ANALISI DI FOURIER IN SPAZI EUCLIDEI

prof. Fulvio Ricci

A.A. 1995-1996 - Politecnico di Torino

Indice

1. La classe di Schwartz e la trasformata di Fourier

La classe di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (o più brevemente $\mathcal{S}$ se non c'è ambiguità) consiste delle funzioni f infinitamente derivabili su $\mathbb{R}^n$ tali che

$$\partial^\alpha f(x) = o(|x|^{-k}) \qquad \text{per } x \to \infty$$

per ogni multi-indice α e ogni $k \in \mathbb{N}$.

Dato $k \in \mathbb{N}$ si consideri la norma

$$\|f\|_{(k)} = \sum_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^k |\partial^\alpha f(x)|$$

su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La famiglia di norme $\{\| \ \|_{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ definisce su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ una struttura di spazio di Fréchet.

Si osservi che, essendo $\|f\|_{(k)} \le \|f\|_{(k+1)}$, una qualunque sottosuccessione di norme $\{\| \ \|_{(k_j)}\}$ definisce la stessa topologia. Non è difficile verificare che anche la famiglia di norme

$$p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ definisce su $\mathcal{S}$ la stessa topologia.

Proposizione 1.1. *Lo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni di classe C^∞ a supporto compatto è denso in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Sia η una funzione C^∞ a supporto compatto tale che $\eta(x) = 1$ per $|x| \le 1$. Per $R > 0$ si ponga $\eta_{(R)}(x) = \eta(x/R)$. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la funzione $f\eta_{(R)}$ ha supporto compatto e coincide con f per $|x| \le R$. Dato un intero k, si ha quindi

$$\begin{aligned}
\|f - f\eta_{(R)}\|_{(k)} &= \sum_{|\alpha|\le k} \sup_{|x|>R} (1+|x|)^k \big|\partial^\alpha\big(f(1-\eta_{(R)})\big)(x)\big| \\
&\le C_k \sum_{|\alpha|,|\beta|\le k} \sup_{|x|>R} (1+|x|)^k |\partial^\alpha f(x)||\partial^\beta(1-\eta_{(R)})(x)| \\
&\le C_k \|f\|_{(k+1)} \sup_{|x|>R} (1+|x|)^{-1} \\
&= C_k \|f\|_{(k+1)} (1+R)^{-1} \ ,
\end{aligned}$$

in quanto $|\partial^\alpha f(x)| \le \|f\|_{(k+1)}(1+|x|)^{-k-1}$ e le derivate $\partial^\beta(1-\eta_{(R)})(x)$ si maggiorano con una costante dipendente da k.

Dunque $\lim_{R\to\infty} \|f - f\eta_{(R)}\|_{(k)} = 0$ per ogni k. $\square$

Questa struttura è tale da rendere continue le seguenti operazioni:

(1) la moltiplicazione $(f,g) \mapsto fg$ da $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$;
(2) più in generale, sia g una funzione di classe C^∞ tale che per ogni sua derivata $\partial^\alpha g$ vi sia un intero m_α tale che $|\partial^\alpha g(x)| \le C_\alpha(1+|x|)^{m_\alpha}$. Allora la moltiplicazione $f \mapsto fg$ è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$;
(3) le traslazioni $\tau_h : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, ove si ponga, per $h \in \mathbb{R}^n$, $\tau_h f(x) = f(x-h)$;
(4) la convoluzione $(f,g) \mapsto f * g$ da $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$;
(5) le derivazioni $f \mapsto \partial^\alpha f$ da $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}$;
(6) la trasformata di Fourier da $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}$;
(7) le inclusioni di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nei seguenti spazi di Banach: $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$, spazi di Sobolev $W^k(\mathbb{R}^n)$ $(k \in \mathbb{N})$, spazi Λ_α di funzioni Hölderiane, e molti altri;

Diamo alcune dimostrazioni solo in relazione alla trasformata di Fourier, il che ci consentirà di stabilire alcune utili identità.

Ricordiamo che la trasformata di Fourier di una funzione f integrabile è la funzione

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx \ , \tag{1.1}$$

definita per $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 1.2. *Se $f \in \mathcal{S}$, anche $\hat{f} \in \mathcal{S}$ e per ogni coppia di multi-indici α, β esiste un intero k tale che*

$$p_{\alpha,\beta}(\hat{f}) \leq C_{\alpha\beta} \|f\|_{(k)} \ .$$

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che se $f \in \mathcal{S}$, allora $\hat{f}$ è derivabile. Si ha

$$\frac{\hat{f}(\xi + he_j) - \hat{f}(\xi)}{h} = \int f(x) e^{-i\xi\cdot x} \frac{e^{-ihx_j} - 1}{h} dx \ .$$

Essendo $\left|(e^{-ihx_j} - 1)/h\right| \leq |x|$, per la convergenza dominata si ha

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = -i \int f(x) x_j e^{-i\xi\cdot x} dx = -i\widehat{x_j f}(\xi) \ .$$

Ma $x_j f \in \mathcal{S}$, per cui $\hat{f}$ può essere ulteriormente derivata. Si conclude per induzione che $\hat{f}$ è C^∞ e che

$$\partial^\alpha \hat{f}(\xi) = \big((-ix)^\alpha f\big)\hat{}\,(\xi) \ . \tag{1.2}$$

Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) &= \int \partial^\alpha f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int f(x) \frac{\partial^\alpha e^{-i\xi\cdot x}}{\partial x^\alpha} dx \\
&= \int f(x) (i\xi)^\alpha e^{-i\xi\cdot x} dx \ .
\end{aligned}$$

Dunque

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \ . \tag{1.3}$$

Dati due multi-indici α, β, si ha dunque, combinando la (1.2) con la (1.3),

$$\begin{aligned}
|\xi^\alpha \partial^\beta \hat{f}(\xi)| &= \left|\widehat{\partial^\alpha (x^\beta f)}(\xi)\right| \\
&\leq \int \left|\partial^\alpha (x^\beta f)(x)\right| dx \ .
\end{aligned}$$

Applicando la formula di Leibniz, $\partial^\alpha(x^\beta f)$ si scompone in una somma di termini della forma $c_{\alpha'\beta'} x^{\beta'} \partial^{\alpha'} f$, con $\alpha' \leq \alpha$ e $\beta' \leq \beta$.

Ciascun termine è a decrescenza rapida, e precisamente, se k è un intero maggiore o uguale sia di $|\alpha|$ che di $|\beta| + n + 1$, si ha

$$|x^{\beta'} \partial^{\alpha'} f(x)| \leq C(1 + |x|)^{-n-1} \|f\|_{(k)} \ .$$

In conclusione

$$\begin{aligned} p_{\alpha,\beta}(\hat{f}) &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \partial^\beta \hat{f}(\xi)| \\ &\leq C_{\alpha\beta} \|f\|_{(k)} \int (1 + |x|)^{-n-1} dx \\ &\leq C_{\alpha\beta} \|f\|_{(k)} \ , \end{aligned}$$

come da dimostrarsi. $\square$

Il Lemma 1.2 prova che la trasformata di Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ è continua. Dimostriamo ora che $\mathcal{F}$ è in realtà un isomorfismo suriettivo.

Lemma 1.3. *Se* $\varphi_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|^2}$, *con* $\alpha > 0$, *risulta*

$$\hat{\varphi}_\alpha(\xi) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\alpha}} \ .$$

Dimostrazione. È sufficiente considerare il caso $n = 1$ perché la trasformata n-dimensionale

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_\alpha(\xi) &= \int e^{-\alpha|x|^2} e^{-i\xi \cdot x} dx \\ &= \prod_{j=1}^{n} \int e^{-\alpha x_j^2} e^{-i\xi_j x_j} dx_j \end{aligned}$$

non è altro che il prodotto di n trasformate unidimensionali.

Si consideri la funzione

$$F(z) = e^{-z^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-zt} dt \ .$$

Derivando sotto integrale, si verifica che essa è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. Se $z \in \mathbb{R}$,

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+z/2)^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \ .$$

Quindi F è costante; posto $z = i\lambda$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i\lambda t} dt = \sqrt{\pi} e^{-\lambda^2/4} \ .$$

Infine si ponga $t = \sqrt{\alpha} x$ e $\lambda = \xi / \sqrt{\alpha}$. $\square$

Teorema 1.4 (Formula di inversione). *Se* $f \in \mathcal{S}$*,*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi \ .$$

Dimostrazione. Iniziamo con il caso $x = 0$. Si ha

$$\begin{aligned}
\int \hat{f}(\xi)\, d\xi &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \hat{f}(\xi) e^{-\varepsilon|\xi|^2}\, d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \iint f(y) e^{-i\xi\cdot y} e^{-\varepsilon|\xi|^2}\, dy\, d\xi \\
&= \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{n/2} \lim_{\varepsilon\to 0} \int f(y) e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}}\, dy \\
&= 2^n \pi^{n/2} \lim_{\varepsilon\to 0} \int f(2\sqrt{\varepsilon}x) e^{-|x|^2}\, dx \\
&= (2\pi)^n f(0) \ ,
\end{aligned}$$

applicando due volte la convergenza dominata.

Basta ora applicare questa identità alla funzione $\tau_h f$, la cui trasformata di Fourier è

$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{-ih\cdot\xi} \hat{f}(\xi) \ , \tag{1.4}$$

per ottenere la conclusione. □

Corollario 1.5. *La trasformata di Fourier è un isomorfismo suriettivo di* $\mathcal{S}$ *in sé.*

Dimostrazione. Data $\varphi(\xi) \in \mathcal{S}$, si ponga

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \varphi(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}\varphi(-x) \ .$$

Allora $f \in \mathcal{S}$ e, applicando la formula di inversione, $\hat{f}(\xi) = \varphi(\xi)$. Quindi $\mathcal{F}$ è suriettiva; inoltre

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}\varphi(-x) \ ,$$

per cui anche $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ è continua. □

Come vedremo, la trasformata di Fourier si estende a oggetti molto più generali delle funzioni di $\mathcal{S}$. Per ora consideriamo la trasformata di Fourier in L^1 e in L^2.

Se $f \in L^1$, la funzione $\hat{f}(\xi)$, definita dalla (1.1) è chiaramente limitata. Infatti

$$|\hat{f}(\xi)| \le \int |f(x)|\, dx = \|f\|_1 \ .$$

Più precisamente si ha:

Teorema 1.6. *La trasformata* $\mathcal{F}$ *è continua da* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *a* $C_0(\mathbb{R}^n)$ *e ha immagine densa.*

Dimostrazione. $\mathcal{F}$ applica $\mathcal{S} \subset L^1$ su $\mathcal{S} \subset C_0$ con continuità. Poiché $\mathcal{S}$ è denso sia in L^1 che in C_0, si ha la tesi. □

Passiamo ora a L^2.

Teorema 1.7 (Formula di Plancherel). *Se $f, g \in \mathcal{S}$, vale l'identità*

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi\ .$$

Dimostrazione. Applicando la formula di inversione a $f * g^*$, dove $g^*(x) = \overline{g(-x)}$, e osservando che

$$\widehat{g^*}(\xi) = \overline{\hat{g}(\xi)}\ , \tag{1.5}$$

$$\widehat{f * g^*} = \hat{f}\widehat{g^*} = \hat{f}\overline{\hat{g}}\ , \tag{1.6}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\int f(x)\overline{g(x)}\,dx &= (f * g^*)(0)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int \widehat{f * g^*}(\xi)\,d\xi\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi\ . \qquad \square\end{aligned}$$

Corollario 1.8. *L'operatore $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ si estende in modo unico a un operatore unitario su $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. La formula di Plancherel implica che $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ è un'isometria suriettiva di $\mathcal{S} \subset L^2$ in sé. Poiché $\mathcal{S}$ è denso in L^2, si ha la tesi. $\square$

La trasformata di Fourier di una generica $f \in L^2$ non può tuttavia essere definita tramite la (1.1), in quanto l'integrale è divergente in generale. Occorre perciò approssimare f con funzioni in $L^2 \cap L^1$, mediante espressioni come

$$\hat{f}(\xi) = \operatorname*{l.i.m.}_{\varepsilon \to 0}\int f(x)e^{-\varepsilon|x|^2}e^{-i\xi\cdot x}dx$$

$$\hat{f}(\xi) = \operatorname*{l.i.m.}_{R \to \infty}\int_{|x|<R} f(x)e^{-i\xi\cdot x}dx\ ,$$

o altre simili.

