LA MATEMATICA NELLE SCIENZE SOCIALI: ALCUNE CONSIDERAZIONI SULLA TEORIA DELLA SCELTA E DEL BENESSERE SOCIALE

MARIANO GIAQUINTA E HYKEL HOSNI

1. La matematica nelle scienze naturali e sociali

L'attività matematica può essere vista come una risposta a due tipi di stimoli che chiameremo, senza troppa immaginazione, *interni* ed *esterni*. Nel primo caso i matematici sono attratti da problemi che hanno già una natura matematica e le cui soluzioni sono soggette unicamente ai criteri di valutazione interni all'area della matematica a cui questi problemi appartengono. Molta matematica cosiddetta "pura" rientra in questo tipo di attività, anche se non riteniamo particolarmente utile adottare questa terminologia carica di connotazioni spesso fuorvianti. Nel secondo caso l'attività dei matematici è motivata dalla risoluzione di problemi che si pongono in ambiti esterni rispetto a quelli in cui trovano una soluzione matematica. Questi ambiti possono essere tra loro molto eterogenei e possono riguardare tanto le applicazioni (per esempio di tipo ingegneristico o medico) quanto le questioni teoriche che si originano in ambito scientifico. Qui distinguiamo tra l'attività matematica motivata dalle scienze naturali, principalmente fisica, chimica e biologia, da quella che si sviluppa in risposta ai problemi di pertinenza delle scienze sociali. Alla base dell'esigenza di compiere questa distinzione concettuale risiede la seguente osservazione. Nell'ambito delle scienze naturali il fenomeno oggetto di indagine si caratterizza *esaustivamente* con la sua descrizione matematica. In questo senso le equazioni di Eulero per la dinamica dei sistemi fisici, per esempio, non costituiscono un "modello matematico" di qualcosa di non matematico, ma costituiscono esse stesse la descrizione del fenomeno. La situazione è molto diversa nell'ambito delle scienze sociali i cui oggetti di indagine matematica sono il risultato di un processo di astrazione spesso molto complicato che talvolta porta a snaturare i fenomeni stessi. Un caso di particolare rilevanza, su cui ritorneremo più avanti, è costituito dalle ipotesi che si fanno in economia matematica (e in particolare nella teoria generale dell'equilibrio) sulla *razionalità* degli individui. Assumere che le persone siano onniscienti e logicamente infallibili è molto diverso da considerare una situazione in cui il moto avviene in assenza di attrito. Assumere che i consumatori siano onniscienti significa teorizzare su qualcos'altro rispetto agli individui che agiscono nel mercato "reale", portando a una inevitabile e fin troppo evidente perdita di potere predittivo della teoria.

Prima di procedere con la formulazione di una domanda specifica riguardo al ruolo della matematica nelle scienze sociali, è doveroso ricordare come la tradizione a cui fa capo l'economia matematica moderna sia di tutt'altro avviso rispetto alla distinzione tra scienze naturali e scienze sociali che abbiamo appena proposto e che farà da sfondo alle nostre riflessioni. Per buona parte del novecento infatti le analogie fisiche sono ricorrenti nella giustificazione dei modelli matematici delle scienze sociali. Vilfredo Pareto (1848-1923), per fare un esempio notevole, scrive:

> La meccanica razionale, quando riduce i corpi a semplici punti materiali; l'economia pura, quando riduce gli uomini reali all' *homo oeconomicus*, fanno uso di astrazioni perfettamente simili e imposte da simili necessità. [8]

Alla parola "simili" Pareto aggiunge una nota che rimanda all'articolo con cui Vito Volterra (1860-1940) introduce il suo modello preda-predatore. Poco oltre continua:

> L'uomo reale compie azioni economiche, morali, religiose, estetiche, ecc. Si esprime precisamente la stessa cosa dicendo: 'studio le azioni economiche e faccio astrazione dalle altre'; oppure dicendo: 'studio l'*homo oeconomicus*, il quale compie solo azioni economiche.' Similmente si esprime la stessa cosa dicendo: 'studio le reazioni dello zolfo e dell'ossigeno concreti, facendo astrazione dai corpi estranei che possono contenere', oppure dicendo: 'studio le reazioni dello zolfo e dell'ossigeno chimicamente puri'.

Considerazioni analoghe sono avanzate da von Neumann e Morgenstern in [10] in relazione all'introduzione del concetto di utilità a cui oggi ci riferiamo con i loro nomi e che fornisce il linguaggio su cui è sviluppata gran parte dell'economia matematica contemporanea. La lista potrebbe contenere ancora molti esempi e non fermarsi al secolo scorso. Osserviamo infatti a margine che rispetto ad alcuni problemi legati soprattuto alla finanza, l'analogia ha lasciato il posto alla *fusione* di economia e fisica nella disciplina nota appunto come *econofisica*. Un'agile introduzione ai temi e ai metodi di questa area di ricerca è reperibile in [7].

In questa nota intendiamo sviluppare una riflessione sulla costruzione dei modelli matematici nelle scienze sociali circoscrivendo la nostra attenzione al problema centrale della teoria della scelta e del benessere sociale. Procederemo in modo informale e sorvoleremo su molte questioni importanti. I lettori interessati ad approfondire l'argomento, anche nel dettaglio matematico, sono rimandati a [3] e alla bibliografia lì contenuta.

