rho')^2,$$

dove $\rho = 1/k$. Ne deduciamo $\sigma' = \rho'$ e integrando

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \rho_1 - \rho_0,$$

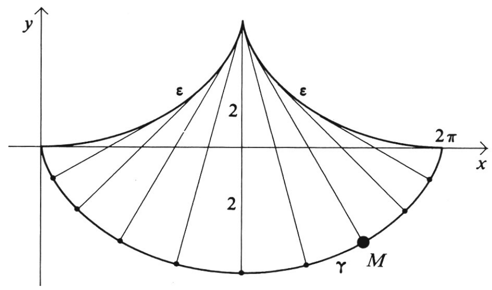


FIGURA 12. L'evoluta di una cicloide è una cicloide.

vale a dire, la lunghezza di un arco di evoluta fra due punti è uguale alla differenza fra i due corrispondenti raggi di curvatura. La curva γ si chiama anche l'*involuta* o l'*evolvente* della sua evoluta. Abbiamo così ritrovato le nozioni di evoluta e involuta di Huygens (cfr. [43] [51]).

CAPITOLO 3

Il calcolo delle variazioni

Uno dei paradigmi più eleganti e più diffusi della filosofia, della scienza e, in particolare, della matematica è quello dei *principi di minimo*. Esso è saldamente collegato al quotidiano principio dell'economia dei mezzi e alla ricerca di strategie ottimali per raggiungere uno scopo. Non è quindi sorprendente che fin dall'antichità i principi di minimo siano stati individuati per la loro bellezza — i teoremi di Zenodoro sulla proprietà isoperimetrica dei poligoni regolari e del cerchio — e usati per formulare *leggi di natura* — principio del cammino minimo di Erone, il principio di tempo minimo di Fermat — o visioni metafisiche — *la natura ama la semplicità* che ritroviamo tra gli altri in Newton o *il migliore dei mondi possibili* di Leibniz. Max Born (1882-1970), fisico, osservava che *non è la natura ad essere economica, ma la scienza*.

Alla fine del Seicento nascono nuovi metodi che permettono di trattare matematicamente problemi di minimo in cui non si cerca un *punto* in cui una certa quantità (funzione) abbia un *valore* minimo, ma una *curva* che minimizzi un'*azione* o un'*energia*: è l'inizio di quello che fu ritenuto un nuovo calcolo di tipo superiore, che diventa una teoria efficiente nella seconda metà del Settecento, si consolida nell'Ottocento, si rivitalizza nel Novecento ed è ancora viva e fruttuosa oggi, il *calcolo delle variazioni*. La letteratura sul calcolo delle variazioni è enorme. Per maggiori informazioni, sia storiche che tecniche, ci limitiamo a citare [56] [112] [45] [62] [26] e [44] [50], si veda anche [15], [106], [39] e [45].

3.1. *Il problema della brachistocrona e il problema isoperimetrico*

Nel giugno 1696, come appendice al lavoro [6], appare la sfida di Johann Bernoulli *Problema novum ad cujus solutionem invitantur* (si veda [57] p. 212) sulla *curva di minima discesa* o *brachistocrona*:

> Dati due punti A e B su un piano verticale, trovare la curva che un corpo che si muove per gravità da A deve percorrere per raggiunger B nel tempo più breve.

Egli annuncia anche che la curva a tutti ben nota sarà da lui svelata se non riceverà risposte prima della fine dell'anno. Leibniz risolve il problema — risponde il 16 giugno 1696, lo stesso giorno in cui riceve la nota di Johann Bernoulli, spedita il 9 giugno — e convince Bernoulli a posporre il termine della sfida fino alla Pasqua dell'anno successivo, così Johann Bernoulli, nel lavoro *Lectori benevolo,* ..., [57] p. 258, annuncia che, se entro Pasqua non riceverà altre risposte, pubblicherà la soluzione di Leibniz e la sua. L'intera vicenda della brachistocrona è raccontata da Johann Bernoulli in una lettera a Henri Basnage (1657-1710), Sieur de Beauval, editore a Rotterdam del periodico *Histoire des Ouvrages des Savants*, una sorta di seguito delle *Nouvelles de la République des Lettres* di Pierre Bayle (1647-1706), dal 1687 al 1709, [7], [57] pp. 283-290.

Il numero di maggio 1697 degli *Acta Eruditorum* contiene le soluzioni di Johann e di Jakob Bernoulli, una nota di Leibniz, in cui Leibniz dice di non pubblicare la sua soluzione perché simile a quella di Johann e Jakob e aggiunge che Huygens fosse stato vivo, Hudde se non avesse smesso di occuparsi di queste cose, e Newton se si fosse preso il disturbo, potevano risolvere il problema. Newton infatti aveva già risolto il problema, pubblicando la soluzione in forma anonima e senza dimostrazione sulle *Philosophical Transactions*. Il lavoro fu ripubblicato nello stesso numero degli *Acta* dove, oltre ai lavori di Johann e Jakob Bernoulli, appare anche una discussione del problema da parte di de l'Hôpital e di Tschirnhaus.

Prima di presentare la soluzione di Johann Bernoulli conviene fare qualche osservazione.

Il problema della brachistochrona non è il primo problema di minimo (equivamentemante di massimo) che compare nella letteratura matematica. Ad esempio, si veda [51]:

- Euclide, Libro VI Proposizione 27, mostra che tra tutti i parallelogrammi di fissato perimeto, il quadrato è quello di area massima.
- Archimede, nella seconda parte di *Sulla sfera e il cilindro* prova che la semisfera ha volume più grande fra tutti i segmenti di sfera che hanno superfici uguali.
- Apollonio studia i punti P di una conica di minima distanza da un punto dato A, mostrando che la linea per A e P è normale alla conica.
- Il trattato sugli *isoperimetri* di Zenodoro (200-140 a.C.) discute della proprietà isoperimetrica del cerchio e della sfera.
- Erone (100 a.C.-100 d.C.) deduce la legge di riflessione della luce da un *principio di cammino minimo*.
- Fermat (1601–1665) deduce la legge di rifrazione della luce da un *principio di tempo minimo*.

Ma c'è di più

- Galilei nei *Discorsi e dimostrazioni*, 1638 [41] argomenta, sbagliando, che la soluzione del problema della brachistochrona potrebbe essere il cerchio.

Da Fermat, Newton e Leibniz sappiamo che in un punto di massimo o di minimo di una quantità che dipende da un *numero finito di parametri* (di una funzione di più variabili) la *variazione* o il *differenziale* si annulla. Ma ora stiamo cercando un *cammino* o una curva, che ha *infiniti gradi di libertà*. Abbiamo bisogno di un nuovo calcolo? Come trovare una curva minimizzante? L'osservazione fondamentale comune a tutti (Johann e Jakob Bernoulli, Leibniz, ...), anche se si scoprirà che non sempre corrisponde al vero, è che *ogni sottoarco di una curva minimizzante è ancora minimizzante*. Conseguentemente, la proprietà di minimo deve implicare una relazione tra gli *elementi infinitesimali* della curva, cioè una *equazione differenziale* che caratterizzerà la curva minimale.

Veniamo alla soluzione di Johann Bernoulli a cui premettiamo due fatti ben noti al tempo:

- Se due mezzi sono separati da un piano, se v_1 e v_2 sono le velocità della luce nei due mezzi e se θ_1 e θ_2 sono gli angoli formati dal raggio incidente e dal raggio riflesso con la verticale, il *principio di tempo minimo di Fermat* implica:
$$\frac{\sin\theta_2}{v_2} = \frac{\sin\theta_1}{v_1}.$$
- La *legge di caduta di Galilei* ci dice che, partendo con velocità iniziale nulla, la velocità acquisita a seguito di una caduta lungo un piano inclinato di altezza x è
$$\sqrt{2gx}.$$

Ecco allora la soluzione di Johann Bernoulli:

> Considereremo un mezzo che non sia omogeneamente denso, ma composto di strati orizzontali con densità crescente o decrescente secondo una certa legge. È allora evidente che un raggio che noi consideriamo come una particella non si propagherà lungo una linea retta, ma una curva [...]. Noi sappiamo che i seni degli angoli di rifrazione nei punti di separazione sono tra loro in rapporto inverso con le densità o diretto con le velocità delle particelle, cosicché la brachistochrona ha la proprietà che i seni degli angoli di inclinazione rispetto alla verticale sono ovunque proporzionali alla velocità. Ma ora noi vediamo immediatamente che la brachistochrona è il cammino che un raggio di luce seguirebbe attraverso un mezzo la cui densità sia inversamente proporzionale alla velocità che un corpo pesante acquisisce durante la caduta [...]. Chi ci proibisce di sostituire l'una con l'altra?

Se quindi x è l'asse verticale, y l'asse orizzontale e dz l'elemento di lunghezza Bernoulli conclude:
$$\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{2gx}}{a}$$
ed essendo $dz^2 = dx^2 + dy^2$,
$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a-x}},$$
dove a è una costante diversa da quella di prima. Integrando (analiticamente o geometricamente) segue allora che la brachistochrona è un ramo di *cicloide*; per

maggiori informazioni, utili alla lettura di quanto segue si veda 7.15 Capitolo 7 e [39]. Così commenta Johann Bernoulli

> In un sol colpo ho risolto due problemi fondamentali, l'uno ottico e l'altro meccanico realizzando più di quello che ho chiesto agli altri: ho mostrato che due problemi, che provengono da due campi diversi della matematica, ciò nonostante sono della stessa natura.

Riscriviamo l'equazione della brachistocrona nelle nostre coordinate, cioè scambiando x con y in modo che sia

$$dx = dy\sqrt{\frac{y}{a-y}},$$

e cambiamo variabile ponendo

$$\tan\varphi = \sqrt{\frac{y}{a-y}},$$

di modo che $\varphi = 0$ quando $y = 0$. Calcoliamo allora successivamente

$$\frac{y}{a-y} = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi},$$
$$y = a\sin^2\varphi.$$

Differenziando l'ultima eguaglianza rispetto a φ troviamo

$$\frac{dy}{d\varphi} = 2a\sin\varphi\cos\varphi,$$

quindi

$$dy = 2a\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi,$$

da cui si calcola

$$dx = 2a\sin\varphi\cos\varphi\tan\varphi\,d\varphi,$$

cioè, tenendo conto della formula di duplicazione,

$$dx = 2a\sin^2\varphi\,d\varphi = a(1+1-2\cos^2\varphi)\,d\varphi = a(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi.$$

Questa espressione può essere integrata e si ottiene

$$x = a\,(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}) + b$$

dove la costante b è determinata dal fatto che $x = y = 0$, equivalentemente $x = \varphi = 0$ nella posizione iniziale, quindi $b = 0$ e

$$x = \frac{a}{2}\,(2\varphi - \sin 2\varphi).$$

Infine, da $y = a\sin^2\varphi = \frac{a}{2}\,(1+1-2\cos^2\varphi)$, deduciamo

$$y = \frac{a}{2}\,(1-\cos 2\varphi).$$

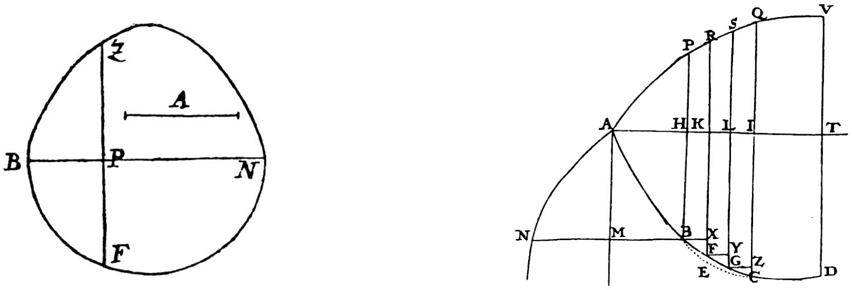


FIGURA 1. Illustrazioni per il problema isoperimetrico.

Chiaramente a è un fattore di scala: possiamo, quindi, partendo dall'origine, raggiungere un qualunque altro punto nel quarto quadrante; inoltre appare evidente la presenza di un unico valore a per cui tutto ciò accade.

Nel lavoro in cui rivolve il problema della brachistocrona Jakob Bernoulli rilancia la sfida al fratello con il *problema isoperimetrico* che chiede di trovare tra tutte le curve isoperimetriche, cioè con la stessa lunghezza (data) e di base BN, (cfr. Figura 1 a sinistra), quella BFN che, pur non includendo area massima, è tale che, scelto PZ proporzionale alla radice o a una potenza del segmento PF o alla lunghezza dell'arco FB, la correlata curva BZN abbia area massima. In termini moderni, nel caso che la curva BFN sia il grafico di una funzione $y(x)$, si chiede di massimizzare l'integrale

$$\int_B^N f(y(x))\,dx,$$

f essendo, nel caso specifico, una radice o una potenza, o l'integrale

$$\int_B^N f\Big(\int_0^x \sqrt{1+\dot{s}^2(s)}\,ds\Big)\,dx$$

fra tutte le curve tali che

$$\int_B^N \sqrt{1+\dot{y}^2(x)}\,dx = cost.$$

Questa nuova sfida va avanti fino (e oltre) la morte di Jakob nel 1705. Noi non entreremo in dettagli qui, cfr. [39]. Ci limitiamo a dire che i primi 40 anni del 1700 furono anni ricchi di contributi allo studio di problemi variazionali, ad esempio vengono studiati problemi come

- il problema della discesa in tempo minimo in un fluido resistente,
- problemi isoperimetrici con vincoli integrali o differenziali, in termini moderni, problemi in cui si chiede di trovare una curva (un grafico) che

congiunge due punti dati e che minimizza un integrale del tipo

$$\int_0^1 F(t,u(t),u'(t))dt$$

tra tutte quelle per cui è anche dato

$$\int_0^1 G(t,u)dt = k \text{ o } \int_0^1 G(t,u,u')dt = k,$$

come ad esempio l'area delimitata dal grafico, $\int_0^1 udt$, o la lunghezza del grafico, $\int_0^1 \sqrt{1+\dot{u}^2}dt$, o anche problemi che oggi si chiamano di *controllo minimo* come minimizzare un integrale ad esempio del tipo

$$\int_0^1 F(t,u(t),p(t))dt$$

dove, ancora ad esempio,

$$p(t) = \int_0^t \sqrt{1+\dot{u}^2(\tau)}d\tau \text{ o, equivalentemente } p' = \sqrt{1+\dot{u}^2(\tau)}.$$

- trovare la curva di lunghezza minima che congiunge due punti in una una superficie o studiare le *geodetiche* di una superficie.

Molti matematici furono coinvolti, tra cui, solo per citare alcuni nome: Johann e Jakob Bernoulli, Alexis Clairaut, Leonhard Euler, Jakob Hermann, Brook Taylor … Tipicamente la derivazione dell'equazione che 'caratterizza' la soluzione dipenderà dal significato geometrico o meccanico dell'integrando: uno strumento importante e, in qualche modo decisivo, sarà sempre il principio di rifrazione di Fermat. Ma, la speranza è quella di sviluppare un *calcolo* capace di produrre tale equazione differenziale senza un riferimento specifico alle geometria o alla fisica. Si viene così a delineare una caratteristica tipica di quello che sarà chiamato il *calcolo delle variazioni*: studiare problemi di minimo *rilevanti* e individuare *metodi generali* per questo studio.

3.2. *La Methodus inveniendi di Eulero*

Va ad Eulero il merito di aver perseguito e stabilito un primo *metodo generale* che permetta di risolvere problemi di minimo per le curve, alla fine, usando il calcolo elementare. In questo egli risulta favorito dalla sua visione del calcolo: i differenziali sono nulli, ma con essi si può operare come se fossero differenze finite. Oggi noi tendiamo a leggere questo (e la cosa sarebbe possibile) come (1) un procedimento di discretizzazione con un passo finito e (2) un passaggio al limite quando il passo tende a zero. Nel 1744 Eulero pubblica *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, [29], il primo trattato sul calcolo

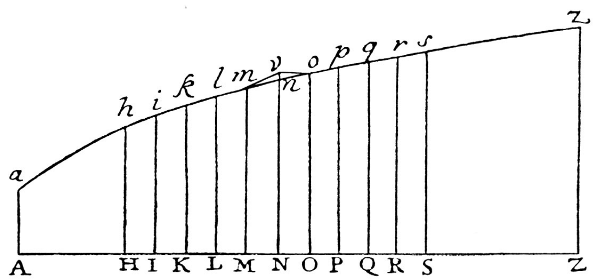


FIGURA 2. Dal *Methodus inveniendi* di Eulero.

delle variazioni. La *Methodus* discute più di 100 problemi, che Carathéodory classifica in 11 diverse categorie. Eulero tratta integrali con integrandi dipendenti da derivate di qualunque ordine, e anche, ad esempio dall'elemento di lunghezza, con vincoli sia integrali sia differenziali, prefigurando i futuri problemi di controllo ottimo. Il trattato si chiude con due *Supplementi*: nel primo vengono discusse le *linee elastiche*, minimi dell'integrale della curvatura, che si esprimono tramite *integrali ellittici* e di cui Eulero dà uno sviluppo in serie e una rappresentazione grafica; nel secondo viene presentata la prima trattazione matematica del *principio di minima azione*, discutendone la rilevanza e il suo ruolo nella meccanica.

Ovviamente non possiamo entrare in dettagli; oltre alle opere già citate il lettore può vedere in particolare [39], ci limiteremo quindi a presentare il caso più semplice e alcuni esempi trattati da Eulero.

3.2.1. *Il problema più semplice*

Consideriamo la situazione più semplice in cui l'integrale è dato da

$$\int Z(x,y,p)dx \qquad dZ = Mdx + Ndy + Pdp$$

dove p sta per la derivata di y rispetto a x. Eulero considera una suddivisione $dx = x_{i+1} - x_i$, $y_i = y(x_i)$, $p_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{dx}$ e riscrive l'integrale come somma

$$\int Z(x,y,p)dx = (\ldots + Z_{-i} + \ldots + Z_{-1} + Z_0 + Z_1 + \ldots)dx$$

Semplifichiamo la scrittura come $x_0 = x$, $x_1 = x'$, $y' = y(x')$ e sia u un punto di minimo per $\int Z(x,y,p)dx$. Variamo il suo valore in x' come in Figura 2. Questa variazione coinvolge solo i termini

$$Z(x,y,p)dx + Z(x',y',p')dx.$$

In $Z(x,y,p)dx$ varia solo p, e quindi la variazione è data da

$$\text{variazione} = Pdp'dx = Pdy',$$

mentre, in $Z(x',y',p')dx$, variano sia y sia p, e la variazione è data da

$$\text{variazione} = N'dy'dx - P'dp'dx = N'dy'dx - P'dy'.$$

La condizione di annullamento della variazione prima in un punto di minimo ci dice allora

$$P + N'dx - P' = 0 \quad \text{o} \quad N' - \frac{P'-P}{dx} = 0$$

cioè

$$N - \frac{dP}{dx} = 0.$$

che si chiama *equazione di Eulero* o *di Eulero-Lagrange*. In termini moderni possiamo riscrivere il risultato ottenuto come: *Condizione necessaria perché la curva $u(t)$ sia di minimo per*

$$\int_a^b F(t,u(t),\dot{u}(t))dt$$

tra tutte le curve con $u(a)$ e $u(b)$ assegnati è che u verifichi l'equazione di Eulero

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p} = 0$$

dove (t,y,p) indicano le variabili di F.

Il problema della brachistocrona. Per la legge di Galilei il tempo di caduta lungo la curva $y(x)$, cfr. anche 7.15 Capitolo 7, è proporzionale a

$$\int \frac{\sqrt{1+p^2}\,dx}{\sqrt{x}},$$

ed è facile calcolare

$$M = -\frac{\sqrt{1+p^2}}{2x\sqrt{x}}, \quad N = 0, \quad P = \frac{p}{\sqrt{x(1+p^2)}}.$$

L'equazione di Eulero diventa quindi $dP/dx = 0$, che si integra dando luogo a

$$\frac{p}{\sqrt{x(1+p^2)}} = \text{cost} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

che, a sua volta, dà

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a-x}},$$

che conduce, per integrazione, alla cicloide.

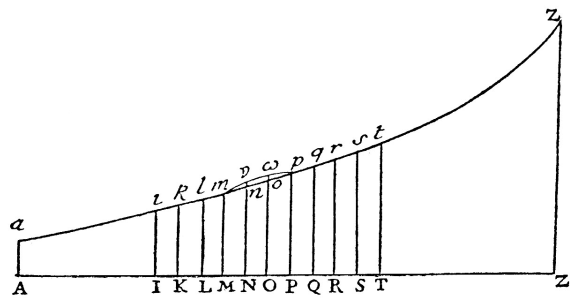


FIGURA 3. Dal *Methodus inveniendi* di Eulero.

3.2.2. *Il problema isoperimetrico.*

Nel caso del problema isoperimetrico Eulero prova che: Condizione necessaria perché la curva $u(t)$ sia di minimo per

$$\int_a^b F(t,u(t),\dot{u}(t))dt$$

tra tutte le curve con $u(a)$ e $u(b)$ assegnati soddisfacenti il vincolo

$$\int_a^b G(t,u,\dot{u})dt = k,$$

dove k è una costante assegnata, è che u verifichi l'equazione di Eulero

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p} + \lambda\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial p}\right) = 0$$

dove (t,y,p) indicano le variabili di F e di G, per qualche costante λ; sempre che la classe delle funzioni in competizione sia non vuota. Equivalentemente, possiamo dire che u è un *estremale* di o verifica l'equazione di Eulero corrispondente a

$$\int_a^b \big(F(t,u,\dot{u}) + \lambda G(t,u,\dot{u})\big)dt.$$

Aggiungiamo per il lettore più curioso l'argomento di Eulero. Seguendo Jakob Bernoulli, Eulero varia la curva in due punti consecutivi, con riferimento alla Figura 3 nei punti N e O e osserva che la variazione corrispondente dell'integrale è lineare rispetto alle variabili $n\nu$ e $o\omega$

$$n\nu \cdot I + o\omega \cdot K,$$

dove I è l'espressione che sarebbe presente se solo Nn fosse stata variata e K l'espressione che sarebbe presente se solo Oo fosse stata variata che è il valore I' di I nel punto successivo, $I' = I + dI$; infatti, come dice Eulero, $n\nu$ e $o\omega$ non

si mischiano mai nei conti. Se indichiamo con A l'integrale $\int z dx$, la variazione è quindi data da
$$dA \cdot n\nu + dA' \cdot o\omega.$$
Questa variazione deve essere nulla quando le variazioni $n\nu$ e $o\omega$ sono compatibili con il vincolo B. Concludiamo quindi che condizione necessaria per il problema di massimo (minimo) di A in presenza del vincolo B si esprime come
$$n\nu \cdot dA + o\omega \cdot dA' = 0$$
$$n\nu \cdot dB + o\omega \cdot dB' = 0$$
da cui
$$\frac{n\nu}{o\omega} = \frac{dA'}{dA} = \frac{dB'}{dB}$$
e, essendo $dA' = dA + d^2A$ e $dB' = dB + d^2B$,
$$\frac{d^2A}{dA} = \frac{d^2B}{dB}.$$
Integrando troviamo
$$\log dA - \log dB = \log C$$
con C costante, quindi
$$dA = C dB.$$

Il problema isoperimetrico classico. In particolare le estremali dei problemi isoperimetrici classici consistenti nel minimizzare il perimetro con area assegnata,
$$\int_a^b \sqrt{1+\dot{u}^2}dt \longrightarrow \min, \qquad \int_a^b u dt = \text{cost},$$
o massimizzare l'area con perimetro assegnato,
$$\int_a^b u(t)dt \longrightarrow \max, \qquad \int_a^b \sqrt{1+\dot{u}^2}dt = \text{cost},$$
sono le stesse e si verifica facilmente che le estremali sono le soluzioni di
$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\dot{u}}{\sqrt{1+\dot{u}^2}}\Big) = \lambda,$$
che si integra dando archi di cerchi.

Catenatia e catenoide. Il problema di determinare la forma della catena appesa agli estremi si riconduce ad un problema variazionale con vincolo integrale. Supponiamo che la catena sia fissata ai punti $P_1 = (a_1, b_1)$ e $P_2 = (a_2, b_2)$ nel semipiano superiore xz. Se la posizione della catena è descritta da $z = u(x)$, $a_1 \le x \le a_2$, valgono le condizioni al bordo $u(a_1) = b_1$ e $u(a_2) = b_2$, il vincolo
$$\int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+\dot{u}^2}\,dx = c,$$

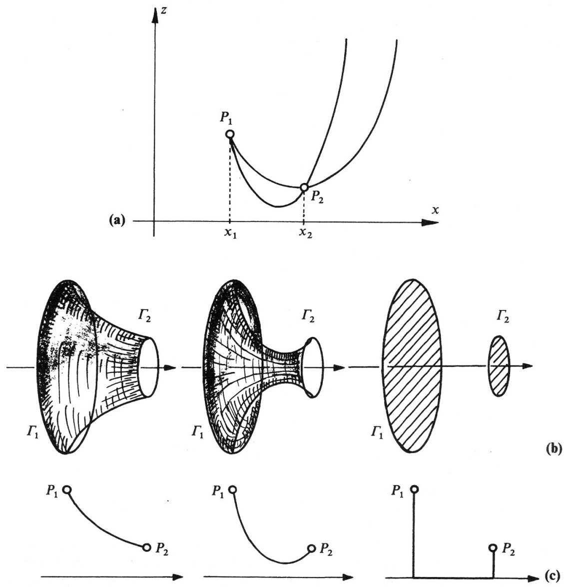


FIGURA 4. Due punti P_1 e P_2 possono essere congiunti con una, due o nessuna catenaria. In corrispondenza i due cerchi Γ_1 e Γ_2 generati da P_1 e P_2 generano una, due o nessuna catenoide.

essendo la catena inestensibile, e, assumendo che la gravità agisce nella direzione negativa dell'asse z, si avrà equilibrio quando il baricentro[1] è più basso possibile, cioè quando il quoziente

$$\int_{a_1}^{a_2} u\,\sqrt{1+\dot{u}^2}\,dx \Big/ \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+\dot{u}^2}\,dx$$

è minimo. Essendo il denominatore costante, dovrà esser minimo l'integrale

$$\int_{a_1}^{a_2} u\,\sqrt{1+\dot{u}^2}\,dx$$

[1] Ricordiamo che la legge della leva di Archimede, cfr. [51], fornisce il baricentro ξ di due masse m_1 e m_2 poste in x_1 e x_2 è dato da

$$(m_1+m_2)\xi = m_1x_1+m_2x_2$$

e che, nel caso di masse distribuite, il baricentro ξ è dato da

$$\int_a^b m(x)\,dx\,\xi = \int_a^b xm(x)\,dx.$$

le curve che competono essendo sottoposte al vincolo

$$\int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+\dot{u}^2}\, dx$$

e alle condizioni al bordo $u(a_1) = b_1$, $u(a_2) = b_2$.

Come abbiamo visto, le condizioni di equilibrio della catena sono quindi da cercare tra le estremali del problema variazionale

$$\int_{a_1}^{a_2} (u+\lambda)\, \sqrt{1+\dot{u}^2}\, dx$$

per un'appropriata costante λ. Introducendo

$$v(x) = u(x) + \lambda,$$

queste sono le estremali dell'integrale

$$\int_{a_1}^{a_2} v\, \sqrt{1+\dot{v}^2}\, dx$$

che, come si può verificare, sono *catenarie* e, come sappiamo, hanno equazioni

$$z = k + a \cosh \frac{x-x_0}{a}.$$

Osserviamo che l'ultimo integrale rappresenta l'area della superficie — chiamata *catenoide* nel caso v sia la catenaria — ottenuta facendo ruotare la catenaria $z = v(x)$ attorno all'asse x, a parte per un fattore $2\,\pi$. Possiamo quindi concludere che *le superfici di rotazione di area minima sono delle catenoidi*, caratterizzate dall'avere come meridiani delle catenarie.

3.2.3. *Il principio di minima azione*

La storia iniziale del *principio di minima azione* è piuttosto affascinante perché coinvolge aspetti filosofico-metafisici con Leibniz e Maupertuis, contrasti tra una visione della natura diciamo leibniziana e newtoniana con Samuel König, Emilie du Châtelet e Voltaire, aspetti matematici con Daniel Bernoulli e Leonhard Euler, questioni di potere accademico, con Clairaut, Maupertuis, Voltaire, d'Alembert e Federico II di Prussia, e più in generale politico sociale, che richiederebbero uno spazio che qui non abbiamo, il lettore interessato troverà una esposizione introduttoria e ulteriori riferimenti in [44]. Ci limitiamo pertanto a riportare alcuni passi di Eulero e la formulazione del principio di minima azione sempre di Eulero.

La prima appendice alla *Methodus* comincia così (la traduzione è tratta da [102]):

> Tutti i migliori matematici hanno da tempo riconosciuto che il metodo presentato in questo libro è non solo estremamente utile in analisi, ma che esso contribuisce anche alla soluzione di problemi fisici. Infatti, poiché la fabbrica dell'universo è la più perfetta, ed è opera di un Creatore di saggezza massima, non vi è nulla che avviene nell'Universo in cui non appaia

> una relazione di massimo e di minimo. Pertanto non vi è assolutamente alcun dubbio che ogni effetto nell'universo si può spiegare in modo soddisfacente a partire dalle cause finali, tramite il metodo dei massimi e minimi, come è possibile dalle stesse cause effettive [...] esempi simili sono stati portati in gran numero dai più eminenti Bernoulli e da altri, che hanno dato contributi di grande importanza sia al metodo della soluzione a priori, sia alle cause effettive [...]. Perciò, vedendo che l'uomo più illustre e perspicace in questo sublime modo di studiare la natura, Daniel Bernoulli, mi ha fatto notare che egli poteva esprimere in una singola formula [2], che egli chiama forza potenziale, l'intera forza che è insita in un strato elastico curvo, e che questa espressione deve essere un minimo nella curva elastica, e poiché grazie a questa scoperta il mio metodo dei massimi e dei minimi esposto in questo libro ha ricevuto nuovi lumi in modo meraviglioso e la sua applicazione più ampia è finalmente stabilita, non posso lasciar passare questa occasione a lungo sperata, senza evidenziare allo stesso tempo sia l'applicazione del mio metodo sia la pubblicazione dell'importante proprietà caratteristica della curva elastica scoperta dal celebre Bernoulli. Infatti questa caratteristica contiene in sé differenziali del secondo ordine, in modo così pregnante che i metodi finora pubblicati per risolvere problemi isoperimetrici non sono in grado di scioglierli.

La seconda appendice comincia così:

> Poiché tutti gli effetti della Natura seguono una legge di massimo o di minimo, non c'è nessun dubbio che, su un cammino curvo descritto da un corpo sotto l'azione di forze, una qualche quantità deve essere massima o minima. Non sembra però esser facile determinare a priori quale debba essere questa proprietà partendo da principi metafisici.

Eulero vede una possibilità nel fatto che la stessa curva può essere determinata in altro modo, ad esempio usando le leggi dell'equilibrio, e quindi un'ispezione accurata possa portare alla formula corretta da minimizzare e conclude nel modo seguente:

> Sebbene questa conclusione non sembra sufficientemente confermata, nel caso che si riesca a dimostrarla ne risulterà che ogni dubbio che poteva originarsi nel soggetto svanirà. Ancor più quando la sua verità sarà provata, sarà possibile intraprendere studi sulle profonde leggi della Natura e sulle loro cause finali, e corroborare questo con argomenti certi.

Ritornerà a riflettere su ciò anche dopo la *Methodus inveniendi*. Ad esempio, in [31] scrive quanto segue:

[2] Eulero si riferisce ad una lettera di Daniel Bernoulli del 20 ottobre 1742:

> Mi viene in mente che voi come io avevamo messo in dubbio la generalità dell'equazione ordinaria dell'elastica. Potreste riflettere alla cosa seguente: si potrebbe dedurre la curvatura *ABC* dai principi della meccanica senza far uso della leva? Io esprimerei la forza viva della lamina naturalmente rettilinea e incurvata con
>
> $$\int \frac{ds}{R^2},$$
>
> assumendo che l'elemento ds sia costante e indicando con R il raggio osculatore. Siccome nessuno ha esteso il metodo degli isoperimentri al pare di voi, voi risolverete questo problema, che richiede che $\int ds/R^2$ sia minimo.