Concludiamo questo paragrafo ricapitolando le (1.2)-(1.6) e altre proprietà analoghe della trasformata di Fourier facilmente dimostrabili.

$f(x)$	$\hat{f}(\xi)$
$\tau_h f(x)$	$e^{-i\xi\cdot h}\hat{f}(\xi)$
$e^{ix\cdot h}f(x)$	$\tau_h\hat{f}(\xi)$
$(-ix)^\alpha f(x)$	$\partial^\alpha\hat{f}(\xi)$
$\partial^\alpha f(x)$	$(i\xi)^\alpha\hat{f}(\xi)$
$f * g(x)$	$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$
$f(x)g(x)$	$\frac{1}{(2\pi)^n}\hat{f} * \hat{g}(\xi)$
$\overline{f(x)}$	$\overline{\hat{f}(-\xi)}$
$f(-x)$	$\hat{f}(-\xi)$
$f(\delta x)$	$\delta^{-n}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$
$f(Ax)$	$\lvert\det A\rvert^{-1}\hat{f}({}^tA^{-1}\xi)$

Nell'ultima formula A è una matrice $n \times n$ invertibile; le due formule precedenti ne sono casi particolari.

2. Distribuzioni temperate

Si chiama *distribuzione temperata* un funzionale lineare continuo $\Phi : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$.

Ricordiamo che un funzionale lineare Φ su $\mathcal{S}$ è continuo se e solo se esiste un intorno U di 0 tale che $\Phi(U) \subset \{z : |z| < 1\}$. Per la definizione della topologia di $\mathcal{S}$, ciò equivale a dire che esistono un intero N e una costante C tali che

$$|\Phi(f)| \le C\|f\|_{(N)} \ . \tag{2.1}$$

In modo equivalente, Φ è continuo se e solo se esistono un numero finito di seminorme p_{α_j,β_j}, $1 \le j \le m$, e una costante C tali che

$$|\Phi(f)| \le C \sum_1^m p_{\alpha_j,\beta_j}(f) \ .$$

È evidente che una distribuzione temperata ha *ordine finito*, ossia esiste un intero m tale che per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$, Φ si estenda allo spazio $C^m(K)$ delle funzioni di classe C^m a supporto contenuto in K.

Primi esempi.

(1) Sia $u(x)$ una funzione localmente integrabile e tale che esista un intero k per cui $\int |u(x)|(1+|x|)^{-k}\,dx < \infty$. Ponendo, per $f \in \mathcal{S}$,

$$\Lambda_u(f) = \int f(x)u(x)\,dx \ ,$$

si ottiene una distribuzione temperata, in quanto

$$|\Lambda_u(f)| \le \left(\int |u(x)|(1+|x|)^{-k}\,dx\right) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^k |f(x)| \le C\|f\|_{(k)} \ .$$

(2) Sia $n = 1$. dato $s > -2$, si ponga

$$\Phi_s(f) = \int_0^1 \big(f(x) - f(0)\big)x^s\,dx \ .$$

Se $s > -1$, la funzione $u(x) = x^s\chi_{[0,1]}(x)$ è integrabile, per cui si può scrivere

$$\Phi_s(x) = \int f(x)u(x)\,dx - f(0)\int_0^1 x^s\,dx = \Lambda_u(f) - \frac{1}{s+1}\delta_0(f) \ ,$$

dove Λ_u è come nell'Esempio 1 e δ_0 è la delta di Dirac nell'origine. In questo caso è ovvio che Φ_s sia una distribuzione temperata di ordine 0.

Supponiamo ora $-2 < s \leq -1$. Poiché u non è più integrabile, non si può suddividere l'integrale in due. Tuttavia, notando che $|f(x) - f(0)| \leq x\|f'\|_\infty$, si ha

$$|\Phi_s(f)\| \leq \|f'\|_\infty \int_0^1 x^{s+1}\,dx \leq \frac{1}{s+2}\|f\|_{(1)} \ .$$

Ciò dimostra che Φ_s è una distribuzione temperata e che ha ordine ≤ 1. Per verificare che non ha ordine 0, si prenda una funzione f continua a supporto compatto che si annulli nell'origine in modo che $f(x) \sim 1/\log x$. Allora $\int (f(x) - f(0))x^s\,dx$ diverge. Approssimando f uniformemente con una successione $\{f_n\}$ in $\mathcal{S}$, si verifica che $\Phi_s(f_n) \to \infty$.

Lo spazio delle distribuzioni temperate si indica con $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (scriveremo semplicemente $\mathcal{S}'$ se non c'è ambiguità).

Nel seguito identificheremo una funzione u localmente integrabile con la distribuzione Λ_u dell'Esempio 1. Diremo anche che una distribuzione Φ è una funzione se è della forma Λ_u per qualche u.

Per comodità, scriveremo $\langle \Phi, f \rangle$ in luogo di $\Phi(f)$.

Si dice che $\Phi \in \mathcal{S}'$ *si annulla sull'aperto* Ω se per ogni $f \in \mathcal{S}$ con $\operatorname{supp} f \subset \Omega$ si ha $\langle \Phi, f \rangle = 0$. Per la Proposizione 1.1, è sufficiente verificare questa condizione per f a supporto compatto.

Se Φ si annulla su due aperti Ω_1 e Ω_2, allora essa si annulla sulla loro unione. Infatti una qualunque f con supporto compatto contenuto in $\Omega_1 \cup \Omega_2$ si decompone, mediante opportune partizioni dell'unità, nella somma di due funzioni f_1, f_2 con supporto in Ω_1, Ω_2 rispettivamente.

Il *supporto* di Φ è definito come il complementare del più grande aperto Ω su cui Φ si annulla.

Di conseguenza, se $\operatorname{supp}\Phi \cap \operatorname{supp} f = \emptyset$, è sicuramente $\langle \Phi, f \rangle = 0$. Inoltre, se $f = g$ su un intorno di $\operatorname{supp}\Phi$, allora $\langle \Phi, f \rangle = \langle \Phi, g \rangle$.

Proposizione 2.1. *Sia $\Phi \in \mathcal{S}'$; un punto x_0 non appartiene a* $\operatorname{supp}\Phi$ *se e solo se esiste un suo intorno U tale che per ogni $f \in \mathcal{S}$ con* $\operatorname{supp} f \subset U$ *si abbia* $\langle \Phi, f \rangle = 0$.

Dimostrazione. Se $x_0 \notin \operatorname{supp}\Phi$, si prenda U intorno di x_0 che sia disgiunto da $\operatorname{supp}\Phi$. Allora Φ si annulla su U $\square$

In generale non si può dire però che se f si annulla su $\operatorname{supp}\Phi$ allora $\langle \Phi, f \rangle = 0$ (si costruisca un esempio in $\mathbb{R}$ definendo Φ come $\langle \Phi, f \rangle = f'(0)$).

Operazioni con distribuzioni temperate.

Le operazioni sulle distribuzioni vengono definite secondo il seguente criterio: se una distribuzione ha la forma Λ_u descritta nell'Esempio 1, l'operazione deve coincidere con la corrispondente operazione sulla funzione u.

(1) *Moltiplicazione per funzioni C^∞.*

Sia g una funzione di classe C^∞ tale che per ogni sua derivata $\partial^\alpha g$ vi sia un intero m_α tale che $|\partial^\alpha g(x)| \leq C_\alpha(1 + |x|)^{m_\alpha}$.

Data $\Phi \in \mathcal{S}'$, si definisca $g\Phi$ ponendo

$$\langle g\Phi, f \rangle = \langle \Phi, fg \rangle \ .$$

Poiché l'applicazione $f \mapsto fg$ è continua da $\mathcal{S}$ in sé, $g\Phi \in \mathcal{S}'$.

(2) *Derivazione.*

Dati $\Phi \in \mathcal{S}'$ e un multi-indice α, si definisce $\partial^\alpha \Phi$ ponendo

$$\langle \partial^\alpha \Phi, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \Phi, \partial^\alpha f \rangle \ .$$

(3) *Convoluzione per funzioni in $\mathcal{S}$.*

Date $\Phi \in \mathcal{S}'$ e $g \in \mathcal{S}$, si definisce $\Phi * g \in \mathcal{S}'$ ponendo

$$\langle \Phi * g, f \rangle = \langle \Phi, f * \check{g} \rangle \ ,$$

dove $\check{g}(x) = g(-x)$. La definizione è giustificata dal fatto che

$$\begin{aligned}\int (u * g)(x) f(x)\, dx &= \iint u(y) g(x-y)\, dy\, f(x)\, dx \\ &= \iint \check{g}(y-x) f(x)\, dx\, u(y)\, dy \\ &= \int u(y)(f * \check{g})(y)\, dy \ .\end{aligned}$$

Proposizione 2.2. *La distribuzione $\Phi * g$ coincide con la funzione*

$$\Phi * g(x) = \langle \Phi, \tau_x \check{g} \rangle \ ;$$

inoltre esiste un intero N tale che per ogni multi-indice α $|\partial^\alpha (\Phi * g)(x)| \le C_\alpha (1 + |x|)^N$.

Dimostrazione. Si ponga $u(x) = \langle \Phi, \tau_x \check{g} \rangle$. Poiché le traslazioni sono continue in $\mathcal{S}$, u è continua.

Sia N tale che valga la (2.1). Allora $|u(x)| \le C \|\tau_x \check{g}\|_{(N)}$. Ma, poiché

$$|\partial^\alpha g(t)| \le \|g\|_{(N)} (1 + |t|)^{-N} \ ,$$

se $|\alpha| \le N$, si ha

$$\begin{aligned}\|\tau_x \check{g}\|_{(N)} &= \sum_{|\alpha| \le N} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1 + |y|)^N |\partial^\alpha g(x - y)| \\ &= \sum_{|\alpha| \le N} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (1 + |x - t|)^N |\partial^\alpha g(t)| \\ &\le \left(\sup_{t \in \mathbb{R}^n} \frac{(1 + |x - t|)^N}{(1 + |t|)^N} \right) \|g\|_{(N)} \ .\end{aligned}$$

Essendo $(1 + |x - t|)/(1 + |t|) \le 1 + |x|$, si ricava che

$$|u(x)| \le C(1 + |x|)^N \ .$$

Mostriamo ora che $\Lambda_u = \Phi * g$. Data $f \in \mathcal{S}$, si ha

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_u, f\rangle &= \int u(x) f(x)\, dx \\ &= \lim_{h\to 0} h^n \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} u(hj) f(hj) \\ &= \lim_{h\to 0} h^n \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} f(hj)\langle \Phi, \tau_{hj}\check{g}\rangle \\ &= \lim_{h\to 0} \left\langle \Phi, h^n \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} f(hj)\tau_{hj}\check{g}\right\rangle \\ &= \langle \Phi, \check{g} * f\rangle \\ &= \langle \Phi * g, f\rangle\ .\end{aligned}$$

I passaggi sono giustificati dai seguenti fatti, di verifica non difficile:
(a) la serie $\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} f(hj)\tau_{hj}\check{g}$ converge in $\mathcal{S}$;
(b) $\lim_{h\to 0} h^n \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} f(hj)\tau_{hj}\check{g} = \check{g} * f$ in $\mathcal{S}$.