2. L'economia matematica e il miraggio dell'autorganizzazione efficiente della società

Problema. *Qual è la migliore ripartizione delle risorse economiche nella società?*

Per semplicità espositiva (sfruttando la radice comune dei problemi di scelta e di benessere sociale) ci riferiremo a questo come al *problema della scelta sociale*. Si tratta di uno dei problemi più importanti nella teoria economica e affonda le proprie radici fin nell'*aritmetica politica* della Francia rivoluzionaria. Per questo non sorprende che le principali ideologie politiche del nostro tempo siano distinguibili a seconda del punto di vista che assumono nella formulazione del problema, e conseguentemente, nei relativi tentativi di risolverlo.

Secondo l'impostazione promossa principalmente dall'ideologia di destra liberista, la soluzione al problema della scelta sociale è contenuta in un argomento di natura *matematica* imperniato sul *teorema fondamentale dell'economia del benessere*. Informalmente, questa impostazione caratterizza il benessere sociale come il prodotto dell'interazione –all'interno di un libero mercato– di individui razionali motivati unicamente dal raggiungimento dei propri scopi economici. È evidente che il senso del teorema e le sue conseguenze rispetto al problema della scelta sociale dipendono in modo essenziale dall'interpretazione che guida la formalizzazione matematica dei concetti. A tal proposito risulta di importanza centrale l'ipotesi di *individualismo metodologico* e cioè l'idea che la componente ultima a cui ridurre l'analisi della "società" sia costituita dall'individuo, identificato con il concetto astratto di *agente razionale*. Si tratta questo di un lascito diretto della cultura illuminista, in seno alla quale hanno visto la luce tante delle idee centrali alla teoria della scelta sociale. L'idea di fondo è che gli agenti razionali – che a seconda dei contesti vestono i panni di consumatori, elettori o giocatori – siano individualmente rappresentati da una relazione di preferenza sulle alternative socio-economiche di interesse. Questo permette di precisare il concetto vago e multiforme di "razionalità" nei termini restrittivi ma rigorosi del concetto logico di *coerenza* delle preferenze e conseguentemente di identificare l'agire razionale con il comportamento volto alla *massimizzazione*. In pochi passaggi concettuali, nessuno dei quali evidentemente controverso, è possibile giungere a una formalizzazione logica del concetto di razionalità, sia individuale che collettiva, che rende matematicamente formulabile il problema della scelta sociale oggetto del nostro interesse presente.

Prima di descrivere, in modo informale, il teorema fondamentale dell'economia del benessere, è opportuno osservare come la cornice concettuale dell'individualismo metodologico ci permetta di porre il problema della scelta sociale in termini molto simili a quelli auspicati da G.W. Leibniz con la sua fondamentale intuizione sulla natura algoritmica del ragionamento ideale:

> quando sorgeranno controversie fra due filosofi, non sarà più necessaria una discussione, come [non lo è] fra due calcolatori. Sarà sufficiente, infatti, che essi prendano in mano le penne, si siedano di fronte agli abachi e (se così piace, su invito di un amico) si dicano l'un l'altro: *Calculemus*!

È infatti possibile interrogarsi sulle condizioni necessarie e sufficienti affinché le preferenze razionali della società, quelle cioè che rappresentano la volontà e il benessere collettivi, siano ottenute come il valore di un'opportuna funzione che come argomento prenda le preferenze degli individui (razionali) che la compongono. È innegabile che, se esistesse, un siffatto meccanismo potrebbe avanzare ragionevoli pretese di definire un aspetto importante del concetto di *democrazia*. Ma per quanto auspicabile, un tale meccanismo di aggregazione funzionale non può esistere. Questa è la conclusione di una serie di risultati che, a partire da un'osservazione del marchese di Condorcet sono culminati in epoca moderna nel celebre Teorema di Arrow [1], il cui contenuto può essere descritto come segue:

Teorema 1. *Sia data una società di almeno due agenti razionali chiamati ad esprimere le proprie preferenze su almeno tre alternative. Non è possibile aggregare in modo logico-matematico le preferenze individuali in una preferenza collettiva che rispetti il principio di unanimità e che non coincida con la dittatura di uno degli individui.*

Per dare una formulazione più precisa del teorema, utile anche a cogliere alcuni aspetti rudimentali della formalizzazione matematica del problema, introduciamo un po' di notazione e qualche definizione. Consideriamo una società S composta da n individui, ognuno dei quali è identificato da un *ordine di preferenza*, cioè una relazione $\succsim_i$ definita sull'insieme $\mathcal{X} = \{X, Y, \dots\}$ delle alternative sociali e che soddisfa la seguente condizione:

Ordine: Richiediamo che $\succsim_i$ sia

- *riflessiva*: $X \succsim_i X \quad \forall X$
- *antisimmetrica*: se $X \succsim_i Y$ e $Y \succsim_i X$, allora $X \sim Y$,
- *transitiva*: se $X \succsim_i Y$ e $Y \succsim_i Z$ allora $X \succsim_i Z$;
- *totale*: per ogni coppia (X, Y) vale una e una sola delle alternative $X \succsim_i Y$ o $Y \succsim_i X$.