Vediamo che ci deve essere un doppio metodo per risolvere i problemi della Meccanica: uno è il metodo diretto, fondato sulle leggi di equilibrio o del movimento, l'altro è quello di cui ho appena parlato, dove, conoscendo la formula che deve essere massima o minima, la soluzione si trova con il metodo dei massimi e minimi. La prima fornisce la soluzione determinando l'effetto dalle cause efficienti, mentre la seconda prende in considerazioni le cause finali e ne deduce l'effetto. L'una e l'altra debbono condurre alla stesa soluzione ed è questa armonia che ci convince della verità della soluzione, sebbene ciascun metodo debba essere fondato su dei principi indubitabili. Ma spesso è molto difficile scoprire la formula che rappresenta la quantità di azione che deve essere massima o minima. È una ricerca che non appartiene tanto alla Matematica quanto alla Metafisica perché si tratta di conoscere il fine che la natura si propone nelle sue operazioni; e sarebbe portare questa scienza al suo più alto grado di perfezione se si fosse nella situazione di assegnare, per ogni effetto che la natura produce, questa quantità d'azione, che è la più piccola e che si è potuta dedurre dai principi primi della nostra conoscenza. Ma credo che noi siamo ben lontani da questo grado di perfezione e che sarà quasi impossibile arrivarci, a meno che non scopriamo le formule che diventano massime o minime per un gran numero di casi differenti. Conoscendo le soluzioni che il metodo diretto fornisce, non sarà difficile indovinare queste formule che massimizzate o minimizzate portano alle stesse soluzioni. In questo modo noi conosceremo a posteriori queste formule che esprimono la quantità d'azione e allora non sarà difficile dimostrare la verità attraverso i principi conosciuti della Metafisica.

In realtà, alla fine della seconda appendice del *Methodus inveniendi*, Eulero riflette sulla generalità del principio di minima azione, osservando che il principio sembra non funzionare quando si considerano moti in mezzi resistenti, e trova difficile darne una spiegazione. Sarà Lagrange, nella sua *Méchanique analytique*, 1788, a mostrare che il principio è valido per *forze conservative* e per *vincoli indipendenti dal tempo*.

Ma veniamo al principio di minima azione come formulato da Eulero nella seconda appendice della *Methodus inveniendi*. Sia m la massa di un punto materiale, supposta costante, sia v la metà del quadrato della velocità e ds l'elemento di lunghezza del cammino che la particella percorre, di modo che $ds = (2v)^{1/2}\,dt$. Allora, tra tutte le curve con gli stessi punti iniziali e finali, la curva effettivamente percorsa minimizza l'integrale

$$\int m\sqrt{v}\,ds \quad \text{o, essendo la massa costante,} \quad \int \sqrt{v}\,ds \quad \text{o} \int v\,dt.$$

Eulero osserva quindi che, se non agiscono forze esterne, cioè se la velocità è costante, allora il principio implica, essendo $s = \int ds$, che il moto avviene lungo la linea retta congiungente il punto iniziale e quello finale, o, in altre parole, la prima legge di Newton.

Quindi passa a considerare il caso in cui la sola forza esterna che agisce sia la gravità. Con riferimento alla Figura 5, scrive $AP = x$, scegliendo in A l'origine, e $PM = y$. Afferma che per la natura della sollecitazione costante g lungo l'asse

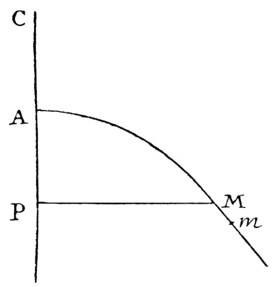


FIGURA 5. Illustrazione per il calcolo dell'azione nel caso della gravità.

verticale[3] vale $dv = gdx$ per cui $v = a + gx$. In accordo con il principio di minima azione è quindi da rendere minimo l'integrale

$$\int \sqrt{a+gx}\,ds = \int \sqrt{(a+gx)(1+p^2)}\,dx,$$

dove $dy = p\,dx$.

Ricordando quanto dimostrato da Eulero nel corpo principale del *Methodus inveniendi* e cioè che condizione necessaria perché

$$\int Z\,dx,$$

$Z = Z(x,y,p)$, sia minimo è che, scritta dZ come

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dP,$$

valga l'*equazione di Eulero*

$$N - \frac{dP}{dx} = 0,$$

poiché nel caso specifico che stiamo considerando si ha

$$N = 0 \qquad P = \frac{p\sqrt{a+gx}}{\sqrt{1+p^2}},$$

deduciamo $P = cost = C^{1/2}$, e cioè, con pochi sviluppi algebrici,

$$dy = C^{1/2}/(a-C+gx)^{1/2} \quad \text{e} \quad y = \frac{2}{g}\sqrt{C(a-C+gx)}.$$

[3] Notiamo che per Eulero il principio base non è la legge di Newton, che in questo caso direbbe $\dot{V} = g$, avendo indicato con V la velocità, ma quella che noi vediamo oggi come una conseguenza: $\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dt}\frac{dt}{dx} = g\frac{dt}{dx} = \frac{g}{V}$ da cui $\frac{dv}{dx} = g$.

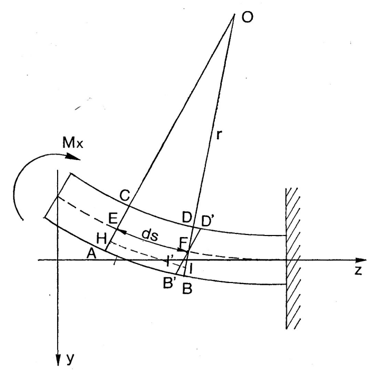


FIGURA 6. La trave incastrata.

y è quindi una parabola; più precisamente, essendo A l'origine, $y = 0$ per $x = a$, si ha $C = a$ e $y = 2(ax/g)^2$.

Eulero passa quindi a discutere il caso di forze sempre verticali ma dipendenti da x e, quindi, il caso di forze centrali, ma noi ci fermiamo qui.

3.2.4. *Linea elastica*

Concludiamo questa sezione con un breve cenno ai contributi di Eulero al problema della trave, anche se la trattazione necessita dell'equazione di Eulero-Lagrange per integrandi dipendenti da derivate di ordine superiore che noi non abbiamo trattato.

La rilettura euleriana della teoria di Johann Bernoulli può essere riassunta, seguendo la variante datane da Benvenuto, [2] pp. 2008-209, del giovanile lavoro di Eulero *De oscillationibus annulorum elasticorum* come segue.

In una trave di sezione qualunque, ma costante, soggetta a un *momento flettente* M_x, l'elemento infinitesimo $ABCD$ (si veda la Figura 6) è definito da due sezioni AC e BD infinitamente prossime che si mantengono piane e normali alla linea d'asse. La fibra longitudinale EF, che passa per i baricentri delle sezioni tra E e F, conserva la sua lunghezza iniziale ds, invece la fibra HI distante y da EF si allunga della quantità $\varepsilon(y)\ ds$. I triangoli $I'FI$ e EOF sono simili, per cui

$$\varepsilon(y)\ ds : y = ds : r \quad \text{quindi} \quad \varepsilon(y) = \frac{y}{r}$$

dove r è il raggio di curvatura. Per la legge di Hooke (assumendo il comportamento della trave elastico-lineare) la *tensione* è proporzionale allo spostamento, quindi

$$\sigma(y) = E\ \frac{y}{r}$$

dove il modulo E sarà poi chiamato *modulo di Young*.

A questo punto Eulero introduce la seguente condizione di equilibrio globale sulla sezione trasversale A : deve aversi uguaglianza tra il momento flettente M_x e il momento risultante delle σ, che è una versione di quello che spesso è chiamato *principio di Eulero*: *se un corpo è in equilibrio lo è ogni sua parte*[4]. Pertanto

$$M_x = \int_A \sigma(y)\, y\, dA = \int_A E\, \frac{y^2}{r}\, dA.$$

Assumendo il modulo E costante nella sezione, l'ultimo integrale conduce a quello che si chiama il *momento di inerzia* J_x, dando la relazione

$$M_x = \frac{E\, J_x}{r},$$

che, tralasciando le dimensioni fisiche possiamo scrivere, in accordo con Eulero nella prima appendice della *Methodus inveniendi*, come

$$\frac{1}{r} = \alpha + \beta\, x - \gamma\, y. \tag{3.1}$$

Il problema della determinazione della configurazione di equilibrio di una linea elastica, di cui si è appena discusso, ammette, come abbiamo già visto, una formulazione variazionale che si scrive come

$$\int Z\, dx = \text{stazionario} \quad \text{con} \quad \int [Z]\, dx = \text{cost}$$

dove

$$Z = \frac{q^2}{(1+p^2)^{5/2}} \quad \text{e} \quad [Z] = \sqrt{1+p^2}.$$

Per cui, con le notazioni di Eulero,

$$dZ = M\, dx + N\, dy + P\, dp + Q\, dq$$

dove

$$M = 0, \quad N = 0, \quad P = \frac{-5pq^2}{(1+p^2)^{7/2}}, \quad Q = \frac{2q}{(1+p^2)^{5/2}},$$

e la condizione di stazionarietà si scrive come

$$\alpha \frac{d}{dx}\ \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dP}{dx} - \frac{ddQ}{dx^2},$$

che, moltiplicata per dx e integrata, dà

$$\frac{\alpha\, p}{\sqrt{1+p^2}} + \beta = P - \frac{dQ}{dx}.$$

4 Osserviamo che questo è sostanzialmente il principio su cui si basa, ad esempio, la derivazione dell'equazione della catenaria o il calcolo della variazione per gli integrali variazionali da parte, tra altri, dei Bernoulli.

Eulero mostra che l'equazione precedente è equivalente alla (3.1). Per far questo la moltiplica per $q\,dx = dp$ ottenendo

$$\frac{\alpha\, p\, dp}{\sqrt{1+p^2}} + \beta\, dp = P\, dp - q\, dQ;$$

osserva poi che $P\,dp = dZ - Q\,dq$, quindi

$$\frac{\alpha\, p\, dp}{\sqrt{1+p^2}} + \beta\, dp = dZ - Q\, dq - q\, dQ,$$

che può essere di nuovo integrata, ottenendo

$$\alpha\,\sqrt{1+p^2} + \beta\, p + \gamma = Z - Q\, q = \frac{q^2}{(1+p^2)^{5/2}}.$$

A questo punto Eulero divide questa equazione per $\sqrt{1+p^2}$ e differenzia, quindi moltiplica per $(1+p^2)^{3/2}/(2q)$, ottenendo

$$\frac{\beta\, dp}{2q} - \frac{\gamma\, p\, dp}{2q} + \frac{dq}{(1+p^2)^{3/2}} - \frac{3pq\, dp}{(1+p^2)^{5/2}} = 0,$$

che, osservando che $dp = qdx$ e $dy = pdx$, può essere integrata producendo

$$\alpha + \frac{1}{2}\,\beta\, x - \frac{1}{2}\,\gamma\, y + \frac{q}{(1+p^2)^{3/2}}$$

che non è altro che la (3.1).

3.3. *Il metodo delle variazioni di Lagrange*

In varie occasioni Eulero manifestò un certo disappunto relativamente al suo metodo che riteneva troppo geometrico e auspicava un metodo libero da considerazioni geometriche.

Il 12 agosto 1755 Joseph Louis Lagrange (1736–1813), appena diciannovenne, informa Eulero di un suo nuovo calcolo per trattare i problemi di minimo; continuerà ad informarlo sugli sviluppi fino al 1762, tramite un intenso scambio di lettere interrotto soltanto dalle difficoltà a comunicare in periodi di guerra — Eulero e Lagrange restarono in contatto fino alla morte di Eulero, ma non si incontrarono mai. Il 9 e il 16 settembre 1755 Eulero presenta all'Accademia di Berlino due memorie sul calcolo di Lagrange che ora egli chiama *calcolo delle variazioni*, ma le memorie saranno pubblicate (a San Pietroburgo) solo nel 1762 perché, come dice Eulero, egli voleva rispettare la priorità di Lagrange.

Nella corrispondenza tra il 1755 e il 1762 Lagrange illustra il suo metodo, aggiunge nuovi elementi, come la derivazione dell'equazione delle superfici minime per grafici 2-dimensionali e la trattazione di problemi parametrici e insiste su un nuovo trattato che sta preparando sul δ-*calcolo* e il *principio di minima* *azione* che egli “vede come la chiave per tutti i problemi di statica e dinamica”. Eulero elogia il δ-calcolo, ma tende a ignorare ogni riferimento al principio di minima azione: per lui la chiave ai problemi di meccanica sono ormai le *leggi di equilibrio*.

Nel 1762 assistiamo ad un cambiamento nella visione di Lagrange: egli rinuncia all'idea di un trattato e pubblica due lavori nella *Miscellanea Tauriniensis*: *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules indefinies* [67] e *Application des differentes problèmes de dynamique*, [66].

Nel 1764 Lagrange pubblica *Recherches sur la libration de la Lune* [68]: egli ora vede il *principio degli spostamenti virtuali* come la vera chiave alla meccanica — in questo vicino a d'Alembert — e sembra già avere in mente la struttura della *Méchanique analytique* che pubblicherà solo nel 1788.

Nel 1771 Eulero pubblica *Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi* [36] dove presenta il metodo che oggi usiamo per derivare le *equazioni di Eulero-Lagrange*.

Successivamente Lagrange cercherà di fondare il calcolo delle variazioni sul suo calcolo (differenziale) delle funzioni. Inoltre, con l'introduzione delle cosiddette *parentesi di Lagrange* comincerà a delineare una nuova visione del calcolo delle variazioni che, con i contributi di Poisson e, soprattutto, di Hamilton e di Jacobi, porterà ad una nuova visione, detta *simplettica* (in particolare, geometrica), della meccanica, ma questo ci porterebbe troppo in là.

3.3.1. *Il δ-calcolo*

Lagrange introduce un *operatore di variazione* δ che cambia contemporaneamente i valori di una function $y(x)$ e soddisfa le seguenti condizioni

- δ *opera con le stesse regole di* d. Se
$$Z = Z(x,y,p) \quad \text{e} \quad dV = Mdx + Ndy + Pdp$$
allora
$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p.$$
- δ *e* d *commutano:* $\delta d = d\delta$. Infatti
$$d\delta y = \delta(y+dy) - \delta y = \delta y + \delta dy - \delta y = \delta dy.$$
- δ *e* $\int$ *commutano.* Infatti, poiché $V = d\int V$, abbiamo $\delta V = \delta d \int V = d\delta \int V$; integrando, $\int \delta V = \int d\delta \int V = \delta \int V$.

Con questo nuovo calcolo Lagrange tratta problemi di minimo per curve e superfici sia non parametriche (grafici) sia parametriche, con vincoli olonomi e non-olonomi, in coordinate generalizzate discutendo condizioni al bordo naturali e integrali invarianti. Noi ci limitiamo a illustrare l'uso del suo metodo nei casi più semplici.

3.3.2. *Il problema più semplice*

Consideriamo l'integrale

$$\int Z(x,y,p)dx \quad \text{con} \quad dZ = Mdx + Ndy + Pdp$$

e assumiamo che $\delta x = 0$ (Lagrange tratta il caso generale) di modo che

$$\delta Z = N\delta y + P\frac{\delta dy}{dx}.$$

Allora

$$\delta \int Zdx = \int \delta Zdx = \int N\delta ydx + \int P\delta dy = \int Ndx\delta y + \int Pd\delta y$$

e, integrando per parti l'ultimo integrale

$$\int Pd\delta y = [P\delta y]_a^b - \int dP\delta y,$$

concludiamo

$$\delta \int Zdx = [P\delta y]_a^b + \int (Ndx - dP)\delta y.$$

Cioè: Se y minimizza $\int Zdx$ tra le curve con lo stesso valore al bordo, allora

$$\delta \int Zdx = 0$$

and, essendo δy arbitrario,

$$N - \frac{dP}{dx} = 0.$$

3.3.3. *Il problema isoperimetrico*

Come prima consideriamo di minimizzare l'integrale

$$\int Z(x,y,p)dx \quad \text{con} \quad dZ = Mdx + Ndy + Pdp$$

ma questa volta solo tra le curve per cui

$$\int G(y)dx = k$$

dove k è una costante data. L'equazione

$$\int (Ndx - dP)\delta y = 0$$

vale ora per tutte e sole le varizaioni δy per cui

$$\int G_y dx\,\delta y = 0.$$

Lagrange deduce da questo che $Ndx - dP$ deve eseere un multiplo di G_y, quindi

$$N - \frac{dP}{dx} = \lambda G_y.$$

3.4. *Eulero rilegge Lagrange*

In un lavoro del 1771 Eulero [36] stabilisce la via, che ancora usiamo, per derivare le equazioni che oggi chiamiamo *equazioni di Eulero-Lagrange*:

Data $y(x)$ possiamo pensare ad una sua variazione come ad una immersione di $y(x)$ in una famiglia ad un parametro $\Phi(x,t)$, $\Phi(x,0) = y$. Al primo ordine, abbiamo $\Phi(x,t) := y(x) + t\phi(x)$ con ϕ a supporto compatto se non vogliamo che i valori al bordo di y varino. Possiamo allora considerare la funzione della variabile t

$$\Phi(t) := \int_a^b \int Z(x, y(x) + t\phi(x), y'(x) + t\phi'(x))dx.$$

Chiaramente, se $y(x)$ è un punto di minimo (o di massimo) per l'integrale

$$\int_a^b Z(x,u,u')dx$$

tra tutte le funzioni con gli stessi valori al bordo di y, $u(a) = y(a), u(b) = y(b)$, si avrà

$$\frac{d}{dt}\int Z(x, y(x) + t\phi(x), y'(x) + t\phi'(x))dx_{|t=0} = 0.$$

Derivando sotto il segno di integrale e procedendo come abbiamo visto precedentemente si arriva a

$$\int \big(Z_u - \frac{d}{dx}Z_p\big)\phi = 0 \quad \forall\phi$$

da cui segue

$$Z_u(x,y,y') - \frac{d}{dx}Z_p(x,y,y') = 0.$$

In realtà giustificare quest'ultima inferenza ha occupato per molto tempo i matematici e una dimostrazione completa richiede una riflessione sulla nozione di continuità. Il lemma che stabilisce che se per una funzione continua f si ha

$$\int f\phi dx = 0 \quad \forall\phi \quad \text{nulla fuori un intervallo limitato,}$$

allora f è identicamente nulla si chiama infatti *lemma fondamentale del calcolo delle variazioni*.

Le soluzioni dell'equazione di Eulero-Lagrange di un integrale variazionale $\mathscr{F}$ si chiamo un *punti stazionari*. Per definizioni i punti di minimo di $\mathscr{F}$ sono punti stazionari, ma i punti stazionari non sono necessariamente di minimo o di massimo.

CAPITOLO 4

Il sistema del mondo

In questo capitolo illustriamo alcuni aspetti dei *Principia Mathematica* di Newton, mentre rimandiamo al prossimo capitolo una breve presentazione di alcuni aspetti della teoria del moto di sistemi di punti materiali così come viene vista oggi dopo i contributi di Newton, Eulero e Lagrange.

I *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* di Newton sono giustamente uno dei simboli della rivoluzione scientifica del Seicento e sono un'opera rivoluzionaria nella storia della filosofia naturale per vari motivi. Essi si contrappongono al mondo cartesiano, che aveva sostituito la scolastica, e in qualche modo ne sviluppano alcuni elementi; già nel titolo si contrappongono ai *Principia Philosophiae* di Descartes, che era l'opera preminente al tempo. Essi mostrano per la prima volta realizzata un'unione fra le esigenze di predizione matematica e quelle di spiegazione causale o, piuttosto, come osserva Koyré [65], i *Principia* di Newton possono esser visti come la sintesi di due indirizzi: quello di Boyle, secondo il quale il libro della natura è scritto in caratteri e termini corpuscolari, e quello di Galilei e Decartes, secondo i quali il mondo è una sintassi puramente matematica che lega i termini insieme dando un significato al testo del libro. Confrontato con il mondo di Descartes il mondo di Newton risulta composto, non di due (estensione e movimento), ma di tre elementi: la *materia*, infinite particelle, separate, distinte, impenetrabili, immodificabili, non identiche, il *movimento*, che trasporta le particelle in un vuoto infinito e omogeneo, lo *spazio*. Nel mondo newtoniano vi è poi un quarto elemento: l'*attrazione*, che ne assicura l'unità e la coesione. Ma l'attrazione non sembra essere un elemento costitutivo di questo mondo: o si tratta di un'azione divina o di una legge matematica che stabilisce le regole sintattiche del divino libro della natura.

Fin dalla *Prefazione* Newton vede i *Principia* come un nuovo modo di fare filosofia naturale in cui è centrale la nozione di *forza*. Un secondo aspetto del nuovo metodo riguarda l'uso della matematica non solo per derivare conclusioni da ipotesi, come era per Galilei e Huygens, ma per discutere un'ampia gamma di possibili alternative, lasciando al mondo empirico la scelta fra queste. Nello *Scolio* alla fine del Libro 1, Sezione 11, così scrive Newton, cfr. [94] p. 339:

> In matematica vanno investigate quelle quantità e quei rapporti delle forze che discendono dalle qualsiasi condizioni poste; ma quando si passa alla fisica, questi rapporti si devono confrontare con i fenomeni, affinché si sappia quali condizioni delle forze convengano ai

> diversi generi di corpi attrattivi. Allora soltanto sarà lecito discutere più sicuramente intorno alle specie, alle cause e alle ragioni fisiche delle forze.

Un terzo aspetto è riassumibile nell'espressione di Newton *hypotheses non fingo*, che rivendica alla scienza una precisa autonomia da ogni causa esplicativa che risieda fuori dai fenomeni da spiegare, e contemporaneamente dota la scienza di una metodologia per cui il suo fine diventa non il *perché* dei fenomeni ma il *come*, ossia il comportamento osservabile di essi. Questo aspetto diviene esplicito nello *Scolio Generale* che Newton aggiunse nella seconda edizione alla fine del terzo libro, a seguito delle critiche sull'azione a distanza, cfr. [94] p. 795-796:

> Fin qui ho spiegato i fenomeni del cielo e del nostro mare mediante la forza di gravità, ma non ho mai fissato la causa della gravità. [...] In realtà non sono ancora riuscito a dedurre dai fenomeni la ragione di queste proprietà della gravità, e non invento ipotesi. Qualunque cosa, infatti, non deducibile dai fenomeni va chiamata *ipotesi*; e nella filosofia *sperimentale* non trovano posto le ipotesi sia metafisiche, sia fisiche, sia delle qualità occulte, sia meccaniche. In questa filosofia le proposizioni vengono dedotte dai fenomeni, e sono rese generali per induzione. In tal modo divennero note l'impenetrabilità, la mobilità e l'impulso dei corpi, le leggi del moto e la gravità. Ed è sufficiente che la gravità esista di fatto, agisca secondo le leggi da noi esposte, e spieghi tutti i movimenti dei corpi celesti e del nostro mare[1].

Una nuova scienza stava emergendo; essa superava ogni forma di pensiero scientifico precedente e assumeva su di sé il compito di determinare i limiti di validità delle conoscenze acquisite, per questo criticabile e migliorabile.

Risultò subito chiaro ai lettori, e anche allo stesso Newton, che varie questioni erano irrisolte: la teoria lunare era particolarmente imprecisa, le orbite dei pianeti erano perturbate dalla presenza degli altri pianeti, ma non c'erano stime precise delle perturbazioni, lo studio della forma della Terra e della variazione rispetto alla latitudine della gravità sulla superficie della Terra e della precessione dell'asse di rotazione della Terra restava aperto.

Tra il 1730 e il 1750 i principi fisici newtoniani vengono parzialmente riscoperti e messi in equazione. Nuovi principi, quali quelli relativi al moto dei corpi rigidi e dei fluidi, o i principi di conservazione e quelli variazionali, vengono aggiunti dai matematici di stampo leibniziano tra i quali spiccano i Bernoulli, d'Alembert e, soprattutto, Eulero, fino alla sistemazione di Eulero e Lagrange. Da questo processo emerge e si consolida quella che noi oggi chiamiamo la *meccanica newtoniana* e la *meccanica celeste*.

[1] La prima generazione dei suoi discepoli (Cotes, Keill, Pemberton) però non seguì Newton in questo rispetto (l'unico fu forse Maclaurin), cfr. [65] e vide la forza di gravità come una proprietà reale, fisica e anche primaria della materia: fu questa dottrina a diffondersi e esser ricevuta con ostilità dai contemporanei nel continente. Per Newton non c'erano giustificazioni per una distinzione ontologica tra l'attrazione e le proprietà dei corpi. Essa è un dato di fatto che dobbiamo accettare proprio come accettiamo gli altri fatti e le proprietà dei corpi.

4.1. *Le leggi di Newton*

Passiamo ora a discutere in modo più specifico alcuni aspetti dei *Principia*. Il lettore interessato a maggiori dettagli può ovviamente intraprendere il difficile studio dell'opera e/o rivolgersi alla sterminata letteratura. Noi ci limitiamo a menzionare alcuni titoli, dove il lettore troverà altri riferimenti: [19] [44].

I *Principia* si aprono con due sezioni, le *Definizioni* e le *Leggi del moto*, continuano con il Libro Primo, *Moto dei corpi* (senza resistenza) in 14 Sezioni, con il Libro Secondo, *Moto dei corpi* (con resistenza) in 9 Sezioni, con il Libro Terzo, *Sistema del Mondo*, e si chiudono con uno *Scolio Generale*.

Definizioni

Nelle *Definizioni* Newton spiega in che modo userà vari termini che ancor oggi fanno parte del linguaggio della fisica come *massa*, *inerzia*, *forza centripeta*. Per comodità del lettore riportiamo sei delle otto definizioni.

> DEFINIZIONE I. La quantità di materia è la misura della medesima ricavata dal prodotto della sua densità per il volume
> [La quantità di materia è anche chiamata *massa*. Come riteneva Mach [80], c'è un circolo vizioso: la densità è la massa divisa per il volume; il commento di Newton che segue la definizione sembra però alludere ad una visione atomistica. In ogni caso, per calcolare la massa Newton non ricorre mai a volumi e densità, ma a considerazioni dinamiche, inerziali e gravitazionali.]
> DEFINIZIONE II. La quantità di moto [a volte abbreviata in moto] è la misura del medesimo ricavata dal prodotto della velocità per la quantità di materia.
> DEFINIZIONE III. La forza insita [o, come dirà dopo, forza di inerzia che viene esercitata solo nel caso di mutamento dello stato di un corpo per effetto di una forza esterna] della materia è la sua disposizione a resistere; per ciascun corpo, per quanto sta in esso, persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.
> [Nelle fasi successive della meccanica, la continuazione del movimento rettilineo uniforme non richiederà nessuna causa; sembra che Newton resti qui legato alla visione antica, se c'è un movimento c'è una causa. Ma l'introduzione della forza insita non ha un effetto sostanziale nei *Principia*.]
> DEFINIZIONE IV. Una forza impressa è un'azione esercitata sul corpo al fine di mutare il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.
> [Con l'introduzione del concetto di forza come causa della variazione del vettore velocità Newton rompe i legami con la meccanica seicentesca, secondo cui il mutamento nel moto di un corpo poteva venire provocato soltanto da un altro corpo in moto.]
> [A questo punto Newton commenta che la forza impressa ha varie origini: l'urto, la pressione e la forza centripeta, cioè le forze si dividono a seconda della loro azione, impulsiva o continua come la gravità.]
> DEFINIZIONE V. La forza centripeta è la forza per effetto della quale i corpi sono attratti, o sono spinti, o comunque tendono verso un qualche punto come verso un centro.
> [Dopo aver illustrato questa nozione con esempi, conclude dicendo che la quantità della forza centripeta è di tre generi: assoluta, acceleratrice, motrice. Questo complica la visione, ma delle tre definizioni che seguono solo la terza sarà rilevante.]

DEFINIZIONE VIII. La quantità motrice di una forza centripeta è la misura della medesima ed è proporzionale al moto che, in un dato tempo genera.

Segue quindi uno *Scolio* sul *tempo* e lo *spazio assoluto*. Più avanti mostrerà che i moti in spazi che sono in quiete o si muovono di moto rettilineo uniforme tra loro sono indistinguibili. Mentre in sistemi accelerati si potrebbero misurare forze non vere. In termini moderni, le leggi meccaniche sono invarianti rispetto a sistemi di riferimento inerziali o, in altre parole, esperimenti meccanici non ci permettono di distinguere tra due sistemi di riferimento inerziali e, se non vogliamo incorrere in forze non vere, è necessario lavorare in un sistema inerziale: postulare uno spazio-tempo assoluto è un po' la stessa cosa che assumere l'esistenza di un sistema inerziale. Ma, forse, c'è un'altra ragione, motivata dagli interessi teologici di Newton e in generale dal clima filosofico neo-platonico di Cambridge: il Dio di Newton interviene in ogni istante e in ogni punto dello spazio come mezzo o come un agente spirituale per garantire la stabilità del sistema, da qui la necessità di attribuire assolutezza allo spazio-tempo. Osserviamo infine che, al di là delle motivazioni per introdurlo, lo spazio tempo assoluto sembra essere semplicemente un contenitore in cui le cose accadono e ha una struttura di spazio euclideo.

Assiomi o leggi del movimento

In questa sezione vengono enunciate le tre celebri leggi di Newton:

LEGGE I. *Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, eccetto che sia costretto a mutare quello stato da forze impresse.*
LEGGE II. *Il cambiamento di moto [cioè della quantità di moto] è proporzionale alla forza motrice impressa, e avviene lungo la linea retta secondo la quale la forza è stata impressa.*
LEGGE III. *Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria: ossia, le azioni di due corpi sono sempre uguali fra loro e dirette verso parti opposte.*

La tradizione, a partire dalla *Méchanique analitique*, 1778, di Joseph Louis Lagrange e soprattutto da *La meccanica nel suo sviluppo storico*[2], [80] 1883, di Ernst Mach, vede queste leggi come il fondamento completo della meccanica newtoniana. Scrive Mach in [80] p. 206:

[2] Quest'opera, considerata il punto di riferimento per qualsiasi analisi storiografica della meccanica, è sicuramente istruttiva e piena di profondi commenti; ma, come scrive Louis de Broglie (1892–1987) nella prefazione a [24]:

> In effetti, l'attitudine di Mach è stata dominata da idee generali che si riferiscono in fisica alla scuola energetista e in filosofia alla dottrina positivista: egli ha spesso cercato di trovare nella storia della meccanica un'illustrazione della sua propria concezione e ciò ha spesso conferito alla sua esposizione un aspetto un po' troppo sistematico, quello d'una tesi in cui vengono sviluppati degli argomenti in favore di idee preconcette.

> Dopo di lui [Newton] non è stato formulato alcun principio meccanico sostanzialmente nuovo. Il lavoro compiuto è stato infatti quello di uno sviluppo deduttivo, formale e matematico, condotto sul fondamento dei principi newtoniani.

e a p. 291 ritorna sulla questione:

> I principi newtoniani bastano da soli, senza l'aggiunta di alcuna nuova legge, a esplorare compiutamente qualsiasi fenomeno meccanico, statico o dinamico che possa presentarsi. Le difficoltà che si incontrano sono solo di natura matematica (formale) e in nessun caso concernono i principi.

Eppure, Newton non scrisse mai la *seconda legge* nella forma $F = ma$ e non trattò mai sistemi con molti gradi di libertà (essenzialmente trattò sistemi con un grado di libertà o con pochi gradi di libertà ma in presenza di simmetrie); inoltre, restano essenzialmente estranei ai *Principia* sistemi meccanici quali corpi rigidi, flessibili, elastici e fluidi (cioè sistemi con infiniti gradi di libertà). Nei *Principia* convivono due concezioni diverse di forza e i rapporti tra moti e forze si riferiscono a due fenomeni diversi: l'urto, visto come fenomeno discontinuo, corrispondente all'idea di corpo indeformabile, tipica dei newtoniani ma, in parte, anche di Newton stesso, e contrapposta all'idea di continuità di Leibniz (la natura non fa salti), urto regolato da $F = \Delta(mv)$, e fenomeni in cui le forze agiscono con continuità, come la gravità, regolati da

$$dv = \frac{F}{m}dt \quad \text{oppure} \quad d\frac{v^2}{2} = \frac{F}{m}dx,$$

relazioni a cui gli autori del Settecento si riferivano come agli *ordinari principi della meccanica*. Essi venivano fatti risalire, come del resto lo stesso Newton aveva affermato, a Galilei. Erano intesi come versione infinitesimale della legge di caduta, o, successivamente, del principio dell'equivalenza tra causa ed effetto: forza interna equilibrata da una forza esterna.