Per completare la dimostrazione, osserviamo che se $f \in \mathcal{S}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{h\to 0} \frac{\tau_{-he_j} f - f}{h}$$

in $\mathcal{S}$. Perciò

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\langle \Phi, \tau_{x+he_j}\check{g}\rangle - \langle \Phi, \tau_x\check{g}\rangle}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left\langle \Phi, \frac{\tau_{he_j}\tau_x\check{g} - \tau_x\check{g}}{h}\right\rangle \\ &= \langle \Phi, \partial_{x_j}\tau_x\check{g}\rangle \\ &= \left\langle \Phi, \tau_x\big(\partial_{x_j} g\big)\check{}\right\rangle\ .\end{aligned}$$

Ripetendo le considerazioni precedenti, si ottiene che $|\partial_{x_j} u(x)| \le C'(1+|x|)^N$, e che

$$\Lambda_{\partial_{x_j} u} = \Phi * \partial_{x_j} g\ .$$

Per induzione si ha la tesi. $\square$

La dimostrazione ha evidenziato che $\partial_{x_j}(\Phi * g) = \Phi * \partial_{x_j} g$, e dunque che per ogni multi-indice α

$$\partial^\alpha(\Phi * g) = \Phi * \partial^\alpha g\ . \tag{2.2}$$

D'altra parte, se $f, g \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\partial_{x_j}(f * g)(x) &= \int f(y) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x-y)\, dy \\ &= -\int f(y) \frac{\partial}{\partial y_j} g(x-y)\, dy \\ &= \int \frac{\partial f}{\partial y_j}(y) g(x-y)\, dy \\ &= \big(\partial_{x_j} f\big) * g(x)\ .\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\langle \partial^\alpha(\Phi * g), f\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle \Phi * g, \partial^\alpha f\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle \Phi, (\partial^\alpha f) * \check{g}\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle \Phi, \partial^\alpha (f * \check{g})\rangle \\ &= \langle \partial^\alpha \Phi, f * \check{g}\rangle \\ &= \langle (\partial^\alpha \Phi) * g, f\rangle \ ;\end{aligned}$$

quindi, oltre alla (2.2), vale anche la

$$\partial^\alpha(\Phi * g) = (\partial^\alpha \Phi) * g \ . \tag{2.3}$$

(4) *Trasformata di Fourier*

La trasformata di Fourier $\hat{\Phi}$ di $\Phi \in \mathcal{S}$ è definita da

$$\langle \hat{\Phi}, f\rangle = \langle \Phi, \hat{f}\rangle \ .$$

Per il Lemma 1.2, $\hat{\Phi} \in \mathcal{S}'$. Si verifica facilmente che se $g \in \mathcal{S}$,

$$(\Phi * g)\hat{} = \hat{\Phi}\hat{g} \ .$$

(5) *Composizione con trasformazioni lineari*

Se A è una matrice $n \times n$ invertibile e $\Phi \in \mathcal{S}'$, la composizione $\Phi \circ A$ è definita da

$$\langle \Phi \circ A, f\rangle = (\det A)^{-1}\langle \Phi, f \circ A^{-1}\rangle \ .$$

Le proprietà della trasformata di Fourier elencate in fondo al paragrafo precedente si estendono facilmente alle distribuzioni temperate.

In generale non è possibile definire né il prodotto né la convoluzione di due distribuzioni generiche, salvo casi particolari. Vediamo uno di questi casi, in cui uno dei due fattori ha supporto compatto.

Lemma 2.3. *Se $\Psi \in \mathcal{S}'$ ha supporto compatto e $f \in \mathcal{S}$, allora $\Psi * f \in \mathcal{S}$ e l'applicazione $f \mapsto \Psi * f$ di $\mathcal{S}$ in sé è continua.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 2.2, $\Psi * f$ è una funzione. Sia η una funzione C^∞ a supporto compatto, tale che $\eta(x) = 1$ su un intorno di $\operatorname{supp}\Psi$. Allora

$$\Psi * f(x) = \langle \Psi, \tau_x \check{f}\rangle = \langle \Psi, \eta\tau_x \check{f}\rangle \ ,$$

in quanto la differenza $\eta\tau_x\check{f} - \tau_x\check{f}$ è identicamente nulla in un intorno di $\operatorname{supp}\Psi$.

Quindi, per un N opportuno, e posto $K = \operatorname{supp}\eta$,

$$\begin{aligned}|\Psi * f(x)| &\le C\|\eta\tau_x\check{f}\|_{(N)} \\ &= C \sum_{|\alpha|\le N} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} (1+|y|)^N \left|\partial^\alpha\big(\eta(y)f(x-y)\big)\right| \\ &\le C' \sum_{|\alpha|\le N} \sup_{y\in K} (1+|y|)^N |\partial^\alpha f(x-y)| \\ &\le C'' \sum_{|\alpha|\le N} \sup_{y\in K} |\partial^\alpha f(x-y)| \ .\end{aligned}$$

Analogamente, usando la (2.2),

$$|\partial^\beta(\Psi * f)(x)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq N+|\beta|} \sup_{y\in K} |\partial^\alpha f(x-y)| \ .$$

Allora, dato $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|\Psi * f\|_{(k)} &\leq C_k \sum_{|\alpha|\leq N+k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^k \sup_{y\in K} |\partial^\alpha f(x-y)| \\ &\leq C_k \sum_{|\alpha|\leq N+k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, y\in K} (1+|x-y|)^k |\partial^\alpha f(x-y)| \\ &= C_k \|f\|_{(N+k)} \ . \qquad \square\end{aligned}$$

Lemma 2.4. *Se $\Psi \in \mathcal{S}'$ ha supporto compatto, contenuto nella palla aperta B_R, allora $\hat{\Psi}$ è una una funzione; precisamente è la restrizione a $\mathbb{R}^n$ di una funzione intera $u(z)$ su $\mathbb{C}^n$ che soddisfa la seguente proprietà: esiste un intero N tale che per ogni multi-indice α*

$$|\partial^\alpha \hat{\Psi}(z)| \leq C_\alpha (1+|z|)^N e^{R|\Im\mathrm{m} z|} \ .$$

Dimostrazione. Sia η una funzione C^∞ con $\operatorname{supp}\eta = B_R$ compatto tale che $\eta(x) = 1$ su un intorno di $\operatorname{supp}\Psi$. si definisca, per $z \in \mathbb{C}^n$

$$u(z) = \langle \Psi, \eta(x) e^{-i\sum_j z_j x_j} \rangle \ .$$

Si verifica facilmente che u è continua e soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann $\partial_{\bar{z}_j} u = 0$. Inoltre

$$\begin{aligned}|\partial^\alpha u(z)| &\leq C \sum_{|\beta|\leq N} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N \left| \partial_x^\beta \big(\eta(x) \partial_z^\alpha e^{-i\sum_j z_j x_j}\big) \right| \\ &\leq C' \sum_{|\beta|\leq N} \sup_{|x|\leq R} (1+|x|)^{N+|\alpha|} |z|^{|\beta|} \big| e^{-i\sum_j z_j x_j} \big| \\ &\leq C_\alpha (1+|z|)^N e^{R|\Im\mathrm{m} z|} \ .\end{aligned}$$

Inoltre, se $f \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\int u(\xi) f(\xi)\, d\xi &= \int \langle \Psi, \eta(x) e^{-i\xi\cdot x} \rangle f(\xi)\, d\xi \\ &= \left\langle \Psi, \eta(x) \int f(\xi) e^{-i\xi\cdot x}\, d\xi \right\rangle \\ &= \langle \Psi, \eta \hat{f} \rangle \\ &= \langle \Psi, \hat{f} \rangle \\ &= \langle \hat{\Psi}, f \rangle \ ,\end{aligned}$$

per cui $\hat{\Psi} = \Lambda_u$. $\square$

Teorema 2.5. *Siano $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}'$, con Ψ a supporto compatto. Allora la convoluzione $\Phi * \Psi$ e il prodotto $\hat{\Phi}\hat{\Psi}$ sono ben definiti in $\mathcal{S}'$ rispettivamente da*

$$\langle \Phi * \Psi, f\rangle = \langle \Phi, \check{\Psi} * f\rangle$$
$$\langle \hat{\Phi}\hat{\Psi}, f\rangle = \langle \hat{\Phi}, \hat{\Psi} f\rangle \ ;$$

inoltre $\widehat{\Phi * \Psi} = \hat{\Phi}\hat{\Psi}$.

Dimostrazione. I Lemmi 2.3 e 2.4 assicurano rispettivamente che $\Phi * \Psi$ e $\hat{\Phi}\hat{\Psi}$ sono ben definite. Si osservi in particolare che il Lemma 2.4 implica che $|\partial^\alpha \hat{\Psi}(x)| \leq C_\alpha (1+|x|)^N$ per ogni α.

Ora,
$$\langle \widehat{\Phi * \Psi}, f\rangle = \langle \Phi * \Psi, \hat{f}\rangle = \langle \Phi, \check{\Psi} * \hat{f}\rangle \ ,$$
per cui la dimostrazione si conclude se dimostriamo che $\check{\Psi} * \hat{f} = \widehat{\hat{\Psi} f}$. Ma se $g \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\hat{\Psi} f}, g\rangle &= \langle \hat{\Psi}, f\hat{g}\rangle \\
&= \langle \Psi, \widehat{f\hat{g}}\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi}\langle \Psi, \hat{f} * \hat{\hat{g}}\rangle \\
&= \langle \Psi, \hat{f} * \check{g}\rangle \\
&= \langle \check{\Psi}, (\hat{f})\check{} * g\rangle \\
&= \langle \check{\Psi} * \hat{f}, g\rangle \ . \qquad \square
\end{aligned}$$

3. Limiti di distribuzioni e identità approssimate

Come duale di uno spazio di Fréchet, S' è dotato di una topologia forte e di una topologia debole. Noi useremo solo la topologia debole, ossia la topologia più debole che, per ogni $f \in \mathcal{S}$, renda continuo il funzionale $\Phi \mapsto \langle \Phi, f\rangle$.

Di conseguenza, una successione generalizzata $\{\Phi_\alpha\}$ in S' converge debolmente a Φ se e solo se
$$\lim_\alpha \langle \Phi_\alpha, f\rangle = \langle \Phi, f\rangle \ ,$$
per ogni $f \in \mathcal{S}$. La convergenza debole viene anche detta *nel senso delle distribuzioni.*

Nel seguito sarà utile avere a disposizione il seguente risultato.

Lemma 3.1. . *Sia $\{\Phi_\alpha\}$ una successione generalizzata tale che per ogni $f \in \mathcal{S}$ il limite $\ell(f) = \lim_\alpha \langle \Phi_\alpha, f\rangle$ esista finito. Allora $f \mapsto \ell(f)$ definisce una distribuzione temperata.*

Dimostrazione. Per ogni $f \in \mathcal{S}$, l'insieme $\{\langle \Phi_\alpha, f\rangle\}$ è limitato. Per il Teorema di Banach-Steinhaus (valido anche in spazi di Fréchet), esistono un intero N e una costante C tali che $|\langle \Phi_\alpha, f\rangle| \leq C\|f\|_{(N)}$ per ogni α e f. Allora $|\ell(f)| \leq C\|f\|_{(N)}$ per ogni f. $\square$

Data $\eta \in \mathcal{S}$, si ponga, per $\varepsilon > 0$, $\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\eta(x/\varepsilon)$.

Lemma 3.2. *Sia* $\eta \in \mathcal{S}$ *tale che* $\int \eta(x)\,dx = 1$. *Data* $f \in \mathcal{S}$, *si ha* $\lim_{\varepsilon\to 0} f*\eta_\varepsilon = f$ *in* $\mathcal{S}$.

Dimostrazione. Si osservi che anche $\int \eta_\varepsilon(x)\,dx = 1$ qualunque sia $\varepsilon > 0$. Pertanto

$$f*\eta_\varepsilon(x) - f(x) = \int \eta_\varepsilon(y) f(x-y)\,dy - f(x) = \int \eta_\varepsilon(y)\big(f(x-y) - f(x)\big)\,dy\ .$$

Dato $k \in \mathbb{N}$, vogliamo dimostrare che $\|f*\eta_\varepsilon - f\|_{(k)}$ tende a zero con ε.

Sia α un multi-indice con $|\alpha| \le k$; si ha

(3.1)
$$\begin{aligned}(1+|x|^k)\big|\partial^\alpha\big(f*\eta_\varepsilon(x) - f(x)\big)\big| &\le (1+|x|^k)\int |\eta_\varepsilon(y)|\big|\partial^\alpha f(x-y) - \partial^\alpha f(x)\big|\,dy\\ &= (1+|x|^k)\int |\eta(t)|\big|\partial^\alpha f(x-\varepsilon t) - \partial^\alpha f(x)\big|\,dt\ .\end{aligned}$$

Consideriamo prima $|x| \le 1$. Per il Teorema del valor medio,

$$\big|\partial^\alpha f(x-\varepsilon t) - \partial^\alpha f(x)\big| \le \varepsilon|t|\|\nabla\partial^\alpha f\|_\infty \le \varepsilon|t|\|f\|_{(k+1)}\ .$$

Quindi

$$\sum_{|\alpha|\le k}\sup_{|x|\le 1}(1+|x|^k)\big|\partial^\alpha(f*\eta_\varepsilon - f)\big| \le C_k\varepsilon\|f\|_{(k+1)}\int |\eta(t)||t|\,dt\ .$$

Se ora $|x| > 1$, spezziamo l'integrale nella (3.1) secondo che $|\varepsilon t|$ sia maggiore o minore di $|x|/2$.