Opportune considerazioni sull'individualismo metodologico ci suggeriscono di definire una regola di aggregazione che prenda come argomento le preferenze individuali $\succsim_i$ con $i = 1, \dots, n$ e che restituisca come valore una preferenza sociale $\succsim_S$, cioè siamo interessati alle regole che soddisfano la condizione di

Funzionalità: Per ogni coppia di alternative sociali in $\mathcal{X}^2$, R è della forma

$$\succsim_S = R(\succsim_1, \dots, \succsim_n).$$

Osserviamo come le condizioni di Ordine e Funzionalità corrispondano essenzialmente alla richiesta che la soluzione al problema della scelta sociale sia di natura logico-matematica. Non è difficile vedere infatti come le condizioni di Ordine che definiscono sia la razionalità individuale che quella sociale, siano radicate nel concetto logico e quindi puramente formale di *coerenza*. Dall'altro la condizione di Funzionalità ci ricorda molto da vicino la proprietà di composizionalità (o verofunzionalità) della logica (proposizionale) classica, linguaggio in cui è possibile riformulare il problema della scelta sociale e il risultato di impossibilità di Arrow. (Rimandiamo i lettori interessati ai dettagli a [3].)

Oltre alle condizioni di adeguatezza formale che abbiamo appena introdotto, è necessario che la regola R soddisfi alcuni vincoli che ne garantiscano l'adeguatezza materiale rispetto all'interpretazione intesa di "scelta sociale". Si noti, in riferimento alla distinzione che abbiamo proposto nella sezione precedente, come questi vincoli siano esterni alla matematica stessa, ma d'altra parte ben lontani dal costituire come nel caso del moto ricordato sopra a una descrizione esaustiva del fenomeno di interesse. Il primo punto è ovvio. Per rendere conto del secondo introduciamo le proprietà di R in modo *negativo*, giustificandole cioè come caratteristiche che non vogliamo soddisfatte dal processo di aggregazione basato su R. La prima proprietà indesiderabile è evidentemente quella per cui R identifichi la scelta sociale con la preferenza unilaterale di un membro della società. Cioè imponiamo l'assioma di

Non Dittatorialità: Per nessun $i = 1 \dots, n$ vale

$$R(\succsim_1, \dots, \succsim_n) = \succsim_i$$

Altrettanto inadeguata sarebbe una regola che non adottasse la preferenza unanimamente condivisa da tutti i membri della società. Per escludere queste regole richiediamo che R soddisfi l'assioma di

Unanimità: Se $X \succsim_i Y$ con $i = 1 \ldots, n$ allora $X \succsim_S Y$

Infine un vincolo motivato direttamente dall'ipotesi di individualismo metodologico. Nell'aggregazione delle preferenze individuali sulle alternative X e Y non vogliamo una regola R che dipenda da altro che non siano le preferenze individuali su X e Y. Precisamente richiediamo che sia soddisfatto l'assioma di

Indipendenza: Supponiamo che $\succcurlyeq_i$ e $\succsim_i$ siano due famiglie di ordini con $i = 1, \ldots, n$, e supponiamo che entrambe soddisfino la condizione di funzionalità $\succcurlyeq_S := R(\succcurlyeq_1, \ldots, \succcurlyeq_m)$ e $\succsim_S := R(\succsim_1, \ldots, \succsim_m)$. Allora

$$X \succcurlyeq_i Y \Leftrightarrow X \succsim_i Y, \quad \forall i$$

se e solo se

$$X \succcurlyeq_S Y \Leftrightarrow X \succsim_S Y$$

In altre parole, se due profili di preferenze distinti coincidono sulle alternative sociali X e Y, allora non vogliamo che la regola di aggregazione R produca aggregazioni distinte dei due profili. La condizione, che in molte variazioni occupa un posto centrale nella matematica delle scienze sociali, è spesso denominata *Indipendenza dalle alternative irrilevanti.* La terminologia è giustificata dal fatto che ogni regola R che soddisfi questa condizione dismette come irrilevante la posizione dei profili di preferenza formalizzati dai preordini $\succcurlyeq_i$ e $\succsim_i$ sulle alternative distinte da X e Y.

Il teorema di Arrow stabilisce l'incompatibilità delle condizioni di Ordine, Funzionalità, Non dittatorialità, Unanimità e Indipendenza. In particolare ricaviamo la seguente versione del teorema

Teorema 2 (Arrow, 1950)**.** *Supponiamo che la condizioni di Ordine e di Funzionalità siano soddisfatte e supponiamo che R soddisfi Non dittatorialità e Unanimità. Allora R non verifica l'assioma dell'Indipendenza.*

Questa formulazione del celebre teorema è particolarmente illuminante perché mette in evidenza l'impossibilità di rispondere all problema della scelta sociale per via puramente logico-matematica: se vogliamo mantenere le altre condizioni, dobbiamo rinunciare alla richiesta che l'aggregazione delle preferenze individuali sia sufficiente, in analogia al *calculemus!* leibniziano, a determinare la preferenza della collettività *senza ulteriore intervento esterno.* Allo stesso tempo, quindi, il teorema 2 ci fornisce anche una diagnosi e quindi un'indicazione relativa al superamento dell'impossibilità dell'aggregazione logico-matematica ottenuta nel contesto arroviano. Ciò, come vedremo nella prossima sezione, avviene attuando opportuni e progressivi indebolimenti dell'ipotesi di individualismo metodologico, e in particolare della condizione di Indipendenza.