Inoltre, per tutto il Settecento, vari altri principi vennero usati come base per lo sviluppo della mecanica, spesso in combinazione tra loro: le leggi di moto di Decartes, le leggi di caduta di Galilei, le leggi di impatto di Huygens, la legge della forza centrifuga, la legge della leva, la legge del pendolo, la legge di conservazione della forza viva, il principio di minima azione, il principio delle velocità virtuali.

In effetti, a partire dalla metà del secolo scorso, gli studi dettagliati e profondi fatti soprattutto da Clifford Ambrose Truesdell, Thomas Hankins, Johan Cannon e Sigalia Dostrovsky, [13] [23] e Giulio Maltese (per i riferimenti alle loro opere si veda [81] e [44]) hanno fortemente ridimensionato la tesi di Mach, rivalutando il lavoro fatto nel Settecento da parte, tra gli altri, dei Bernoulli, di Clairaut, di d'Alembert e di Eulero mostrando, soprattutto, che questo lavoro si configura come un'evoluzione non solo di tipo *formale* ma di tipo *sostanziale* che si sviluppa tramite una determinazione matematico-concettuale degli elementi in gioco.

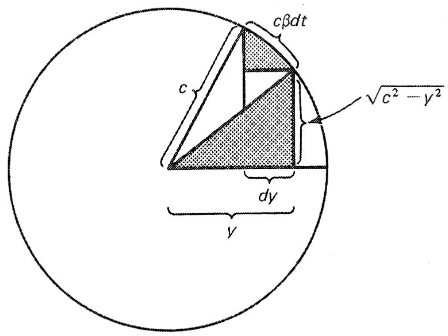


FIGURA 1. Elementi geometrici relativi all'equazione differenziale $dy = \beta\sqrt{c^2 - y^2}dt$.

Ovviamente non ci sarà possibile seguire nei dettagli il lento processo della costruzione della *meccanica newtoniana* nel Settecento. Il lettore interessato può riferirsi alle opere appena citate.

Ci limiteremo a riportare da [44] due considerazioni relative alla meccanica di Newton ed alla meccanica newtoniana di oggi. L'approccio di Newton alla meccanica era geometrico e, con disappunto di Eulero, lontano dalla *visione analitico-funzionale* che è quella dei giorni nostri. Tranne che la Sezione I del Libro I nei *Principia* non c'è nessun riferimento al nuovo calcolo, l'approccio è puramente geometrico. Visto che non avremo modo di entrare nei dettagli, conviene qui riprenderlo tramite un esempio tratto da [13]. Consideriamo l'equazione differenziale

$$dy = \beta\sqrt{c^2 - y^2}dt. \tag{4.1}$$

In forma geometrica essa può essere interpretata, e così veniva intesa, in termini degli elementi geometrici in Figura 1 ed i contemporanei di Newton potevano quindi dire che "la sua integrazione è usuale geometria", mentre, intesa in termini funzionali, la sua soluzione è

$$y = c\sin(\beta t + \gamma).$$

Questa mancanza di una visione funzionale portava anche a vedere la seconda legge di Newton più come una condizione su un particolare moto del sistema — massa per accelerazione eguaglia la forza a cui è sottoposto il punto materiale durante quel moto — che come un *principio*. Essa appariva più come una condizione di *compatibilità* del moto quasi sempre usata, trattando sistemi con un grado di libertà, per dedurre una equazione di conservazione da integrare. La concettualizzazione in termini di *principio* richiede, in qualche modo, una visione funzionale: la conoscenza della forza in un dato tempo e in una data posizione permette di determinare la traiettoria del moto:

$$m\ddot{x}(t) = F(t, x(t)). \tag{4.2}$$

Può esser utile chiedersi quali motivazioni abbiano determinato il formarsi e il persistere della tesi di Mach. Fare una lista esaustiva è arduo e forse impossibile. In merito Truesdell riteneva che la storia degli sviluppi della meccanica nel Settecento fosse stata per lungo tempo ignorata (troppo spesso si è pensato al Settecento come secolo di passaggio tra il Seicento e l'Ottocento). Si può anche pensare che, una volta acquisita la consapevolezza della generalità dell'equazione $F = ma$ e conseguentemente, la semplicità e la naturalezza nel passare da questa, ad esempio, alla $\vec{F} = m\vec{a}$, o, più precisamente alla $m\ddot{x}(t) = F(t, x(t))$, dove $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, può sembrare naturale attribuire, per lo meno implicitamente, questa consapevolezza a Newton. Va però detto che questo semplice passaggio ha richiesto più di ottanta anni e ha coinvolto l'analisi di problemi complessi ed una difficile riflessione sulla formalizzazione di vari concetti, in particolare del concetto di forza.

Probabilmente, vi è una seconda ragione, che è di tipo ideologico. Abbiamo sempre evitato affermazioni che suggeriscano o siano interpretabili come "*in nuce* i numeri reali e la continuità, se non il calcolo, si possono ritrovare nelle opere di Eudosso e Archimede". Questo tipo di opinioni sottintendono che la matematica sia un oggetto che viene svelato nel tempo, mostrando aspetti parziali che a poco a poco ci permettono di riconoscere l'oggetto preesistente. Questa posizione, per quanto affascinante e forse parzialmente sostenibile, a nostro parere presenta appunto elementi ideologici estranei al carattere della scienza ed andrebbe quindi evitata, o, per lo meno, tenuta distinta nell'analisi scientifica e storico-scientifica. Per lo studio della realtà, o meglio dei fenomeni fisici, le cose sono ancora più complesse, interferiscono almeno quattro elementi: la realtà, i fenomeni, la fisica e la matematica con cui si descrivono i fenomeni o la realtà. La riflessione filosofica nei secoli mostra come sia difficile distinguere, in linea di principio, tra realtà e fenomeni e tra fenomeni e loro descrizione o, meglio, loro concettualizzazione, ma c'è di più. Per quel che ci riguarda qui, c'è spesso la convinzione che ci sia una *fisica* e una *descrizione matematica della fisica*, si veda ad esempio [42]. In questo contesto ideologico può diventare naturale pensare che nei *Principia* c'è la fisica della *meccanica newtoniana* descritta in termini geometrici e che gli sviluppi analitico-formali sono semplicemente l'interpretazione matematica moderna della fisica del moto. In realtà l'analisi storica mostra che non sembra esserci invece nessuna meccanica (nei suoi diversi stadi di sviluppo) senza l'apparato matematico che la incarna (se non l'idea del moto come cambiamento di posto, ma anche questa è una scelta *a priori* che identifica l'oggetto di studio) ed è solo a posteriori che, eventualmente, si può costruire una fisica 'senza matematica'. In questo senso nel Settecento lo sviluppo della meccanica va di pari passo con lo sviluppo del calcolo e, anzi, meccanica e calcolo si integrano profondamente.

4.2. *Le leggi di Keplero e la gravitazione universale*

Le Sezioni 2 e 3 dei *Principia* sono dedicate allo studio dei cosiddetti *problema diretto* e *problema inverso* delle *forze centrali*, cioè delle forze dipendenti in grandezza dalla distanza da un punto S, il *centro della forza*, e dirette nella direzione di S, cosistenti, rispettivamente, nel determinare la forza quando sia data la traiettoria (piana) e il centro e nel determinare la traiettoria del moto, data la posizione e la velocità iniziale.

Il modello che Newton sta considerando è quella di un corpo P, un pianeta, accelerato da una forza con centro S, il Sole. Il corpo ha massa ma è supposto essere puntiforme. Ovviamente, Newton ha ben chiaro che il modello è irrealistico — Libro Terzo: il *Sistema del mondo* —, ma ritiene anche che possa essere applicato al sistema planetario come prima approssimazione, quando il pianeta è molto lontano dal Sole e ha massa relativamente piccola rispetto a quella del Sole, in modo da poter considerare il Sole come il centro di massa del sistema, e quando si ignori l'effetto degli altri pianeti.

Ricordiamo che agli inizi del 1600 Keplero aveva enunciato le sue tre leggi: a seguito di varie approssimazioni, molti calcoli, elaborati ragionamenti e costanti verifiche, nell'*Astronomia nova*, 1609, le prime due e nell'*Harmonices mundi*, 1619, dove tenta di spiegare le proporzioni del mondo reale in termini di proporzioni o armonie musicali (rifacendosi alle teorie pitagoriche) tramite la matematica, la terza.

PRIMA LEGGE DI KEPLERO: *L'orbita di un pianeta è un'elisse, di cui il Sole occupa uno dei fuochi.*

SECONDA LEGGE DI KEPLERO: *Il raggio vettore dal Sole al pianeta percorre aree uguali in tempi uguali.*

TERZA LEGGE DI KEPLERO: *Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è uguale al cubo della sua distanza media dal Sole, purché si prendano rispettivamente come unitá di tempo e di distanza il periodo di rivoluzione della Terra e la sua distanza media dal Sole.*

Dopo aver esposto nella Sezione I Libro I il *Metodo delle prime e ultime ragioni*, nelle prime due proposizioni della Sezione 2 Newton considera in un piano un corpo (un punto materiale) la cui posizione è indicata con P ed un punto S e dimostra che la *legge delle aree* (il raggio vettore SP spazza aree uguali in tempi uguali) vale se e solo se la forza che accelera il corpo è centrale (attrattiva o repulsiva) con centro di forza S. Questo gli permette di rappresentare il tempo

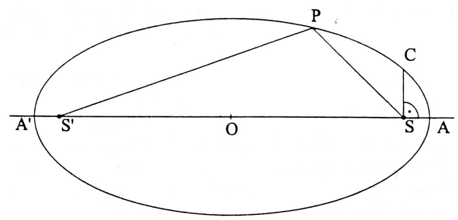


FIGURA 2. Alcuni elementi dell'ellisse.

e le quantità dinamiche in termini geometrici. Nella Sezione 3, Proposizioni 11-16, determina quindi le (leggi delle) forze nel caso che l'orbita sia una sezione conica e S uno dei fuochi, stabilendo, in particolare nel caso di orbite ellittiche, che la forza centripeta è proporzionale all'inverso della distanza al quadrato. I metodi di Newton sono geometrici e utilizzano proprietà delle coniche discusse da Apollonio.

Per enunciare precisamente la conclusione di Newton ricordiamo, cfr. ad esempio [47], che l'equazione dell'ellisse si scrive normalmente in coordinate cartesiane come

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

dove a è il semiasse maggiore e b il semiasse minore. Gli astronomi, per ovvie ragioni, preferiscono scrivere l'equazione in coordinate polari con centro un fuoco S

$$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

dove e è l'*eccentricità* di modo che $OS=ae$, si veda la Figura 2.

Poichè per ogni punto P dell'ellisse si ha

$$PS+PS'=AS+AS'=2a$$

e

$$a^2=b^2+a^2e^2 \quad \text{o} \quad b^2=a^2(1-e^2),$$

dall'equazione polare dell'ellisse, per $\varphi=0$, troviamo

$$SA=a-ae=\frac{p}{1+e} \quad \text{cioè} \quad p=a(1-e^2),$$

mentre, geometricamente, per $\varphi=\pi/2$,

$$SC=p,$$

concludendo che il parametro p è la metà della corda per il fuoco S perpendicolare al semiasse principale maggiore, il *latus rectum principale*.

Se ora indichiamo con c la *variazione dell'area* descritta dal raggio vettore dal Sole al pianeta, Newton trova che l'accelerazione radiale del pianeta che si muove su un'orbita ellittica è data da

$$a_\rho = \frac{4c^2}{p}\frac{1}{r^2}.$$

Viceversa, considerando un punto materiale in un campo di forze centrali inversamente proporzionale al quadrato delle distanze e supponendo di conoscere ad un dato istante posizione e velocità del corpo, Newton, nella famosa Proposizione 17 della terza sezione, fa vedere che esiste un'unica conica compatibile con questa posizione e velocità, deducendone che questa conica è la traiettoria del corpo.

Quindi ciascun pianeta è attratto dal Sole con una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza, data da

$$m\frac{4c^2}{p}\frac{1}{r^2}.$$

La costante c^2/p potrebbe, però, dipendere dal pianeta, perché p e c dipendono dall'orbita del pianeta: a priori non è escluso quindi che ciascun pianeta sia attratto da una forza che produce un'accelerazione del tipo k/r^2 con costante k non *universale*, ma dipendente dal pianeta stesso. Se T è il *periodo di rivoluzione* del pianeta, poiché l'area dell'ellisse è πab, deduciamo che

$$c = \frac{\pi ab}{T}$$

per cui

$$\frac{4c^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Ma, per la terza legge di Keplero, a^3/T^2 è una costante che non dipende dal pianeta, concludiamo che l'accelerazione a_ρ causata dal Sole dipende solo dalla distanza. Come l'accelerazione di gravità sulla Terra non dipende dalla massa dell'oggetto che cade, così l'accelerazione di attrazione nel sistema planetario non dipende dalla massa del pianeta: questo è un primo segnale in favore della *gravitazione universale*, cioè *la forza di attrazione tra due masse m e M concentrate nei loro baricentri è data da*

$$G\frac{mM}{r^2}$$

dove r è la distanza tra i baricentri.

Un secondo punto in favore della gravitazione universale è il fatto, dimostrato da Newton nella Sezione 13, che l'attrazione gravitazionale esercitata da una sfera uniforme di massa M su una massa concentrata in un punto P fuori dalla sfera è la stessa di quella esercitata da una massa M concentrata nel centro della sfera.

Resta il fatto che la Terra non è sferica ma appiattita sui poli, come lo stesso Newton mostra, e che, in realtà, come sempre Newton dimostra, assumendo la legge di attrazione universale, segue che la terza legge di Keplero va sostituita da

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G}\frac{1}{M+m}.$$

Malgrado questo Newton nel terzo libro sostiene che la costante G nella legge di attrazione è *universale* e delinea la sua *visione del mondo*. Si chiedeva Pierre Duhem: come una deduzione può procedere da una premessa a una conclusione, la legge di gravità, che poi implica che le premesse sono false? La risposta si trova in una semplice analisi della metodologia dei *Principia* che è poi la metodologia delle scienze naturali: i fenomeni permettono di dedurre una teoria che, quando si assume che valga esattamente, permette di identificare situazioni nelle quali pure i fenomeni accadrebbero esattamente e ancora, e in modo più preciso, l'iniziale idealizzazione serve come punto di partenza di un processo di succesive approssimazioni che dovrebbero portare ad un crescente accordo con l'accadere dei fenomeni.

L'applicazione della legge di gravità a fenomeni sempre più complessi relativi ai moti celesti (di n corpi o anche di soli tre corpi, il Sole, la Terra e la Luna) e alle anomalie osservate (come la nutazione dell'asse terrestre, la perturbazioni delle orbite causate dai pianeti vicini o dalla loro forma, il moto delle comete e, soprattutto il moto della Luna) fu un tema estremamente importante per tutto il diciottesimo secolo. Furono sviluppati *metodi perturbativi*, cercando di dimostrare che almeno al primo o al secondo ordine le anomalie sono periodiche (cosa che garantirebbe la *stabilità* del del sistema solare per tempi lunghi). Tutti i grandi (e meno grandi) matematici del Settecento (Clairaut, Eulero, d'Alembert, Lagrange, Laplace) furono coinvolti e questi sforsi furono presentati nei cinque volumi del *Traité de mécanique céleste* di Piere Simon Laplace [72]. Alla fine dell'Ottocento inizi del Novecento un nuovo e per molti versi rivoluzionario approccio alla meccanica celeste venne presentato da Henri Poincaré. Contributi importantissimi vennero dati da Kolmogorov intorno agli anni 1950 e da Arnold e da Moser intorno agli anni 1960, noti come teoria KAM. Tutto questo rientra oggi in un'area di intenso interesse nota come *sistemi dinamici*.

La gravità di Newton e di Galilei

Come abbiamo già osservato, come conseguenza della gravità universale e della legge di Newton, masse diverse m_1, m_2 attratti da una massa M, la Terra, con $m_1, m_2 << M$ cadono su M con la stessa accelerazione se lasciati cadere dalla stessa altezza e non c'è resistenza dell'aria. Infatti forza $= m_1 a$ e forza gravitazionale $= \frac{GMm_1}{r^2}$, quindi

$$m_1 a = \frac{GMm_1}{r^2}, \quad \text{cioè} \quad a = \frac{GM}{r^2}.$$

L'accelerazione di caduta di masse piccole su una massa grande M dovuta alla forza di gravità si indica con g

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

Assumendo la Terra sferica e a distanze piccole rispetto al raggio della Terra, possiamo pensare che g sia costante: in questo situazione, la gravitazione di Newton si riduce alla gravitazione di Galilei.

In realtà, la Terra non è sferica e g dipende dalla posizione e dall'altezza e queste differenze sono oggi verificabili, con strumenti raffinatissimi, anche a distanze di pochi centimetri in altezza.

Concludiamo precisando la terminologia relativa all'uso del termine *peso*. Il peso di un oggetto di massa m relativamente ad una massa M è la forza di gravità che si esercita tra le due massse o, in termini di seconda legge di Newton,

$$\text{peso} = \frac{GMm}{r^2} = mg$$

CAPITOLO 5

Equazioni differenziali e meccanica del punto materiale

Aggiungiamo in questo capitolo una presentazione, nel linguaggio di oggi e tenendo conto di contributi successivi a quelli di Newton, dei primi elementi di *meccanica newtoniana*. Nella prima sezione ricordiamo alcuni semplici fatti relativi alle *equazioni differenziali lineari* (che si possono far risalire a Eulero e Lagrange) e alle *vibrazioni lineari*, cfr. [47]; nella seconda sezione illustriamo alcuni fatti sui *moti uno-dimensionali* e, in particolare, sul *pendolo* e sui *moti centrali*, e chiudiamo con un breve cenno introduttivo alla *meccanica lagrangiana* nella terza sezione.

5.1. *Equazioni differenziali lineari*

Una equazione differenziale di ordine n nell'incognita $y(x)$, dove $x \in]a,b[$, è un'equazione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \qquad x \in]a,b[. \tag{5.1}$$

Essa si dice posta in *forma normale* se si può scrivere come

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad x \in]a,b[;$$

lineare se è della forma

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = f(x), \tag{5.2}$$

dove i coefficienti $a_n(x), \dots, a_0(x)$ e $f(x)$ sono funzioni definite in $]a,b[$, e lineare in forma *normale* se in (5.2) si ha $a_n(x) = 1$. In termini del polinomio con coefficienti variabili nell'indeterminata D, dove D è l'operatore di derivazione,

$$P_n(x,D) := \sum_{k=0}^{n} a_k(x)D^k, \qquad D^0 := \mathrm{id},$$

possiamo scrivere l'equazione (5.2) come

$$P_n(x,D)y(x) = f(x), \qquad x \in]a,b[. \tag{5.3}$$

Se $f(x) = 0$, l'equazione si dice *omogenea*, mentre se f non è identicamente nulla l'equazione (5.3) si dice *non omogenea*.

Una *soluzione* di (5.3) è una funzione $y(x)$ di classe $C^n(]a,b[)$ che soddisfa l'uguaglianza (5.3). La famiglia di tutte le soluzioni di (5.3) si chiama l'*integrale generale* o *completo* di (5.3).

La separazione dei termini dell'equazione (5.3) in due parti $f(x)$ e $P_n(x,D)y(x)$ è motivata dal seguente

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI ESTERNI. *Se y_1 e y_2 risolvono rispettivamente*

$$P_n(\cdot,D)y_1 = f_1, \qquad P_n(\cdot,D)y_2 = f_2,$$

in un intervallo I, allora per per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ la funzione $y(x) := c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x)$ risolve l'equazione

$$P_n(\cdot,D)y = c_1\,f_1 + c_2 f_2 \qquad \textit{in } I.$$

Semplici ma inportanti conseguenze sono: Se y_1 e y_2 sono soluzioni di una equazione differenziale lineare e omogenea,

$$P_n(\cdot,D)y_1 = 0, \qquad P_n(\cdot,D)y_2 = 0,$$

allora $c_1\,y_1 + c_2\,y_2$ è ancora soluzione della stessa equazione per tutte le costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. In altre parole, *l'integrale completo è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $C^n(I)$*.

Se y_1, y_2 sono soluzioni della stessa equazione lineare

$$P_n(x,D)y_1(x) = f(x), \qquad P_n(x,D)y_2(x) = f(x), \qquad x \in I,$$

allora $y_1 - y_2$ è soluzione della corrispondente equazione lineare omogenea

$$P_n(x,D)(y_1 - y_2) = 0.$$

In particolare, se $\overline{y}$ è una soluzione data di una equazione differenziale lineare, $P_n(\cdot,D)\overline{y} = f$, l'integrale completo dell'equazione non omogenea si ottiene aggiungendo $\overline{y}$ a ciascuna soluzione della corrispondente equazione omogenea, $P_n(\cdot,D)y = 0$.

Ricordiamo infine che ogni equazione in forma normale è riconducibile ad un *sistema* di equazioni differenziali del *primo ordine*. Consideriamo, ad esempio, l'equazione

$$y''' = F(x,y',y''),$$

introducendo le nuove funzioni incognite p e q possiamo scrivere equivalentemente nelle incognite (y,p,q)

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = q \\ q' = F(x,p,q). \end{cases}$$

5.1.1. *Equazioni lineari del primo ordine*

Abbiamo già sostanzialmente discusso le equazioni differenziali lineari del primo ordine in forma normale

$$y'(x) + k(x)y = f(x) \qquad x \in]\alpha,\beta[, \quad k,f \in C^0(]\alpha,\beta[) \tag{5.4}$$

Per comodità del lettore ripetiamo in questo contesto. Cominciamo col considerare l'equazione differenziale omogenea associata,

$$y'(x) + k(x)y(x) = 0, \qquad x \in]\alpha,\beta[. \tag{5.5}$$

Formalmente, dividendo per y otteniamo

$$0 = \frac{y'}{y} + k(x) = \frac{d}{dx}\log y(x) + k(x),$$

cioè, se $K(x)$ è un integrale di $k(x)$, $\log y(x) = -K(x)$. Questo suggerisce che la funzione strettamente positiva di classe $C^1(]\alpha,\beta[)$

$$y_0(x) := \exp\left(-\int_a^x k(s)\,ds\right), \tag{5.6}$$

dove a è un punto arbitrario in $]\alpha,\beta[$, è una soluzione di (5.5). In effetti $y_0(x)$ è una soluzione per cui $y_0(a) = 1$. Inoltre, *l'integrale completo di* (5.5) *è dato dalla famiglia ad un parametro*

$$y(x) = c\,y_0(x), \qquad c \in \mathbb{R}, \tag{5.7}$$

dei multipli di y_0. Infatti, tutti i multipli di y_0 risolvono ovviamente (5.16) e, come abbiamo già visto, per ogni altra soluzione $y(x)$ abbiamo

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)' = \frac{y'y_0 - y_0'y}{y_0^2} = \frac{-ayy_0 + ay_0y}{y_0^2} = 0$$

da cui $y(x)/y_0(x)$ è costante, cioè y è un multiplo di y_0.

Per trovare l'integrale completo basterà quindi trovare una soluzione particolare di (5.4). A tal fine possiamo procedere *per tentativi* ad esempio chiaramente $(e^x/2$ risolve $y' + y = e^x$. Ma c'è un metodo generale, il *metodo della variazione delle costanti di Lagrange*. Esso consiste nel far variare la costante in (5.7) e cercare una soluzione di (5.4) del tipo

$$y_f(x) = \lambda(x)y_0(x)$$

dove è da trovare $\lambda(x)$. Sostituendo $y_f(x)$ in (5.4), abbiamo

$$\lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)(y_0'(x) + k(x)y_0(x)) = f(x),$$

quindi y_f risolve (5.4) se e solo se λ risolve la semplice equazione

$$\lambda'(x) = f(x)/y_0(x).$$

In conclusione, abbiamo

5.1. TEOREMA. *L'integrale completo dell'equazione* (5.4) *è dato dalla famiglia ad un parametro delle*

$$y(x) = y_0(x)\left(c + \int_a^x \frac{f(s)}{y_0(s)}\, ds\right), \qquad c \in \mathbb{R},$$

dove a è un punto arbitrario fissato in $]\alpha, \beta[$ *e*

$$y_0(x) := \exp\left(-\int_a^x k(s)\, ds\right).$$

5.1.2. *Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti*

Già in una lettera del 1739 a Johann Bernoulli, Eulero presenta una trattazione delle equazioni lineari omogenee di ordine n a coefficienti costanti. Noi ci limitiamo ad accennare qui al caso di equazioni del secondo ordine.

Una generica equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti ha la forma

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{5.8}$$

dove a, b e c sono costanti e $a \neq 0$. L'idea è di provare a trovare soluzioni u con la proprietà che u, u' e u'' sono multipli della stessa funzione cioè soluzioni del tipo $u(x) = e^{rx}$. Sostituendo in (5.8) otteniamo

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

e, poiché e^{rx} è sempre diversa da zero, concludiamo che e^{rx} è soluzione se e solo se r è soluzione dell'equazione

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{5.9}$$

chiamata l'*equazione caratteristica* di (5.8).

Siano r_1, r_2 le radici dell'equazione caratteristica di (5.8). In corrispondenza dei tre casi di radici reali e distinte, reali doppie e complesse coniugate, definiamo $y_1(x), y_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, come

(5.10)
$$\begin{aligned}
&y_1(x) = e^{r_1 x}, && y_2(x) = e^{r_2 x} && \text{se } r_1, r_2 \in \mathbb{R},\ r_1 \neq r_2,\\
&y_1(x) = e^{r_1 x}, && y_2(x) = x e^{r_1 x} && \text{se } r_1 = r_2,\\
&y_1(x) = e^{-\alpha x}\cos(\omega x), && y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\omega x) && \text{altrimenti;}
\end{aligned}$$

l'ultimo caso corrisponde a radici r_1, r_2 complesse coniugate con $r_{1,2} = \alpha \pm \mathbf{i}\omega$, cioè

$$\alpha := -\frac{b}{2a}, \qquad \omega := \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} > 0.$$

Vale allora

5.2. TEOREMA. *L'integrale generale dell'equazione differenziale* (5.8) *è data dalla famiglia a due parametri di funzioni*

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{5.11}$$

dove y_1, y_2 *sono dati in* (5.10).

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che le radici siano distinte. Le due funzioni in (5.11) sono soluzioni. Affermiamo che *l'integrale completo di* (5.8) *è dato da* (5.11). Se infatti $y(x)$ è una qualunque soluzione di (5.8), noi possiamo scrivere $y(x)$ come $e^{r_1 x}u(x)$ e sostituendo in (5.8), troviamo

$$0 = e^{r_1 x}\Big((ar_1^2 + br_1 + c)u + (au'' + (2ar_1 + b)u')\Big).$$

Poiché $r_1 + r_2 = -b/a$ e $r_1 r_2 = c/a$, u' è soluzione della semplice equazione

$$0 = u'' + (2r_1 + \frac{b}{a})u' = u'' - (r_2 - r_1)u' = 0.$$

Deduciamo allora che necessariamente $u(x) = c_1 + c_2 e^{(r_2 - r_1)x}$ per qualche $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, cosicché

$$y(x) = e^{r_1 x}u(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

è una funzione della famiglia in (5.10).

In modo analogo si procede negli altri casi. Osserviamo solo che nel caso di radici complesse coniugate l'integrale completo (5.11) si può anche scrivere come

$$A\, e^{-\alpha x}\cos(\omega x + \varphi),$$

dove $A \geq 0$ e $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2[$. □

Come abbiamo già visto, in accordo con il principio di sovrapposisizione, l'integrale generale dell'equazione non omogenea

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \qquad t \in]a, b[, \tag{5.12}$$

è dato dalla famiglia a due parametri

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_f(t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

dove $y_1(t)$, $y_2(t)$ sono definiti in (5.10) e y_f è una qualunque soluzione fissata di (5.12).

Per trovare una *soluzione particolare* y_f di (5.12), si può procedere per tentativi; ad esempio, se f è un polinomio di grado n, possiamo cercare una soluzione particolare come polinomio di grado $n+2$, se f è un esponenziale o una funzione trigonometrica possiamo provare con combinazioni lineari di funzioni esponenziali o trigonometriche. È un metodo che funziona in molti casi. Ma continua a funzionare il *metodo della variazione delle costanti di Lagrange*. Facciamo variare le costanti in (5.11) e cerchiamo una soluzione particolare della (5.12) della forma

$$y_f(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t), \qquad t \in]a, b[. \tag{5.13}$$

Sostituendo y_f in (5.12), troviamo

$$2a(c_1'y_1' + c_2'y_2') + a(c_1''y_1 + c_2''y_2) + b(c_1'y_1 + c_2'y_2) = f.$$

Se richiediamo
$$c_1'(t)y_1(t)+c_2'(t)y_2(t)=0,$$
e notiamo che, in questo caso,
$$0=(c_1'y_1+c_2'y_2)'=c_1''y_1+c_2''y_2+c_1'y_1'+c_2'y_2',$$
troviamo
$$a\Big(c_1'(t)y_1'(t)+c_2'(t)y_2'(t)\Big)=f(t).$$
In conclusione: *se y_1,y_2 sono due soluzioni dell'equazione omogenea associata a* (5.12)*, allora y_f in* (5.13) *è una soluzione di* (5.12) *se $c_1(t),c_2(t)$ risolvono il sistema di equazioni lineari del primo ordine*

$$\begin{cases} c_1'(t)y_1(t)+c_2'(t)y_2(t)=0, \\ c_1'(t)y_1'(t)+c_2'(t)y_2'(t)=\dfrac{f(t)}{a}. \end{cases} \tag{5.14}$$

Non è difficile vedere che se y_1,y_2 sono le funzioni in (5.10), il sistema (5.14) è risolubile in c_1' e c_2', trovando in questo modo una soluzione particolare y_f di (5.12).

La stessa idea (ed è il modo con cui fu usata da Eulero) si applica per ridurre l'ordine di integrazione di una equazione, anche a coefficienti variabili (si confronti con la dimostrazione del Teorema 5.2). Ad esempio, supponiamo di conoscere una soluzione $u(t)$ dell'equazione
$$a(t)y''(t)+b(t)y'(t)+c(t)y=0,$$
vorremmo trovare una seconda soluzione che possa darci, assieme alla prima, l'integrale generale. Cerchiamola del tipo $y(t)=\lambda(t)u(t)$. Sostituendo sopra troviamo
$$au\lambda''(t)+(2au'+bu)\lambda'(t)=0$$
che ci permette di trovare λ' e quindi λ.

5.1.3. *Vibrazioni lineari*

Chiudiamo questa sezione con alcune osservazioni sulle piccole oscillazioni libere e smorzate, le risonanze e i battimenti, cfr. [47].

I metodi illustrati ci permettono di studiare la seguente equazione del secondo ordine con coefficienti positivi, che scriviamo come

$$mx''(t)=-\mu x'(t)-kx(t)+f(t) \qquad m>0,\ \mu,k\geq 0. \tag{5.15}$$

In base alla *legge di Newton* questa può esser vista come l'equazione del moto di una particella di massa m sottoposta ad una *forza elastica* (con *costante elastica* k) che tende a riportare la particella nella posizione iniziale, ad una *resistenza viscosa* (con *costante di smorzamento* μ) e ad una *forza esterna* f.

OSCILLAZIONI LIBERE. Cominciamo con le piccole oscillazioni libere, cioè $f(t)\equiv 0$,

$$mx''(t)=-\mu x'(t)-kx(t) \qquad m>0,\ \mu,k\geq 0. \tag{5.16}$$

Resistenza viscosa nulla, $\mu = 0$. In questo caso l'equazione (5.16) si riduce all'equazione del moto armonico semplice,

$$x'' + \omega^2 x = 0, \qquad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}},$$

il cui integrale generale è dato dale funzioni sinusoidali di periodo $2\pi/\omega$,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad A \geq 0,\ \varphi \in [-\pi, \pi[. \tag{5.17}$$

La particella si muove di *moto armonico*, con *ampiezza* A, *periodo* $2\pi/\omega$ e *spostamento di fase* φ, A e φ costanti. Osserviamo che il periodo è indipendente dalle condizioni iniziali. Inoltre la traiettoria è univocamente caratterizzata ad esempio dalla posizione e dalla velocità in un punto assegnato.