Se $|\varepsilon t| < |x|/2$, sempre per il Teorema del valor medio,

$$\big|\partial^\alpha f(x-\varepsilon t) - \partial^\alpha f(x)\big| \le \varepsilon|t|\sup_{|u|<|x|/2}\big|\nabla\partial^\alpha f(x-u)\big| \le C\varepsilon|t||x|^{-k-1}\|f\|_{(k+1)}\ ,$$

in quanto, se $|u| < |x|/2$, risulta $|x|/2 < |x-u| < 3|x|/2$.

Quindi

$$\begin{aligned}&\int_{|t|<|x|/2\varepsilon}|\eta(t)|\big|\partial^\alpha f(x-\varepsilon t) - \partial^\alpha f(x)\big|\,dt\\ &\qquad\le C_k\varepsilon|x|^{-k-1}\|f\|_{(k+1)}\int_{|t|<|x|/2\varepsilon}|t||\eta(t)|\,dt\\ &\qquad\le C_k\varepsilon|x|^{-k-1}\|f\|_{(k+1)}\int_{\mathbb{R}^n}|t||\eta(t)|\,dt\\ &\qquad\le C_k\varepsilon|x|^{-k-1}\|f\|_{(k+1)}\ .\end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned}\int_{|t|>|x|/2\varepsilon}|\eta(t)|\big|\partial^\alpha f(x-\varepsilon t) - \partial^\alpha f(x)\big|\,dt &\le 2\|f\|_{(k)}\int_{|t|>|x|/2\varepsilon}|\eta(t)|\,dt\\ &\le C_k\|f\|_{(k)}\int_{|t|>|x|/2\varepsilon}|t|^{-k-n}\,dt\\ &\le C_k\|f\|_{(k)}\varepsilon^k|x|^{-k}\ ,\end{aligned}$$

di modo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\eta(t)| \big|\partial^\alpha f(x-\varepsilon t) - \partial^\alpha f(x)\big| \, dt \le C_k \varepsilon |x|^{-k} \|f\|_{(k+1)} \ .$$

In conclusione $\|f * \eta_\varepsilon - f\|_{(k)} \le C_k \varepsilon \|f\|_{(k+1)}$. $\square$

Se $\int \eta(x)\, dx = 1$, la famiglia $\{\eta_\varepsilon\}$ si chiama una *identità approssimata.* Si noti che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{\eta_\varepsilon}(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \hat\eta(\varepsilon\xi) = \hat\eta(0) = 1$$

per ogni ξ.

Teorema 3.3. *Se $\{\eta_\varepsilon\}$ è un'identità approssimata, data $\Phi \in \mathcal{S}'$, si ha $\lim_{\varepsilon\to 0} \Phi * \eta_\varepsilon = \Phi$ nel senso delle distribuzioni.*

Dimostrazione. Data $f \in \mathcal{S}$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \langle \Phi * \eta_\varepsilon, f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \langle \Phi, f * \check\eta_\varepsilon\rangle = \langle \Phi, f\rangle \ ,$$

in quanto anche $\{\check\eta_\varepsilon\}$ è un'identità approssimata. $\square$

In particolare, $\eta_\varepsilon \to \delta_0$ nel senso delle distribuzioni.

4. Distribuzioni in spazi prodotto e il Teorema del nucleo

Siano $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Allora il *prodotto tensoriale*

$$(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y)$$

è in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Vogliamo ora definire il prodotto tensoriale di due distribuzioni temperate. Iniziamo con un lemma sugli "integrali" dipendenti da parametro. Si noti innanzitutto che se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, per ogni $y \in \mathbb{R}^m$ la funzione $f(\cdot, y)$ è in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 4.1. *Date $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ e $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, e posto*

$$g(y) = \big\langle \Phi, f(\cdot, y)\big\rangle \ ,$$

risulta $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Analogamente, date $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e posto

$$\langle \Psi, g\rangle = \langle \Phi, f \otimes g\rangle \ ,$$

risulta $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

Dimostrazione. Siano k e C tali che $|\langle \Phi, h\rangle| \le C\|h\|_{(k)}$. Allora per ogni N,

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha g(y)| &\le C \|\partial_y^\alpha f(\cdot, y)\|_{(k)} \\
&= C \sum_{|\beta|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^k \left|\partial_x^\beta \partial_y^\alpha f(x,y)\right| \\
&\le C_N \|f\|_{(k+|\alpha|+N)} \sum_{|\beta|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^k (1+|x|+|y|)^{-k-N} \\
&\le C_N (1+|y|)^{-N} \|f\|_{(k+|\alpha|+N)} \ .
\end{aligned}$$

Quindi

$$\|g\|_{(N)} \le C_N \|f\|_{(k+2N)} \ .$$

La seconda parte dell'enunciato si dimostra in modo analogo. $\square$

Lemma 4.2. *Se* $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ *è tale che* $\langle \Phi, f \otimes g\rangle = 0$ *per ogni* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$*, allora* $\Phi = 0$*.*

Dimostrazione. Siano $\{\varphi_\varepsilon(x)\}$ e $\{\psi_\varepsilon(y)\}$ identità approssimate in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ rispettivamente. Allora $\{\eta_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \otimes \psi_\varepsilon\}$ è un'identità approssimata in $\mathbb{R}^{n+m}$. Per ipotesi,

$$\Phi * \eta_\varepsilon(x,y) = \langle \Phi, \tau_{(x,y)}\check{\eta}_\varepsilon\rangle = \langle \Phi, (\tau_x \check{\varphi}_\varepsilon) \otimes (\tau_y \check{\psi}_\varepsilon)\rangle = 0 \ .$$

Per il Teorema 3.3, $\Phi = 0$. $\square$

Teorema 4.3. *Siano* $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*,* $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$*. Esiste un'unica distribuzione* $\Phi \otimes \Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ *tale che*

$$\langle \Phi \otimes \Psi, f \otimes g\rangle = \langle \Phi, f\rangle\langle \Psi, g\rangle \tag{4.1}$$

per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$*.*

Inoltre, se $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$*, si ha*

$$\langle \Phi \otimes \Psi, h\rangle = \big\langle \Phi, \langle \Psi, h(x,\cdot)\rangle\big\rangle = \big\langle \Psi, \langle \Phi, h(\cdot,y)\rangle\big\rangle \ . \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Per il Lemma 4.2, le due ultime espressioni definiscono due distribuzioni temperate, che soddisfano entrambe la (4.1). L'unicità segue dal Lemma 4.2. $\square$

Proposizione 4.4. *Siano* $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*,* $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$*. Allora*

$$\mathrm{supp}\,(\Phi \otimes \Psi) = (\mathrm{supp}\,\Phi) \times (\mathrm{supp}\,\Psi) \ .$$

Dimostrazione. Siano S_1, S_2 i supporti di Φ, Ψ rispettivamente. Sia $(x_0,y_0) \notin S_1 \times S_2$, e supponiamo che $x_0 \notin S_1$. Sia $U \times V$ un intorno di (x_0,y_0) tale che $S_1 \cap U = \emptyset$. Allora, se $\mathrm{supp}\,h \subset U \times V$, si ha $\langle \Phi, h(\cdot,y)\rangle = 0$ per ogni y, da cui $\langle \Phi \otimes \Psi, h\rangle = 0$. Dunque $\mathrm{supp}\,(\Phi \otimes \Psi) \subseteq S_1 \times S_2$.

Viceversa, sia $(x_0,y_0) \in S_1 \times S_2$. Per ogni intorno U di x_0 e ogni intorno V di y_0 esistono funzioni f_U e g_V con supporto in U e V rispettivamente, tali che $\langle \Phi, f_U\rangle \neq 0$ e $\langle \Psi, g_V\rangle \neq 0$. Allora $\langle \Phi \otimes \Psi, f_U \otimes g_V\rangle \neq 0$, e dunque $(x_0,y_0) \in \mathrm{supp}\,(\Phi \otimes \Psi)$. $\square$

Si consideri ora una distribuzione $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$, e si costruisca l'operatore "integrale" T con nucleo K, definito su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a valori in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$

$$\langle Tf, g\rangle = \langle K, f \otimes g\rangle \ . \tag{4.3}$$

La seconda parte del Lemma 4.1 afferma che T è ben definito. È facile verificare che T è continuo, cioè che, data una successione generalizzata $\{f_\alpha\}$ convergente a f in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la successione generalizzata $\{Tf_\alpha\}$ converge a Tf nel senso delle distribuzioni.

Vediamo ora l'enunciato inverso, premettendo un paio di lemmi.

Lemma 4.5 (Bourbaki). *Siano* E, F *spazi di Fréchet, e sia* $B : E \times F \to \mathbb{C}$ *una forma bilineare, separatamente continua nelle due variabili. Allora* B *è continua.*

Per la dimostrazione, v. p.es. Köthe, Topological Vector Spaces I, p.172.

Lemma 4.6. *Sia $h(\varepsilon)$ una funzione definita su $(0,1]$ tale che per un intero N si abbia $|h^{(N+1)}(\varepsilon)| \leq C\varepsilon^{-N}$. Allora $\lim_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon)$ esiste finito.*

Dimostrazione. Segue dalla formula di Taylor:

$$h(\varepsilon) = h(1)+h'(1)(\varepsilon-1)+\cdots+\frac{h^{(N)}(1)}{N!}(\varepsilon-1)^N+\frac{1}{N!}\int_1^\varepsilon (\varepsilon-s)^N h^{(N+1)}(s)\,ds\,. \qquad \square$$

Teorema 4.7 (Teorema del nucleo di Schwartz). *Sia $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longmapsto \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ un operatore lineare continuo. Esiste allora un'unica $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ tale che valga la (4.3) per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.*

Dimostrazione. L'unicità segue dal Lemma 4.2.

Siano $\{\varphi_\varepsilon\}$ e $\{\psi_\varepsilon\}$ identità approssimate in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ rispettivamente, e si definisca la funzione

$$K_\varepsilon(x,y) = \big\langle T(\tau_x\varphi_\varepsilon), \tau_y\psi_\varepsilon\big\rangle\ .$$

Vogliamo dimostrare che le K_ε definiscono distribuzioni temperate, e che queste convergono nel senso delle distribuzioni quando ε tende a 0..

La forma bilineare $B(f,g) = \langle Tf, g\rangle$ è separatamente continua su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Dunque essa è continua e pertanto esistono una costante C e un intero k tali che

$$\big|\langle Tf,g\rangle\big| \leq C\|f\|_{(k)}\|g\|_{(k)}\ .$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\|\tau_x\varphi_\varepsilon\|_{(k)} &= \sum_{|\alpha|\leq k}\sup_{t\in\mathbb{R}^n}(1+|t|)^k\big|\partial^\alpha\big(\varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}(t-x))\big)\big| \\
&= \varepsilon^{-n}\sum_{|\alpha|\leq k}\sup_{t\in\mathbb{R}^n}(1+|t|)^k\varepsilon^{-|\alpha|}\big|\partial^\alpha\varphi(\varepsilon^{-1}(t-x))\big| \\
&\leq C_k\varepsilon^{-n}\sup_{t\in\mathbb{R}^n}(1+|t|)^k\varepsilon^{-k}\big(1+\varepsilon^{-1}|t-x|\big)^{-k} \\
&= C_k\varepsilon^{-n}\sup_{t\in\mathbb{R}^n}(1+|t|)^k\big(\varepsilon+|t-x|\big)^{-k} \\
&= C_k\varepsilon^{-n}\sup_{t\in\mathbb{R}^n}\left(\frac{1+|t+x|}{\varepsilon+|t|}\right)^k \\
&\leq C_k\varepsilon^{-n}\sup_{t\in\mathbb{R}^n}\left(\frac{1+|t|}{\varepsilon+|t|}+\frac{|x|}{\varepsilon+|t|}\right)^k \\
&\leq C_k\varepsilon^{-n}(\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-1}|x|)^k \\
&\leq C_k\varepsilon^{-n-k}(1+|x|)^k\ ,
\end{aligned}$$

e similmente per $\|\tau_y\psi_\varepsilon\|_{(k)}$. Di conseguenza,

$$\begin{aligned}
|K_\varepsilon(x,y)| &\leq C\|\tau_x\varphi_\varepsilon\|_{(k)}\|\tau_y\psi_\varepsilon\|_{(k)} \\
&\leq C\varepsilon^{-n-m-2k}(1+|x|)^k(1+|y|)^k \\
&\leq C\varepsilon^{-n-m-2k}(1+|x|+|y|)^{2k}\ .
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Inoltre

$$\frac{\partial K_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(x,y) = \left\langle T\left(\tau_x \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right), \tau_y \psi_\varepsilon \right\rangle + \left\langle T(\tau_x \varphi_\varepsilon), \tau_y \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right\rangle \ ,$$

dove

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\big(\varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}t)\big) \\
&= -n\varepsilon^{-n-1}\varphi(\varepsilon^{-1}t) - \varepsilon^{-n-2}\sum_j t_j \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(\varepsilon^{-1}t) \\
&= -\sum_j \frac{\partial (t_j\varphi)_\varepsilon}{\partial t_j}(t) \ .
\end{aligned}$$