3. Il teorema fondamentale dell'economia del benessere

Il teorema di Arrow costituisce un'ottima illustrazione del contributo della matematica nella formalizzazione delle scienze sociali.[1] Come suggerito dall'analisi informale che abbiamo imbastito, si tratta di un ruolo prevalentemente distruttivo, orientato allo scrutinio minuzioso delle ipotesi di costruzione del modello, affinché di questo venga garantita la coerenza interna. Come già sottolinato da Bruno De Finetti [2]

> Impiegata con spirito critico e congiuntamente alla riflessione sugli aspetti e problemi effettivi della realtà che intende inquadrare, la matematica è [...] strumento costruttivo, perché indocile e distruttivo: le contraddizioni incongruenze fratture asimmetrie che potrebbero sfuggire a chi immaginasse una spiegazione mentalmente o cercasse solo di esporla a parole, vengono messe in evidenza nella luce più cruda a chi ha presente quella struttura matematica [...]

La contraddizione messa in luce dal teorema di Arrow riguarda chiaramente la mutua incompatibilità di ipotesi che a prima vista non appaiono affatto tra loro contraddittorie, ma che anzi appaiono particolarmente cogenti e naturali, soprattutto per chi sia incline a vedere nella capacità del mercato di autoregolamentarsi e di promuovere attraverso l'incentivo individuale il benessere collettivo.

È dunque necessario sostituire alcune delle ipotesi del modello di Arrow con altre capaci di farci ottenere una soluzione al problema della scelta sociale. Come abbiamo anticipato, ci concentreremo soprattutto sull'ipotesi di *individualismo metodologico*. Prima di discuterne qualche dettaglio, è però necessario dare una caratterizzazione un po' più precisa del modello di economia astratta di Arrow-Debreu.

Consideriamo un'istanza specifica del problema generale della scelta sociale, cioè quello della ripartizione di l beni economici (presenti in quantità totale Ω) agli n individui della società S. In questo contesto il teorema di Arrow, ci

[1] Per una discussione più ampia invitiamo i lettori a consultare [5].

dice che qualsiasi ripartizione che soddisfi Ordine, Funzionalità, Non dittatorialità e Unanimità dovrà violare l'assioma di Indipendenza: una soluzione logico-matematica non può esistere a meno di introdurre la valutazione di un elemento *esterno* rispetto alle preferenze individuali sulle alternative sociali prese. Risulta che una forma di *confronto* tra le preferenze individuali ci permette di compiere un passo avanti importante nell'identificazione di una soluzione. Tale confronto – escluso dal paradigma arroviano – è reso matematicamente possibile da una famiglia di risultati, centrali in economia matematica, che identificano le condizioni sotto cui la rappresentazione delle preferenze degli individui mediante ordini sulle alternative sociali è logicamente equivalente alla loro rappresentazione mediante *funzioni di utilità*.[2] Potendo identificare un individuo della società con un'opportuna funzione di utilità a valori reali diventa possibile, ad esempio, considerare la funzione

$$u_S = u_1 +, \dots, +u_n$$

come rappresentazione della preferenza collettiva della società, ovvero, date due alternative sociali X e Y vale

$$X \succsim_S Y, \text{ se e solo se } u_S(X) \geq u_S(Y), \tag{1}$$

la società preferisce X a Y esattamente se l'utilità di Y non è maggiore di quella di X.[3] In generale questa rappresentazione è data a meno di una scelta di parametri, nel senso che possiamo sempre scrivere le funzioni di utilità aggregate come

$$u_S^\alpha = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n, \quad \alpha_i \geq 0 \quad \forall i, \quad \sum_1^n \alpha_i = 1.$$

Per la continuità delle funzioni di utilità che prendiamo in considerazione risulta, dal teorema di Weierstrass, che per ogni α la funzione u_S^α *ha un massimo* X^α nel dominio delle alternative sociali (in questo caso intese come allocazioni possibili) $\mathcal{X}$. Questo, grazie all'equivalenza (1), ci fornisce gli strumenti per definire un concetto fondamentale in economia matematica, quello di *ottimalità paretiana*.

Definizione 1. Diciamo che X è un *massimo (ottimo) debole di Pareto* se verifica la proprietà

$$\nexists Y \in \mathcal{X} \quad \text{tale che} \quad Y \succ_i X \quad \forall i. \tag{P'}$$

[2]In effetti, sotto ipotesi relativamente deboli, ogni ordine è rappresentabile, in modo non univoco, da *funzioni di utilità.*

[3]Il concetto di utilità, centrale in tutti i modelli matematici nelle scienze sociali, può condurre a fraintendimenti anche profondi che non abbiamo qui lo spazio per prevenire. A tale scopo rimandiamo ancora una volta a [3] e in particolare ai capitoli 3 e 4 che trattano del problema nel dettaglio.