Oscillazioni con smorzamento piccolo, $0 < \mu < 2\sqrt{mk}$. Le radici dell'equazione caratteristica sono complesse e coniugate

$$r_{1,2} = -\alpha \pm i\omega, \qquad \alpha := \frac{\mu}{2m},\ \omega := \frac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}.$$

L'integrale generale è dato da

$$x(t) = A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)$$

con $A \geq 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi[$.

Le soluzioni anche in questo caso hanno un andamento oscillatorio con periodo più lungo che nel caso a resistenza viscosa nulla e con ampiezza delle oscillazioni tendente esponenzialmente a zero al crescere di t: le soluzioni sono delle *oscillazioni smorzate*. La costante di smorzamento α è direttamente proporzionale alla resistenza viscosa μ.

Smorzamento critico $\mu = 2\sqrt{mk}$. L'equazione caratteristica ha due radici reali coincidenti, $-\alpha = -\mu/2m$, e l'integrale generale è l'insieme delle funzioni

$$x(t) = e^{-\alpha t}(c_1 + c_2 t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Il moto non ha più carattere oscillatorio: si parla di *smorzamento critico*. La particella può attraversare la posizione di equilibrio, $x(t) = 0$, al più una volta.

Smorzamento supercritico $\mu > 2\sqrt{km}$. L'equazione caratteristica ha due radici reali r_1 e r_2 di segno *negativo*, l'integrale generale è dunque dato da

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Non ci sono più oscillazioni e si parla di *smorzamento supercritico*.

OSCILLAZIONI FORZATE Consideriamo ore il caso di un sistema soggetto a forze esterne e limitiamoci ad uno dei casi più importanti, quello di forze esterne periodiche. Per semplicità, studiamo l'equazione

$$m x''(t) + \mu x'(t) + k x(t) = \cos \eta t, \qquad \mu \geq 0. \tag{5.18}$$

Il caso con resistenza viscosa, $\mu > 0$. Se $\mu > 0$, la funzione

$$x_f(t) = c_1 \cos \eta t + c_2 \sin \eta t \tag{5.19}$$

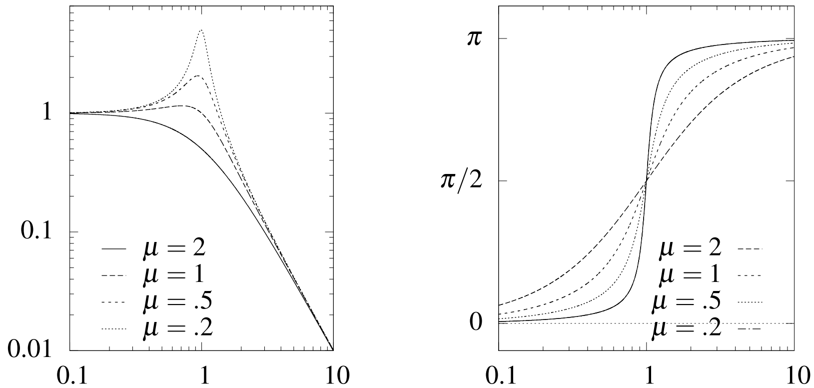


FIGURA 1. A sinistra, $A(\eta)$ in coordinate logaritmiche mostra che $A(\eta) \sim 1/\eta^2$ per $\eta \to \infty$. A destra, $\varphi(\eta)$ in coordinate logaritmiche.

con

$$c_1 = c_1(\eta) := \frac{k - m\eta^2}{(k - m\eta^2)^2 + \mu^2\eta^2}, \qquad c_2 = c_2(\eta) := \frac{\mu\eta}{(k - m\eta^2)^2 + \mu^2\eta^2} \tag{5.20}$$

è soluzione della (5.18). Evidentemente si può riscrivere $x_f(t)$ nella forma

$$x_f(t) = A(\eta)\cos(\eta t + \varphi(\eta))$$

e le funzioni

$$A(\eta) := \sqrt{c_1^2(\eta) + c_2^2(\eta)}, \qquad \varphi(\eta) := \pi/2 + \arctan\left(\frac{c_1(\eta)}{c_2(\eta)}\right). \tag{5.21}$$

si chiamano rispettivamente *spettro di ampiezza* e *spettro di fase* dell'equazione (5.18). Si noti che tutte le soluzioni dell'equazione sono asintotiche a $x_f(t)$ per $t \to +\infty$ perché le soluzioni della omogenea decadono a zero all'infinito.

Il caso a smorzamento nullo, $\mu = 0$. Le formule (5.19) e (5.20) danno una soluzione particolare dell'equazione

$$mx'' + kx = \cos\eta t$$

quando $\eta \neq \omega = \sqrt{k/m}$. Nel caso $\eta = \omega$, le (5.19) perdono di significato. Si vede però subito che quando $\eta = \omega$, una soluzione particolare è data da

$$x_f(t) = \frac{1}{2m\omega} t \sin\omega t$$

e l'integrale generale è

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2m\omega} t \sin\omega t.$$

Siamo in presenza di un *moto secolare*, come viene chiamato in astronomia. Si vede che a partire da qualunque condizione iniziale sulla posizione e sulla velocità, l'ampiezza delle oscillazioni del sistema cresce al crescere di t: piccole forze possono produrre forti oscillazioni dell'ampiezza. È il fenomeno della *risonanza* fra forza applicata e sistema libero; in situazione più complessa è il *problema dei piccoli divisori* e, in un contesto diverso, ricorda il fenomeno del crollo di un ponte quando entra in risonanza, ad esempio, con la marcia di un plotone che lo attraversa.

Per $\eta \neq \omega$ la soluzione individuata dalle (5.19) e (5.20) è somma di due funzioni periodiche di pulsazione η e ω. Quando η e ω sono vicini si evidenzia il *fenomeno dei battimenti*, formalizzato nelle formule di prostaferesi. Ad esempio la soluzione del problema

$$\begin{cases} x'' + \omega^2 x = \cos(\eta t), \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

è

$$x(t) = \frac{1}{\omega^2 - \eta^2}(\cos \eta t - \cos \omega t) = \frac{-2}{\omega^2 - \eta^2} \sin\left(\frac{\omega + \eta}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega - \eta}{2} t\right)$$

per le formule di prostaferesi. Quando ω e η sono vicini, la soluzione sembra una funzione sinusoidale di pulsazione $(\omega + \eta)/2 \simeq \eta$ la cui ampiezza varia periodicamente con una pulsazione $(\omega - \eta)/2$. È il fenomeno dei *battimenti*.

CIRCUITO RLC Consideriamo un circuito elettrico composto da una resistenza R, un'induttanza L e un condensatore C collegati in serie fra loro e collegati a un generatore di tensione $V(t)$.

In base alle *leggi di Kirkhoff*, la somma delle cadute di potenziale $V_R(t)$, $V_L(t)$, $V_C(t)$ sui tre componenti è uguale alla tensione applicata

$$V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = V(t)$$

e la corrente elettrica circolante nel circuito $I(t)$ è la stessa per tutti i componenti. Poiché le relazioni tra corrente e potenziale per i tre componenti sono

$$V_L(t) = I'(t), \qquad V_R(t) = RI(t), \qquad V_C(t) - V_C(t_0) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} I(s)\, ds,$$

vale l'equazione

$$LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} I(s)\, ds + V_C(t_0) = V(t);$$

derivando in t si ottiene quindi l'equazione differenziale per la corrente

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C} I(t) = V'(t).$$

Si noti come l'*analogia* con le piccole vibrazioni meccaniche sia totale identificando massa con induttanza, resistenza viscosa con resistenza, modulo di elasticità con l'inverso della capacità, le forze con la derivata della tensione applicata e il moto con la corrente elettrica.

5.2. *Moti uno-dimensionali*

Una generica equazione differenziale ordinaria del secondo ordine in forma normale è del tipo

$$mx''(t) = F(t, x(t), x'(t)). \tag{5.22}$$

Questa è interpretabile come l'equazione del *moto uno-dimensionale* di un punto x di massa m soggetto alla forza F (qui dipendente dal tempo, dalla posizione e dalla velocità) in accordo con la seconda legge di Newton.

In modo equivalente essa può essere scritta come un sistema di due equazioni in due incognite, introducendo il piano posizione-velocità (x, v) chiamato *piano delle fasi*. In altre parole, se $v(t)$ indica la velocità di $x(t)$, risolvere (5.22) è ovviamente equivalente a risolvere

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = \dfrac{F}{m} \end{cases}$$

nelle incognite $(x(t), v(t))$: la soluzione è ora una *curva* $t \to (x(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$ nel piano delle fasi.

È comunque molto raro che in generale si possa risolvere l'equazione (5.22) in *forma chiusa* o 'esplicita'; ma ci sono eccezioni rilevanti, ad esempio se $F = F(x'(t))$ l'equazione è essenzialmente a variabili separabili nella velocità e abbiamo più volte visto come procedere in questo caso.

5.3. *Traiettoria e moto*. Supponiamo che la forza applicata dipenda solo dalla posizione e dalla velocità della particella, il sistema si dice in questo caso *autonomo*,

$$F = f(x, x'). \tag{5.23}$$

Seguendo l'idea di Jacopo Riccati possiamo assumere (o cercare soluzioni per cui) la velocità sia univocamente determinata dalla posizione, cioè

$$v(t) = \varphi(t, x(t)).$$

Da

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v, \\ m\dfrac{dv}{dt} = f(x, v), \end{cases}$$

deduciamo allora

$$f(x(t), \varphi(x(t))) = m\frac{dv}{dt}(t) = m\frac{d\varphi}{dx}(x(t))\ \frac{dx}{dt} = mv(x(t))\frac{d\varphi}{dx}(x(t))$$

e, ignorando la dipendenza temporale,

$$\varphi'(x) = \frac{f(x, \varphi(x))}{m\varphi(x)}$$

che ci dà la dipendenza funzionale velocità-posizione. L'equazione del moto si *disaccoppia* nel sistema in φ e x

$$\begin{cases} \varphi'(x) = \dfrac{f(x, \varphi(x))}{m\varphi(x)}, \\ x'(t) = \varphi(x(t)), \end{cases}$$

che può essere risolto, risolvendo la prima equazione per φ, quindi inserendo φ nella seconda e trovando così $x(t)$.

5.4. *Conservazione dell'energia*. Supponiamo che la forza esterna dipenda solamente dalla posizione

$$mx''(t) = f(x(t)),$$

e che $V :]a,b[\to \mathbb{R}$, sia un *potenziale* per $f(x) :]a,b[\to \mathbb{R}$ cioè

$$-V' = f \qquad \text{in }]a,b[.$$

Moltiplicando l'equazione per x' troviamo

$$\begin{aligned} 0 &= mx'(t)x''(t) - x'(t)f(x(t)) = mx'(t)x''(t) + V'(x(t))x'(t) \\ &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{m}{2}x'^2(t) + V(x(t))\Big). \end{aligned}$$

Questo ci dice che l'*energia definita da*

$$E(t) := \frac{m}{2}x'^2(t) + V(x(t)), \tag{5.24}$$

è costante lungo il moto

$$E(t) = E_0 \qquad \forall t$$

dove E_0 può essere calcolato dalla posizione e velocità in un dato istante, diciamo quello iniziale, da (5.24).

Dalla conservazione dell'energia deduciamo

$$\frac{|x'(t)|}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V(x(t)))}} = 1.$$

e, integrando in un intervallo di tempo $]t_0, t[$ in cui la velocità non cambia segno

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V(x))}}\, dx = \pm(t - t_0)$$

dove $+$ o $-$ è il segno della velocità x'. L'ultima formula è una relazione implicita del tipo

$$H(x(t)) - H(x(t_0)) = \pm(t - t_0)$$

che una volta invertita dà l'integrale del moto.

5.2.1. *Il pendolo*

Un tipico moto unidimensionale è quello del *pendolo* con variabile caratteristica del moto l'angolo $\theta(t)$ formato dall'asta del pendolo con la verticale. Decomponendo la forza peso nella sua componente lungo l'asta, che non ha effetti essendo l'asta rigida, e nella componente tangenziale, che è responsabile del movimento del pendolo, troviamo

$$ml\,\theta'' + mg\sin\theta = 0$$ [1]

come equazione del pendolo. Un potenziale della forza è $-mg\cos\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, quindi la conservazione dell'energia si esprime come $\frac{l}{2}\theta'^2 - g\cos\theta = -g\cos\theta_0$ o

$$\sqrt{\frac{l}{2g}}\,\frac{|\theta'|}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = 1,$$

dove θ_0 è l'angolo di deviazione massima. In particolare, *il moto è dato dall'inversa di un integrale ellittico*

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta[t]} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Il periodo di oscillazione è quattro volte il tempo t_0 necessario a muoversi dalla verticale alla posizione di massima deviazione, $\theta_0 := \theta(t_0)$, cioè

$$\begin{aligned} T = 4t_0 &= 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{t_0} \frac{\theta'}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,dt = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \\ &= 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}, \end{aligned}$$

che, con la sostituzione

$$t := \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}, \qquad t \in (0,1),$$

[1] Alla stessa equazione si arriva usando il principio di conservazione dell'energia che prima abbiamo stabilito come conseguenza.

possiamo anche scrivere come

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-k^2t^2}}\,dt$$

dove $k := \sin(\theta_0/2)$. In particolare, il periodo dipende dall'ampiezza dell'oscillazione θ_0: *il pendolo non è isocrono*.

Si dimostra che non possiamo calcolare l'integrale che dà il periodo in termini di funzioni elementari, ma possiamo trovare uno sviluppo asintotico per piccole oscillazioni. Da

$$(1-s)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}s + O(s^2) \qquad \text{per } s \to 0,$$

deduciamo

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2t^2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2t^2 + O(k^4) \qquad t \in (0,1),\ k \to 0,$$

quindi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-k^2t^2}} &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{2}k^2\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}} + O(k^4)\\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k^2 + O(k^4).\end{aligned}$$

In conclusione, poiché $k = \sin(\theta_0/2) = \theta_0/2 + O(\theta_0^3)$, troviamo

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + O(\theta_0^4)\right) \qquad \text{per } \theta_0 \to 0.$$

5.5. *Il pendolo isocrono*. Come modificare l'arco di cerchio percorso dal pendolo standard in modo che il periodo diventi indipendente dalle ampiezze. L'idea di Huygens, nella sua formulazione analitica, fu quella di fare in modo che lungo la nuova curva la forza acceleratrice fosse proporzionale alla lungrezza d'arco s, cioè che la lunghezza d'arco verifichi l'equazione

$$s'' + Ks = 0, \tag{5.25}$$

che ha soluzioni con oscillazioni indipendenti dall'ampiezza.

Se y è la direzione verticale, la forza acceleratrice è data lungo la curva cercata da $-dy/ds$ (supponendo la gravità unitaria); dovrà quindi essere

$$dy = K \cdot s ds. \tag{5.26}$$

Se $s = 0$ per $y = 0$ (cioè l'origine è nel punto più basso) si ottiene allora per integrazione

$$y = \frac{K}{2}s^2 \quad \text{o} \quad s = \sqrt{\frac{2y}{K}}. \tag{5.27}$$

Quindi per la nostra curva *l'altezza è proporzionale alla radice quadrata della lunghezze d'arco* ([4] pp. 489-490). Sostituendo s da (5.27) in (5.26), troviamo

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{2K}\sqrt{dx^2+dy^2}$$

da cui

$$dx = \sqrt{\frac{c-y}{y}}dy,$$

dove $c = 1/(2K)$, che, come abbiamo visto, ci dice che la curva cercata è una *cicloide* o una *brachistocrona*, si veda anche 7.15 Capitolo 7.

5.2.2. *Moti centrali*

Sia $\mathbf{0} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ l'origine in $\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{r} = (x,y,z)$ il vettore posizione di un punto in $\mathbb{R}^3$. Un campo di forze $\mathbf{F}(r)$ si dice *centrale* se in ogni punto la forza è diretta radialmente e ha modulo dipendente solo dalla distanza del punto dall'origine,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

dove f è il modulo della forza. Una tipica situazione è quella di un pianeta di massa m nel campo di gravità del Sole di massa $M >> m$. Fissato un riferimento in cui il Sole occupa l'origine e il pianeta è in $\mathbf{r}$, la forza di gravità è data da

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -g\frac{mM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad r := |\mathbf{r}|,$$

dove g è la *costante di gravità universale* che precedentemente avevamo indicato con G. In accordo con la seconda legge di Newton il moto del pianeta è regolato da

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \tag{5.28}$$

e, in particolare, l'accelerazione è radiale se F è centrale.

5.6. PROPOSIZIONE. *In un campo di forze centrale il moto è piano, più precisamente avviene sul piano determinato dai vettori posizione* $\mathbf{r}$ *e velocità* $\mathbf{v}$ *in un dato istante* t.

Per provare ciò conviene introdurre il *prodotto vettore* tra due vettori di $\mathbb{R}^3$: se $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3)$, il prodotto $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ è il "vettore", a volte si dice *pseudovettore*, di componenti

$$(x_2y_3 - x_3y_2,\ -(x_1y_3 - x_3y_1),\ x_1y_2 - x_2y_3).$$

Si vede facilmente che

(1) $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ è *antisimmetrico* in $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, cioè, $\mathbf{x}\times\mathbf{y} = -\mathbf{y}\times\mathbf{x}$,
(2) $\mathbf{x}\times\mathbf{y} = 0$ se e solo se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono paralleli,
(3) $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ è perpendicolare sia a $\mathbf{x}$ sia a $\mathbf{y}$, quindi al piano generato da $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$,

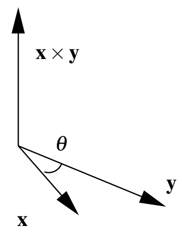


FIGURA 2. Il prodotto vettore $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ è perpendicolare al piano generato dai vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

(4) infine,
$$|\mathbf{x}\times\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x}|\mathbf{y})^2 = |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2\sin^2\theta$$
dove θ è l'angolo tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$; in particolare, $|\mathbf{x}\times\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|$ se e solo se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono perpendicolari, $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$.

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 5.6. Poiché $\mathbf{r}$ e $\mathbf{a}$ sono paralleli, $\mathbf{r}\times\mathbf{a} = 0$. Quindi
$$0 = \mathbf{r}\times\mathbf{a} = \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\times\mathbf{v} = \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}),$$
cioè $\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ è costante; l'orientazione del piano generato da $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ è quindi indipendente dal tempo e, contenendo per ogni tempo l'origine, è costante. □

Se $\mathbf{r}\times\mathbf{v} = 0$ inizialmente, cioè la velocità iniziale è radiale, allora il moto rimane radiale. Se $\mathbf{r}\times\mathbf{v} \neq 0$ in un qualche istante t_0, il moto avviene comunque nel piano contenente $\mathbf{r}_0 := \mathbf{r}(t_0)$ e $\mathbf{v}_0 := \mathbf{v}(t_0)$.

Equazioni di moto per il raggio vettore e l'angolo di rotazione

Discutiamo ora il moto nel caso più interessante in cui $\mathbf{r}(t_0)\times\mathbf{v}(t_0) \neq 0$. Scegliamo le coordinate cartesiane in modo che le prime due (x,y) descrivano il piano del moto e descriviamo il moto tramite le funzioni $r(t)$ e $\theta(t)$ che rappresentano l'evoluzione rispettivamente del vettore distanza $\mathbf{r}(t)$ dall'origine e dell'angolo tra il vettore $\mathbf{r}(t)$ e l'asse delle ascisse misurato in modo antiorario. Allora
$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos\theta(t), \\ y(t) = r(t)\sin\theta(t). \end{cases}$$
Introducendo i *versori radiale* e *tangenziale*
$$\mathbf{e}_r := (\cos\theta, \sin\theta), \qquad \mathbf{e}_\theta := (-\sin\theta, \cos\theta)$$

e osservando che

$$
\begin{cases}
\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r, \\
\mathbf{r}' = r'\mathbf{e}_r + r\theta'\mathbf{e}_\theta, \\
\mathbf{r}'' = (r'' - r\theta'^2)\mathbf{e}_r + (2r'\theta' + r\theta'')\mathbf{e}_\theta,
\end{cases}
\tag{5.29}
$$

troviamo che l'equazione del moto $m\mathbf{r}'' = f\mathbf{e}_r$ si scrive come

$$
\begin{cases}
2r'\theta' + r\theta'' = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\theta') = 0, \\
m(r'' - r\theta'^2) = f(r).
\end{cases}
\tag{5.30}
$$

Osserviamo che nel caso speciale di un moto di un corpo su un cerchio di raggio r con centro l'origine e con velocità v abbiamo $r' = r'' = 0$ e $r\theta' = v$ per l'equazione(5.29), quindi la seconda equazione in (5.30) $mv^2/r = -f(r)$ ci dice che sul corpo si esercita una *forza centripeta*.

Tornando alla (5.30), integrando la prima equazione in (5.30) le due equazioni si disaccoppiano

$$
\begin{cases}
mr^2\theta' = \Omega_0, \\
mr'' = f(r) + \frac{m}{r^3}(r^2\theta')^2 = f(r) + \frac{\Omega_0^2}{mr^3}.
\end{cases}
\tag{5.31}
$$

Seconda legge di Keplero

La prima esprime la *conservazione del momento angolare*

$$
\Omega(t) := mr^2(t)\theta'(t) = \Omega(0) =: \Omega_0
\tag{5.32}
$$

o

$$
\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{1}{m}\Omega_0\,\mathbf{e}_z.
$$

Questa equatione esprime la *seconda legge di Keplero*: Sia $A(t)$ è l'area spazzata dal raggio vettore al tempo t, $dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$; poiché l'area spazzata da $\mathbf{r}$ quando l'angolo varia da θ_0 a θ è data da

$$
\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} r^2(s)\,ds,
$$

si ha

$$
A(t) = \frac{1}{2}\int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} r^2(s)\,ds
$$

e quindi

$$
A'(t) = \frac{1}{2}r^2\theta' = \Omega_0/(2m);
$$

Cambiando variabile, $s = \theta(\tau)$, abbiamo

$$
A(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} r^2(\theta(\tau))\theta'(\tau)\,d\tau = \frac{\Omega_0}{2m}(t - t_0),
$$

se teniamo conto della conservazione del momento angolare in (5.32).

Le formule precedenti ci dicono anche che infatti *un moto piano è radiale se e solo se* $\frac{dA}{dt}$ =const.

Conservazione dell'energia

Ritornando all'integrazione delle equazioni di moto (5.31), osserviamo che la seconda è un'equazione del secondo ordine in $r(t)$ che può essere integrata usando la *conservazione dell'energia*. Infatti, se $V(r)$ è un potenziale per $f(r)$, cioè

$$V'(r) = -f(r),$$

e introduciamo il cosiddetto *potenziale efficace*

$$V_e(r) := V(r) + \frac{\Omega_0^2}{2mr^2},$$

la seconda equazione di (5.31) si trasforma in

$$mr'' + V_e'(r) = 0. \tag{5.33}$$

Multiplicando per r' e integrando, otteniamo l'equazione di conservazione dell'energia

$$\frac{m}{2}r'^2 + V_e(r) = E, \qquad \text{cioè} \qquad r' = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_e(r))}. \tag{5.34}$$

Un'ulteriore integrazione ci dà quindi $r(t)$. Ovviamente una volta risolta l'equazione per la componente radiale $r(t)$, possiamo calcolare $\theta(t)$ dalla prima delle equazioni (5.31)

$$\theta'(t) = \frac{\Omega_0}{mr^2(t)}.$$

Orbite del moto

Come abbiamo già osservato, se $\Omega_0 = 0$ il moto avviene lungo una retta passante per l'origine. Se $\Omega_0 \neq 0$ il moto non avviene più lungo una retta e $\theta(t)$ è invertibile, eventualmente su un periodo se il moto è periodico. Possiamo allora riparametrizzare il moto come funzione dell'angolo θ, $r = r(\theta)$; conseguentemente

$$\mathbf{r}(t) = r(\theta(t))\mathbf{e}_r,$$

e siamo ricondotti a cercare $r = r(\theta)$. Poiché

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{\Omega_0}{mr^2}\frac{dr}{d\theta},$$

la conservazione dell'energia (5.34) dà l'equazione differenziale a variabili separabili

$$\frac{\Omega_0^2}{2mr^4}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + V_e(r(\theta)) = E, \text{ i.e., } \frac{dr}{d\theta} = \pm\frac{mr^2}{\Omega_0}\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_e(r))}, \tag{5.35}$$

che si integra

$$\theta - \theta_0 = \pm\frac{\Omega_0}{m}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{r}\frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{E - V_e(\rho)}}, \tag{5.36}$$

dove $r_0 = r(\theta_0)$. Invertendo la (5.36) troviamo $r = r(\theta)$.

L'equazione (5.35) mostra che la traiettoria $r(\theta)$ soddisfa $V_e(r(\theta)) \le E \ \forall\theta$, e che negli eventuali punti θ in cui $V_e(r)(\theta) = E$ si ha $\frac{dr}{d\theta} = 0$. In generale però non è detto che la traiettoria sia limitata né che resti lontana dall'origine.

Supponiamo che la traiettoria $r(\theta)$ resti limitata e lontana da zero e oscilli tra due valori $r_{\min}$, $r_{\max}$, con $0 < r_{\min} < r_{\max} < \infty$. L'angolo tra l'*apocentro* (punto in cui $r = r_{\max}$) e il successivo (o precedente) *pericentro* (punto in cui $r = r_{\min}$) è dato dalla (5.36)

$$\phi := \frac{\Omega_0}{m}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{E - V_e(\rho)}}$$

e l'angolo tra due pericentri successivi è 2ϕ. Condizione necessaria e sufficiente perché l'orbita sia chiusa è quindi che $\phi/2\pi$ sia razionale. Si dimostra che, se $\phi/2\pi$, è irrazionale l'orbita è densa nella corona di raggi $\rho_{\min}$ and $\rho_{\max}$.

Il caso di orbite chiuse è piuttosto raro. Infatti nell'Ottocento il matematico Joseph Bertrand dimostra che in un campo di forze centrali tutte le orbite limitate sono chiuse se e solo se il campo è *elastico*, $V(r) = kr^2 \ k > 0$, o *gravitazionale*, e in entrambi i casi $\phi = 2\pi$.

Orbite in un campo elastico

Nel caso elastico, $V(r) := kr^2/2 \ r > 0$, *oscillazioni piane*, le equazioni del moto (5.28) nel piano (x,y) si disaccoppiano in due moti armonici semplici con la stessa pulsazione $\omega := \sqrt{k/m}$

$$\begin{cases} x'' = -\omega^2 x, \\ y'' = -\omega^2 y \end{cases}$$

Quindi

$$x(t) = a\cos(\omega t + \alpha), \qquad y(t) = b\cos(\omega t + \beta)$$

o

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\cos(\varphi + \delta) = b\cos\delta\cos\varphi - b\sin\delta\sin\varphi$$

dove $\varphi = \omega t + \alpha$, $\delta := \beta - \alpha$. Risolvendo in $\cos\varphi$ e $\sin\varphi$, quadrando e sommando si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\delta = \sin^2\delta.$$

In altre parole, *le orbite del moto sono ellissi con centro l'origine*. Queste ellissi degenerano in un segmento se $\delta = 0$ o $\delta = \pi$.

Equazione di moto per l'inverso del raggio vettore

Per il seguito sarà utile scrivere le relazioni in (5.35) per $u := 1/r$. Abbiamo

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\,\frac{dr}{d\theta},$$

quindi

$$r' = \frac{\Omega_0}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\Omega_0}{m}\frac{du}{d\theta}, \qquad r'' = -\frac{\Omega_0}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2}\theta' = -\frac{\Omega_0^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

e, se $\widetilde{V}_e(u) := V_e(1/u)$,

$$\frac{d\widetilde{V}_e}{du}(u) = -\frac{dV_e}{dr}(1/u)\,\frac{1}{u^2}.$$

Quindi l'equazione del moto (5.31) dà l'equazione per u,

$$\frac{\Omega_0^2}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{d\widetilde{V}_e}{du}(u) \tag{5.37}$$

e la legge di conservazione dell'energia si scrive come

$$\frac{\Omega_0^2}{2m}\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2 + \widetilde{V}_e(u) = \frac{\Omega_0^2}{2mr^4}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + V_e(r) = E. \tag{5.38}$$

Orbite nel campo gravitazionale, prima e terza legge di Keplero

Cominciamo con osservare che *l'unico moto centrale possibile su un ellisse con un fuoco nel centro di forza è quello dovuto ad un campo gravitazionale*. Dalle equazioni di moto (5.31) sappiamo

$$r^2\theta' = \frac{\Omega_0}{m} =: k, \text{ e } mr'' - \frac{mk^2}{r^3} = f(r). \tag{5.39}$$

Essendo l'orbita ellittica ,

$$r(1 + e\cos\theta) = c, \qquad 0 \le e < 1;$$

differenziando e usando la prima equazione in (5.39) deduciamo

$$r' = \frac{ce\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\theta' = \frac{ce\sin\theta}{c^2r^{-2}}\;\frac{k}{r^2} = \frac{ke}{c}\sin\theta.$$

Differenziando ancora una volta

$$r'' = \frac{ke}{c}\cos\theta\,\theta' = \frac{ke}{c}\,\frac{c-r}{re}\,\frac{k}{r^2} = \frac{k^2}{r^3} - \frac{k^2}{cr^2}$$

e usando la seconda equazione in (5.39) concludiamo

$$f(r) = -\frac{k^2}{mcr^2}.$$

Proviamo ora che le orbite in un campo gravitazionale sono ellissi, cioè la *prima legge di Keplero*.

Per il potenziale newtoniano $V(r) = -\frac{k}{r}$, $k > 0$, abbiamo

$$V_e(r) = \frac{\Omega_0^2}{2mr^2} - \frac{k}{r},$$

e, sostituendo in (5.37), troviamo per $u = 1/r$

$$\widetilde{V}_e(u) = \frac{\Omega_0^2}{2m}u^2 - ku, \quad \text{and} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -u + \frac{km}{\Omega_0^2}.$$

Questa è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti il cui integrale completo è

$$u(\theta) = \frac{km}{\Omega_0^2}(1 + e\cos(\theta - \theta_0)), \qquad e \geq 0,$$

cioè,

$$r(\theta) = \frac{\Omega_0^2}{km}\,\frac{1}{1 + e\cos\theta}, \tag{5.40}$$

se scegliamo gli assi in modo che r sia minimo quando $\theta = 0$.

L'equazione (5.40) rappresenta una conica con un fuoco nell'origine: è un'ellisse se $e < 1$, una parabola se $e = 1$, e un'iperbole se $e > 1$. L'eccentricità è determinata dall'*energia*, infatti, sostituendo u in (5.38)

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\Omega_0^2}{k^2 m}E}, \tag{5.41}$$

quindi

- se $E > 0$, la traiettoria è un ramo di iperbole,
- se $E = 0$, la traiettoria è una parabola,
- se $E < 0$, la traiettoria è un'ellisse con semiassi dati da

$$a := \frac{\Omega_0^2}{km}\frac{1}{1 - e^2} = \frac{k}{2|E|}, \qquad b := a\sqrt{1 - e^2} = \frac{|\Omega_0|}{\sqrt{2m|E|}}\ .$$

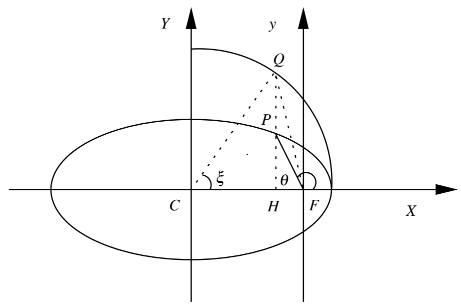


FIGURA 3

In particolare, se $E \geq 0$, la traiettoria sfugge il campo gravitazionale, mentre se $E < 0$ abbiamo dimostrato la *prima legge di Keplero*: Un'orbita planetaria è un'ellisse con il Sole come fuoco.

Proviamo infine la *terza legge di Keplero*.