Quindi

$$\tau_x \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t) = -\sum_j \frac{\partial (t_j\varphi)_\varepsilon}{\partial t_j}(t-x) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left((t_j\varphi)_\varepsilon(t-x)\right) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_x \left(t_j\varphi\right)_\varepsilon(t) \ ,$$

per cui

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(x,y) &= \sum_j \left\langle T\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\tau_x \left(t_j\varphi\right)_\varepsilon\right), \tau_y\psi_\varepsilon \right\rangle + \sum_k \left\langle T(\tau_x\varphi_\varepsilon), \frac{\partial}{\partial y_k}\tau_y \left(t_k\psi\right)_\varepsilon \right\rangle \\
&= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left\langle T\left(\tau_x \left(t_j\varphi\right)_\varepsilon\right), \tau_y\psi_\varepsilon \right\rangle + \sum_k \frac{\partial}{\partial y_k}\left\langle T(\tau_x\varphi_\varepsilon), \tau_y \left(t_k\psi\right)_\varepsilon \right\rangle \\
&= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} F_{j,\varepsilon}(x,y) + \sum_k \frac{\partial}{\partial y_k} G_{k,\varepsilon}(x,y) \ ,
\end{aligned}$$

dove le funzioni $F_{j,\varepsilon}$ e $G_{k,\varepsilon}$ soddisfano condizioni analoghe alla (4.4) con lo stesso esponente per ε.

Lo stesso vale per le derivate successive di $K_\varepsilon(x,y)$ rispetto a ε.

Data $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, poniamo

$$h(\varepsilon) = \int K_\varepsilon(x,y)u(x,y)\,dx\,dy \ .$$

Allora, posto $N = n+m+2k$,

$$\begin{aligned}
h^{N+1}(\varepsilon) &= \int \frac{\partial^N K_\varepsilon(x,y)}{\varepsilon^N} u(x,y)\,dx\,dy \\
&= \sum_{|\alpha|=N+1} (-1)^{|\alpha|} \int F_{\alpha,\varepsilon}(x,y)\partial^\alpha u(x,y)\,dx\,dy \ .
\end{aligned}$$

Quindi

$$|h^{N+1}(\varepsilon)| \leq C\varepsilon^{-N} \int (1+|x|+|y|)^{2k} |\partial^\alpha u(x,y)|\,dx\,dy \leq C\varepsilon^{-N} \ .$$

Per il Lemma 4.5, $\lim_{\varepsilon\to 0}\langle K_\varepsilon, u\rangle$ esiste finito. Per il Lemma 3.1, le K_ε tendono a una $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Siano ora $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Si ha

$$\begin{aligned}
\langle K, f\otimes g\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int K_\varepsilon(x,y)f(x)g(y)\,dx\,dy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \big\langle T(\tau_x\varphi_\varepsilon), \tau_y\psi_\varepsilon\big\rangle f(x)g(y)\,dx\,dy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\langle T\left(\int f(x)\tau_x\varphi_\varepsilon\,dx\right), \int g(y)\tau_y\psi_\varepsilon\,dy\right\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\langle T(f*\varphi_\varepsilon), g*\psi_\varepsilon\rangle \\
&= \langle Tf, g\rangle \ ,
\end{aligned}$$

per la continuità della forma bilineare B. $\square$

5. Caratterizzazione degli operatori di convoluzione

Un operatore lineare $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si dice *invariante per traslazioni* se $T\circ\tau_h = \tau_h\circ T$ per ogni $h \in \mathbb{R}^n$.

Sono invarianti per traslazioni gli operatori di convoluzione $f \mapsto \Phi * f$, con $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Infatti

$$\tau_h(\Phi * f)(x) = \Phi * f(x-h) = \langle\Phi, \tau_{x-h}\check{f}\rangle = \langle\Phi, \tau_x(\tau_h f)\check{}\,\rangle = \Phi*(\tau_h f)(x) \ .$$

Vediamo ora l'enunciato inverso, premettendo un lemma.

Lemma 5.1. *Sia $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ tale che $\langle\Phi, \tau_{(0,h)}u\rangle = \langle\Phi, u\rangle$ per ogni $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m}$ e ogni $h \in \mathbb{R}^m$. Allora esiste un'unica $\Phi_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che $\Phi = \Phi_0\otimes 1$.*

Dimostrazione. L'ipotesi implica che $\langle\Phi, \partial_{y_k}u\rangle = 0$ per ogni $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ e per $k = 1,\dots,m$.

Sia $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ tale che in un intorno di $\xi = 0$ si abbia $\hat\eta(\xi) = 1$, e si definisca Φ_0 ponendo, per $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle\Phi_0, f\rangle = \langle\Phi, f\otimes\eta \ .$$

Data $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, si decomponga $\hat g$ come segue:

$$\hat g(\xi) = \hat g(0)\hat\eta(\xi) + \hat\eta(\xi)\sum_{k=1}^m \xi_k\int_0^1 \frac{\partial\hat g}{\partial\xi_k}(t\xi)\,dt + r(\xi) \ .$$

Isolando $r(\xi)$, si vede che essa è in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ e che si annulla in un intorno di 0. Quindi $s(\xi) = r(\xi)/|\xi|^2$ è pure in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Sia $g_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ la funzione tale che

$$\widehat{g_k}(\xi) = -i\hat\eta(\xi)\int_0^1 \frac{\partial\hat g}{\partial\xi_k}(t\xi)\,dt - i\xi_k s(\xi) \ .$$

Allora

$$\hat{g}(\xi) = \hat{g}(0)\hat{\eta}(\xi) + \sum_{k=1}^{m} i\xi_k \widehat{g_k}(\xi) \ ,$$

ossia

$$g(y) = \hat{g}(0)\eta(y) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_k}(y) \ .$$

Quindi

$$\langle \Phi, f \otimes g \rangle = \hat{g}(0)\langle \Phi, f \otimes \eta \rangle = \langle \Phi_0, f \rangle \langle 1, g \rangle \ .$$

Ciò dimostra che $\Phi = \Phi_0 \otimes 1$. $\square$

Teorema 5.2. *Sia $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ un operatore lineare, continuo e invariante per traslazioni. Esiste allora un'unica $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che $Tf = \Phi * f$.*

Dimostrazione. Per l'unicità, si supponga che $\Phi_1 * f = \Phi_2 * f$ per ogni $f \in \mathcal{S}$. Prendendo $f = \eta_\varepsilon$, identità approssimata, si conclude che $\Phi_1 = \Phi_2$.

Mostriamo ora l'esistenza. Per il Teorema del nucleo di Schwartz, esiste un'unica $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ tale che $\langle Tf, g \rangle = \langle K, f \otimes g \rangle$.

L'invarianza per traslazioni equivale a dire che per ogni $h \in \mathbb{R}^n$

$$\langle K, f \otimes g \rangle = \langle \tau_{-h} \circ T \circ \tau_h f, g \rangle = \langle T(\tau_h f), \tau_h g \rangle = \langle K, \tau_{(h,h)}(f \otimes g) \rangle \ .$$

Segue dal Lemma 4.2 che $K = \tau_{(-h,-h)} K$ per ogni $h \in \mathbb{R}^n$, cioè

$$\langle K, \tau_{(h,h)} u \rangle = \langle K, u \rangle$$

per ogni $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$.

Sia ora A la matrice $2n \times 2n$

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$$

e si ponga $\tilde{K} = K \circ A$, di modo che

$$\langle \tilde{K}, u \rangle = 2^n \langle K, u \circ A^{-1} \rangle \ .$$

Ma $u \circ A^{-1}(x, y) = u(x - y, x + y)$, per cui

$$\begin{aligned} \tau_{(h,h)}(u \circ A^{-1})(x, y) &= (u \circ A^{-1})(x - h, y - h) \\ &= u(x - y, x + y - 2h) \\ &= (\tau_{(0,2h)} u) \circ A^{-1})(x, y) \ . \end{aligned}$$

Quindi

$$\langle \tilde{K}, \tau_{(0,2h)} u \rangle = \langle \tilde{K}, u \rangle$$

per ogni $h \in \mathbb{R}^n$. Segue dal Lemma 5.1 che $\tilde{K}$ è un prodotto tensoriale $\Phi_0 \otimes 1$. Ma allora

$$\langle K, f \otimes g \rangle = 2^{-n} \langle \tilde{K}, (f \otimes g) \circ A \rangle = 2^{-n} \langle \Phi_0 \otimes 1, (f \otimes g) \circ A \rangle \ .$$

Essendo

$$\big((f\otimes g)\circ A\big)(x,y)=f\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{y-x}{2}\right)\ ,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\langle Tf,g\rangle &= \langle K, f\otimes g\rangle\\
&= 2^{-n}\left\langle \Phi_0, \int f\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{y-x}{2}\right)\,dy\right\rangle\\
&= \left\langle \Phi_0, \int f(t)g(t-x)\,dt\right\rangle\\
&= \langle \Phi_0, f*\check g\rangle\\
&= \langle \check\Phi_0, \check f*g\rangle\\
&= \langle \check\Phi_0 * f, g\rangle\ .
\end{aligned}$$

Si ottiene il risultato ponendo $\Phi=\check\Phi_0$. $\square$

6. Misure

Si richiamano alcune nozioni sulle misure di Borel complesse. Per gli enunciati non dimostrati, si veda Rudin, Real and Complex Analysis, cap.6.

Si chiama *misura di Borel complessa* su $\mathbb{R}^n$ una funzione μ che a ogni Boreliano B limitato associa un numero complesso $\mu(B)$ in modo che sia soddisfatta la seguente proprietà: se $\{B_j\}$ è una famiglia numerabile di Boreliani a due a due disgiunti, tali che $B=\bigcup_j B_j$ sia limitato, allora

$$\mu(B)=\sum_j \mu(B_j)\ . \tag{6.1}$$

Poiché la somma della serie è indipendente da possibili riordinamenti dei B_j, segue che la serie (6.1) è assolutamente convergente.

Dato un boreliano B limitato, si chiama *variazione totale* di μ su B il numero

$$|\mu|(B)=\sup\left\{\sum_j|\mu(B_j)| : \{B_j\}\ \text{partizione numerabile di } B \text{ in Boreliani}\right\}\ .$$

Si dimostra che $|\mu|(B)$ è finita e che $|\mu|$ è una misura di Borel positiva su $\mathbb{R}^n$.

Si dice che μ è *regolare* se $|\mu|$ è regolare, ossia se per ogni Boreliano B si ha

$$|\mu|(B)=\sup\big\{|\mu|(K) : K\subset B,\ \text{compatto}\big\}=\inf\big\{|\mu|(A) : A\supset B,\ \text{aperto}\big\}\ .$$

Poiché $|\mu(B)|\le|\mu|(B)$ per ogni Boreliano B, μ è assolutamente continua rispetto a $|\mu|$. Il Teorema di Radon-Nikodim afferma, più precisamente, che esiste una funzione $h(x)$ misurabile rispetto a $|\mu|$ e di modulo $|h(x)|=1$ q.o. tale che $d\mu(x)=h(x)d|\mu|(x)$.