Diciamo che è un *massimo (ottimo) stretto di Pareto* se verifica la proprietà

$$\text{(P)} \qquad \nexists Y \in \mathcal{X} \quad \text{tale che} \quad Y \succcurlyeq_i X \quad \forall i \quad \text{e} \quad Y \succ_j X \quad \text{per qualche}\, j.$$

Intuitivamente, un'alternativa sociale è efficiente (cioè costituisce un massimo o un ottimo) nel senso di Pareto se "migliora" l'utilità di almeno un membro della società, senza "peggiorare" l'utilità di nessun altro. Sotto le ipotesi che le funzioni di utilità individuali e sociale siano descrizioni complete di ciò che è rilevante per gli individui e per la collettività – ipotesi estremamente restrittive, come abbiamo accennato sopra – un'allocazione efficiente nel senso di Pareto non è migliorabile. È tuttavia immediato osservare come il criterio dell'efficienza paretiana ammetta esiti decisamente iniqui poiché impedisce, in quanto inefficiente, ogni forma di *ridistribuzione* delle risorse economiche nella società. Rimandiamo a [3] per alcune considerazioni di natura etico politica sul criterio di efficienza paretiana consigliamo ai lettori interessati di consultare [9] che contiene una ricca bibliografia sul tema. Andiamo invece avanti nella ricerca di una soluzione matematica al problema della scelta sociale mostrando, con la considerazione seguente, l'importanza concettuale dell'efficienza paretiana. Sotto opportune condizioni tecniche sugli ordini di preferenza individuali, è possibile dimostrare che per ogni alternativa sociale $Y \in \mathcal{X}$, esiste un massimo stretto di Pareto $X \in \mathcal{X}$ unanimemente preferito a $Y \in \mathcal{X}$, tale che cioè $X \succcurlyeq_i Y$, per $i = 1, \ldots, n$. Sotto l'ipotesi che l'efficienza paretiana catturi le "migliori" allocazioni delle risorse economiche alla società, questo garantisce l'esistenza di una soluzione al problema della scelta sociale così come l'abbiamo riformulato ammettendo confronti tra preferenze individuali (e quindi rinunciando alla forma stretta di Indipendenza da cui segue l'impossibilità di Arrow). Come facile immaginare, però, questa soluzione è tutt'altro che unica e il paradigma paretiano che costituisce lo sfondo formale dei risultati a cui stiamo facendo riferimento non offre alcun criterio matematico per la selezione di uno tra i molteplici ottimi di Pareto. Ancora una volta è necessario un intervento "esterno" per l'identificazione concreta della soluzione al problema della scelta sociale.

A questo scopo arrichiamo ora il modello paretiano di economia astratta introducendo il concetto di *proprietà privata*. In aggiunta alle proprie preferenze sugli stati sociali, ogni individuo i dispone ora di un *paniere di beni* $\omega^i \in \mathcal{X}$. Assumiamo che tutti i beni economici, che denotiamo con $\Omega = \omega^1 + \ldots + \omega^n$ siano distribuiti tra gli n individui. L'aggiunta della proprietà privata richiede una precisazione rispetto all'ipotesi di individualismo metodologico del paradigma arroviano. In particolare assumiamo che le preferenze (e quindi le utilità) di ogni individuo i siano *puramente egocentriche*, nel senso che u_i dipende unicamente dal paniere ω^i e da nient'altro. Questo dà luogo a un'economia di proprietà privata, il contesto più elementare in cui ha senso parlare di *mercato*. Un bene economico, infatti, è tale solo in relazione al fatto che ci sia qualcuno che lo desidera. L'introduzione della proprietà privata permette quindi di riformulare il problema della scelta sociale nel problema dello *scambio di beni privati*. In questo contesto diventa possibile operare sulla base di un confronto intersoggettivo tra gli individui, la strada aperta dal paradigma paretiano. L'idea è grosso modo la seguente. Ogni individuo dispone di un paniere di beni, il cui valore (misurato in utilità) si assume sia additivo. È naturale in questo contesto pensare alla formazione di *coalizioni* a cui gli individui partecipano nella misura in cui la coalizione promuove gli interessi egocentrici dei suoi membri. L'analisi matematica delle coalizioni in un mercato di proprietà privata è ricca di conseguenze interessanti. Pur non potendo entrare in alcun dettaglio, menzioniamo il fatto che sia possibile, in questo contesto, associare a ogni economia di proprietà privata un *gioco cooperativo* e studiare le soluzioni al problema dello scambio nella prima attraverso i concetti di soluzione del secondo.[4] Notiamo a margine come questo costituisca un esempio illuminante del ruolo della matematica nella costruzione dei modelli economici. Una parte molto rilevante della teoria dei giochi di coalizione (altrimenti detta *teoria cooperativa dei giochi*) è stata infatti motivata esternamente, secondo la terminologia che abbiamo usato nell'introduzione, dal problema di identificare le condizioni di non vuotezza del *nucleo* di un'economia proprietà privata. Questo a sua volta ha generato una serie di risultati, prevalentemente di natura geometrica e topologica, che ben poco hanno a che vedere con l'interpretazione economica di partenza. Menzioniamo, a titolo di esempio rappresentativo, come il teorema di Shapley – il risultato centrale nello studio dei giochi di coalizione – implichi i teoremi di Knaster, Kuratowski e Mazurkiewicz (noti come *piccolo* e *grande* teorema KKM) che implica il *teorema del punto fisso* di Brower, il quale a sua volta (a posteriori) risulta equivalente al teorema di Shapley.