Se $E < 0$, cioè se l'orbita è ellittica, deduciamo dalla seconda legge di Keplero, che l'area dell'ellisse πab è proporzionale al periodo orbitale T :

$$\pi ab = \frac{|\Omega_0|}{2m} T.$$

D'altra parte, per la (5.41)

$$|\Omega_0| = \sqrt{akm(1-e^2)}, \qquad b = a\sqrt{1-e^2},$$

quindi

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a(1-e^2)}\sqrt{\frac{k}{m}} T;$$

concludiamo pertanto con la *terza legge di Keplero*

$$a^3/T^2 = k/(4\pi^2 m)$$

La legge del moto planetario

Sempre nel caso del campo gravitazionale vogliamo trovare la legge di moto $r = r(t)$, che ci darà anche $\theta = \theta(t)$ per via della (5.36).

Dalla conservazione dell'energia

$$E = \frac{mr'^2}{2} + \frac{\Omega_0^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

segue

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r(0)}^{r(t)} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{k}{\rho} - \frac{\Omega_0^2}{2mr^2} + E}},$$

che in linea di principio ci permette di trovare $r(t)$ per inversione di $t = t(r)$. Osserviamo che l'integrale sopra non è esprimibile in termini di funzioni elementari.

Una soluzione diversa fu proposta da Keplero. Si consideri un riferimento (X,Y) nel quale l'orbita del moto di un punto $P = P(t)$ è descritta dall'equazione

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b.$$

Con riferimento alla Figura 3, dove F indica un fuoco dell'orbita, introduciamo la cosiddetta *anomalia eccentrica* ξ in modo che l'orbita si parametrizza come

$$X = a\cos\xi = r\cos\theta + a\,e, \qquad Y = b\sin\xi = r\sin\theta.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned}
\text{area}\,AFP &= -\frac{FH\cdot HP}{2} + \int_{x_H}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - X^2}\,dX,\\
\text{area}\,AFQ &= -\frac{FH\cdot HQ}{2} + \int_{x_H}^{a} \sqrt{a^2 - X^2}\,dX,\\
HP &= \frac{b}{a}HQ,
\end{aligned}$$

conseguentemente

$$\text{area}\,AFP = \frac{b}{a}\ \text{area}\,AFQ.$$

La seconda legge di Keplero, area $AFP = \frac{\Omega_0 t}{2m}$, ci dà allora

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega_0 t}{2m} &= \frac{b}{a}\,\text{area AFQ} = \frac{b}{a}\Big(\text{area}\,ACQ - \text{area}\,QFC\Big)\\
&= \frac{b}{a}\Big(\frac{a^2\xi}{2} - \frac{CF\cdot QF}{2}\Big) = \frac{ab}{2}(\xi - e\sin\xi),
\end{aligned}$$

cioè l'equazione di Keplero

$$\xi - e\sin\xi = \ell; \qquad \ell = \ell(t) := \frac{\Omega_0}{mab}t.$$

Per $|\ell| < 1$ questa equazione ci permette di trovare $\xi = \xi(\ell)$. ℓ si chiama l'*anomalia media*.

Si verifica che

$$\Big|\xi(e,\ell) - (\ell + \sin\ell + e^2\sin\ell\cos\ell)\Big| = O(e^3) \qquad \text{per } e \to 0.$$

Di fatto, l'orbita della Terra è quasi circolare, cioè la sua eccentricità è piccola.

5.3. *Lagrangiane, invarianze e leggi di conservazione*

Nello spazio consideriamo un punto materiale P di massa m la cui posizione al tempo t è data dal vettore $X(t) := \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ in un sistema di riferimento cartesiano. Supponiamo che P si muova sotto l'azione di un campo di forze $F := F(X)$, $F(X) := \big(f_1(X), f_2(X), f_3(X)\big)$, *conservativo*, cioè che F sia il *gradiente* di una funzione *scalare* chiamata *potenziale*

$$F(X) = -\nabla U(X) = -\Big(\frac{\partial U}{\partial x}(X), \frac{\partial U}{\partial y}(X), \frac{\partial U}{\partial z}(X)\Big).$$

In accordo con la legge di Newton il moto attuale $X(t)$ di P verifica

$$m\ddot{X}(t) = F(X(t)) \quad \text{equivalentemente} \quad m\ddot{X}(t) = -\nabla U(X(t)). \tag{5.42}$$

Si verifica ora facilmente, cfr. Capitolo 3, che (5.42) è l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale

$$\int \big[\frac{1}{2} m |\dot{X}(t)|^2 - U(X(t))\big],$$

cioè ogni soluzione di (5.42) è un punto stazionario per l'integrale precedente.

Assumendo sempre il campo conservativo, dall'equazione di Newton si ricava anche la legge di *conservazione dell'energia*. Infatti, procedendo come nel caso di moti uno-dimensionali — caso in cui le forze $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, sono sempre la derivata di un potenziale, $U'(x) = -F(x)$, quindi conservative — e cioè, moltiplicando scalarmente per $\dot{X}$, deduciamo

$$(m\ddot{X} \,|\, \dot{X}) + (\nabla U \,|\, \dot{X}) = 0$$

cioè

$$\frac{d}{dt}\big(\frac{1}{2} m |\dot{X}(t)|^2 + U(X(t))\big) = 0$$

o

$$\frac{1}{2} m |\dot{X}(t)|^2 + U(X(t)) = E_0 \qquad E_0 = \text{cost.}$$

5.7. *Campi conservativi e lavoro*. Apriamo una breve parentesi. Ricordiamo che si definisce integrale del campo di vettori $F(X)$ lungo la curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ che congiunge due punti $P_1 = \gamma(a)$ e $P_2 = \gamma(b)$ in $\mathbb{R}^3$ come

$$\int_\gamma F := \int_a^b \big(F(\gamma(t)|\dot{\gamma}(t)\big) dt.$$

Si vede facilmente che, se F è conservativo, allora $\int_\gamma F$ dipende solo dai punti P_1 e P_2 ma non dalla curva γ che li congiunge. Interpretando $\int_\gamma F$ come il *lavoro* per andare da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ nel campo di forze F, possiamo allora rileggere quanto visto come: in un campo conservativo il lavoro lungo una curva dipende solo dagli estremi della curva e non dalla curva; equivalentemente, il lavoro lungo una curva chiusa è nullo. Si dimostra anche che in $\mathbb{R}^3$ (su domini Ω generici servono condizioni topologiche su Ω su cui non entriamo) il viceversa: se il lavoro lungo tutti i cammini chiusi è nullo, allora il campo è conservativo.

A partire da Eulero e proseguendo con Lagrange i principi variazionali trovano un sempre maggior ruolo nella formulazione delle teorie fisiche, particolarmente nell'Ottocento e fino ai giorni nostri. Probabilmente il primo di tali principi, cfr. Sezione 3.2.3, è il cosiddetto

PRINCIPIO DI MINIMA AZIONE DI LAGRANGE: *Il moto attuale del sistema è tale da minimizzare (anzi, da render nulla la variazione del) l'azione (in senso Leibniziano)*

$$\int mv^2 dt$$

tra tutti i moti con energia $E = E_0$, dove E_0 è l'energia iniziale.

Più precisamente, fissati la posizione $X_0 := X(t_0)$, la velocità $V_0 := \dot{X}(t_0)$ e l'energia $E_0 := \frac{1}{2}mV_0^2 + U(X_0)$ iniziali, il moto attuale rende stazionaria l'azione.

Una delle difficoltà con questo principio è che non è possibile assegnare la posizione iniziale e finale del sistema a tempi fissati t_1 e t_2 e, allo stesso tempo l'energia E. Per rimediare a questo Jacobi separò il *percorso*, traccia geometrica della curva di moto c, dal moto lungo la curva, mostrando, si veda ad esempio [45], il seguente

PRINCIPIO DI MINIMA AZIONE DI JACOBI-LAGRANGE: *Si minimizzi*

$$\int \omega(c)\dot{c}\,dt \quad dove \quad \omega(X) := \sqrt{2(E_0 - U(X)}$$

partendo da un punto del moto attuale. Si rappresenti l'estremale così trovato in termini del parametro lunghezza d'arco come $\gamma(s)$. Allora il moto attuale è dato da

$$c(t) := \gamma(s(t))$$

dove l'inversa $t(s)$ di $s(t)$ è determinata da

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\sqrt{m}}{\omega(\gamma)}.$$

Ma si può fare di più. Se introduciamo la *lagrangiana* L del sistema come

$$L = T - U$$

abbiamo $2T = L + E = L + E_0$, conseguentemente

$$\int_{t_1}^{t_2} Ldt = \int_{t_1}^{t_2} 2T\,dt + E_0\,(t_2 - t_1).$$

Possiamo allora enunciare

PRINCIPIO DI HAMILTON-LAGRANGE: *Il moto attuale è un punto stazionario della lagrangiana*

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

Vediamo allora che un sistema meccanico (di una particella) è caratterizzato dalla sua lagrangiana e il suo moto attuale, dal punto P_1 al punto P_2 nel tempo $[t_1,t_2]$, è un minimo o un punto stazionario per

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t,\gamma,\dot\gamma)\,dt \qquad \gamma(t_1)=P_1,\,\gamma(t_2)=P_2.$$

In realtà il tutto vale per un sistema di n masse in un generico campo di forze conservativo. Esemplifichiamo la cosa nel caso del *problema degli n corpi*. Consideriamo n punti materiali di masse $m_1, \dots, m_n$ le cui posizioni al tempo t sono date da $X_1(t), \dots, X_n(t)$, $X_i = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$, e introduciamo il vettore di $\mathbb{R}^{3n}$ definito come $X(t) := (X_1(t), \dots, X_n(t))$. Supponiamo che le masse si attraggano in accordo con la legge di gravitaziione universale di Newton, cioè che la forza esercitata da m_k su m_i sia data da

$$F_{ik} := \frac{Gm_im_k}{r_{ik}^3}(X_k - X_i)$$

dove $r_{ik} := |X_i - X_k|$.

Il principio di Hamilton-Lagrange ci dice allora che il moto $X(t)$ degli n corpi è un punto stazionario dell'*integrale azione*

$$\mathscr{L}(X) = \int_{t_1}^{t_2} L(X(t),\dot X(t))\,dt,$$

in cui lagrangiana $L(X,Y)$ è data da

$$L(X,Y) = T(Y) - U(X),$$

dove

$$T(Y) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j|Y_j|^2, \qquad Y = (Y_1,\dots,Y_n),$$

che per $Y = \dot X(t)$ dà l'*energia cinetica* degli n corpi, e

$$U(X) := -\sum_{i<k} G\frac{m_im_k}{r_{ik}}$$

è l'*energia potenziale* del sistema, poiché

$$F_{ik} = \frac{\partial}{\partial X_i}\Big(G\frac{m_im_k}{r_ik}\Big)$$

e quindi la forza totale $F_i = \sum_{i\neq k} F_{ik}$ che agisce su m_i è data da

$$F_i = -\nabla_{X_i} U.$$

Vi è un'importante relazione tra *simmetrie* o *invarianze* di una lagrangiana e *leggi di conservazione*, messa in evidenza da Emmy Noether [96] e che qui vogliamo illustrare senza dimostrazioni (rinviamo a [45] per maggiori informazioni).

Cominciamo con il considerare una famiglia di trasformazioni $(x,z) \mapsto (x*, z*)$, $x, x* \in \mathbb{R}$, $z, z* \in \mathbb{R}^n$,

$$x* = Y(x,z,\varepsilon) \qquad z* = W(x,z,\varepsilon) \tag{5.43}$$

che per $\varepsilon = 0$ si riducono all'identità, $x = Y(x,z,0)$ $z = W(x,z,0)$, assieme a quelli che si chiamano i *generatori infinitesimali* (μ, ω) della trasformazione in (5.43)

$$\mu(x,z) = \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon}(x,z,0) \quad \omega(x,z) = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}(x,z,0). \tag{5.44}$$

Per ogni curva $u : I = [x_1, x_2] \to \mathbb{R}^n$ consideriamo ora

$$\eta(x,\varepsilon) := Y(x,u(x),\varepsilon) \quad w(x,\varepsilon) := W(x,u(x),\varepsilon), \tag{5.45}$$

$x \in I$ e ε vicino a 0, con generatori infinitesimali

$$\overline{\mu}(x) := \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}(x,0) = \mu(x,u(x)) \quad \overline{\omega}(x) := \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}(x,0). \tag{5.46}$$

Poiché $\eta(x,0) = x$ e $\eta(x,\varepsilon) = x + \varepsilon\overline{\mu}(x) + o(\varepsilon)$ quando $\varepsilon \to 0$, $\eta(\varepsilon) := \eta(\cdot,\varepsilon)$ è un diffeomorfismo dall'intervallo I sull'intervallo $I^*_\varepsilon = \eta(I,\varepsilon)$ almeno per $|\varepsilon|$ piccolo. Denotiamo con $\xi(y,\varepsilon)$ la sua inversa, $x = \xi(y,\varepsilon)$ e consideriamo quindi

$$v(y,\varepsilon) := w(\xi(y,\varepsilon),\varepsilon), \quad y \in I^*_\varepsilon$$

Poiché $I^*_0 = I$ e $v(y,0) = w(\xi(y,0),0)$, abbiamo $u = v(\cdot,0)$, cioè $v(\cdot,\varepsilon)$ è una *variazione* di u per ε piccolo.

Se ora

$$\mathscr{F}(u,I) := \int_I F(x,u,u')\,dx,$$

si dice che $\mathscr{F}(u,I)$ è *invariante* rispetto alle trasformazioni (5.43) se

$$\mathscr{F}(v(\varepsilon, I^*_\varepsilon) = \mathscr{F}(u,I).$$

Vale allora

5.8. TEOREMA (*Noether*). *Supponiamo che $\mathscr{F}(u,I)$ sia invariante rispetto alle trasformazioni* (5.43) *con generatori infinitesimali μ e $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^n)$ in* (5.44)*, allora l'espressione*

$$F\,\mu + F_{p^i} \cdot (\omega^i - \frac{du^i}{dx}\mu)$$

è costante lungo ogni punto stazionario $z = u(x)$, $x \in I$, di (F).

Vediamo ora come le *leggi di conservazione* seguano dal teorema di Noether.
Conservazione dell'energia. Se F non dipende esplicitamente da x, allora $\mathscr{F}$ è invariante rispetto alla famiglia di traslazioni

$$\eta(x,\varepsilon) = x+\varepsilon, \quad w(x,\varepsilon) = u(x),$$

che hanno generatori infinitesimali

$$\mu(x) = 1, \quad \omega(x) = 0.$$

Segue dal teorema di Noether che

$$F - u' \cdot F_p = \text{cost}$$

lungo ogni punto stazionario di $\mathscr{F}$.

In particolare, nel caso in cui F sia la lagrangiana L del problema degli n corpi otteniamo che l'energia $T+U$ resta costante lungo la traiettoria di ogni moto.

Limitandoci ora al problema degli n corpi, è chiaro che $L(X)$ non cambia il suo valore se sottoponiamo l'$\mathbb{R}^3$ di riferimento a traslazioni o rotazioni, perché queste trasformazioni non cambiano né le distanze r_{ij} di due punti né l'energia cinetica.
Conservazione del momento totale. Consideriamo il gruppo di traslazioni

$$t* = t, \quad x_j^* = x_j+\varepsilon, \quad y_j^* = y_j, \quad z_j^* = z_j, \quad j = 1,\dots,n.$$

Allora abbiamo

$$\mu = 0, \quad \omega = (e_1,e_1,\dots,e_1), \quad \text{dove} \quad e_1 = (1,0,\dots,0).$$

Il teorema di Noether ci dà allora

$$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 + \cdots + m_n\dot{x}_n = \text{cost}.$$

Poiché relazioni simili valgono per y_j e z_j concludiamo

$$\sum_{j=1}^{n} m_j\dot{X}_j = A,$$

dove A è un vettore costante in $\mathbb{R}^3$.
Conservazione del momento angolare totale. Consideriamo il gruppo di rotazioni

$$t* = t, \quad x_i^* = x_i\cos\varepsilon + y_i\sin\varepsilon, \quad y_i^* = -x_i\sin\varepsilon + y_i\cos\varepsilon, \quad z_j^* = z_j,$$

con generatori infinitesimali

$$\mu = 0, \quad \omega = (Z_1,Z_2,\dots,Z_n) \quad \text{dove} \quad Z_j = (y_j,x_j,0).$$

Troviamo quindi

$$m_1(y_1\dot{x}_1 - x_1\dot{y}_1) + \cdots + m_n(y_l\dot{x}_n - x_n\dot{y}_n) = \text{cost}.$$

Ruotando ora attorno agli assi y e z si trova infine

$$\sum_{j=1}^{n} m_j X_j \times \dot{X}_j = C,$$

dove C è un vettore costante in $\mathbb{R}^3$.

CAPITOLO 6

Il problema di Cauchy: esistenza e unicità

In questo capitolo discutiamo il problema della risolubilità delle equazioni differenziali non lineari, confrontando metodi per la risolubilità del problema di Cauchy che sono stati introdotti nel corso dell'Ottocento e agli inizi del Novecento. I nomi rilevanti, tra altri, sono quelli di Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), che per primo affrontò il problema in vari lavori tra il 1820 e il 1830, di Rudolf Lipschitz (1832–1903), che indebolì le ipotesi di Cauchy, di Joseph Liouville (1809–1882), che per primo pubblicò nel 1838 il metodo delle approssimazioni successive a cui Emile Picard (1856–1941) diede una forma generale, di Giuseppe Peano (1858–1932) che dimostrò un teorema generale di esistenza tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento, e infine, con gli sviluppi dell'analisi funzionale, di Stefan Banach (1892-1945), a cui si deve il teorema del punto fisso negli anni venti del Novecento, di Juliusz Pawel Schauder (1899-1943) e di Renato Caccioppoli(1904-1959). Per ulteriori informazioni, soprattutto sugli aspetti tecnici, si può consultare la vasta letteratura esistente e, ad esempio, [18] [47] [46] [48] [49].

Risulta evidente il salto temporale e ancor più risulterà notevole il salto in termini di astrazione tra questo capitolo e i precedenti. Infatti, in considerazione del tema e del periodo in cui questo si è sviluppato, saremo costretti ad usare in questo capitolo un linguaggio preciso e per vari aspetti più formale e astratto, lontano da quello usato prima e che noi abbiamo usato fino ad ora. Ciò permetterà al lettore di constatare, da una parte, come le richieste di rigore siano collegate a questioni, che potrebbero esser tacciate di dettaglio, ma che sono essenziali a una più completa gestione e comprensione delle situazioni discusse e, dall'altra, come sia necessario passare a un grado di astrazione maggiore che, a sua volta, impone maggiore difficoltà a seguire i dettagli.

Consideriamo un'equazione differenziale non lineare del primo ordine

$$x' = f(t,x) \tag{6.1}$$

dove $f(t,x)$ è una funzione *continua* data nelle due variabili (t,x). In realtà tutto quello che diremo vale anche per sistemi di equazioni differenziali del primo ordine a cui si riducono, come abbiamo visto, anche le equazioni differenziali di ordine superiore; ma noi ci limiteremo a parlare dell'equazione (6.1) per non appesantire le notazioni. Una soluzione è una funzione di classe C^1, cioè con derivate continue, in un opportuno intervallo $]\alpha,\beta[$, $\alpha<\beta$, tale che $x'(t) = f(t,x(t))$ per ogni $t\in]\alpha,\beta[$. In relazione all'indeterminatezza dell'intervallo $]\alpha,\beta[$, se $x_1\in C^1(]\alpha_1,\beta_1[)$ and $x_2\in C^1(]\alpha_2,\beta_2[)$ sono due soluzioni, diciamo che x_2 è una *continuazione* di x_1 se $]\alpha_1,\beta_1[\subset]\alpha_2,\beta_2[$ e $x_1(t)=x_2(t)$ per ogni $t\in]\alpha_1,\beta_1[$. Diciamo che una soluzione è una *soluzione massimale* se non ha nessuna continuazione. Le soluzioni si chiamano anche *orbite* o *traiettorie* o *curve integrali* dell'equazione differenziale.

Il problema di trovare una soluzione (una soluzione massimale) dell'equazione (6.1) che soddisfi la condizione iniziale $x(t_0)=x_0$, dove (t_0,x_0) è un punto del dominio Ω di f, si chiama *problema di Cauchy*; in modo più preciso, esso consiste in: data una funzione continua $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e $(t_0,x_0)\in\Omega$, trovare un intervallo $]\alpha,\beta[$ contenente t_0 e una funzione $x(t)$ di classe $C^1(]\alpha,\beta[)$ tale che

$$\begin{cases} x'(t)=f(t,x(t)) & \forall t\in]\alpha,\beta[,\\ x(t_0)=x_0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Geometricamente questo significa trovare una funzione $x(t)$ su un opportuno intervalla $]\alpha,\beta[$ il cui grafico ha in ogni suo punto $(t,x(t))$ pendenza $f(t,x(t))$.

Tranne che per le equazioni lineari e pochi altri casi, in generale le equazioni differenziali non sono risolubili in forma chiusa, cioè in termini di funzioni elementari e loro primitive. Si pongono allora naturalmente alcuni problemi: Esiste sempre una soluzione del problema di Cauchy? Questa eventuale soluzione è unica? È definita per tutti i tempi? È possibile approssimarla con funzioni elementari con un grado di accuratezza assegnato? Si pongono anche altre questioni relative al comportamento qualitativo delle soluzioni, ad esempio, supponiamo che la soluzione esista unica per tutti i tempi, quale è il suo comportamento all'infinito? Diverge? Converge? Oscilla? E, se cambiamo di poco i dati iniziali la soluzione cambierà di poco? O invece due soluzioni con dati iniziali vicini possono differire molto? In quest'ultimo caso si dice che il sistema ha un comportamento *caotico*.

Noi ci limiteremo a discutere la questione dell'esistenza e dell'unicità. Cominciamo con due semplici ma illuminanti esempi.

6.1. ESEMPIO (*Blow-up in tempo finito*). La funzione reale $x(t)=1/(1-t)$, $t\in]-\infty,1[$, risolve il problema

$$\begin{cases} x'(t)=x^2(t),\\ x(0)=1. \end{cases} \tag{6.3}$$

Malgrado l'equazione sia ben definita per ogni $(t,x)\in\mathbb{R}^2$, la soluzione $x(t)$ (si prova infatti che la soluzione del problema (6.3) è unica), esiste solo per un intervallo finito di tempi positivi. Inoltre, quanto lungo sia l'intervallo di esistenza per tempi positivi dipende dal valore iniziale; infatti per $\lambda > 0$, la funzione $x_\lambda(t) = \lambda/(1-\lambda t)$, $t \in]-\infty, 1/\lambda[$, è la soluzione (massimale) del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2, \\ x(0) = \lambda. \end{cases}$$

Questo in contrasto con il caso di equazioni differenziali lineari che sono risolubili nell'intero intervallo di tempi per cui sono definite.

6.2. ESEMPIO (*Non unicità*). Per tutti gli $a < 0 < b \in \mathbb{R}$, le funzioni

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-a)^2 & \text{se } t < a, \\ 0 & \text{se } a \leq t \leq b, \\ \frac{1}{4}(t-b)^2 & \text{se } t > b, \end{cases}$$

sono di classe $C^1(\mathbb{R})$ e risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|x|}, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

questo in contrasto ancora con il caso lineare in cui la soluzione del problema di Cauchy è univocamente determinata dalla condizione iniziale.

Concludiamo questa introduzione con una osservazione particolarmente utile per il seguito. Infatti ci permette di richiedere per l'eventuale soluzione condizioni meno stringenti.

6.3. PROPOSIZIONE. *Sia Ω un dominio in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e sia $f(t,x) : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $x(t) \in C^1([t_0 - r, t_0 + r], \mathbb{R})$ risolve il problema di Cauchy* (6.2) *se e solo se $x(t)$ appartiene a $C^0([t_0 - r, t_0 + r], \mathbb{R})$ e soddisfa l'equazione integrale*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \qquad \forall t \in [t_0 - r, t_0 + r]. \tag{6.4}$$

DIMOSTRAZIONE. Set $I := [t_0 - r, t_0 + r]$. Se $x \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ è soluzione del problema (6.2), allora integrando x soddisfa (6.4). Viceversa, se $x \in C^0(I, \mathbb{R})$ e soddisfa l'equazione (6.4), allora, per il teorema fondamnetale del calcolo, $x(t)$ è differenziabile e $x'(t) = f(t, x(t))$ in I, in particolare $x(t)$ ha derivate continue; inoltre da (6.4) segue anche $x(t_0) = x_0$. $\square$

6.1. *Perché un teorema di esistenza*

Forse bisognerebbe cominciare con il discutere il significato del termine piuttosto problematico 'esistenza', cosa che però non faremo preferendo restare sul problema che stiamo considerando: c'è una funzione continua che risolve l'equazione integrale (6.4)? Come abbiamo visto, per molto tempo la questione esistenza non è stata, diciamo, centrale e, ancor oggi, molti probabilmente la trovano un po' strana. Se le equazioni differenziali rappresentano o modellano processi concreti è chiaro che hanno soluzioni. Ma forse la considerazione andrebbe rovesciata, se l'equazione non ha soluzione forse non siamo in presenza di un buon modello di quello che vorremmo descrivere.

In ogni caso, vedremo che è molto *pericoloso* operare con cose che 'non esistono' anche se a volte, conveniamo, possa essere piacevole e addirittura 'utile'. E questo sia che si intenda l'esistere nel senso ordinario sia che si intenda nel senso delle astrazioni o dei concetti (qualunque cosa immaginiamo esiste mentalmente), almeno se prima non ci assicuriamo che la loro assunta esistenza non contraddice altro della nostra conoscenza. L'implicazione logica o matematica "$P \Rightarrow Q$" equivalentemente "$(\text{non } P)$ o Q" risulta falsa solo nel caso che la premessa sia vera e la conclusione falsa. In particolare ci dice che da una contraddizione è possibile dedurre sia il vero sia il falso[1].

Il problema dell'esistenza diventa rilevante in matematica alla metà dell'Ottocento quando Weierstrass osserva che le dimostrazioni di Steiner relative al problema isoperimetrico non sono corrette/complete. Steiner aveva dimostrato (con procedimenti di simmetrizzazione) che, se una figura geometrica ha area massima tra tutte quelle di perimetro dato, allora questa deve essere il cerchio — un po' come abbiamo già visto nel Capitolo 3: se una curva minimizza l'area tra tutte quelle con perimetro assegnato, allora è un punto stazionario del funzionale area, e allora è un cerchio. L'obiezione è che perché questo sia un ragionamento conclusivo bisogna prima provare che ci sia una tale figura minimizzante. Parafrasando [62], il maggiordomo, unico possibile indiziato dell'assassinio del conte, è l'assassino sempre che ci sia stato effettivamente un assassinio, cioè che di assassinio e non di suicidio o di morte naturale si tratti.

1 O perlomeno questo è il senso in cui l'implicazione viene usata in matematica. In realtà le discussioni sul valore di verità da attribuire all'implicazione risalgono, secondo Sesto Empirico (II-III sec. d.C.), alla scuola megarico-stoica e coinvolgono i filosofi del IV secolo a.C. Diodoro Crono, Filone di Megara e Crisippo (280-206 a.C.). Ancora agli inizi del 1900 le discussioni continuavano; ad esempio, Henri Poincaré in [99] così commenta:

> Russell arriva a concludere che una qualunque proposizione falsa implica tutte le altre proposizioni, vere o false che siano. Couturat afferma che una tale conclusione può sembrare, a prima vista, paradossale. Eppure, basta aver corretto un cattivo compito di matematica per rendersi subito conto che Russell ha perfettamente ragione. Il candidato, spesso, deve penare molto per dedurre la prima equazione, falsa: ma una volta che ha ricavato questa, gli diventa facilissimo accumulare i risultati più stupefacenti, alcuni dei quali possono anche essere esatti.

Per tutto l'Ottocento fu in qualche modo costante l'uso di argomentazioni del tipo di quelle di Steiner, con tentativi di rimediare con argomenti che a loro volta nascondevano lo stesso errore — un racconto di ciò si trova in [82]. La questione fu definitivamente chiusa quando Perron [98] mostrò che con lo stesso argomento con cui si dimostra che *tra tutte le curve con dato perimetro il cerchio racchiude area più grande* — cioè, per ogni curva che non sia un cerchio c'è un metodo (quello di Steiner) per cui si trova una curva che racchiude un'area più grande — è possibile dimostrare che *fra tutti gli interi positivi l'intero più grande è 1*, infatti per ogni altro intero positivo che non sia 1 c'è un metodo — che consiste semplicemente nel prendere il quadrato — con il quale si trova un intero positivo più grande: il punto è che non c'è nessun intero positivo massimo.

6.2. *Il caso lipschitziano: esistenza e unicità*

In considerazione dei due esempi, Esempio 6.1 e Esempio 6.2, distinguiamo il caso in cui $f(t,x)$ sia regolare (lipschitziana) dal caso in cui $f(t,x)$ sia solo continua.

6.2.1. *Le approssimanti di Eulero*

Cominciamo con una rilettura del metodo di discretizzazione presentato da Eulero in [35], Vol. I, Parte I, Sezione 2, Capitolo 7, Problema 85. Per semplicità, consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ x'(t) = f(x(t)) \end{cases} \tag{6.5}$$

dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione regolare e sia $x(t)$ una soluzione nell'intervallo $[0,T]$. Se h piccolo è il passo di discretizzazione, sostituiamo nell'equazione differenziale la derivata con il quoziente differeniale $(x(t+h)-x(t))/h$, trovando

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} \simeq f(x(t)).$$

Questo suggerisce di di approssimare la soluzione di $x'(t) = f(x(t))$ con la spezzata

$$x^{(h)}(t) := x_k + (ht-k)x_{k+1} \qquad t \in [k/h,(k+1)/h),\ k = 0,1,2,\dots$$

dove

$$\begin{cases} x_0 = x_0, \\ x_{k+1} = x_k + hf(x_k). \end{cases} \tag{6.6}$$

In altre parole x_{k+1} è il punto di arrivo dopo un tempo h se partiamo da x_k e ci muoviamo con velocità costante $f(x_k)$, mentre $x^{(h)}(t)$ è l'interpolata lineare. Abbiamo allora

6.4. PROPOSIZIONE. *La successione di funzioni* $\{x^{(h)}(t)\}$ *converge uniformemente alla soluzione* $x(t)$ *di* (6.5) *in* $[0,T]$. *Inoltre, se* $M := \sup_{]0,T[} |f(x(t))|$, $L := \sup_{]0,T[)} |f'(x(t))|$ *e* $h := T/N$, *allora*

$$|x_N - x(T)| \le \frac{M}{2}(e^{LT}-1)h. \tag{6.7}$$

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col dimostrare la (6.7). Dall'equazione $x'(t) = f(x(t))$ abbiamo

$$|x(t)-x(s)| \le \int_s^t |f(x(\tau))|\,d\tau = M|s-t|, \tag{6.8}$$

$$x((k+1)h) = x(kh) + \int_{kh}^{(k+1)h} f(x(s))\,ds, \qquad k = 0,1,\dots,N-1.$$

Se $x_0 := x(0)$, $x_{k+1} := x_k + hf(x_k)$ e $\delta_k := |x_k - x(kh)|$, deduciamo

$$\begin{aligned}\delta_{k+1} &\le \delta_k + h|f(x(kh)) - f(x_k)| + \int_{kh}^{(k+1)h} \Big(f(x(s)) - f(x(kh))\Big)\,ds \\ &\le (1+Lh)\delta_k + L\int_{kh}^{(k+1)h} |x(s)-x(kh)|\,ds \le (1+Lh)\delta_k + \frac{LM}{2}h^2.\end{aligned}$$

Iterando, otteniamo allora per $k = N$, poiché $\delta_0 = 0$,

$$\delta_k \le (1+Lh)^k\delta_0 + \frac{LMh^2}{2}\sum_{j=0}^{k-1}(1+Lh)^j = \frac{LMh^2}{2}\,\frac{(1+Lh)^k-1}{Lh} = \frac{M}{2}\Big[\big(1+\frac{LT}{N}\big)^{N/T}-1\Big]h.$$

Ora per $s \in [kh,(k+1)h]$, abbiamo

$$|x^{(h)}(s) - x(s)| \le |x^{(h)}(s) - x_k| + |x_k - x(kh)| + |x(kh)-x(s)| \le 3Me^{LT}\,h,$$

poiché $|x^{(h)}(s) - x_k| \le |x_{k+1} - x_k| \le Mh$ per definizione, $|x(kh)-x(s)| < Mh$ per (6.8) e $|x_k - x(kh)| \le \frac{M}{2}(e^{LT}-1)h$ per (6.7). □

Si noti che l'approssimante di Eulero è definita in modo *costruttivo* e utilizzabile su un computer. La (6.7) dice che l'errore decresce proporzionalmente rispetto al passo; tuttavia, la costante di proporzionalità dipende in maniera esponenziale dall'ampiezza dell'intervallo: se ε_0 è l'errore ammissibile allora il passo T/N deve verificare $\frac{M}{2}(e^{LT}-1) < \varepsilon_0$.