Una funzione f è, per definizione, integrabile rispetto a μ se e solo se è integrabile rispetto a $|\mu|$ e si definisce

$$\int f(x)\,d\mu(x) = \int f(x)h(x)\,d|\mu|(x)\ .$$

Ogni misura di Borel regolare μ si decompone in modo unico come la somma di tre misure, $\mu = \mu_a + \mu_d + \mu_s$, dove

(a) μ_a è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, cioè $d\mu_a(x) = \varphi(x)\,dx$, con φ localmente integrabile rispetto alla misura di Lebesgue;
(b) μ_d è discreta, ossia $\mu_d = \sum_j c_j \delta_{x_j}$ è una combinazione localmente sommabile di delte di Dirac (cioè per ogni r, $\sum_{|x_j|<r} |c_j| < \infty$);
(c) μ_s è singolare e continua; ciò significa che μ_s è concentrata su un insieme di misura di Lebesgue nulla E (cioè $\mu_s(\mathbb{R}^n \setminus E) = 0$) e non ha atomi (ogni punto ha misura μ_s nulla).

Una misura regolare μ si dice *finita* se $\int_{\mathbb{R}^n} d|\mu|(x) < \infty$. In tal caso si pone

$$\|\mu\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} d|\mu|(x)\ . \tag{6.2}$$

Si indica con $M(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle misure regolari di Borel finite, dotato della norma (6.2).

Dato un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$, sia $C_K(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni continue su $\mathbb{R}^n$ con supporto in K, dotato della norma uniforme. Ovviamente $C_c(\mathbb{R}^n) = \bigcup_K C_K(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto.

Indichiamo con $C_0(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni continue che si annullano all'infinito, dotato della norma uniforme.

Teorema 6.1 (Teorema di rappresentazione di Riesz).

(a) *Sia* $\Phi : C_0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ *un funzionale lineare continuo. Allora esiste una e una sola* $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ *tale che* $\Phi(f) = \int f\,d\mu$ *per ogni* $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$*. Inoltre* $\|\Phi\| = \|\mu\|_1$*. Viceversa, data* $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$*, il funzionale* $\Phi(f) = \int f\,d\mu$ *è continuo su* $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$*.*
(b) *Sia* $\Phi : C_c(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ *un funzionale lineare tale che, per ogni* K *compatto, la sua restrizione a* $C_K(\mathbb{R}^n)$ *sia continua. Allora esiste una e una sola misura di Borel regolare* μ *tale che* $\Phi(f) = \int f\,d\mu$ *per ogni* $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$*. Viceversa, data una misura di Borel regolare* μ*, il funzionale* $\Phi(f) = \int f\,d\mu$ *è continuo su* $C_K(\mathbb{R}^n)$ *per ogni compatto* K*.*

Corollario 6.2. *Se* $\mu \in M$*, ogni funzione* f *continua e limitata è integrabile rispetto a* μ*. Inoltre*

$$\left|\int f(x)\,d\mu(x)\right| \le \|f\|_\infty \|\mu\|_1\ . \tag{6.3}$$

Dimostrazione. Sia h tale che $d\mu(x) = h(x)d|\mu|(x)$. Sia inoltre η una funzione continua a supporto compatto tale che $0 \le \eta \le 1$ e $\eta(x) = 1$ se $|x| \le 1$; per n positivo si ponga $\eta_{(n)}(x) = \eta(x/n)$. Per ogni n si ha

$$\left|\int f(x)\eta_{(n)}(x)\,d\mu(x)\right| \le \|f\|_\infty \|\mu\|_1\ .$$

Applicando il Teorema della convergenza dominata alla successione

$$\{f(x)\eta_{(n)}(x)h(x)\}$$

rispetto alla misura positiva $|\mu|$, si ottiene la tesi passando al limite. $\square$

La parte (a) del Teorema di rappresentazione di Riesz assicura in particolare che $M(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio di Banach.

Si osservi che il sottospazio di $M(\mathbb{R}^n)$ costituito dalle misure assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue è isometricamente isomorfo a $L^1(\mathbb{R}^n)$, e pertanto è chiuso in $M(\mathbb{R}^n)$.

Su $M(\mathbb{R}^n)$ è possibile definire la convoluzione nel modo seguente. Date $\mu, \nu \in M(\mathbb{R}^n)$, si consideri $\mu \otimes \nu \in M(\mathbb{R}^{2n})$ e si definisca $\mu * \nu$ ponendo

$$\int f(x)\, d(\mu * \nu)(x) = \iint f(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \ . \tag{6.4}$$

Il fatto che $\mu * \nu \in M(\mathbb{R}^n)$ segue immediatamente dal Teorema di rappresentazione di Riesz.

Teorema 6.3. *Con la convoluzione* (6.4)*,* $M(\mathbb{R}^n)$ *è un'algebra di Banach commutativa con identità* δ_0*.*

Dimostrazione. Svolgiamo solo un paio delle verifiche necessarie. Per l'associatività, si osservi che

$$\begin{aligned}\int f(x)\, d\big(\mu * (\nu * \lambda)\big)(x) &= \iint f(x+y)\, d\mu(x)\, d(\nu * \lambda)(y) \\ &= \iiint f(x+y+z)\, d\mu(x)\, d\nu(y)\, d\lambda(z) \ ,\end{aligned}$$

e si ottiene lo stesso per $(\mu * \nu) * \lambda$.

Dalla (6.4), poi, segue che

$$\left| \int f(x)\, d(\mu * \nu)(x) \right| \le \|f\|_\infty \|\mu\|_1 \|\nu\|_1 \ ,$$

per cui $\|\mu * \nu\|_1 \le \|\mu\|_1 \|\nu\|_1$.

Il resto è di facile verifica. $\square$

Teorema 6.4. *Le misure assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue formano un ideale in* $M(\mathbb{R}^n)$*, cioè se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$*, allora* $f * \mu \in L^1(\mathbb{R}^n)$*.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ una successione in $\mathcal{S}$ convergente a f nella norma L^1. Per la Proposizione 2.2, $f_n * \mu$ coincide con una funzione C^∞; in particolare $f_n * \mu$ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.

Ma $\|f*\mu - f_n*\mu\|_1 \le \|f - f_n\|_1 \|\mu\|_1$. Poiché L^1 è chiuso in M, si ha $\mu*f \in L^1$. $\square$

Segue immediatamente dalla (6.4) che ogni misura finita definisce una distribuzione temperata, e dunque ha una trasformata di Fourier.

Teorema 6.5. *La trasformata di Fourier di una misura $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ è la funzione continua*

$$\hat{\mu}(\xi) = \int e^{-i\xi\cdot x} d\mu(x) \ . \tag{6.5}$$

Inoltre $\|\hat{\mu}\|_\infty \leq \|\mu\|_1$.

Dimostrazione. La funzione in (6.5) è sicuramente ben definita. Inoltre

$$|\hat{\mu}(\xi)| \leq \int d|\mu|(x) = \|\mu\|_1 \ .$$

Se $f(\xi) \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\int f(\xi)\hat{\mu}(\xi)\, d\xi &= \iint f(\xi) e^{-i\xi\cdot x} d\mu(x) \\ &= \int \hat{f}(x) d\mu(x) \ ,\end{aligned}$$

per cui la funzione (6.5) è la trasformata di Fourier di μ come distribuzione temperata.

Per dimostrare che $\hat{\mu}$ è continua, sia $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ e, dato $\varepsilon > 0$, si prenda $R > 0$ tale che $\int_{|x|>R} d|\mu|(x) < \varepsilon$. Si prenda quindi $\delta > 0$ tale che $|\xi - \xi_0| < \delta$ implichi che $|e^{-i\xi\cdot x} - e^{-i\xi_0\cdot x}| < \varepsilon/R$ per ogni x con $|x| \leq R$.

Il solito "3ε-argument" dà la conclusione. □

Diremo che una misura di Borel regolare è *temperata* se esiste un intero k tale che

$$\int (1 + |x|)^{-k}\, d|\mu|(x) < \infty \ .$$

Una misura temperata μ definisce la distribuzione temperata $f \in \mathcal{S} \longmapsto \int f\, d\mu$, che indicheremo pure con il simbolo μ.

Se $\mu \geq 0$, la distribuzione corrispondente è ovviamente positivo, nel senso che $f \geq 0 \Rightarrow \int f\, d\mu \geq 0$.

Teorema 6.6. *Una distribuzione $\Phi \in \mathcal{S}'$ positiva è una misura temperata.*

Dimostrazione. Sia $\eta \geq 0$ una funzione C^∞ a supporto compatto tale che $\eta(x) = 1$ se $|x| \leq 1$. Se $r > 1$, si ponga $\eta_{(r)}(x) = \eta(x/r)$. Allora $\|\eta_{(r)}\|_{(k)} \leq Cr^k$ per ogni k.

Sia $f = f_1 + if_2$ una funzione C^∞ con supporto compatto. Se r è abbastanza grande, $\eta_{(r)}$ vale 1 sul supporto di f. Allora $-\|f_j\|_\infty \eta_{(r)} \leq f_j \leq \|f_j\|_\infty \eta_{(r)}$, per cui

$$|\langle \Phi, f_j\rangle| \leq \langle \Phi, \eta_{(r)}\rangle \|f_j\|_\infty \leq Cr^k \|f_j\|_\infty \ .$$

Dunque $|\langle \Phi, f\rangle| \leq Cr^k\|f\|_\infty$ e Φ si estende per continuità a un funzionale continuo su $C_K(\mathbb{R}^n)$.

Per il Teorema di Riesz esiste una misura di Borel regolare μ tale che $\langle \Phi, f\rangle = \int f\, d\mu$. Ovviamente μ è positiva.

Inoltre, se $j \geq 0$, la misura dell'insieme $E_j = B_{2^j} \setminus B_{2^{j-1}}$ non supera $\int \eta_{(2^j)} d\mu = \langle \Phi, \eta_{(2^j)}\rangle \leq C2^{jk}$. Da qui segue che $\int (1 + |x|)^{-k-1} d\mu(x) < \infty$. □

7. Operatori invarianti per traslazioni tra spazi L^p

In questo paragrafo e nei prossimi studiamo operatori lineari da $L^p(\mathbb{R}^n)$ a $L^q(\mathbb{R}^n)$. Conveniamo tuttavia che, quando il dominio è $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, questo va sostituito negli enunciati con $C_0(\mathbb{R}^n)$, lo spazio delle funzioni continue che si annullano all'infinito.

Dati due esponenti p, q, con $1 \le p, q \le \infty$, sia $T : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ un operatore lineare continuo che commuti con le traslazioni, cioè $T \circ \tau_h = \tau_h \circ T$ per ogni $h \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 7.1. *Se $T : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ è lineare, continuo e commuta con le traslazioni, e inoltre $q < p$, allora $T = 0$.*

La dimostrazione è basata sul seguente lemma.

Lemma 7.2. *Se $f \in L^p$, $1 \le p < \infty$, allora*

$$\lim_{h\to\infty} \|\tau_h f - f\|_p = 2^{1/p}\|f\|_p \ .$$

Se $f \in C_0$, allora

$$\lim_{h\to\infty} \|\tau_h f - f\|_\infty = \|f\|_\infty \ .$$

Dimostrazione. Sia $g \in L^p$ con supporto contenuto in B_R. Allora, se $|h| > 2R$, $K \cap (K + h) = \emptyset$. Quindi

$$\begin{aligned} \|\|\tau_h g - g\|_p^p &= \int |g(x-h) - g(x)|^p \, dx \\ &= \int_{B_R+h} |g(x-h)|^p \, dx + \int_{B_R} |g(x)|^p \, dx = 2\|g\|_p^p \ . \end{aligned}$$

Dati $f \in L^p$ e $\varepsilon > 0$, sia g a supporto compatto tale che $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Se $\operatorname{supp} g \subset B_R$ e $|h| > 2R$, si ha

$$\begin{aligned} \Big| \|\tau_h f - f\|_p - 2^{1/p}\|f\|_p \Big| &\le \big| \|\tau_h f - f\|_p - \|\tau_h g - g\|_p \big| + 2^{1/p} \big| \|g\|_p - \|f\|_p \big| \\ &\le \|\tau_h f - \tau_h g - f + g\|_p + 2^{1/p}\|g - f\|_p \\ &\le (2 + 2^{1/p})\varepsilon \ . \end{aligned}$$

La dimostrazione è analoga per C_0. $\square$

Dimostriamo ora il Teorema 7.1.
Dati $f \in L^p$ e $h \in \mathbb{R}^n$, abbiamo

$$\|\tau_h Tf - Tf\|_q = \|T(\tau_h f - f)\|_q \le \|T\|\|\tau_h f - f\|_p \ .$$

Quindi, passando al limite per $h \to \infty$,

$$2^{1/q}\|Tf\|_q \le \|T\|2^{1/p}\|f\|_p \ ,$$

cioè

$$\|Tf\|_q \le \|T\|2^{1/p-1/q}\|f\|_p \ ,$$

per cui $2^{1/p-1/q}\|T\| \geq \|T\|$. Essendo $1/p - 1/q < 0$, questo implica che $\|T\| = 0$. □

Poiché le inclusioni $\mathcal{S} \hookrightarrow L^p$ e $L^q \hookrightarrow \mathcal{S}'$ sono continue, si può applicare il Teorema 5.2 per concludere che esiste una e una sola distribuzione $K \in \mathcal{S}'$ tale che $Tf = K*f$ per ogni $f \in \mathcal{S}$.