Ritorniamo all'economia di proprietà privata. Una prerogativa delle coalizioni è quella di poter *bloccare* quegli ottimi di Pareto considerati svantaggiosi dalla coalizione stessa, cioè tali che se realizzati risulterebbero in un guadagno (in utilità) inferiore alla somma dei guadagni ottenibili individualmente dai suoi membri. Ammettendo che ogni individuo possa appartenere a più coalizioni con un certo grado (si parla qui di *coalizioni nebulose*), è possibile derivare, sotto opportune condizioni tecniche, l'esistenza dei *prezzi* associati ai panieri di beni economici. Senza addentrarci in alcun dettaglio, a questo

[4] Rimandiamo ancora a [3] per dettagli e a [6] per un'introduzione alla teoria dei giochi.

proposito notiamo soltanto come, nell'economia astratta di proprietà privata che fa da sfondo a questi risultati, i prezzi emergano unicamente come conseguenza *formale* dell'interazione economica di agenti egocentrici. In altre parole è il mercato che "decide" i prezzi. Se riuscissimo a dimostrare che i prezzi così determinati promuovono il benessere sociale avremmo, come vuole la narrativa del libero mercato, un argomento di notevole cogenza a favore dell'individualismo metodologico (declinato secondo le necessità del risultato). E per qualcuno è esattamente questo il contributo del *teorema fondamentale dell'economia del benessere*. Prima di enunciarlo informalmente e di discuterne intuitivamente il significato, abbiamo bisogno di introdurre ancora qualche concetto.

L'analisi delle coalizioni ha portato alla determinazione dei prezzi in termini di (coefficienti assegnati alle) allocazioni appartenenti al nucleo delle coalizioni nebulose $\mathcal{W}$. Notiamo innanzitutto come sotto opportune condizioni si possa dimostrare che le coalizioni nebulose non bloccano *tutte* le allocazioni efficienti nel senso di Pareto, cioè $\mathcal{W}$ è non vuoto. Il linguaggio e i risultati della teoria dei giochi ci consentono poi di caratterizzare con precisione $\mathcal{W}$ in termini di *equilibri di Walras*. Per farlo procediamo in direzione opposta e assumiamo che sia dato un sistema di prezzi per l'economia astratta di rifermento. Con alcune ipotesi aggiuntive sulla razionalità egocentrica degli agenti economici, e in particolare il fatto che una quantità maggiore di ricchezza sia sempre preferita a una quantità minore – ricchezza che il sistema di prezzi ci consente ora di misurare in senso *interpersonale* – possiamo dimostrare che un'allocazione nel nucleo nebuloso dell'economia equivale logicamente ad un'allocazione di equilibrio rispetto a un opportuno sistema di prezzi. Il concetto di equilibrio è qui quello di sviluppato in ambito neoclassico e formulato per la prima volta in modo rigoroso da Leon Walras (1834-1910), e che comporta sostanzialmente che la domanda di beni equivalga all'offerta. Date queste premesse si può dimostrare che ogni equilibrio di Walras è efficiente nel senso di Pareto. Assumendo inoltre che sia possibile un'opportuna ridistribuzione dei beni iniziali vale anche il converso, e cioè che gli ottimi di Pareto sono essi stessi equilibri di Walras. Si tratta del *teorema fondamentale dell'economia del benessere*:

Teorema 3 (Hotelling-Allais-Arrow-Debreu)**.** *Se le risorse iniziali sono assegnate ad agenti razionali ed egocentrici (e questi posseggono qualcosa di ogni bene) allora*

(1) *qualsiasi equilibrio di Walras è un ottimo di Pareto*
(2) *viceversa, ogni ottimo di Pareto è un equilibrio di Walras rispetto a un sistema di prezzi e ad una ridistribuzione iniziale di beni.*