Possiamo usare le stesse approssimazioni per trovare la soluzione? La questione è un po' più delicata a causa dell'Esempio 6.1 che mostra che l'eventuale dominio di esistenza della/e soluzioni dipende dal dato iniziale. Intanto, bisognerà che le approssimanti di Eulero vivano tutte in un dominio comune.

Le approssimanti di Eulero. Sia $f(t,x): D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua nel rettangolo chiuso

$$R := \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,|\, |t-t_0| \le a,\ |x-x_0| \le b\}$$

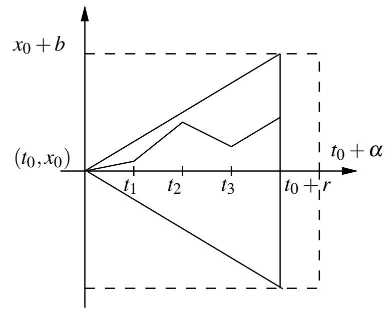


FIGURA 1

attorno al punto (t_0,x_0), quindi limitata $|f(t,x)| \leq M$ in R, e sia

$$r \leq \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Essendo R chiuso e limitato, la funzione f è *uniformemente continua* in R, *teorema di Heine-Borel*, in particolare per ogni ε esiste δ_ε tale che

$$|f(t,x) - f(\bar{t},\bar{x})| \leq \varepsilon \tag{6.9}$$

per tutti i punti (t,x), $(\bar{t},\bar{x})$ in R con $|t-\bar{t}| \leq \delta_\varepsilon$ e $|x-\bar{x}| \leq \delta_\varepsilon$. Dividiamo l'intervallo $[t_0,t_0+r]$ in n parti (si opererà in modo simile sull'intervallo $[t_0,t_0-r]$)

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_0 + r$$

in modo che si abbia

$$|t_k - t_{k-1}| \leq \min\left(\delta_\varepsilon, \frac{\delta_\varepsilon}{M}\right) \quad \forall k = 1,\ldots,n, \tag{6.10}$$

si noti che questa volta la scelta è solo esistenziale. Passiamo ora a definire l'approssimante di Eulero. Partendo da (t_0,x_0) costruiamo la linea retta con pendenza $f(t_0,x_0)$ procedendo fino a quando questa interseca la linea $t=t_1$ in un qualche punto (t_1,x_1). Dal fatto che $|f(t,x)| \leq M$ e dalla scelta di r segue che questo segmento sta nella regione triangolare T limitata dalle linee uscenti da (t_0,x_0) con pendenze M e $-M$ e dalla linea $t=t_0+r$, in particolare $(t_1,x_1) \in T$. Ripartendo da (t_1,x_1) con pendenza $f(t_1,x_1)$ fino a $t=t_2$ e proseguendo fino a t_n si costruisce una funzione lineare a tratti φ con grafico nella regione T che analiticamente è data da

(6.11)
$$\begin{cases} \varphi(t_0) = x_0, \\ \varphi(t) := \varphi(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, \varphi(t_{k-1})(t - t_{k-1}), t_{k-1} < t \leq t_k, k = 1,\ldots,n. \end{cases}$$

Dalla costruzione di φ è chiaro che φ è continua e derivabile tranne che in un numero finito di punti (i punti t_k) in $[t_0, t_0 + r]$ (estendendo la costruzione in $[t_0 - r, t_0 + r]$) e che

$$|\varphi(t) - \varphi(\bar{t})| \leq M|t - \bar{t}| \quad \text{per } t, \bar{t} \in [t_0 - r, t_0 + r]. \tag{6.12}$$

Infine, se $t_{k-1} < t < t_k$, allora (6.12) e (6.10) implicano che $|\varphi(t) - \varphi(t_{k-1}| \leq \delta_\varepsilon$; quindi da (6.11) e (6.9)

$$|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| = |f(t_{k-1}, \varphi(t_{k-1})) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon.$$

Abbiamo quindi costruito quella che si chiama una *soluzione* $\varepsilon-$*approssimata* del problema (6.2) in $[t_0 - r, t_0 + r]$ se definiamo *soluzione* $\varepsilon-$*approssimata di* (6.2) *nell'intervallo* $I \subset R$ *ogni funzione* φ *continua in* I, *di classe* C^1 *tranne che in un numero finito di punti dove* φ' *ha limiti destro e sinistro finiti e, infine,* $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon$.

Restringiamo ora la classe delle nonlinearità in considerazione richiedendo che f sia lipschitziana in x uniformemente rispetto a t con costante L

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y| \quad \forall (t,x), (t,y) \in R$$

dove $\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$ e sia sempre $|f(x,t)| \leq M$ in R. In questo caso vedremo come sia possibile stimare la differenza di due soluzioni $\varepsilon-$approssimate dell'equazione $x' = f(t,x)$; cosa che, da una parte, implica in particolare *unicità* dell'eventuale soluzione e, dall'altra, la convergenza delle soluzioni $\varepsilon-$approssimate (delle approssimanti di Eulero) ad una soluzione e quindi alla soluzione del problema di Cauchy (6.2) in $[t_0 - r, t_0 + r]$, $r \leq \min(a, b/M)$.

6.5. PROPOSIZIONE. *Sia $f(t,x)$ una funzione continua e lipschitziana in x uniformemente rispetto a t con costante L in R. Siano φ_1 e φ_2 due soluzioni rispetivamente ε_1- e ε_2-approssimate di $x' = f(t,x)$ in un qualche intervallo I contenente t_0 e supponiamo che*

$$|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)| \leq \delta \tag{6.13}$$

dove δ è una costante non negativa. Se $\varepsilon := \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, allora per ogni $t \in I$

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq \delta\, e^{L|t-t_0|} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right) \tag{6.14}$$

DIMOSTRAZIONE. Operando a destra di t_0 (ma lo stesso vale a sinistra), da

$$|\varphi_i'(s) - f(s, \varphi_i(s)| \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, 2$$

integrando da t_0 a t troviamo

$$|\varphi_i(t) - \varphi_i(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds| \leq \varepsilon_i(t - t_0), \quad i = 1, 2$$

e quindi

$$\begin{aligned}|\big(\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\big)-\big(\varphi_1(t_0)-\varphi_2(t_0)\big)\\ -\int_{t_0}^{t}\Big(f(s,\varphi_1(s))-f(s,\varphi_2(s)\Big)\,ds|\le\varepsilon(t-t_0).\end{aligned}$$

Per $\phi(t):=|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|$ deduciamo quindi

$$\phi(t)\le\phi(t_0)+\int_{t_0}^{t}|f(s,\varphi_1(s))-f(s,\varphi_2(s))|\,ds+\varepsilon(t-t_0)$$

e usando la lipschitzianità di f

$$\phi(t)\le\phi(t_0)+L\int_{t_0}^{t}\phi(s)\,ds+\varepsilon(t-t_0). \tag{6.15}$$

Definiamo $\Phi(t):=\int_{t_0}^{t}\phi(s)\,ds$ allora la (6.15) diventa

$$\Phi'(t)-L\Phi(s)\le\delta+\varepsilon(t-t_0)$$

poiché per la (6.13) $\phi(t_0)\le\delta$. Moltiplicando per $e^{-L(t-t_0)}$ e integrando da t_0 a t otteniamo

$$e^{-L(t-t_0)}\Phi((t)\le\frac{\delta}{L}\big(1-e^{-L(t-t_0)}\big)-\frac{\varepsilon}{L^2}e^{-L(t-t_0)}\big(1+L(t-t_0)\big)+\frac{\varepsilon}{L^2}$$

o

$$\Phi(t)\le\frac{\delta}{L}\big(e^{L(t-t_0)}-1\big)-\frac{\varepsilon}{L^2}\big(1+L(t-t_0)\big)+\frac{\varepsilon}{L^2}e^{L(t-t_0)}$$

che combinata con la (6.15) dà

$$\phi(t)\le\delta e^{L(t-t_0)}+\frac{\varepsilon}{L}\big(e^{L(t-t_0)}-1\big) \tag{6.16}$$

e quindi la (6.14).[2] □

La (6.14) dice che due soluzioni $\varepsilon-$approssimate in un intorno di t_0 distano poco se δ e ε sono piccoli; in particolare, due soluzioni ($\varepsilon=0$) coincidono se partono dallo stesso punto ($\delta=0$). Ma si ha di più: le soluzioni $\varepsilon-$approssimate, in particolare le approssimanti di Eulero, convergono alla soluzione del problema di Cauchy (6.2) in un intorno di t_0 quando $\varepsilon\to 0$.

6.6. TEOREMA (*di esistenza*). *Sia $f(t,x)$ una funzione continua in $R=\{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,|t-t_0|\le a,\ |x-x_0|\le b\}$ e lipschitziana in x uniformemente rispetto a t con costante L. Se*

$$M:=\max_R|f(t,x)|\quad e\quad r=\min\Big(a,\frac{b}{M}\Big),$$

[2] Il fatto che da (6.15) segua (6.16) appare in letteratura come *lemma* o *diseguaglianza di Grönwall* da Thomas Hakon Grönwall (1877–1932).

allora esiste unica soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy (6.2) *nell'intervallo* $|t-t_0| \le r$ *e dato inziale* $x(t_0) = x_0$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{\varepsilon_n\}$ una successione decrescente a 0 per $n \to \infty$ e per ogni n sia φ_n una soluzione ε_n-approssimata. Allora

$$\varphi_n(t) = t_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f(s, \varphi_n(s)) + \Delta_n(s) \Big)\, ds \tag{6.17}$$

dove $\Delta_n(t) = \varphi_n'(t) - f(t, \varphi_n(t))$ nei punti in cui φ_n' esiste e $\Delta_n(t) = 0$ altrimenti. Ora $\Delta_n(t) \to 0$ per $n \to \infty$ *uniformemente* in $|t-t_0| \le r$. Dalla (6.14) segue allora

$$|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| \le \frac{(\varepsilon_n + \varepsilon_m)(e^{Lr} - 1)}{L} \quad \forall |t-t_0| \le r. \tag{6.18}$$

Cioè, per ogni fissato t la successione $\{\varphi_n(t)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, quindi ha limite $\varphi(t)$, l'uniformità della convergenza $\varphi_n \to \varphi$ permette ora di provare facilmente che il limite è continuo (infatti

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(\tau)| \le\, & |\varphi(t) - \varphi_n(t)| + |\varphi_n(t) - \varphi_n(\tau)| \\ & + |\varphi_n(\tau) - \varphi_m(\tau)| + |\varphi_m(\tau) - \varphi(\tau)| \end{aligned}$$

e fissati n, m grandi il primo e l'ultimo termine a destra sono piccoli, mentre il secondo e il terzo sono piccoli per la continuità di φ_n e φ_m se $|t-\tau|$ è piccolo). Ancora, l'uniforme continuità di f (la lipschitzianità) in R dà anche la convergenza uniforme di $f(t, \varphi_n(t))$ a $f(t, \varphi(t))$ in $|t-t_0| \le r$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} \Big(f(s, \varphi_n(s)) + \Delta_n(s) \Big)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$$

e da (6.17)

$$\varphi(t) = t_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$$

che prova l'esistenza di una soluzione per via della Proposizione 6.3. □

Osserviamo infine che dalla (6.18) vale la seguente *stima dell'errore* tra la soluzione e le approssimanti

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| \le \frac{\varepsilon_n \big(e^{L|t-t_0|} - 1\big)}{L} \tag{6.19}$$

6.2.2. *Lo spazio delle funzioni continue e limitate*

Prendendo spunto dalla dimostrazione del Teorema 6.6 conviene passare ad un grado di astrazione maggiore muovendoci verso una visione *funzionale*. Questo ci permetterà di scrivere in modo più sintetico (richiedendo a volte uno sforzo maggiore per la comprensione) e d'altra parte di trasportare fatti che conosciamo in $\mathbb{R}$ in un contesto più ampio.

Sia I un intervallo limitato di $\mathbb{R}$; indichiamo con $C_b(I,\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue e limitate da I in $\mathbb{R}$. Si definisce la *norma*, a volte si specifica *norma infinito*, di $f \in C_b(I,\mathbb{R})$ come

$$||f||_{\infty,I} := \sup_{t\in I} |f(t)|.$$

È chiaro allora che

$$d(f,g) := ||f-g||_{\infty,I}$$

definisce una distanza in $C_b(I,\mathbb{R})$. Si vede quindi che $||\cdot||_{\infty,I}$ si comporta un po' come $|\cdot|$ in $\mathbb{R}$, in particolare possiamo parlare di *successioni di Cauchy* in $C_b(I,\mathbb{R})$. Quanto visto nella dimostrazione del Teorema 6.6 si legge allora: *le successioni di Cauchy in $C_b(I,\mathbb{R})$ sono convergenti, cioè $C_b(I,\mathbb{R})$ è uno spazio completo* [si noti che questo dipende dalla completezza dello spazio di arrivo $\mathbb{R}$ in $C_b(I,\mathbb{R})$]. Ma possiamo fare di più, come in $\mathbb{R}$ possiamo ovviamente considerare serie di funzioni continue e limitate $\sum_0^\infty f_n(x)$, parlare di convergenza di queste serie e di *convergenza totale* intendendo che la serie numerica $\sum_0^\infty ||f_n(x)||_\infty$ converge. Esattamente come in $\mathbb{R}$ e utilizzando la completezza di $\mathbb{R}$, si vede allora che se una serie di funzioni totalmente convergente converge in $C_b(I,\mathbb{R})$ e converge ad (ha come somma) una funzione continua.

Infine osserviamo che ora possiamo considerare funzioni da $C_b(I,\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ o anche trasformazioni da $C_b(I,\mathbb{R})$ a $C_b(I,\mathbb{R})$ e parlare di continuità di queste trasformazioni.

6.2.3. *Approssimazioni successive*

Ritorniamo al problema di Cauchy (6.2). Nelle ipotesi e con le notazioni del Teorema 6.6 è subito visto che la successione

$$\begin{cases} x_0(t) := x_0 \\ x_{k+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s,x_k(s))\,ds \quad \text{per} \quad k = 0,1,2,\ldots, \end{cases}$$

chiamata la successione delle *approssimazioni successive* (di Picard), è *ben definita*, cioè per ogni k $x_k(t)$ definisce una funzione nello spazio

$$X := \{x \in C^0([t_0-r,t_0+r]) \,|\, ||x-x_0||_\infty \le r\}$$

Infatti la trasformazione

$$F : X \to C^0([t_0-r,t_0+r]), \quad F[x](t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,x(s))\,ds$$

è una trasformazione continua che manda X in X.

Proveremo ora che la successione $\{x_k\}$ converge in X (che è uno spazio metrico completo) a una funzione continua $x_\infty \in X$. Passando poi al limite in $x_{k+1} = F[x_k]$, $x_\infty \in X$ risulta essere un *punto fisso* per F, cioè una soluzione di $x = F[x]$ e quindi del problema di Cauchy (6.2), anzi l'unica soluzione, come in precedenza, per via della Proposizione 6.5; cioè diamo una nuova dimostrazione del Teorema 6.6 in termini di successioni approssimanti. Per questo il teorema si chiama spesso *teorema di Picard* o *teorema di Picard-Lindelöf*.

Poniamo

$$M_0 := \max_I |f(t.x_0| \quad I := [t_0 - r, t_0 + r].$$

Allora per $t \in I$ (per semplicità prendiamo $t \in [t_0, t_0 + r]$) abbiamo

$$\begin{aligned}
|x_1(t) - x_0| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_0)|\, ds \leq M_0(t - t_0) \\
|x_2(t) - x_1(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_1(s)) - f(s, x_0(s))|\, ds \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} |x_1(s) - x_0(s)|\, ds \\
&\leq M_0 L \int_{t_0}^{t} (s - t_0)\, ds = \frac{M_0 L (t - t_0)^2}{2!}.
\end{aligned}$$

Supponiamo ora per induzione $|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq M_0 L^{k-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!}$; allora

$$\begin{aligned}
|x_{k+1}(t) - x_k(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s))|\, ds \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} |x_k(s) - x_{k-1}(s)|\, ds \\
&\leq M_0 L^k \int_{t_0}^{t} \frac{(s - t_0)^k}{k!}\, ds = M_0 L^k \frac{(t - t_0)^{k+1}}{(k+1)!}.
\end{aligned}$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq \frac{M_0}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1).$$

Da queste diseguaglianze si deduce facilmente che $\{x_k(t)\}$ è una successione di Cauchy in X quindi convergente (uniformemente) in X o che

$$x_k = x_0 + \sum_{0}^{k} (x_k - x_{k-1})$$

converge in X a una funzione $x_\infty \in X$.

Osserviamo che per la soluzione del problema di Cauchy x_∞ vale la seguente stima

$$|x_\infty(t) - x_0| \leq \frac{M_0}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1)$$

e la stima di convergenza

$$|x_\infty(t) - x_k(t)| \leq \frac{M_0}{L} (e^{|t-t_0|} - 1) \frac{\big(L|t - t_0|\big)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

In particolare, per l'equazione $y' = y$, con condizione iniziale $y(0) = 1$, le approssimazioni di Cauchy sono

$$y_n(x) = \sum_0^n \frac{x^k}{k!}$$

e il teorema garantisce che l'unica soluzione è $\sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}$. Inoltre essa è unica e positiva.

6.2.4. *Esistenza via punto fisso*

Osserviamo che tutte le dimostrazioni di esistenza (e unicità) date fino ad ora utilizzano la conoscenza della funzione esponenziale e^x. Vorremmo, cfr. Sezione 2.2, una dimostrazione di esistenza locale (e unicità) che non faccia riferimento alla funzione esponenziale e ci permetta di concludere invece che esiste (unica) soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale 1 in 0 dell'equazione $x' = x$. È in effetti possibile far questo (e con dimostrazione più 'semplice' delle precedenti) via un famoso *teorema di punto fisso* (provato da Stefan Banach nel 1922).

Sia X uno spazio metrico con metrica d. Una mappa $T : X \to X$ si dice una *contrazione* se esiste k, $0 \le k < 1$, tale che $d(T(x),T(y)) \le kd(x,y)$ $\forall x,y \in X$. Una contrazione è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz strettamente minore di 1, in particolare è una funzione continua su X.

6.7. TEOREMA (*del punto fisso di Banach*). *Sia X uno spazio metrico completo e $T : X \to X$ una contrazione, cioè esiste k, $0 \le k < 1$, tale che*

$$d(Tx,Ty) \le kd(x,y) \qquad \forall\, x,y \in X.$$

Allora T ha un unico punto fisso. Inoltre per ogni $x_0 \in X$, la successione $\{x_n\}$ definita per $n = 1,2\dots$ da $x_{n+1} := T(x_n)$ converge geometricamente a x e valgono le stime

$$d(x_n,x) \le \frac{k^n}{1-k} d(x_1,x_0),$$

e

$$d(x_{n+1},x) \le \frac{k}{1-k} d(x_{n+1},x_n), \quad d(x_{n+1},x) \le kd(x_n,x).$$

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente al più esiste un unico punto fisso; infatti se x e y sono due punti fissi, da $d(x,y) = d(Tx,Ty) \le kd(x,y)$, $0 \le k < 1$ segue $d(x,y) = 0$, cioè $x = y$.

Sia ora x_0 un qualunque elemento in X e per $n \ge 1$ sia $x_{n+1} := T(x_n)$. Si ha

$$d(x_{n+1},x_n) \le kd(x_n,x_{n-1}) \le k^n d(x_1,x_0) = k^n d(T(x_0),x_0),$$

dunque per la disuguaglianza triangolare, per $p > n$

$$d(x_p,x_n) \le \sum_{j=n}^{p-1} d(x_{j+1},x_j) \le \sum_{j=n}^{p-1} k^j d(x_1,x_0) \le \frac{k^n}{1-k} d(x_1,x_0) \to 0$$

per $n, p \to \infty$. Segue che $\{x_n\}$ è di Cauchy e converge. Il limite è necessariamente un punto fisso, come si vede passando al limite per $n \to \infty$ nella relazione $x_{n+1} = T(x_n)$. Lasciamo al lettore la facile dimostrazione delle stime di convergenza. $\square$

Osserviamo che la prima stima nella tesi del teorema in Teorema 6.7 permette di stimare il numero delle iterazioni sufficiente a raggiungere una fissata approssimazione. La seconda stima invece permette di valutare l'accuratezza di x_{n+1} come valore approssimato di x in termini di $d(x_{n+1}, x_n)$.

Con le notazioni del Teorema 6.6 consideriamo ancora lo spazio metrico completo (con metrica indotta dalla norma infinito)

$$X := \{x \in C^0([t_0 - r, t_0 + r]) \,|\, ||x - x_0||_\infty \leq r\}$$

e la trasformazione

$$F : X \to C^0([t_0 - r, t_0 + r]), \quad F[x](t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\, ds.$$

F manda X in X e, se inoltre $rL < 1$, F è una c-contrazione con $c := rL$. Infatti, se $x, y \in X$ allora

$$\begin{aligned} |F[x](t) - F[y](t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\, ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)|\, ds \\ &\leq Lr\, ||x - y||_\infty \end{aligned}$$

Ne deduciamo che F ha unico punto fisso in X e possiamo concludere

6.8. TEOREMA (*Esistenza locale*). *Sia $f(t, x)$ una funzione continua in $R = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b\}$ e lipschitziana in x uniformemente rispetto a t con costante L. Se*

$$M := \max_R |f(t, x)| \quad e \quad r < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right),$$

allora esiste unica soluzione $x(t) \in X$ del problema di Cauchy (6.2) *nell'intervallo $|t - t_0| \leq r$ e dato inziale $x(t_0) = x_0$.*

Supponiamo ora che $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$, sia continua e lipschitziana in $x \in \mathbb{R}$ uniformemente rispetto a $t \in I$ con costante L. Comunque si prenda $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, se $rL < 1$ la mappa F da $C^0([t_0 - r, t_0 + r])$ in $C^0([t_0 - r, t_0 + r])$, $F[x](t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\, ds$, è una contrazione e quindi ha un unico punto unito. Esiste quindi unica soluzione del problema di Cauchy in $[t_0 - r, t_0 + r]$ con valore iniziale in t_0 uguale a x_0. Iniziamo da un intervallo chiuso I_0 centrato in t_0 e raggio r, e sia $x : I_0 \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy $x(t_0) = x_0$; sia I_1 un intervallo centrato nell'estremo destro t_1 di I_0 e raggio minore o uguale di r, anche in I_1 c'è unica soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale in t_1 uguale a $x(t_1)$ e questa coincide con

x in $I_0 \cap I_1$ per via del teorema di esistenza locale. In altre parole, la soluzione di $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ su I_0 si prolunga ad una soluzione dello stesso problema iniziale in $I_0 \cup I_1$. Poiché con un numero finito di intervalli chiusi di raggio minore di r (fisso) ricopriamo l'intervallo iniziale e poiché da nessun punto di questa soluzione si può diramare un'altra soluzione, concludiamo

6.9. TEOREMA (*Esistenza globale*). *Sia I un intervallo (non necessariamente limitato) in $\mathbb{R}$ e sia $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e lipschitziana in x uniformemente rispetto a t, allora esiste unica soluzione in I del problema di Cauchy* (6.2).

Ovviamente il teorema precedente si applica al caso $f(t,x) := x, x(0) = 1$; osserviamo anche che la soluzione è chiaramente positiva per $t > 0$ e che non può annullarsi per nessun tempo negativo, perché localmente non possono diramarsi due soluzioni.

Anche nel caso del Teorema 6.8 possiamo sempre prolungare una soluzione, ma i tempi per cui si prolunga possono diminuire e non andare oltre un tempo $\bar{t}$, si veda l'Esempio 6.1, vale comunque un teorema di unicità locale su cui noi non insistiamo.

6.10. TEOREMA (*Unicità*). *Sia $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un dominio limitato e $f(t,x) : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua che sia anche localmente lipschitziana in x uniformemente rispetto a t e sia $(t_0, x_0) \in D$. Allora due soluzioni $x_1 : I \to \mathbb{R}$ e $x_2 : J \to \mathbb{R}$, definite rispettivamente in intervalli aperti I e J contenenti t_0, del problema*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

sono uguali in $I \cap J$.

6.3. *Il caso continuo: esistenza*

In quest'ultima sezione proviamo esistenza locale per il problema di Cauchy (6.2) assumendo solo continuità sul campo delle velocità $f(t,x)$ e discutiamo il problema della prolungabilità delle soluzioni e l'esistenza di soluzioni massimali.

6.3.1. *Teorema di esistenza*

Vale il seguente teorema chiamato spesso *teorema di Peano* o *teorema di Peano-Cauchy*

6.11. TEOREMA (*Peano*). *Sia $f(t,x)$ una funzione continua in un dominio D e sia (t_0,x_0) un punto in D. Allora esiste almeno una soluzione di*

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Nel Teorema 6.6 la lipschitzianità di f in x uniformemente rispetto a t permette di concludere via Proposizione 6.5 che una qualunque successione di soluzioni ε_i-approssimate, $i \to \infty$, in particolare le approssimanti di Eulero, convergono uniformemente, segue poi che il limite è soluzione. Il Teorema 6.11 sarebbe quindi dimostrato nel momento in cui potessimo scegliere una successione di soluzioni ε_i-approssimate. La difficoltà è che nel nostro caso le approssimanti di Eulero non sono in generale convergenti, ma possono avere più sottosuccessioni convergenti a limiti diversi, si veda il Problema 12 Capitolo 1 di [18]. Come scegliere una tale sottosuccessione?

Le approssimanti di Eulero in realtà oltre che *equilimitate* sono anche *equicontinue*, (6.12), e la risposta alla nostra domanda segue dal seguente noto teorema, dimostrato negli anni 1880-90,

6.12. TEOREMA (*Ascoli-Arzelà*). *Ogni successione $\{u_k\}$ in $C^0([c,d])$ che sia equilimitata e equicontinua ha una sottosuccessione che è convergente uniformemente.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un ordinamento dei numeri razionali $\{q_i\}$ dell'intervallo $[c,d]$. La successione $\{u_k(q_1)\}$ è limitata, ammetterà quindi una sottosuccessione convergente (per via del teorema di Bolzano-Weierstrass) che indichiamo con $\{u_{1,k}\}$. La sottosuccessione $\{u_{1,k}\}$ è limitata quando valutata sul secondo razionale q_2 e ammette dunque una sottosottosuccessione convergente in q_2 (e, ovviamente, in q_1), che indichiamo $\{u_{2,n}\}$. Questa a sua volta sarà limitata valutata in q_3, e cos via. Procedento in questo modo si costruisce una successione di sottosuccessioni $\{u_{m,k}\}$ convergeti per q_i, con i minore o uguale a m. La successione diagonale $\{u_{n,n}\}$ (che è una sottosuccessione di $\{u_k\}$) converge ora su ogni razionale contenuto in $[c,d]$.

Dimostriamo che $u_{n,n}$ è di Cauchy in $C^0([c,d])$ e quindi convergente, essendo $C^0([c,d])$ completo. Per l'equicontinuità della successione $\{u_k\}$, fissato $\varepsilon > 0$ sia δ tale che $|u_k(x) - u_k(y)| < \varepsilon$ per $x,y \in [c,d]$ con $|x-y| < \delta$. Ricoprendo $[c,d]$ con un numero finito di intervallini I_n, di ampiezza minore di δ, ogni x dell'intervallo $[c,d]$ appartiene a un I_n. Quindi si ha:

$$|u_{n,n}(x) - u_{m,m}(x)| < |u_{n,n}(x) - u_{n,n}(q_i)| + |u_{n,n}(q_i) - u_{m,m}(q_i)| + |u_{m,m}(q_i) - u_{m,m}(x)|$$

Il primo e il terzo termine a secondo membro sono minori di ε se scegliamo q_i in I_j dove I_j è tale tale che $x \in I_j$, in virtù dell'equi uniforme continuità, mentre il termine centrale (a secondo membro) è minore di ε per m,n sufficientemente grandi. $\square$

Del Teorema 6.11 è possibile dare una dimostrazione diciamo più funzionale in termini di teorema di punto fisso, cfr. [48]. Un famoso teorema di punto fisso di Brouwer assicura che *una funzione continua da un compatto convesso non vuoto di $\mathbb{R}^n$ in sé ha almeno un punto fisso*. Questo teorema si estende a spazi funzionali e a operatori compatti in spazi di Banach. Ricordiamo che uno *spazio di Banach X è uno spazio normato completo*, ad esempio $X := C^0([c,d])$ con la norma infinito, e un operatore A tra due spazi normati X,Y si dice *compatto* se è continuo e da ogni successione limitata $\{x_k\}$ in X è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ per cui $\{Ax_{n_k}\}$ è convergente. Vale allora

6.13. TEOREMA (*Caccioppoli-Schauder*). *Sia M un sottoinsieme chiuso, limitato, convesso e non vuoto di uno spazio di Banach. Ogni operatore compatto $A : M \to M$ da M in sé ha almeno un punto fisso.*

Non è ora difficile rileggere quanto sopra come segue. Se $R := \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \,|\, |t-t_0| \leq, |x-x_0| \leq b\}$ e $|f(t,x)| \leq M$ e se $r < \min\{a, b/M\}$ allora l'operatore

$$F[x](t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

manda l'insieme chiuso e convesso (dello spazio di Banach $C^0([x_0-r, x_0+r])$)

$$X := \left\{ x \in C^0([x_0-r, x_0+r], \mathbb{R}) \,\middle|\, x(t_0) = x_0,\ |x-x_0| \leq b \right\}$$

in sé ed è un operatore compatto, quindi ha almeno un punto fisso.

6.3.2. *Prolungamento delle soluzioni*

Sia $f : D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in D e sia $x(t)$ una soluzione per problema

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

nell'intervallo limitato $\gamma < t < \delta$; in particolare $(t, x(t)) \in D\ \forall t \in]\gamma, \delta[$. Se f limitata nell'intorno di $(\delta, x(\delta))$, allora $x(t)$ si può estendere in δ, per via della sua rappresentazione integrale. Inoltre, se $(\delta, x(\delta)) \in D$, allora l'estensione è C^1 fino a δ (e similmente in $(\gamma, x(\gamma))$).