Per la densità di $\mathcal{S}$ in L^p (ricordiamo che L^∞ è sostituito da C_0), la distribuzione K determina T univocamente.

Viceversa, sia $K \in \mathcal{S}'$ tale che per una opportuna costante $C > 0$ e per ogni $f \in \mathcal{S}$ si abbia $\|K * f\|_q \leq C\|f\|_p$. Allora l'operatore $Tf = K * f$ si estende in modo unico a un operatore continuo da L^p a L^q che, sempre per il Teorema 5.2, commuta con le traslazioni. Con abuso di linguaggio scriveremo, anche per una generica $f \in L^p$, $K * f$ per indicarne l'immagine secondo l'operatore così esteso.

La norma dell'operatore verrà indicata con $\|T\|_{pq}$ o anche con $\|K\|_{pq}$.

Diremo in tal caso che K è un (p,q)-convolutore e indicheremo con C_{pq} lo spazio di Banach dei (p,q)-convolutori, con la norma $\|K\|_{pq}$.

In questo quadro si pongono due problemi:

(1) dati due esponenti p e q, individuare condizioni sufficienti e condizioni necessarie perché una data distribuzione sia un (p,q)-convolutore;
(2) data $K \in \mathcal{S}'$, determinare le coppie (p,q) per cui K è un (p,q)-convolutore.

Daremo ora una risposta completa (condizioni necessarie e sufficienti) al problema (1) nei seguenti casi: (a) $p = 1$, (b) $q = \infty$, (c) $p = q = 2$.

Lemma 7.3. *Se $f \in L^p$, $h \in \mathbb{R}^n$ e $\{\varphi_\varepsilon\}$ è un'identità approssimata, allora*

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0 \tag{7.1}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p = 0\ . \tag{7.2}$$

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, $g \in C_c$ tale che $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Scegliamo $r > 0$ in modo che $\operatorname{supp} g \subset [-r, r]$. Per la continuità uniforme di g, esiste δ tale che $0 < \delta < r$ e, se $|h| < \delta$, $\|\tau_h g - g\|_\infty < \varepsilon r^{-n/p}$. Allora

$$\|\tau_h f - f\|_p < 2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p < (2 + C)\varepsilon\ .$$

Questo dimostra la (7.1). Per la (7.2), si ha

$$f * \varphi_\varepsilon(x) - f(x) = \int \big(f(x-y) - f(x)\big)\varphi_\varepsilon(y)\, dy = \int \big(\tau_y f(x) - f(x)\big)\varphi_\varepsilon(y)\, dy\ .$$

Per la disuguaglianza di Minkowski,

$$\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p \leq \int \|\tau_y f - f\|_p |\varphi_\varepsilon(y)|\, dy = \int \|\tau_{\varepsilon y} f - f\|_p |\varphi(y)|\, dy = 0\ ,$$

per la (7.1) e la convergenza dominata. □

Lemma 7.4. *Date $f \in L^1$ e $g \in L^q$, $1 \le q < \infty$, l'integrale di convoluzione $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy$ converge per quasi ogni x e definisce una funzione in L^q tale che $\|f * g\|_q \le \|f\|_1 \|g\|_q$.*

Se $q = \infty$, l'integrale converge per ogni x e definisce una funzione continua tale che $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Dimostrazione. Sia $q = 1$. L'integrale doppio $\iint |f(x-y)||g(y)|\,dx\,dy$ è convergente. Per il Teorema di Fubini, l'integrale di convoluzione converge assolutamente per quasi ogni x. La disuguaglianza tra le norme è poi ovvia.

Sia ora $q = \infty$. L'integrale di convoluzione converge per ogni x e si ha banalmente $|f * g(x)| \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$. Per la continuità di $f * g$, si approssimi f nella norma L^1 con una successione $\{f_n\}$ in $\mathcal{S}$. Allora $f_n * g$ è continua e inoltre $\|f_n * g - f * g\|_\infty \le \|f_n - f\|_1 \|g\|_\infty$. Quindi $\{f_n * g\}$ converge uniformemente a $f * g$, che risulta così continua.

Se $1 < q < \infty$, data $g \in L^q$, si ponga

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } |g(x)| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti ;} \end{cases} \qquad g_2(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } |g(x)| \ge 1 \\ 0 & \text{altrimenti .} \end{cases}$$

Allora $g_1 \in L^\infty$ e $g_2 \in L^1$, in quanto $\int |g_2(x)|\,dx \le \int |g_2(x)|^q\,dx < \infty$. Quindi $f * g(x) = f * g_1(x) + f * g_2(x)$ converge quasi ovunque.

Inoltre, per la (7.1), la funzione $y \mapsto \tau_y g$ è continua da $\mathbb{R}$ a L^q. Di conseguenza l'integrale $\int f(y)\tau_y g\,dy = f * g$ converge in L^q, e

$$\|f * g\|_q = \left\| \int f(y)\tau_y g\,dy \right\|_q \le \int |f(y)| \|\tau_y g\|_q\,dy = \|f\|_1 \|g\|_q \ ,$$

come da dimostrarsi $\square$

Teorema 7.5. *$C_{11} = M$ e, se $q > 1$, $C_{1q} = L^q$ in modo isometrico.*

Dimostrazione. Il Teorema 6.4 e il Lemma 7.4 danno rispettivamente le inclusioni $M \subseteq C_{11}$ e, per $q > 1$, $L^q \subseteq C_{1q}$, con le stime $\|\mu\|_{1,1} \le \|\mu\|_1$, $\|g\|_{1,q} \le \|g\|_q$.

Dimostriamo quindi le inclusioni opposte.

Sia $\{\varphi_\varepsilon\}$ un'identità approssimata in $\mathcal{S}$, $\varphi \ge 0$. Dato $K \in C_{1q}$, $q > 1$, si ponga $g_\varepsilon = K * \varphi_\varepsilon$. Poiché $\|\varphi_\varepsilon\|_1 = \|\varphi\|_1 = 1$, si ha $\|g_\varepsilon\|_q \le \|K\|_{1q}$.

Per il Teorema di Banach-Alaoglu, essendo L^q il duale di $L^{q'}$, ove $q' = q/(q-1)$, esiste una successione ε_n tendente a 0 tale che $g_n = g_{\varepsilon_n}$ converga a $g \in L^q$ nella topologia debole-*. Inoltre $\|g\|_q \le \|K\|_{1q}$.

Di conseguenza, si ha $\lim_n g_n = g$ in $\mathcal{S}'$. D'altra parte $g_n = K * \varphi_{\varepsilon_n}$ tendono a K, per cui $K = g$ e, come abbiamo visto, $\|g\|_q \le \|g\|_{1q}$.

Se $q = 1$, la successione g_n converge a $\mu \in M$ nella topologia debole-*. Il resto segue come prima. $\square$

Passiamo ora a identificare $C_{p\infty}$.

Lemma 7.6. *$C_{pq} = C_{q'p'}$ in modo isometrico.*

Dimostrazione. Si consideri la forma bilineare $B_p : L^p \times L^{p'} \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$B_p(f, g) = \int f(x) g(-x)\,dx \ ,$$

e si noti che
$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'}\le 1} |B_p(f,g)| \ .$$

Dato un operatore lineare T continuo da L^p a L^q, si definisca $T' : L^{q'} \longrightarrow L^{p'}$ ponendo
$$B_p(f,T'g) = B_q(Tf,g) \ .$$

Si dimostra in modo standard che T' è continuo e che $\|T'\|_{q'p'} = \|T\|_{pq}$.

Se $Tf = K * f$, prese $f, g \in \mathcal{S}$, si ha
$$B_p(f,T'g) = B_q(Tf,g) = \langle K * f, \check{g}\rangle = \langle f, \check{K} * \check{g}\rangle = \langle f, (K*g)\check{}\rangle = B_p(f,Tg) \ .$$

Dunque $T' = T$. $\square$

Corollario 7.7. *Si ha $C_{p\infty} = C_{1p'} = L^{p'}$ se $p < \infty$, mentre $C_{\infty\infty} = C_{11} = M$, in modo isometrico.*

Ricordiamo che $C_{\infty\infty}$ indica lo spazio dei convolutori da C_0 a L^∞.

Corollario 7.8. *Se $K \in C_{p\infty}$, l'immagine di L^p secondo l'operatore $Tf = f * K$ è contenuta nel sottospazio $C \cap L^\infty$.*

Dimostrazione. Se $f \in \mathcal{S}$, sicuramente $f * K$ è continua. Il retso segue per densità. $\square$

Teorema 7.9. *Una distribuzione $K \in \mathcal{S}'$ è in C_{22} se e solo se $\hat{K} \in L^\infty$; inoltre $\|K\|_{22} = \|\hat{K}\|_\infty$.*

Dimostrazione. Se $\hat{K} \in L^\infty$, la formula di Plancherel dà, per $f \in \mathcal{S}$,
$$\|K * f\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|\hat{K}\hat{f}\|_2 \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|\hat{K}\|_\infty\|\hat{f}\|_2 = \|\hat{K}\|_\infty\|f\|_2 \ .$$

Viceversa, sia $K \in C_{22}$. Si prenda $\varphi_r \in \mathcal{S}$ tale che $\widehat{\varphi_r}(\xi)$ valga 1 per $|\xi| \le r$. Allora $\widehat{K * \varphi_r} = \hat{K}\widehat{\varphi_r} \in L^2$. Quindi $\hat{K}$ coincide con una funzione L^2 sulla palla B_r, e dunque con una funzione localmente integrabile su $\mathbb{R}^n$.

A questo punto abbiamo, per la formula di Plancherel,
$$\begin{aligned}\|\hat{K}\|_\infty^2 &= \sup_{\varphi\in\mathcal{S},\|\varphi\|_2\le 1}\int |\hat{K}(\xi)|^2|\varphi(\xi)|^2\,d\xi\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\sup_{f\in\mathcal{S},\|f\|_2\le 1}\int |\hat{K}(\xi)|^2|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi\\ &= \sup_{f\in\mathcal{S},\|f\|_2\le 1}\|K*f\|_2^2\\ &= \|K\|_{22}^2 \ ,\end{aligned}$$

da cui $\|\hat{K}\|_\infty = \|K\|_{22}$. $\square$

Quelli indicati sono gli unici casi in cui C_{pq} sia identificabile con spazi "classici". Negli altri casi bisogna accontentarsi di ottenere condizioni o solo necessarie o solo sufficienti.

Uno strumento importante in questa analisi è fornito dai teoremi di interpolazione. Il primo di questi è il Teorema di convessità di Riesz-Thorin (per la dimostrazione, v. Stein-Weiss, Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Spaces, cap.5).

Teorema 7.10 (Riesz-Thorin). *Sia $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$, e sia T un operatore lineare definito su un sottospazio X denso in L^{p_0} e in L^{p_1}, a valori nelle funzioni misurabili, e continuo da L^{p_0} a L^{q_0} e da L^{p_1} a L^{q_1}.*

Allora, dato $t \in [0,1]$ e posto

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \qquad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} \ ,$$

T è continuo da L^{p_t} a L^{q_t} e

$$\|T\|_{p_t q_t} \le \|T\|_{p_0 q_0}^{1-t} \|T\|_{p_1 q_1}^{t} \ .$$

Vediamo alcune applicazioni del Teorema di Riesz-Thorin.

Corollario 7.11. *Se $1 < p < q < 2$, si ha $C_{11} \subseteq C_{pp} \subseteq C_{qq} \subseteq C_{22}$ e $\|K\|_{22} \le \|K\|_{qq} \le \|K\|_{pp} \le \|K\|_{11}$.*

Dimostrazione. Se $K \in C_{11}$, per il Teorema 7.5, $K \in M$ e $\|K\|_{11} = \|K\|_1$. Per il Teorema 6.5, $K \in C_{22}$ e $\|K\|_{22} = \|\hat{K}\|_\infty \le \|K\|_1$. Applicando il Teorema di Riesz-Thorin, si ottiene che $K \in C_{pp}$ e $\|K\|_{pp} \le \|K\|_{11}$.