Ricapitoliamo il percorso che abbiamo affrontato fino a qui, tenendo presente che al contrario di quanto suggerito dal nostro resoconto ipersemplificato e informale dei fatti principali, lo sviluppo storico dei metodi e dei concetti che confluiscono nel teorema 3 è stato tutt'altro che lineare. Siamo partiti chiedendoci se sia possibile argomentare per via matematica a favore o contro un determinato modo di prendere decisioni pubbliche, ovvero decisioni che riguardano il benessere della collettività. Abbiamo visto come il nostro (di chi scrive, probabilmente di chi legge, e ragionevolmente di buona parte della popolazione) bagaglio culturale ci porti naturalmente a privilegiare il punto di vista che per mancanza di un termine migliore abbiamo chiamato *democratico*. Vorremmo cioè che le decisioni riguardanti il benessere sociale dipendessero in modo opportuno (!) dalla volontà degli individui che costituiscono la società. Guidati da queste idee, abbiamo percorso i passi più significativi della costruzione del modello arroviano, che conduce all'impossibilità di costruire un metodo di aggregazione logico-matematico delle volontà individuali nella volontà collettiva. Indebolendo l'ipotesi di indipendenza abbiamo aperto a un altro metodo di aggregazione, quello basato sul criterio di efficienza paretiana. Cercando di raffinare la selezione degli ottimi di Pareto attraverso la costruzione di coalizioni di individui motivati unicamente dalla massimizzazione della propria utilità personale e attraverso l'introduzione della proprietà privata, siamo arrivati alla determinazione, da parte unicamente del mercato, dei prezzi. Il teorema 3 ci dice che i prezzi determinati dal mercato sono efficienti nel senso di Pareto, e viceversa, che gli ottimi di Pareto conducono a prezzi in equilibrio. Poiché, tra l'altro, il risultato si estende a economie astratte con produzione, è naturale chiedersi se, come corollario pratico del teorema fondamentale dell'economia del benessere, non abbiamo *dimostrato* che il miglior modo di promuovere il benessere sociale non consista nell'incentivare la realizzazione del benessere individuale in un mercato libero e competitivo. Abbiamo, in altri termini, dimostrato l'esistenza e l'intrinseca efficienza della *mano invisibile* ipotizzata dal fondatore stesso dell'economia moderna, Adam Smith (1723-1790)? La storia che abbiamo raccontato in questa nota mette in evidenza come la risposta sia affermativa soltanto a patto di ritenere le ipotesi di costruzione del modello matematico come completamente caratterizzanti (nel senso delle equazioni del moto ricordate in precedenza) dei fenomeni in questione. Ma ci sono varie ragioni per ritenere le cose non stiano in questo modo, fatte salve eccezioni per così dire "locali". Iniziamo con alcune considerazioni relativamente ovvie sulla natura degli agenti economici.

- *Onniscienza economica*: Una condizione necessaria per la derivazione del teorema 3 è che ciascun consumatore conosca i prezzi di ciascun bene, in ogni luogo e al tempo fissato. Si tratta evidentemente di un'ipotesi che, se mai è soddisfatta, può esserlo solo in modo molto parziale e locale, relativamente cioè a un paniere molto specifico, in un luogo specifico, eccetera.

- *Onniscienza logica*: Contrariamente dalle ipotesi sulla razionalità ideale (catturate, lo ricordiamo, dall'identificazione dell'azione razionale con la massimizzazione dell'utilità individuale) i consumatori violano spesso – e spesso in modo prevedibile, come osservato dagli economisti comportamentali – i criteri logici di razionalità. Come diceva Jonathan Swift, gli uomini non sono *animali razionali*, ma solo *animali con capacità razionale*.
- *Liquidità perfetta*: Altrettanto necessaria è l'ipotesi che ciascun consumatore sia sempre in grado di comprare o vendere le quantità desiderate di un qualsiasi bene al prezzo di mercato. Si tratta, ancora una volta, di un'ipotesi virtualmente impossibile da soddisfare nell'economia reale (per esempio, non c'è alcuna garanzia che i beni siano disponibili sul mercato).

Insomma, con buona pace di Pareto, l'irrazionalità (intesa come deviazione dai criteri logici di coerenza e massimizzazione) non è l'attrito. Trascurarla, significa escludere dal modello un elemento caratterizzante dell'oggetto dell'analisi teorica.

Ma c'è di più. Anche se nei modelli di economia matematica sostituissimo *homo economicus* con un più terreno *homo heuristicus* – come auspicano i fautori delle teorie di "razionalità limitata"[5] – perché dovremmo credere che il risultato del libero scambio goda delle proprietà che caratterizzano un equilibrio di Walras? La dimostrazione dell'esistenza di un prezzo di equilibrio all'interno del modello che abbiamo costruito non equivale infatti ad affermare che i prezzi *osservati* in una economia reale sono quelli che equilibrano la domanda e l'offerta. Richiamiamo per sommi capi alcuni dei motivi principali che ci spingono a essere prudenti, se non scettici, rispetto a questa identificazione.

- *Scatola nera*: L'equilibrio walrasiano non ci fornisce in nessun modo informazioni su *come* il mercato realmente opera. Un meccanismo piuttosto irrealistico è quello del *banditore walrasiano*. Un banditore annuncia un prezzo p; se non è quello di equilibrio, passa ad annunciare un nuovo prezzo q con $q_k < p_k$, nel caso di eccesso di domanda in p_k positivo, e $q_k > p_k$, in caso di eccesso di domanda

[5] Si veda ad esempio [4].

negativo, fino a raggiungere l'equilibrio. Si tratta di un'idea importante matematicamente, ma sembra evidentemente irrealistico che l'equilibrio si raggiunga nello stesso istante in tutti i mercati e per tutti i consumatori.