Se ora ad esempio $(\delta, x(\delta))$ non è sul bordo di D e è possibile risolvere il problema con dato iniziale $x(\delta)$ in $t_0 = \delta$, possiamo prolungare la soluzione nel senso C^1 oltre il tempo δ, concludendo

6.14. TEOREMA (*di prolungamento delle soluzioni*). *Sia $f(t,x)$ continua in un aperto $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e localmente lipschitziana in x uniformemente rispetto a t. Allora l'unica soluzione (massimale) di $x'(t) = f(t, x(t))$ con $x(t_0) = x_0$ si estende per il futuro e per il passato fino a quando la chiusura del suo grafico incontra il bordo di D. Più precisamente, ogni soluzione massimale $x(t)$ è definita in un intervallo aperto $]\alpha, \beta[$ che ha la seguente proprietà: per ogni compatto $K \subset D$ esiste $\delta = \delta(K) > 0$ tale che $(t, x(t)) \notin K$ per $t \notin [\alpha+\delta, \beta-\delta]$.*

Segue in particolare

6.15. COROLLARIO. *Sia D un dominio in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, e $f\in C^1(D)$. Allora ogni soluzione massimale di $x'(t)=F(t,x(t))$ è tale che la chiusura del suo grafico raggiunge ∂D.*

6.16. COROLLARIO. *Sia $D :=]a,b[\times\mathbb{R}$ (a e b possono essere rispettivamente $+\infty$ and $-\infty$) e sia $f(t,x): D\to\mathbb{R}^n$ continua e localmente lipschitziana in x uniformemente rispetto a t. Allora ogni soluzione massimale di $x'=f(t,x)$ limitata in ogni intervallo strettamente contenuto in $]a,b[$ è definita sull'intero intervallo $]a,b[$.*

Osserviamo che, se f è limitata in $D :=]a,b[\times\mathbb{R}$, tutte le soluzioni di $x' = f(t,x)$ sono automaticamente limitate poiché le velocità sono limitate. Ed ancora

6.17. COROLLARIO. *Sia $f(t,x)$ da $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continua e localmente lipschitziana in x uniformemente rispetto a t. Supponiamo che esistano funzioni continue e non negative $a(t)$ e $b(t)$ tali che*

$$|f(t,x)|\le a(t)|x|+b(t).$$

Allora la soluzione massimale è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Infine, menzioniamo il seguente fenomeno a cui ci si riferisce come il *pennello di Peano*: Si consideri il problema

$$x'(t)=f(t,x(t)),\quad x(t_0)=x_0\quad \text{in } [a,b], \tag{6.20}$$

dove $f(t,x)$ è una funzione continua. Allora

(1) allora esistono una soluzione minimale e una massimale, cioè $\underline{x}(t)$ and $\overline{x}(t)$ solutioni di (6.20) tali che per ogni altra soluzione $x(t)$ di (6.20) abbiamo $\underline{x}(t)\le x(t)\le\overline{x}(t)$,

(2) se le soluzioni minimale e massimale di (6.20) esistono in $[t_0,t_0+\delta]$, allora in ogni punto $(\widetilde{t_0},\widetilde{x_0})$ con $\widetilde{t}\in[t_0,t_0+\delta]$ e $\widetilde{x}\in[\underline{x}(\widetilde{t}),\overline{x}(\widetilde{t})]$ passa una soluzione di (6.20).

CAPITOLO 7

Complementi e temi da sviluppare

Presentiamo qui una serie di temi complementari al testo che invitiamo il lettore ad affrontare autonomamente in termini moderni, cioè non necessariamente nel contesto storico, o analizzando fonti che possono essere reperiti in rete o nelle opere già citate.

7.1. *Serie binomiale.* Newton trovò per esponenti α razionali, $\alpha = p/q$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \qquad |x| < 1$$

dove

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} & \text{se } k \geq 1. \end{cases}$$

Come sappiamo oggi, l'uguaglianza è valida per ogni α reale e per $|x| < 1$ e può essere verificata come segue. Per il *criterio di d'Alembert*, la serie a destra converge per $|x| < 1$ e, se poniamo

$$S(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

le semplici regole di derivazione danno

$$(1+x)S'(x) = \alpha S(x),$$

quindi

$$\Big(\frac{S(x)}{(1+x)^\alpha}\Big)' = \frac{(1+x)S'(x) - \alpha S(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0,$$

da cui $S(x) = S(0)(1+x)^\alpha$.

7.2. *Legge esponenziale e legge a potenza.* La funzione esponenziale può essere caratterizzata come l'unica funzione $y(t)$ per cui il rapporto di due suoi valori è funzione del tempo trascorso

$$\frac{y(t)}{y(s)} = \phi(t-s).$$

Infatti, assumendo y e ϕ regolari e differenziando rispetto a t, s fisso, e valutando per $t = s$ troviamo

$$\frac{y'(s)}{y(s)} = \phi'(0),$$

quindi

$$y(t) = ce^{kt} \quad c \neq 0, \quad k = \phi'(0), \quad \phi t = e^{kt}.$$

Ci chiediamo per quali $y(t)$, $t > 0, y > 0$ vale per qualche ϕ

$$\frac{y(t)}{y(\tau)} = \phi\big(\frac{t}{\tau}\big) \quad \forall t, \tau > 0.$$

Come prima, assumendo y e τ regolari, differenziando in t e calcolando per $t = \tau$, troviamo l'equazione differenziale per la *legge a potenza*

$$\frac{ty'(t)}{y(t)} = \phi'(1) =: \alpha, \quad t > 0.$$

Si verifica che per ogni $c \in \mathbb{R}$ le $y(t) := ct^{\alpha}, t > 0$ sono soluzioni, anzi sono tutte e sole le soluzioni. Infatti, posto $z(t) := t^{-\alpha}y(t)$, abbiamo

$$z'(t) = t^{-\alpha-1}y(t)\big(-\alpha + \frac{ty'(t)}{y(t)}\big) = 0.$$

7.3. *Datazione al carbonio*. Sperimentalmente la quantità non ancora decaduta di una sostanza radioattiva diminuisce con un tasso proporzionale alla stessa. Si chiama vita media il tempo necessario perché la radiazione sia ridotta alla metà.

Raggi cosmici, particelle ad alta energia, bombardano gli strati superiori dell'atmosfera producendo un gran numero di neutroni. Questi a loro volta collidono con l'azoto dell'alta atmosfera e lo cambiano in parte in carbonio 14, C-14, sostanza radioattiva con una vita media di 5570 anni, chimicamente simile al carbonio. C-14 e ossigeno si uniscono e formano diossido di carbonio, che scende a terra e viene assorbito da tutti gli organismi viventi, piante e animali. Quando muoiono smettono di assorbire C-14 e confrontando con la radiazione emessa da un organismo simile morto di recente, si può datare i reperti fossili.

7.4. *Modelli di crescita delle popolazioni*. Probabilmente il più semplice e, in qualche modo, irrealistico modello di crescita di una popolazione è quello di Malthus (1766–1834) — il tasso di crescita proporzionale al numero degli individui o il tasso di crescita relativo è costante — che porta ad una legge di crescita esponenziale. Un modello più ragionevole è quello di Verhulst (1804-1848) dato dalla cosiddetta *equazione logistica* , [107].

La crescita di una popolazione (ad esempio di batteri) dipende anche da fattori esterni, come ad esempio la disponibilità di cibo. Se teniamo la quantità di cibo costante, diciamo sufficiente per L individui, è ragionevole pensare che il tasso di crescita relativo R tenderà a zero quando la popolazione si avvicina al valore L. Un semplice modello di questa situazione è assumere che $R(y) = k(1 - y/L)$. Indicando con $y(t)$ la popolazione al tempo t, siamo condotti all'equazione differenziale

$$y' = ky\Big(1 - \frac{y}{L}\Big), \tag{7.1}$$

chiamata *equazione logistica*.

Assumendo $L > 0$, riscriviamo formalmente la (7.1) come

$$k = \Big(\frac{1}{L-y} + \frac{1}{y}\Big)y' = \frac{d}{dt}\log\frac{y}{L-y}; \tag{7.2}$$

possiamo allora ipotizzare che

$$\log\frac{y(t)}{L-y(t)} = kt + c_1, \quad \text{cioè}, \quad y(t) = \frac{cL}{c+e^{-kt}}, \tag{7.3}$$

dove $c \in \mathbb{R}$, sono soluzioni dell'equazione logistica. In effetti è facile verificare che tutte le funzioni in (7.3) sono soluzioni. Osserviamo ancora che le funzioni $y(t) = 0$ e $y(t) = L$ sono pure soluzioni di (7.1), ma non contenute nella famiglia (7.3).

Si può argomentare provando che non ci sono altre soluzioni, cfr. [47], e che la crescita corrisponde alle aspettative del modello.

Modelli per simulare l'interazione tra due o più popolazioni furono sviluppati (e continuano ad essere studiati ed estesi) a partire dal 1925 indipendentemente da Alfred J. Lotka (1880–1949) e Vito Volterra (1860–1940), [79] [108] e vanno sotto il nome di *modelli di Lotka-Volterra*. Nel caso di due popolazioni è ragionevole assumere che il tasso di crescita relativo della prima popolazione sia proporzionale all'alto numero di individui come nel caso logistico corretto da un termine che tenga conto del numero di individui dell'altra specie. Abbiamo quindi

$$\frac{x'}{x} = A(E-x) - By$$

e un'equazione simile per y, cioè

$$\begin{cases} x' = Ax(E-x) - Bxy, \\ y' = Cy(F-y) - Dxy. \end{cases}$$

Un caso speciale è il cosiddetto *modello preda-predatore*

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$$

che, nella versione discreta, diventa

$$\begin{cases} x_{k+1} = (1+a)x_k - bx_k y_k, \\ y_{k+1} = (1-c)y_k + dx_k y_k. \end{cases}$$

7.5. *Modelli di evoluzione delle epidemie*. Il modello di Lotka-Volterra può anche esser letto come modello che rappresenta l'evoluzione di una epidemia. Supponiamo di essere in presenza di una malattia, come l'influenza, che non è letale e non porta all'immunità. In una popolazione di N individui sia $i(t)$ il numero degli individui infetti e $N - i(t)$ il numero degli individui soggetti all'infezione. Supponiamo che la probabilità di essere infettati sia proporzionale al numero dei contatti tra individui sani e infetti e che questi contatti siano proporzionali a $i(t)(N - i(t))$, mentre il numero dei guariti per unità di tempo sia proporzionale al numero degli infetti. Allora abbiamo

$$i'(t) = a\,i(t)\,(N - i(t)) - bi(t).$$

Si può ora argomentare o provare

(1) se $aN - b > 0$, allora il numero degli individui infetti tende a $N - b/a$: la malattia è endemica,
(2) se $aN - b < 0$, il numero degli individui infetti decresce esponenzialmente a zero: in altre parole la malattia non si diffonde.

Ovviamente tutto dipende dalla contagiosità della malattia, il parametro a, e dal tasso di guarigione b.

Supponiamo ora che la malattia sia contagiosa ma immunizzante, come il morbillo o la peste: gli individui colpiti dalla malattia non sono più soggetti alla malattia. Se $s(t)$, $i(t)$ e $r(t)$ indicano rispettivamente il numero di individui suscettibili di infezione, di individui infettati e di individui guariti o morti, allora

$$\begin{cases} i'(t) = a\,i(t)\,s(t) - b\,i(t), \\ s'(t) = -a\,i(t)\,s(t), \\ r'(t) = b\,i(t). \end{cases}$$

In questo caso si vede che

(1) se $i(0) > 0$ e $s(0) > 0$, allora $i(t) > 0$ e $s(t) > 0$ per ogni t, di conseguenza $s(t)$ decresce e $r(t)$ cresce; in particolare ci sono i limiti
$$s(t) \to s_\infty,\ r(t) \to r_\infty,\ m(t) := N - s(t) - r(t) \to m_\infty \qquad \text{as } t \to \infty,$$
(2) $m(t)$ è sommabile in $[0,\infty[$, quindi $m_\infty = 0$, cioè, l'epidemia si esaurisce (eventualmente eliminando la maggior parte degli individui) [Per vedere questo, sommare le prime due equazioni ottenendo $i'(t) + s'(t) = -bi(t)$ da cui $b\int_0^T i(t)\,dt \le N$],
(3) $s(t) \ge s(0)\exp(-aN/b)$, cioè, la malattia si esaurisce prima di infettare l'intera popolazione; la percentuale di individui immuni $s(t)/N$ è almeno $e^{-aN/b}$,
(4) infine, se $a\,s(0) - b < 0$, allora il numero degli individui infetti decresce esponenzialmente; se, al contrario, $a\,s(0) - b > 0$, allora il contagio inizialmente si diffonde e comincia a recedere nel momento in cui $as(t) - b = 0$.

7.6. *Serie doppie*. La seguente proposizione dà una condizione perché si possano scambiare l'ordine di due limiti.

7.7. PROPOSIZIONE. *Sia $\{a_{n,k}\}$ una succesione a doppio indice di numeri nonnegativi. Supponiamo che per ogni k, $a_{n,k}$ tende per $n \to \infty$ a a_k crescendo. Allora*
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^\infty a_{n,k} = \sum_{k=0}^\infty \lim_{n\to\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^\infty a_k.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $A_n := \sum_{k=0}^\infty a_{n,k}$ e $A = \sum_{k=0}^\infty a_k$. Vogliamo provare che $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Poiché $a_{n,k} \uparrow a_k$, si ottiene sommando su k gli $a_{n,k}$ che A_n cresce e che $A_n \le A$ per ogni intero n. Quindi $\lim_{n\to\infty} A_n \le A$.

Per provare la diseguaglianza opposta, osserviamo che per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni k esiste n_k tale che $a_{n,k} \ge a_k - \varepsilon 2^{-k}$ e dunque per ogni intero $\overline{k}$ scegliendo $\overline{n} := \max(n_1, \dots, n_k)$ si ha $a_{n,k} \ge a_k - \varepsilon 2^{-k}$ per ogni $k \le \overline{k}$ e $n \ge \overline{n}$. Sommando su k da 0 a $\overline{k}$ si ha dunque
$$\sum_{k=0}^{\overline{k}} a_{n,k} \ge \sum_{k=0}^{\overline{k}} a_k - \varepsilon \sum_{k=0}^{\overline{k}} 2^{-k} \ge A - 2\varepsilon$$
qualunque sia $\overline{k}$. Pertanto
$$A_n = \sum_{k=0}^\infty a_{n,k} \ge A - 2\varepsilon$$
e la tesi segue per l'arbitrarietà di ε. □

L'ipotesi di crescenza nella proposizione precedente non può essere eliminata. Ad esempio se
$$a_{n,k} = \begin{cases} \frac{k}{n} & \text{se } k = n, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$
Si ha $A_n = 1$ per ogni intero n e $A = 0$.

La proposizione precedente è essenzialmente quello che nella teoria dell'integrazione di Lebesgue si chiama il teorema di Beppo Levi, lo stesso risultato si può ottenere, come fatto da Weierstrass, o in termini di *convergenza dominata* o assumendo che la serie doppia sia *normalmente convergente*, intendendo con questo che (i) $|a_{k,n}| \le M_k$ e (ii) la serie $\sum M_k$ sia convergente, cfr. [52]

7.8. *Logaritmi*. Definiamo la funzione logaritmo ponendo per $y > 0$
$$\log y := \int_1^y \frac{1}{t}\,dt.$$

Ovviamente $\log 1 = 0$, $\log 2 > 0$,

$$\frac{\log(1+y)}{y} \to 1 \qquad \text{per } y \to 0$$

e $\frac{d\log y}{dy} = 1/y$. Segue che il logaritmo è una funzione crescente. Inoltre per ogni $x, y > 0$

$$\frac{d}{dx}\log(xy) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\log x$$

e quindi $\log(xy) - \log(x)$ è una funzione costante, $\log(xy) - \log(x) = c$. Per $x = 1$ si ottiene che $\log(y) = c$ e quindi la formula

$$\log(xy) = \log x + \log y \quad \forall x, y > 0.$$

In particolare $\log\frac{1}{x} = -\log x$ e per ogni intero k $\log 2^k = k\log 2$. Pertanto $\log x \to +\infty$ per $x \to +\infty$ e $\log x \to -\infty$ per $x \to 0^+$.

Scegliamo e in modo che $\log e = 1$ (questo numero ci dovrebbe essere perché $\log 1 = 0$ mentre per x grande $\log x$ è grande, maggiore di e; ma perché questo basta? Geometricamente questo sembra evidente, ma è quello che si chiama il *teorema degli zeri* o *dei valori intermedi*).

Sia ora $\ell(x)$ la funzione inversa di $\log y$. $\ell(x)$ è definita per ogni x, $\ell(0) = 1$, ℓ è derivabile e

$$\ell'(x) = \frac{1}{((\log y)'}(\ell(x)) = \ell(x).$$

In definitiva, $\ell(x)$ altro non è che la funzione esponenziale e^x. Incidentalmente, si noti che si ha in particolare

$$\frac{e^x - 1}{x} \to \frac{de^x}{dx}(0) = 1 \qquad \text{per } x \to 0.$$

Ritorviamo le ben note formule di inversione

$$\log(e^x) = x \quad \forall x, \qquad e^{\log y} = y \quad \forall y > 0.$$

Per ogni $a > 0$, $a \neq 1$, il *logaritmo in base a* è definito come

$$\log_a(y) = \frac{\log y}{\log a}.$$

Ovviamente $\log_a a = 1$ $\log_e y = \log y$ e $\log_a e = \frac{1}{\log a}$ e se $b > 0$, $b \neq 1$,

$$\log_b y = \log_b a \log_a y.$$

Osserviamo che tutti i logaritmi sono allora multipli uno dell'altro. Cambiare base è semplicemente un cambiamento lineare sulla scala dei logaritmi. Un fatto che spiega perché esista un solo tipo di carta logaritmica. Osserviamo che $\log_a(x)$ è crescente se $a > 1$ e decrescente se $a < 1$.

L'inversa di $\log_a y$ è denotata con a^x. Si ha $a^x = y$ se e solo se $x = \log_a y$ se e solo se $x\log a = \log y$ se e solo se $y = e^{x\log a}$ e dunque

$$a^x = e^{x\log a} \qquad \forall x.$$

In generale possiamo chiamare logaritmo ogni funzione (continua?) $\ell(x)$, $x > 0$, tale che

$$\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y).$$

Da questo segue che

$$\ell(x^{\frac{n}{m}}) = \frac{n}{m}\ell(x),$$

che implica che $\ell(x) \neq 0$ $\forall x \neq 1$, a meno che ℓ sia identicamente nulla e, se ℓ è un logaritmo, anche $-\ell$ è un logaritmo. In particolare, senza perdere in generalità possiamo supporre $\ell > 0$

per $x>1$, quindi $\ell(x)$ più grande di quanto si vuole per x grande e 'dedurre' che esiste $a>1$, dipendente da ℓ tale che $\ell(a)=1$. Concludiamo quindi che

$$\ell(a^{\frac{n}{m}})=\ell(a)^{\frac{n}{m}},$$

'quindi' $\ell(a^x)=x\ \forall x$, cioè $\ell(y)=\log_a y$.

7.9. ***Funzioni trigonometriche.*** È possibile definire le funzioni circolare con il solo strumento dell'integrale per il calcolo delle aree.

Consideriamo il cerchio unitario $x^2+y^2=1$. Per ogni $t\in\mathbb{R}$, la retta di equazione $y=tx$ passante per $(1,t)$ incontra il cerchio nel punto

$$P=(1/\sqrt{1+t^2},t/\sqrt{1+t^2}).$$

Richiamandoci ad Archimede, la lunghezza della corda da $(1,0)$ a P è proporzionale al settore circolare sotteso. Poiché l'area del cerchio è π,

$$\pi:=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx,$$

e la lunghezza della circonferenza è 2π, la lunghezza dell'arco di estremi $(1,0)$ e P è allora due volte l'area del settore circolare sotteso.

Supportati da queste considerazioni, definiamo la funzione "arco la cui tangente è t, $t\in\mathbb{R}$" come

$$\arctan t:=2\left(\int_0^{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}\sqrt{1-s^2}\,ds-\frac{t}{2(1+t^2)}\right). \tag{7.4}$$

È subito visto che $\arctan t$ è una funzione dispari, $\arctan(-t)=\arctan t$, $\arctan 0=0$, che

$$\arctan t\to\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{se } t\to+\infty,\\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } t\to-\infty.\end{cases}$$

Ancora, si calcola facilmente $\frac{d}{dt}\arctan t=1/(1+t^2)$, conseguentemente $\arctan t$ è strettamente crescente e

$$\arctan t=\int_0^t\frac{1}{1+s^2}\,ds,\qquad\forall t\in\mathbb{R}.$$

Definiamo ora la *funzione tangente* sull'intervallo $]-\pi/2,\pi/2[$ come l'inversa della funzione arcotangente

$$\tan x:=\arctan^{-1}(x),\qquad x\in]-\pi/2,\pi/2[,$$

che estendiamo periodicamente in $\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$. La sua derivata si calcola ora come

$$D\tan x=\frac{1}{D\arctan(\tan x)}=1+\tan^2 x$$

in ogni punto $x\in]-\pi/2,\pi/2[$ e per periodicità per ogni punto in $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Poiché $1/(1+t^2)<1$ per $t\neq 0$, deduciamo ancora

$$\arctan t\le t \text{ per ogni } t\ge 0,$$

equivalentemente

$$\tan x\ge x \text{ per ogni } 0\le x<\frac{\pi}{2}.$$

Ora possiamo definire le funzioni *seno* and *coseno* in termini della tangente via le formule in $\tan(x/2)$. Poniamo

$$\sin x := \begin{cases} 0 & \text{se } x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \dfrac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

$$\cos x := \begin{cases} -1 & \text{se } x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \dfrac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} & \text{altrimenti}; \end{cases}$$

ed è facile provare, usando ad esempio le formule di duplicazione, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ se $x \neq \frac{\pi/2}{+} k\pi$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Pertanto

$$\cos x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} & \text{se } x \in]-\pi/2, \pi/2[, \\ -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} & \text{se } x \in]\pi/2, 3\pi/2[, \end{cases}$$

e

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \qquad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Le regole di derivazione dànno inoltre

$$D(\sin x) = \cos x, \qquad D(\cos x) = -\sin x, \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Restano infine da provare poche formule per poter dedurre semplicemente le altre prorietà. Si ritrova facilmente che

(1) *Formule di addizione per il seno e il coseno*. Procediamo come in (i). Per ogni $y \in \mathbb{R}$ definiamo $\phi(x) := \cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y$ e proviamo che $\phi(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Infatti, come in (i) risulta $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 0$ e $D(\phi^2 + (\phi')^2)(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
(2) $\sin x = \cos(x - \pi/2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Poniamo $\phi(x) := \sin x - \cos(x - \pi/2)$, e osserviamo che $\phi^2(x) + (\phi')^2(x)) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, in particolare $\phi(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Infine, osserviamo che valogono le seguenti stime tra seno e coseno e lunghezza d'arco.

(1) Per ogni $x \geq 0$ abbiamo $\sin x \leq x$. Infatti,
$$\sin x = \sin x - \sin 0 = \int_0^x \cos t\, dt \leq \int_0^x 1\, dt = x.$$
(2) Per ogni $x \geq 0$ abbiamo $1 - \cos x \leq x^2/2$. Infatti,
$$1 - \cos x = \int_0^x \sin s ds \leq \int_0^x s\, ds = x^2/2.$$

7.10. ***Funzioni circolari inverse.*** La funzione $\sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è strettamente crescente e dunque invertibile. La sua inversa, che restituisce l'arco in $[-\pi/2, \pi/2]$ dato il seno, si denota con arcsin $:]-1,1[\to [-\pi/2, \pi/2]$. Dalla regola di derivazione dell'inversa segue che

$$D \arcsin y = \frac{1}{\cos \arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

per ogni $y \in]-1,1[$.

Analogamente, la funzione $\cos x$, $x \in [0,\pi]$, è strettamente decrescente e dunque invertibile. La sua inversa, che restituisce l'arco in $[0,\pi]$ a partire dal coseno dell'angolo si denota con arccos : $]-1,1[\to [0,\pi]$. Dalla regola di derivazione dell'inversa segue che

$$D \arccos y = -\frac{1}{\sin \arccos y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 \arccos y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

per ogni $y \in]-1,1[$.

Notiamo infine alcune uguaglianze

(1) Da $\cos x = \sin(x+\pi/2)$, passando alle inverse, si ottiene
$$\arccos y = -\arcsin y + \frac{\pi}{2}.$$

(2) Per $x \in [0,\pi/2[$ $\tan x = \sin(x)/\sqrt{1-sin^2 x} = \sqrt{1-\cos^2 x}/\cos x$. Passando alle inverse,
$$\arcsin y = \arctan\Big(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\Big)$$
$$\arccos y = \arctan\Big(\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\Big).$$

(3) Si ha
$$\tan\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\tan x = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi/2 < x < 0, \\ 1 & \text{se } 0 < x < \pi/2. \end{cases}$$
In termini di funzioni inverse,
$$\arctan y + \arctan\frac{1}{y} = \begin{cases} -1 & \text{se } y < 0, \\ 1 & \text{se } y > 0. \end{cases}$$

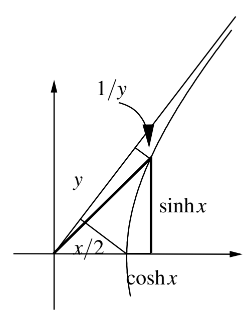


FIGURA 1. Le funzioni iperboliche.

7.11. *Funzioni iperboliche*. Le funzioni iperboliche furono discusse da Daviet de Foncenec (1734–1799), allievo di Lagrange a Torino, in [38] e da Johann Heinrich Lambert (1728-1777) in connessione con i suoi studi di *geometria iperbolica* [71]. Le funzioni iperboliche si definiscono in modo simile alle funzioni trigonometriche partendo dall'iperbole equilatera $u^2 - v^2 = 1$ invece che dal cerchio unitario. Con riferimento alla Figura 1 per ogni x sia P il punto sull'iperbole tale che l'area delimitata dal ramo di iperbole, dall'asse delle ascisse e dal segmento che congiunge l'origine con P sia $x/2$. Allora le coordinate del punto P sono denotate come $(\cosh x, \sinh x)$. Si dimostra allora

- Vale
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

∘ Le funzioni inverse sono definite da

$$y = \text{arcsinh} x \Leftrightarrow x = \sinh y \quad \text{per } -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$
$$y = \text{arccosh} x \Leftrightarrow x = \cosh y \quad \text{per } 1 \le x < \infty, o \le y < \infty$$

e vale

$$\text{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}), \quad \text{arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$$

Per derivazione si verifica facilmente che le funzioni

$$y(t) = c_1 \cosh \omega t + c_2 \sinh \omega t = \frac{1}{2}(c_1+c_2)e^{\omega t} + \frac{1}{2}(c_1-c_2)e^{-\omega t},$$

dove c_1 e c_2 sono costanti, sono soluzioni dell'equazione

$$y'' - \omega^2 y = 0. \tag{7.5}$$

In realtà sono *tutte e sole le possibili soluzioni*. per vedere questo scriviamo la (7.5) come

$$0 = (D^2 - \omega^2)y = (D-\omega)(D+\omega)y;$$

cosicché, se poniamo $u := (D+\omega)y$, si deduce $u' = \omega u$ e, se $y(0) = y'(0) = 0$, anche

$$u(0) = 0;$$

da cui deduciamo $u(x) = 0 \; \forall \, x$, e conseguentemente

$$\begin{cases} y' + \omega y = u = 0, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

che dà $y = 0$.

7.12. *Esponenziale complesso e funzioni trigonometriche*. Usando la serie esponenziale reale e le relazioni $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ per l'unità immaginaria, Eulero calcola

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} + i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots\right) = \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

e conclude con le formule:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1,$$

e

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Più in generale, abbiamo

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

dove

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \, \frac{(iy)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (iy)^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+iy)^n = \frac{z^n}{n!}.$$

Possiamo quindi scrivere per un qualunque numero complesso $z = x + iy$

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Partendo dall'esponenziale complesso possiamo estendere le funzioni trigonometriche e iperboliche al campo complesso

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$
$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

il cui vero senso è dato da

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ovviamente le restrizioni delle funzioni trigonometriche e iperboliche all'asse reale coincidono con le corrispondenti funzioni reali e le restrizioni all'asse immaginario con le corrispondenti funzioni iperboliche o trigonometriche, si confronti con le formule in fondo al primo gruppo. Inoltre è possibile derivare varie identità che estendono le corrispondenti identità reali:

$$\begin{aligned}
&\sin^2 z + \cos^2 z = 1, && e^{iz} = \cos z + i \sin z,\\
&\sin(-z) = -\sin z, && \cos(-z) = \cos z,\\
&\cosh^2 - \sinh^2 = 1, && e^{z} = \cosh z + \sinh z,\\
&\sinh(-z) = -\sinh z, && \cosh(-z) = \cosh z,\\
&\cosh(iz) = \cos z, && \sinh(iz) = i \sin z.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w,\\
&\sin(z+w) = \cos z \sin w + \cos w \sin z,\\
&\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w,\\
&\sinh(z+w) = \cosh z \sinh w + \cosh w \sinh z.
\end{aligned}$$

Conseguentemente

$$\begin{aligned}
&\sin z = 2 \sin(z/2) \cos(z/2),\\
&\cos^2(z/2) = (1 + \cos z)/2,\\
&\sin w - \sin z = 2 \cos(\frac{w+z}{2}) \sin(\frac{w-z}{2}),\\
&\cos w - \cos z = -2 \sin(\frac{w+z}{2}) \sin(\frac{w-z}{2}),\\
&\ldots.
\end{aligned}$$

Tutto quanto detto sopra risulta essere corretto, ma dipende dal fatto che per le serie che sono state usate sopra è possibile operare nel modo in cui abbiamo fatto, ma questo in generale non è corretto, è invece corretto nel caso in considerazione, quindi richiede degli argomenti supplementari.

Gli esponenziali complessi sono utili per la discussione dei fenomeni oscillatori. Ad esempio la formula

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

è equivalente alle formule di addizzione e sottrazione, mentre la formula

$$e^z - e^w = e^{\frac{z+w}{2}} \left(e^{\frac{z-w}{2}} - e^{-\frac{z-w}{2}} \right) = e^{\frac{z+w}{2}} 2i \sinh\left(\frac{z-w}{2}\right)$$

dà per $z = i\,\alpha$ e $w = i\beta$ le formmule di prostaferesi.

7.13. *Catenaria.* Integrare l'equazione differenziale $\dot{u} = \sqrt{1+u^2}$ in termini di funzioni iperboliche.

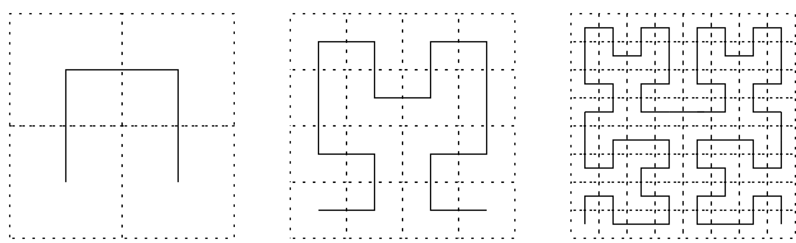


FIGURA 2. Costruzione di una curva di Peano seguendo Hilbert.

7.14. *Le curve di von Koch e di Peano.* Diamo due classici esempi di curve non rettificabili.

La curva di von Koch. Partendo da un triangolo equilatero si divida in tre parti uguali ciascun lato e si sostituisca la parte mediana con gli altri due lati del triangolo equilatero il cui terzo lato è il pezzo rimosso. Si ripeta quindi il procedimento su ciascun lato delle figura ottenuta. Iterando indefinitamente il procedimento, poiché le iterate convergono uniformemente, l'iterazione produce la *curva di von Koch*; questa

(1) è una curva semplice continua,
(2) la sua lunghezza aumenta ad ogni passo con un fattore $4/3$, quindi ha lunghezza infinita, anzi è infinita la lunghezza tra due qualunque suoi punti, mentre delimita un'area finita pari ai $5/8$ dell'area del triangolo iniziale,
(3) non è derivabile (non ha tangente) in nessun suo punto.

La curva di Peano. Le curve continue possono essere assai più "patologiche" se si toglie la condizione di semplicità. A Giuseppe Peano (1858–1932) si deve l'esempio di una curva γ : $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ continua che ha come immagine *tutto* il quadrato $[0,1] \times [0,1]$: una tale curva γ si chiama *curva di Peano*.

Una curva di Peano, seguendo David Hilbert (1862–1943), può essere costruita nel seguente modo. Si consideri la successione di curve continue $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ come in Figura 2. Al passo i, si ha una curva continua ottenuta modificando la curva del passo $i-1$ in un intervallo di lunghezza 2^{-i} nel dominio e in un quadrato di lato 2^{-i} sull'immagine. La successione di queste curve converge quindi uniformemente ad una curva continua che ha come immagine tutto il quadrato. Ovviamente γ non può essere iniettiva essendo l'intervallo $[0,1]$ non omeomorfo al quadrato $[0,1] \times [0,1]$. Per convenienza del lettore ripetiamo l'argomentazione: se γ fosse 1-a-1, γ darebbe un omeomorfismo da $[0,1] \setminus \{1/2\}$ su $([0,1] \times [0,1]) \setminus \{\gamma(1/2)\}$, ma mentre $([0,1] \times [0,1]) \setminus \{\gamma(1/2)\}$ è connesso $[0,1] \setminus \{1/2\}$ non è connesso: assurdo.