- *Verificabilità sperimentale*: Infine, ma certo non per importanza, è possibile verificare sperimentalmente la teoria dell'equilibrio generale che si sviluppa intorno al teorema 3? La questione è molto intricata. A tal proposito vale la pena ricordare il contributo di Hugo Sonnenschein che, intorno agli anni 1970, pose la questione di decidere se la fondazione individualistica della teoria dell'equilibrio potesse generare restrizioni non banali e empiricamente verificabili sull'eccesso di domanda aggregata o sulla domanda di mercato. Contributi di vari autori (tra cui Rolf Ricardo Mantel, Gérard Debreu, Pierre André Chiappori e Ivar Ekeland) hanno risposto negativamente, in questo modo mostrando la scarsa propensione, da parte della teoria dell'equilibrio, a generare previsioni empiricamente falsificabili. Osserviamo, comunque, come questo sia ad oggi un tema di ricerca ancora molto attivo.

4. Conclusione

Sembra dunque che i motivi che ci portano a essere scettici rispetto alle conseguenze politico-economiche del teorema fondamentale dell'economia del benessere conducano a un più generale scetticismo rispetto alla sostanziale equivalenza del ruolo svolto dalla matematica nelle scienze naturali e sociali. Arrow, Debreu, Shapley – per non parlare di Milnor, von Neumann, Nash, e tanti altri – hanno dato contributi fondamentali allo sviluppo della teoria economica, spesso dando il via a nuove aree di ricerca matematica. È quindi evidente che la matematica giochi un ruolo di primo piano nel problema fondamentale che ci siamo posti in questa nota.

Tuttavia, per gli argomenti che abbiamo tratteggiato qui sopra, ma che i lettori interessati possono trovare presentati in maggiore dettaglio in [3], si tratta di un ruolo né egemonico, né per così dire autosufficiente. La formalizzazione matematica del problema dell'allocazione ottimale delle risorse economiche alla società infatti può unicamente mostrarci le vie che *sappiamo di non poter percorrere* razionalmente. In questo senso le speranze dei sostenitori delle tesi liberiste nella capacità dei risultati dell'analisi matematica di eliminare tutte le possibili soluzioni tranne una – quella per cui il benessere sociale è raggiunto mediante la promozione dei soli interessi individuali – risultano mal riposte.

Il fallimento della strada indicata dall'individualismo metodologico non si deve però intendere come una dimostrazione della futilità della ricerca di una soluzione al problema centrale. Al contrario, ci stimola a impegnarci con maggiori risorse per sviluppare teorie e metodi più sofisticati e culturalmente meno settoriali. La nostra analisi infatti mostra tanto la necessità dell'impostazione formale, quanto la sua insufficienza alla comprensione teorica (e alla conseguente realizzazione pratica) del benessere sociale. Sembra invece ragionevole richiedere che all'economia matematica si affianchi un'analisi concettuale (e sperimentale) dei fenomeni sociali basata sulla discussione, sul costante argomentare – con tolleranza – tra i membri della società. In sintesi un processo di deliberazione collettiva che tenga conto delle diverse culture e della molteplicità intrinseca delle risposte possibili, finalizzato alla migliore comprensione delle cose e, in ultima analisi, a una migliore formazione e educazione della società stessa che in questo modo potrebbe aspirare a una sempre maggiore libertà. A tal proposito ci sembra opportuno affidare la nostra conclusione alle parole di A. Sen, che se pur relative a un contesto più ampio di quello di cui ci siamo occupati qui, ci offrono, con la consueta eleganza, un importante spunto di riflessione propositiva:

> *Il rimedio a un cattivo ragionamento sta in un ragionamento migliore, e il compito dell'analisi razionale è proprio quello di guidare il passaggio dal primo al secondo. È senz'altro possibile che in alcune loro affermazioni gli "autori illuministi" non abbiano tenuto abbastanza conto della necessità di approfondire e procedere con prudenza. Ma difficilmente si può mettere per questo sotto accusa la prospettiva illuminista nel suo complesso, e ancora meno contestare il ruolo della ragione rispetto ai comportamenti giusti e alla buona politica sociale.* [9]

Riferimenti bibliografici

[1] K.J. Arrow. *Social Choice and Invidivual Values*. Jonh Wiley and Sons, second edi edition, 1963.

[2] B. de Finetti. *Un matematico e l'economia*. Franco Angeli, Milano, 1969.

[3] M. Giaquinta e H. Hosni. *Teoria della scelta sociale e Teorema fondamentale dell'economia del benessere: Razionalità, coerenza efficienza ed equità*. Edizioni della Normale, 2015.

[4] G. Gigerenzer e H. Brighton. Homo Heuristicus: Why Biased Minds Make Better Inferences. *Topics in Cognitive Science*, 1(1):107–143, 2009.

[5] S. Leonesi e C. Toffalori. *L'arte di uccidere i draghi*. Università Bocconi Centro PRISTEM, 2013.

[6] R. Lucchetti. *Di duelli, scacchi e dilemmi*. Bruno Mondadori Editore, Milano, 2001.

[7] F. Lillo, S. Miccichè, and R. Mantegna. Econofisica: Il contributo dei fisici allo studio dei sistemi economici. *Il nuovo Saggiatore*, pages 68–81.

[8] V. Pareto. *Manuale di Economia Politica*. Società editrice libraria, Milano, 1919.

[9] A.K. Sen. *L'idea di giustizia*. Mondadori, 2010.

[10] J. von Neumann e O. Morgenstern. *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, third edition, 1953.