Un altro modo di costruire una curva di Peano è la seguente. Rappresentiamo ogni $x \in [0,1]$ con un allineamento binario $x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i/2^i$, $b_i \in \{0,1\}$ (si sceglie ad esempio di eliminare le rappresentazioni che finiscono con un 1 periodico). Per ogni $x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i/2^i \in [0,1]$ si pone

$$\gamma(x) := \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{2i+1}}{2^{i+1}}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{2i}}{2^i} \Big)$$

Usando il fatto che se x cambia di poco, le cifre dell'allineamento decimale cambiano di poco, è facile provare che γ è continua. D'altra parte γ è surgettiva. Si noti che γ non è iniettiva. Se una delle coordinate di (x,y) ha due rappresentazioni decimali, vi saranno due punti distinti di $[0,1]$ con immagine (x,y).

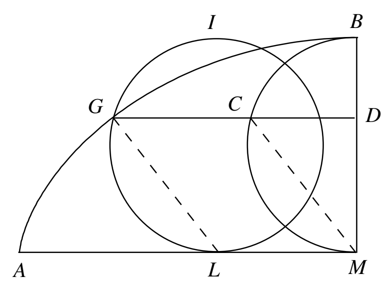


FIGURA 3. La cicloide

7.15. ***Cicloide e isocronia.*** La *cicloide* è la curva descritta da un punto su una circonferenza di un cerchio, *cerchio generatore*, che ruota su una retta, chiamata *base*, senza frizione. Rispetto al sistema di coordinate cartesiane standard (x,y) una cicloide generata da un cerchio di raggio c che inizia nell'origine ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t). \end{cases} \tag{7.6}$$

Oltre questa, va anche considerata la cicloide simmetrica rispetto all'asse delle x, con concavità rivolta verso l'alto, e osservato che per ogni punto $(\bar{x},\bar{y})$ nel quarto quadrante esiste unico ramo discendente di cicloide che iniziando nell'origine unisce l'origine al punto $(\bar{x},\bar{y})$. Questo ramo si ottiene risolvendo in (c,t) il sistema $x(t) = \bar{x})$ $y(t) = \bar{y}$ in (7.6). Questo ramo di cicloide è anche l'unico punto stazionario del funzionale tempo di caduta sotto l'azione della gravità lungo una curva (decrescente) dall'origine al punto $(\bar{x},\bar{y})$.

Aggiungiamo qualche considerazione a quanto già visto nei capitoli precedenti. Sia $\mathscr{C}_{P_1P_2}$ una curva decrescente che congiunge i punti $P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2)$, con $x_1 < x_2$ e $y_1 > y_2$, e consideriamo un punto materiale che, partendo con velocità nulla in P_1, cade sotto l'azione della gravità da P_1 a P_2 lungo $\mathscr{C}_{P_1P_2}$. Pensiamo $\mathscr{C}_{P_1P_2}$ parametrizzata da $(x(\tau),y(\tau))$ $\tau \in [\tau_1,\tau_2]$, $P_i = (x(\tau_i),y(\tau_i))$ $i = 1,2$. Indichiamo con $\tau(t)$ l'evoluzione del parametro τ al variare del tempo e siano t_1,t_2 tali che $t_i = \tau_i$ $i = 1,2$. Allora il punto P al tempo t è nella posizione $P(t) = (x(\tau(t)),y(\tau(t))$ e il modulo della velocità al tempo t vale

$$v(t) = \sqrt{\Big(\frac{dx}{d\tau}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{d\tau}\Big)^2}\,|\tau'(t)|.$$

D'altra parte dalla conservazione dell'energia (legge di Galilei)

$$v(t) = \sqrt{2g(Y - y(\tau(t))}, \quad Y = y(\tau(t_1))$$

e quindi il tempo $T(P_1, P_2)$ per andare da P_1 a P_2 è dato da

$$T(P_1, P_2) = t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{x'^2(\tau(t)) + y'(\tau(t))}{Y - y(\tau(t))}} |\tau'(t)|\, dt,$$

Usando la formula di cambiamento di variabile troviamo allora

$$T(P_1, P_2) = \pm \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2}}{\sqrt{y(\tau_1) - y(\tau)}}\, dt \tag{7.7}$$

dove il segno è $+$ quando τ cresce al passare del tempo e $-$ in caso contrario.

Se rappresentiamo la curva $\mathscr{C}_{P_1P_2}$ come grafico in x, cioè $y = y(x)$, $x_1 < x < x_2$ $P_i = (x_i, y_i)$ $i = 1, 2$, troviamo quindi

$$T(P_1, P_2) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y(x_1) - y(x)}}\, dx.$$

Trasliamo l'intervallo di definizione della curva in $[0, r]$, $r = x_2 - x_1$, e cambiamo variabile con $u(x) = y(x_1) - y(x)$, si ha $u(0) = 0$, $u \geq 0$, u crescente; allora il tempo di discesa è dato da

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^r \sqrt{\frac{1 + u'^2}{u}}\, dx. \tag{7.8}$$

Come abbiamo visto in Sezione 3.1 i punti critici di questo funzionale sono cicloidi con la concavità rivolta verso l'alto. Questo è un funzionale del tipo

$$\int_a^b F(u, u')dx$$

la cui equazione di Eulero-Lagrange è

$$\frac{d}{dx} F_p(u, u') - F_u = 0$$

che è equivalente (almeno nella situazione in cui tutte le funzioni sono regolari) alla legge di conservazione

$$F(u, u') - u' F_p(u, u') = \text{cost}.$$

Quindi i punti stazionari del funzionale tempo di caduta in (7.8) sono caratterizzati dall'equazione

$$u(1 + u'^2) = 2c, \quad c = \text{cost} > 0 \tag{7.9}$$

e sono (sottoarchi) di tutti e soli i rami crescenti di cicloidi che in forma parametrica si scrivono come in (7.6) con $t \in [0, \pi]$. Questi rami crescenti di cicloide si possono scrivere anche come $x = x(y)$. Dalla (7.9) si trova subito che si caratterizzano, in questo caso, come le soluzioni di

$$w'^2(y) = \frac{y}{2c - y}. \tag{7.10}$$

Caduta lungo il cerchio e lungo la cicloide. Se $u(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$, si ritrova facilmente che il tempo di caduta con velocità iniziale nulla lungo un piano inclinato di altezza 1 e lunghezza 1 è

$$T = \frac{2}{\sqrt{g}}.$$

Mentre il tempo di discesa lungo un quarto di cerchio di raggio 1, $u(x) = \sqrt{2rx - x^2}$, $0 \le x \le 1$ è per la (7.8)

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 (2x - x^2)^{-3/4}\, dx$$

il cui valore approssimato è $T = 1.85407...$, tempo più breve di circa il 7.5% del tempo di discesa lungo la diagonale.

Calcoliamo ora il tempo di discesa minimo (che sappiamo si realizza) lungo la cicloide da $(0,0)$ a $(-1,-1)$ che per la (7.8) si calcola prendendo u come la cicloide che inizia in 0 e passa per $(1,1)$. Le costanti c e t in (7.6) sono allora determinate da $x(\tau) = y(\tau) = 1$ e si trova $c = 0.57291...$ e $\tau = 2.41201..$ Se $y = u(x)$ è allora la rappresentazione cartesiana della curva, $y(t) = u(x(t))$, quindi $y'(t) = \frac{du}{dx}(x(t))x'(t)$, cioè $\frac{du}{dx}(x(t)) = y'(t)/x'(t)$, il tempo di discesa è

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\tau \sqrt{\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{y(t)x'(t)^2}}\, x'(t)\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\tau \sqrt{\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{y(t)}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\tau \sqrt{\frac{2c^2(1-\cos t)}{c(1-\cos t)}}\, dt \\
&= \sqrt{\frac{c}{g}}\, \tau = 1.8256...
\end{aligned}$$

circa l'1.6% meno che del tempo di discesa lungo il quarto di cerchio.

Isocronia della cicloide. Consideriamo la cicloide

$$\begin{cases} x(t) = c(t - \sin t), \\ y(t) = c(\cos t - 1); \end{cases} \tag{7.11}$$

vogliamo calcolare il tempo necessario per scendere da un punto al centro della cicloide, $t = \pi$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_\tau^\pi \sqrt{\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{y(\tau) - y(t)}}\, dt \\
&= \sqrt{\frac{c}{2g}} \int_\tau^\pi \sqrt{\frac{2(1-\cos t)}{\cos\tau - \cos t}}\, dt.
\end{aligned}$$

Poiche' $1 - \cos t = 2\sin^2(t/2)$, $\cos\tau - \cos t = (1 + \cos\tau - (1 + \cos t)) = 2\cos^2(\tau/2) - \cos^2(t/2)$,

$$T = \sqrt{\frac{c}{2g}} \int_\tau^\pi \sqrt{2} \int_\tau^\pi \frac{\sin(t/2)}{\sqrt{\cos^2(\tau/2) - \cos^2(t/2)}}\, dt$$

e con la sostituzione $u = \frac{\cos(t/2)}{\cos(\tau/2)}$, si ha $0 \le u \le 1$ e

$$T = \sqrt{\frac{c}{g}}\, 2 \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, (-du) = 2\sqrt{\frac{c}{g}} \arcsin u \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{c}{g}}\, \pi.$$

Scopriamo quindi che il tempo di discesa lungo la cicloide fino al centro della stessa è indipendente dalla posizione iniziale: abbiamo ritrovato che un pendolo cicloidale ha periodo indipendente dall'ampiezza dell'oscillazione pari $\sqrt{\frac{c}{g}}\pi$ o, in altre parole, che due punti materiali, che cadono lungo una cicloide partendo contemporaneamente da altezze diverse ma con velocità iniziali entrambi nulle, arrivano nel punto più basso della cicloide contemporaneamente.

Il problema della tautocrona. Supponiamo ora che il tempo di caduta di un punto materiale, sotto l'azione della gravità con velocità iniziale nulla, lungo una curva che decresce arrivando nell'origine sia indipendente dall'altezza della partenza, possiamo dire che la curva è un ramo di cicloide (con concavità verso l'alto) e punto più basso nell'origine degli assi? Questo è noto come *problema della tautocrona* (nel senso di trovare la curva tale che ...) o *problema di Abel* che appunto lo risolse negli anni 1823-26, [1], in particolare vol. I pp. 27-30, *Résolution d'un problème mécanique*.

Parametrizzando la curva di caduta rispetto all'ordinate y, $x = x(y)$, e tenuto conto che y decresce quando il tempo cresce, (7.7) ci dice che il tempo di caduta dall'altezza Y cioè dal punto $(x(Y),Y)$ è

$$T(Y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^Y \frac{\sqrt{1+x'(y)^2}}{\sqrt{Y-y}}\,dy, \quad s(y) = \int_0^y \sqrt{1+x'(t)^2}\,dt, \tag{7.12}$$

che oggi si legge come *equazione integrale di Volterra*

$$\int_0^t K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t)$$

con un *nucleo frazionario*, chiamato anche *di Riesz*,

$$K(t,t) = \frac{1}{|t-\tau|^\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

È probabilmente con Abel che inizia la studio di queste equazioni, studio che proseguirà soprattutto alla fine dell'Ottocento e inizi del Novecento con Fredholm, Volterra e Hilbert, e che nel caso che ci interessa riguarda l'equazione in φ

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}}dy = f(x). \tag{7.13}$$

Con riferimento all'equazione (7.13) Abel dimostra che la soluzione è

$$\varphi(y) := \frac{1}{\pi}\frac{d}{dy}\int_0^y \frac{f(\sigma)}{\sqrt{y-\sigma}}\,d\sigma, \tag{7.14}$$

equivalentemente, per ogni f vale

$$\pi f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-y}}\frac{d}{dy}\int_0^y \frac{f(\sigma)}{\sqrt{y-\sigma}}\,d\sigma. \tag{7.15}$$

Per verificarlo cominciamo con il calcolare il rapporto incrementale della funzione da derivare

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\Big[\int_0^{y+h} \frac{f(\sigma)}{\sqrt{y+h-\sigma}}\,d\sigma - \int_0^y \frac{f(\sigma)}{\sqrt{y-\sigma}}\Big] \\
=&\frac{1}{h}\Big[\int_{-h}^0 \frac{f(\xi+h)}{\sqrt{y-\xi}}d\xi + \int_0^y \frac{f(\sigma+h)-f(\sigma)}{\sqrt{y-\sigma}}\,d\sigma\Big],
\end{aligned}$$

quindi, passando al limite per $h \to 0$, troviamo

$$\frac{d}{dy}\int_0^y \frac{f(\sigma)}{\sqrt{y-\sigma}}\,d\sigma = \frac{f(0)}{\sqrt{y}} + \int_0^y \frac{f'(\sigma)}{\sqrt{y-\sigma}}\,d\sigma$$

Segue allora che il secondo membro dell'equazione (7.15) vale

$$f(0)\int_0^x \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{x-y}}dy - \int_0^x dy\int_0^y \frac{f'(\sigma)}{\sqrt{x-y}\sqrt{y-\sigma}}\,d\sigma.$$

Cambiando l'ordine di integrazione e poiché, si veda ad esempio [46],

$$\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(x-y)y}} = \int_\sigma^x \frac{dy}{\sqrt{(x-y)(y-\sigma)}} = \pi,$$

concludiamo che il secondo membro della (7.15) vale

$$\pi\Big(f(0)+\int_0^y f'(\sigma)dy\Big)=\pi f(y)$$

e cioè che (7.15) è vera per ogni f.

Ritornando al problema della tautocrona possiamo allora concludere che

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{1+x'(Y)^2}=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dY}\int_0^Y \frac{T(y))}{\sqrt{Y-y}}dy$$

e, poiché $T(Y)=T$ indipendentemente da Y, che una curva tautocrona verifica l'equazione

$$\sqrt{1+x'(Y)^2}=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}T\frac{d}{dY}\int_0^Y \frac{1}{\sqrt{Y-y}}=\frac{\sqrt{2g}T}{\pi}\frac{1}{\sqrt{Y}}.$$

Se quindi poniamo $2a:=\frac{gT^2}{\pi^2}$ troviamo

$$x'(y)=\sqrt{\frac{2a-y}{y}} \tag{7.16}$$

che ha come soluzione la cicloide

$$\begin{cases} x(t)=2a-a(t-\sin t), \\ y(t)=a(\cos t-1); \end{cases} \tag{7.17}$$

come si può verificare ponendo $\frac{2a-y}{y}=\tan^2 t$ cioè $y=\frac{2a}{1+\tan^2 t}$ differenziando la y rispetto al parametro t e procedendo come in Sezione 3.1.

Bibliografia

[1] ABEL, N.H. *Oeuvres completès*. Gröndhal, Christiania, 1839. In 2 volumi a cura di B. Holmboe.

[2] BENVENUTO, E. *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*. Edizioni di storia e letteratura, Roma, 2006.

[3] BERKELEY, G. *The Analist; or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician. Wherein it is Examined Whether the Object, Principles, and inferences of the Modern Analysts are more Distinctly Conceived, or more Evidently Deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith, by the Author of the Minute Philosopher*. J. Tonson, London, 1734.

[4] BERNOULLI, JO. *Lectiones mathematicae de metodo integralium*. Manoscritto, 1690-1691. In *Opera Omnia*,vol. 3, 385-558.

[5] BERNOULLI, JO. Solutio problematis funicularii. *Acta Eruditorum 10* (1691), 274–276.

[6] BERNOULLI, JO. Supplementum defectus geometriae cartesianae circa inventionem locarum. annotata quaendam in schediasmata leibnitianum et tschirnhausiaum in ultimo actorum novemb. edita. de complanatione superficierum conoidearum et sphaeroidearum. problema novum mathematicis propositum. *Acta Eruditorum* (1696), 264–269.

[7] BERNOULLI, JO. Lettre de Mr. Bernoulli a Mr. Basnage. *Histoire des Ouvrages des Savants* (1697), 452–467.

[8] BERNOULLI, JO. Remarques Sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des Problêmes sur les Isoperimetres, avec une nouvelle methode courte & facile de les resoudre sans calcul, laquelle s'étend aussi à d'autres problêmes qui ont rapport a ceux-là. *Mém Paris* (1718), 100–138. In *Die Streitschriften von Jacob und Johann Bernoulli*, Eds Goldstine and Radelet-de Grave, pp. 527-568.

[9] BERNOULLI, JO. *Opera omnia tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita*. Lausanne et Geneva, 1742. 4 Vols., ed. G. Cramer.

[10] BOS, H.J.M. Newton, Leibniz and the Leibnizian Tradition. In *From the Calculus to Set Theory 1630-1910, Ed. Grattan-Guinness*. Oxford University Press, 1980.

[11] BOS, H.J.M. Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus. *Arch. Hist. Exact Sci. 14* (1974-75), 1–90.

[12] BRADLEY, R.E AND SANDIFER, C.E., Ed. *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*. Elsevier, 2007.

[13] CANNON, J.T E DOSTROVSKY, S. *The Evolution of Dynamics: Vibration Theory from 1687 to 1742*. Springer-Verlag, New York, 1981.

[14] CANTELLI, G., Ed. *La disputa Leibniz-Newton sull'analisi*. Bollati Boringhieri, Torino, 2006.

[15] CARATHÉODORY, C. The Beginning of Research in the Calculus of Variations. *Osiris 3* (1937), 224–240.

[16] CASTELNUOVO, G. *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*. Zanichelli Editore, Bologna, 1938.

[17] CHILD, J. M. *The Early Mathematical Manuscript of Leibniz*. The Open Court Publishing Co., Chicago, 1920.

[18] CODDINGTON, E.A. E LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.

[19] COHEN, I.B. *La rivoluzione newtoniana*. Feltrinelli, Milano, 1982.

[20] COUTURAT, L. *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*. Alcan, Paris, 1901.

[21] DE RISI, V. *Geometry and monadology: Leibniz's analysis situs and philosophy of space*. Birkhäuser, Basel, 2007.

[22] DEBNATH, L. *The Legacy of Leonhard Euler. A Tricentennial Tribute*. Imperial College Press, 2010.

[23] DOSTROVSKY, S. Early Vibration Theory: Physics and Music in the Seventeenth Century. *Arch. Hist. Exact Sci. 14* (1975), 169–218.

[24] DUGAS, R. *Histoire de méchanique*. Éditions du Griffon, Neuchâtel, 1950. Traduzione inglese, Dover, 1988.

[25] DUPONT, P E ROERO, C.S. *Leibniz 84. Il decollo enigmatico del calcolo differenziale*. Mediterranean Press, Rende, 1991.

[26] EKELAND, I. *Le meilleur des mondes possibles. Mathématiques et destinée*. Seuil, Paris, 2000.

[27] EULER, L. Calculus differentialis. Manoscritto 30 pagine. Archivio dell'Accademia delle Scienze di Pietroburgo, f 136, op 1, Nr 183.

[28] EULER, L. *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*. St-Petersburg, 1736. In *Opera Omnia*, serie II, voll. 1 e 2; traduzione inglese a cura di I. Bruce in http://www.17centurymaths.com/.

[29] EULER, L. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Busquet, Lausannae et Genevae, 1744.

[30] EULER, L. *Introductio in Analysin Infinitorum*. Bousquet, Lausanne, 1748. 2 vols. In *Opera* (I) VIII-IX (1922-1945). Traduzione inglese a cura di J. Blanton, Springer Verlag, 1988-89.

[31] EULER, L. Recherches sur les plus grands et plus petits qui se trouvent dans les actions des forces. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin 4* (1750). In *Opera Omnia*, series 2, vol. 5, pp. 1-37.

[32] EULER, L. Recherches sur l'origine des forces. *Petropoli* (1750). In Opera Omnia III, 2.

[33] EULER, L. *Institutiones Calculi Differentialis cum eius usu in Analysi finitorum ac doctrina serierum*. St.Petersburg, 1755. In *Opera Omnia*, I.10 (1913). Traduzione inglese a cura di J. Blanton, Springer-Verlag, 2000.

[34] EULER, L. *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et omnes motus, qui in huismodi corpora cadere possunt, accomodata*. Rostochii et Gryphiswaldiae Litteris et Imprensis A. F. Rose, 1765. In *Opera Omnia* serie III, voll. 3 e 4.

[35] EULER, L. *Institutionum calculi integralis*. Acadademiae Imperialis Scientiarum, Petropoli, 1768-1770. In *Opera Omnia* serie II voll 10, 11 e 12.

[36] EULER, L. Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi. *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop. 16* (1772), 3–34. In *Opera Omnia*, serie I, vol. 25, pp. 286-292.

[37] EULERO, L. *Lettere a una principessa tedesca*. Bollati Boringhieri, Torino, 2007. Edizione originale in francese, scritta nel 1760 e pubblicata nel 1768; in *Opera Omnia* seie III voll. 11 e 12.

[38] FONCENEC, F.D. DE. Reflexions sur les quantités imaginaires. *Misc. Phil.-Math. Soc. Taurinensis 1* (1759), 113–146.

[39] FREGUGLIA, P. E GIAQUINTA, M. *The Early Period of the Calculus of Variations*. Birkhäuser, New York, 2016.

[40] FUSS, P.H., Ed. *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbre géomètre du XVIII tèm siècle*. Petersburg, 1843. In due volumi.

[41] GALILEI, G. *Discorsi e dimostrazioni matematiche. Intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica ed i movimenti locali*. Einaudi, Torino, 1990. A cura di Enrico Giusti.

[42] GARBER, E. *The Language of Physics*. Birkhäuser, 1999.

[43] GIAQUINTA, M. *La forma delle cose. Idee e metodi di matematica. I. Da Talete a Galileo e un po' oltre*. Edizioni di Storia e Letteratura, Roma, 2010.

[44] GIAQUINTA, M. *La forma delle cose. Idee e metodi di matematica. II. Il calcolo da Leibniz e Newton a Eulero e Lagrange e un po' oltre*. Edizioni di Storia e Letteratura, Roma, 2014.

[45] GIAQUINTA, M. E HILDEBRANDT, S. *Calculus of Variations*. Springer, Berlin, 1996. In 2 volumi.

[46] GIAQUINTA, M. E MODICA, G. *Analisi Matematica. Approssimazione e processi discreti*. Pitagora Editrice, Bologna,, 1998. Revisione e traduzione inglese Birkhäuser, Boston, 2004.

[47] GIAQUINTA, M. E MODICA, G. *Analisi Matematica. Funzioni di una variabile*. Pitagora Editrice, Bologna,, 1998. Revisione e traduzione inglese Birkhäuser, Boston, 2003.

[48] GIAQUINTA, M. E MODICA, G. *Analisi Matematica. Strutture lineari e metriche, continuià*. Pitagora Editrice, Bologna, 2000. Revisione e traduzione inglese in Birkhäuser, Boston, 2007.

[49] GIAQUINTA, M. E MODICA, G. *Analisi Matematica. Funzioni di più variabili*. Pitagora Editrice, Bologna, 2005. Revisione e traduzione inglese Birkhäuser, Boston 2009.

[50] GIAQUINTA, M. E MODICA, G. *Analisi Matematica. Funzioni di più variabili: ulteriori sviluppi*. Pitagora Editrice, Bologna, 2005. Revisione e traduzione inglese Birkhäuser, Boston, 2010.

[51] GIAQUINTA, M. *Aspetti della matematica prima del Calcolo*. 2019. In `homepage.sns.it/giaquinta/`.

[52] GIAQUINTA, M. *Funzioni e numeri*. Edizioni della Normale, 2019.

[53] GIAQUINTA, M. *La nuova filosofia della natura. Misure, variazioni ed equazioni differenziali*. 2019. In `homepage.sns.it/giaquinta/`.

[54] GIUSTI, E. Immagini del continuo. In *L'infinito in Leibniz*. Edizioni dell'Ateneo, 1986, pp. 3–32.

[55] GIUSTI, E. A tre secoli dal calcolo: la questione dell'origine. *Bollettino UMI 3-A* (1984), 1–55.

[56] GOLDSTINE, H.H. *A History of the Calculus of Variations. From the 17th through the 19th Century*. Springer, New York, 1980.

[57] GOLDSTINE, H.H. AND RADELET-DE GRAVE, P., Ed. *Die Streitschriften von Jacob und Johann Bernoulli. Variationsrechnung*. Birkäuser, Basel, 1991.

[58] GRATTAN-GUINNESS, I. *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. The Massachusetts Institute of Technology, 1970.

[59] GRATTAN-GUINNESS, I., Ed. *From the Calculus to Set Theory 1630-1910*. Oxford University Press, 1980.

[60] HALL, A.R. *Philosophers at War: The Quarrel between Newton and Leibniz*. Cambridge University Press, 1980. Traduzione in italiano *Filosofi in guerra*, Il Mulino, Bologna, 1982.

[61] HAWKINS, T. *Lebesgue's Theory of Integration. Its Origins and Developments*. AMS Chelsea Publishings, 1979.

[62] HILDEBRANDT, S. E TROMBA, A. *Principi di minimo. Forme ottimali in natura*. Edizioni della Normale, Pisa, 2006.

[63] JAHNKE, H.N., Ed. *A History of Analysis*. American Mathematical Society, 2003.

[64] KLINE, M. *Storia del pensiero matematico*. Einaudi, Torino, 1991.

[65] KOYRÉ, A. *Studi newtoniani*. Einaudi, Torino, 1972.

[66] LAGRANGE, J.L. Application de la méthode précédente à la solution de différens problèmes de dynamique. *Mélanges de phil. et de math. Soc. Roy. de Turin 2* (1762), 196–298. In *Oeuvres*, I, 365-468.

[67] LAGRANGE, J.L. Essai d'une nouvelle méthode pour determiner les maxima et les minima des formules intégrales. *Mélanges de phil. et de math. Soc. Roy. de Turin 2* (1762), 173–193. In *Oeuvres*, I, 335-362.

[68] LAGRANGE, J.L. Théorie de la libration de la Lune et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète. *Nouv. Mem. Acad. Sci. Berlin* (1780). In *Oeuvres*, V, pp. 5-122.

[69] LAGRANGE, J.L. *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagé de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algèbrique des quantités finies*. Courcier, Paris, 1813. In *Oeuvres*, IX pp. 13-413.

[70] LAGRANGE, J.L. *Oeuvres*. Paris, 1867-1892. In 14 volumi, a cura di J.A. Serret e G. Darboux.

[71] LAMBERT, J.H. Observations trigonométriques. *Mém. Acad. Sc. Berlin 27* (11770), 327–357. In Opera Mathematica vol. II, pp. 245-269.

[72] LAPLACE, P.S. *Traité de mécanique céleste*. Paris, 1798-1827. In 5 volumi.

[73] LEBNIZ, G.W. Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itenque Tangentibus quae nec Fractas nec Irrationales Quantitates Moratur, et Singulare pro illis Calculi Genus. *Acta Eruditorum* (1684), 467–473.

[74] LEIBNIZ, G.W. De linea in quam flexile se pondere proprio curvat, ejusque usu insigni adinveniendas quotcunque medias proportionales & logarithmos. *Acta Eruditorum* (1691), 277–281, 435–439.

[75] LEIBNIZ, G.W. De linea ex lineis infinitis ordinatin ductis inter se concurrentibus formata, easque omnes tangente, ac novo in ea re analysis infinitorum usu. *Acta Eruditorum* (1692), 168–171. In *Math. Scr.* V pp. 266-269.

[76] LEIBNIZ, G.W. Supplementum geometriae dimensoriae, seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum: similiterque multiplex constructio linea ex data tangentium conditione. *Acta Eruditorum 12* (1693), 385–392.

[77] LEIBNIZ, G.W. *Mathematische Schriften*. A. Asher e H.W. Schmidt, Berlino e Halle, 1849-63. 7 voll. Editi da C.I. Gerhardt.

[78] LEIBNIZ, G.W. *Sämtliche Schriften und Briefe*. Akademie Verlag, Berlin, 1923-.

[79] LOTKA, A.J. *Elements of Mathematical Biology*. Dover, 1957. Prima edizione 1925.

[80] MACH, E. *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*. Bollati Boringhieri, Torino, 1992. *Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestelle*, 1883.

[81] MALTESE, G. *La storia di "F=ma". La seconda legge del moto nel XVIII secolo*. Olschki, Firenze, 1992.

[82] MONNA, A.F. *Dirichlet's principle, a mathematical comedy of errors and its influence on the development of analysis*. Oosthoek, Scheltema and Holkema, Utrecht, 1975.

[83] MUGNAI, M. *Introduzione alla filosofia di Leibniz*. Einaudi, Torino, 2001.

[84] MUGNAI, M. Leibniz, vita di un genio tra logica, matematica e filosofia. *I grandi della scienza. Le Scienze 22* (2002).

[85] MUSIL, R. L'uomo matematico. In *Saggi e altri scritti*. Einaudi, Torino, 1995.

[86] NEWTON, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. J. Streater, London, 1687.

[87] NEWTON, I. *Opticks: Or, A Treatise of the reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light, Also Two Treatise of the Species and Magnitude of Curvilinear Figures*. S. Smith and B. Walford, London, 1704.

[88] NEWTON, I. *Analysis per Quantitatum, Series, Fluxiones, ac Differentias: Cum Enumeratione Linearum Tertii Ordinis*. Pearson, Londra, 1711. A cura di William Jones.

[89] NEWTON, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Cornelius Crownfield, Cambridge, 1713. A cura di Roger Cotes.

[90] NEWTON, I. An Account of the Book Entituled Commercium Epistolicum Collinii et Aliorum de Analysi Promota: Published by order of the Royal Society, in Relation to the Dispute between Mr. Leibniz and Dr. Keill About the Right Invention of the Method of Fluxions, by some call'd the Differential Method. *Philosophical Transactions* (1715), 173–224.

[91] NEWTON, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. W. and J. Innys, London, 1726. A cura di Henry Pemberton.

[92] NEWTON, I. *The Method of Fluxions and Infinite Series: With its Applications to the Geometry of Curve-lines.* H. Woodfall for J. Nourse, London, 1736. A cura e nella traduzione di John Colson.

[93] NEWTON, I. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*. Jhonson Reprint Corp., New York, 1964–67. A cura di Derek T. Whitheside, 2 vols.

[94] NEWTON, I. *Principi matematici della filosofia naturale*. Utet, Torino, 1965. A cura di Alberto Pala.

[95] NEWTON, I. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*. Cambridge Uversity Press, 1967–81. A cura di Derek T. Whitheside, 8 vols.

[96] NOETHER, E. Invariante Variationsprobleme. *Göttinger Nachr., Math-Phys. Klasse* (1918), 235–257.

[97] PARDIES, I-G. *La statique ou les forces mouvantes*. Sebast. Mabre-Cramoisy, Paris, 1673.

[98] PERRON, O. Zur Existenzfrage eines Maximums oder Minimum. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 22* (1913), 140–144.

[99] POINCARÉ, H. Les mathématiques et la logique. *Revue de métaphysique e de morale XII* (1905), 815–835.

[100] POINCARÉ, J.H. *Science et méthode*. Flammarion, Paris, 1908.

[101] PROCLO. *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*. Giardini, Pisa, 1978. A cura di M. Timpanaro Corradini.

[102] RADELET DE GRAVE, P. Euler e i Bernoulli. In *Leonhard Euler nel terzo centenario della nascita*, Quaderni, 16. Accademia delle Scienze di Torino, 2008, pp. 7–42.

[103] RADELET-DE GRAVE, P. E VILLAGGIO, P., Ed. *Die Werke von Johann I und Nicolaus II Bernoulli*. Birkäuser, Basel, 2008.

[104] RUSSELL, B. *Esposizione critica della filosofia di Leibniz*. Longanesi, Milano, 1971. *Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz* fu pubblicato nel 1900 e ristampato nel 1937.

[105] SUISKY, D. *Euler as Physicist*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[106] THIELE, R. *Von der Bernoullischen Brachistochrone zum Kalibrator-Konzept*. Brepols, 2007.

[107] VERHULST, P.F. Reflexions sur les quantités imaginaires. *Nouv. Mém. Acad. Roy. Bruxelles 18* (1845), 3–38.

[108] VOLTERRA, V. *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Gauthier-Villars, Paris, 1931.

[109] WALLIS, J. *Opera Mathematica*. Lichfield, Oxford, 1693-1699.

[110] WALLIS, P. E WALLIS, R. *Newton and Newtoniana 1672-1975; a Bibliography*. Dawson, Folkestone, 1977.

[111] WESTFALL, R.S. *Newton*. Einaudi, Torino, 1989.

[112] WOODHOUSE, R. *A Treatise on isoperimetric Problems and the Calculus of Variations*. Cambridge, 1810. Ripubblicato da Chelsea, New York, con il titolo *A History of the Calculus of Variations in the Eighteenth Century*.

Indice dei nomi

Indice analitico