Se $K \in C_{pp}$, allora $K \in C_{p'p'}$ con la stessa norma, per il Lemma 7.6. Allora $K \in C_{22}$ e $\|K\|_{22} \le \|K\|_{pp}$.

Infine interpolando tra C_{pp} e C_{22}, si completa la dimostrazione. □

Corollario 7.12 (Disuguaglianza di Young). *Siano $p, q, r \in [1, \infty]$ tali che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \ . \tag{7.3}$$

se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, allora $f * g \in L^r$ e

$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q \ . \tag{7.4}$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che l'integrale di convoluzione $\int f(x-y)g(y)\,dy$ converge per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Si decomponga g nella somma $g_0 + g_1$, dove

$$g_0(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } |g(x)| \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad g_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } |g(x)| > 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $g_0 \in L^{p'}$, in quanto la condizione (7.3) implica che

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \ge \frac{1}{p'} \ ;$$

essendo $|g_0(x)| \le 1$, si ha allora

$$\int |g_0(x)|^{p'}\,dx = \int |g_0(x)|^q |g_0(x)|^{p'-q}\,dx \le |g(x)|^q\,dx \ .$$

Inoltre $g_1 \in L^1$, in quanto, essendo $|g_1(x)|$ o uguale a 0 o maggiore di 1, si ha $|g_1(x)| \le |g_1(x)|^q \le |g(x)|^q$ per ogni x.

Scrivendo quindi $f * g(x) = f * g_0(x) + f * g_1(x)$, si ha un integrale convergente per ogni x e l'altro convergente quasi per ogni x.

Si consideri ora l'operatore $T_f g = f * g$. Esso è limitato da L^1 a L^p e da $L^{p'}$ a L^∞. Essendo $1 \le q \le p'$, come già osservato, si può applicare il Teorema di Riesz-Thorin per concludere che T_f è limitato da L^q a quell'L^r che soddisfa la condizione di proporzionalità

$$\frac{1 - \frac{1}{q}}{1 - \frac{1}{p'}} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p}} ,$$

che equivale alla (7.3). □

Corollario 7.13 (Disuguaglianza di Hausdorff-Young). *Se $f \in L^p$, con $1 \le p \le 2$, allora $\hat{f} \in L^{p'}$ e*

$$\|\hat{f}\|_{p'} \le (2\pi)^{n/p'} \|f\|_p .$$

Dimostrazione. La disuguaglianza vale per $p = 1$ e per $p = 2$. Il resto segue per interpolazione. □

Concludiamo con un'osservazione sul secondo problema posto in questo paragrafo.

Data $K \in \mathcal{S}'$, chiamiamo *insieme caratteristico* (type-set) di K l'insieme E_K delle coppie $(1/p, 1/q)$ nel quadrato $[0,1] \times [0,1]$ per cui K è un (p,q)-convolutore.

Corollario 7.12. *L'insieme caratteristico di una distribuzione temperata K è convesso, simmetrico rispetto alla diagonale congiungente $(0,1)$ e $(1,0)$ ed è contenuto nel triangolo $1/p \ge 1/q$.*

Dimostrazione. La prima affermazione segue dal Teorema di Riesz-Thorin, la seconda dal Lemma 7.6, e l'ultima dal Teorema 7.1. □

8. Spazi L^p-deboli e il Teorema di Marcinkiewicz

Sia f una funzione misurabile su $\mathbb{R}^n$. Si chiama *funzione di distribuzione* di f la funzione $\lambda_f(\alpha) = m\{x : |f(x)| > \alpha\}$, definita in $\mathbb{R}^+$ a valori in $[0, +\infty]$. La funzione λ_f è chiaramente non crescente, e dunque misurabile.

Teorema 8.1. *Sia $1 \le p < \infty$. Si ha $f \in L^p$ se e solo se $\int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha)\, d\alpha < \infty$. In tal caso*

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha)\, d\alpha . \tag{8.1}$$

Inoltre, se $f \in L^p$, vale la disuguaglianza di Chebichev

$$m\{x : |f(x)| > \alpha\} \le \frac{\|f\|_p^p}{\alpha^p} . \tag{8.2}$$

Dimostrazione. Poiché f e $|f|$ hanno la stessa norma L^p e la stessa funzione di distribuzione, possiamo supporre $f \ge 0$.

Se $f = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{E_j}$ è una funzione semplice non negativa, si ha

$$\lambda_f(\alpha) = \sum_{j:c_j>\alpha} m(E_j) \ .$$

Supponiamo, senza perdere in generalità, che $0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_k$. Allora

$$\begin{aligned}
p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_f(\alpha)\,d\alpha &= p\int_0^{c_1} \alpha^{p-1}\big(m(E_1)+\cdots+m(E_k)\big)\,d\alpha \\
&\quad + p\int_{c_1}^{c_2} \alpha^{p-1}\big(m(E_2)+\cdots+m(E_k)\big)\,d\alpha \\
&\quad + \cdots + p\int_{c_{k-1}}^{c_k} \alpha^{p-1} m(E_k)\,d\alpha \\
&= c_1^p\big(m(E_1)+\cdots+m(E_k)\big) \\
&\quad + (c_2^p - c_1^p)\big(m(E_2)+\cdots+m(E_k)\big) \\
&\quad + \cdots + (c_k^p - c_{k-1}^p)m(E_k) \\
&= c_1^p m(E_1) + \cdots + c_k^p m(E_k) \\
&= \|f\|_p^p \ .
\end{aligned}$$

Si dimostra la (8.1) per una generica $f \in L^p$ approssimando f con una successione crescente di funzioni semplici e applicando il Teorema della convergenza monotona.

Posto $E_\alpha = \{x : |f(x)| > \alpha\}$, si ha $\alpha\chi_{E_\alpha} \le |f|$; quindi

$$\alpha^p m(E_\alpha) \le \int |f(x)|^p\,dx \ ,$$

da cui si ottiene la (8.2). □

Se $1 \le p < \infty$. si indica con $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni misurabili f su $\mathbb{R}^n$ tali che $\lambda_f(\alpha) \le C\alpha^{-p}$. Tale spazio si chiama anche L^p-debole.

Per la disuguaglianza di Chebishev, $L^p \subseteq L^{p\infty}$. D'altra parte la funzione $|x|^{-n/p}$ appartiene a $L^{p\infty}$, ma non a L^p.

Un operatore lineare T si dice *di tipo debole* (p,q) se esiste una costante C tale che per ogni $f \in L^p$ si abbia

$$\lambda_{Tf}(\alpha) \le C\left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p \ .$$

Ovviamente un operatore limitato da L^p a L^q, detto anche di tipo forte (p,q), è di tipo debole (p,q). Nella formulazione del seguente enunciato, per operatore di tipo debole (p,∞) bisogna intendere limitato da L^p a L^∞.

Teorema 8.2 (Teorema di interpolazione di Marcinkiewicz). *Sia T un operatore lineare che sia di tipo debole (p_0,q_0) e di tipo debole (p_1,q_1), con $1 \le p_0 \le q_0$, $1 \le p_1 \le q_1$, $p_0 \ne p_1$, $q_0 \ne q_1$.*

Allora, dato $t \in [0,1]$ e posto

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \qquad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} \ ,$$

T è di tipo forte (p_t, q_t).

Non diamo la dimostrazione completa del Teorema di Marcinkiewicz, per la quale (e per una formulazione più ampia) rinviamo a Stein-Weiss, Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Spaces, cap.5. Ci limitiamo a dimostrare il Teorema nel caso "diagonale", cioè $p_0 = q_0$, $p_1 = q_1$.

Dimostrazione. Trattiamo prima il caso $p_0 < p_1 = \infty$ e prendiamo $p > p_0$ finito. Possiamo supporre che $\|T\|_{\infty\infty} \leq 1$.

Dato $\alpha > 0$, decomponiamo $f \in L^p$ come $f = f_\alpha + f^\alpha$, dove

$$f^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| > \alpha/2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che $f^\alpha \in L^{p_0}$, in quanto

$$\int |f^\alpha(x)|^{p_0}\, dx \leq (\alpha/2)^{p_0 - p} \int |f(x)|^p\, dx \ .$$

Essendo $|Tf_\alpha(x)| \leq \|f_\alpha\|_\infty \leq \alpha/2$, risulta $|Tf(x)| \leq |Tf^\alpha(x)| + \alpha/2$, per cui

$$\{x : |Tf(x) > \alpha\} \subseteq \{x : |Tf^\alpha(x)| > \alpha/2\} \ ;$$

di conseguenza $\lambda_{Tf}(\alpha) \leq \lambda_{Tf^\alpha}(\alpha)(\alpha/2)$. Quindi

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_{Tf}(\alpha)\, d\alpha \\
&\leq p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_{Tf^\alpha}(\alpha/2)\, d\alpha \\
&\leq C \int_0^\infty \alpha^{p-1-p_0} \|f^\alpha\|_{p_0}^{p_0}\, d\alpha \\
&= C \int_0^\infty \alpha^{p-1-p_0} \int_{|f(x)|>\alpha/2} |f(x)|^{p_0}\, dx\, d\alpha \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_0} \int_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-1-p_0}\, d\alpha\, dx \\
&= C\|f\|_p^p \ .
\end{aligned}$$

Sia ora $p_0 < p < p_1 < \infty$. Decomponendo $f \in L^p$ come sopra, abbiamo che

$$\{x : |Tf(x) > \alpha\} \subseteq \{x : |Tf^\alpha(x)| > \alpha/2\} \cup \{x : |Tf_\alpha(x)| > \alpha/2\} \ ,$$

per cui $\lambda_{Tf}(\alpha) \leq \lambda_{Tf^\alpha}(\alpha/2) + \lambda_{Tf_\alpha}(\alpha/2)$. Osservando che $f^\alpha \in L^{p_0}$ e $f_\alpha \in L^{p_1}$, si ha

$$
\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_{Tf}(\alpha)\,d\alpha\\
&\le p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_{Tf^\alpha}(\alpha/2)\,d\alpha + p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_{Tf_\alpha}(\alpha/2)\,d\alpha\\
&\le C\int_0^\infty \alpha^{p-1-p_0}\|f^\alpha\|_{p_0}^{p_0}\,d\alpha + C\int_0^\infty \alpha^{p-1-p_1}\|f_\alpha\|_{p_1}^{p_1}\,d\alpha\\
&= C\int_0^\infty \alpha^{p-1-p_0}\int_{|f(x)|>\alpha/2}|f(x)|^{p_0}\,dx\,d\alpha\\
&\quad + C\int_0^\infty \alpha^{p-1-p_1}\int_{|f(x)|\le\alpha/2}|f(x)|^{p_1}\,dx\,d\alpha\\
&= C\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p_0}\int_0^{2|f(x)|}\alpha^{p-1-p_0}\,d\alpha\,dx\\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p_1}\int_{2|f(x)|}^\infty \alpha^{p-1-p_1}\,d\alpha\,dx\\
&= C\|f\|_p^p\ ,
\end{aligned}
$$

come da dimostrarsi. □

9. Distribuzioni omogenee

Se $f\in\mathcal{S}$, indichiamo, come al solito, con f_r la funzione $f_r(x)=r^{-n}f(r^{-1}x)$.
Diciamo che una distribuzione $\Phi\in\mathcal{S}'$ è *omogenea di grado* $s\in\mathbb{C}$ se

$$
\langle\Phi,f_r\rangle = r^s\langle\Phi,f\rangle\ . \tag{9.1}
$$

Se $\Re e\, s>-n$, la funzione $\Phi(x)=|x|^s$ fornisce una distribuzione omogenea di grado s. La delta di Dirac δ_0 è omogenea di grado $-n$.

Proposizione 9.1. *Se $\Phi\in\mathcal{S}'$ è omogenea di grado s, la sua trasformata di Fourier $\hat\Phi$ è omogenea di grado $-n-s$.*

Dimostrazione. Poiché $\widehat{f_r}(\xi)=\hat f(r\xi)=r^{-n}(\hat f)_{r^{-1}}(\xi)$, si ha

$$
\langle\hat\Phi,f_r\rangle=\langle\Phi,\widehat{f_r}\rangle=r^{-n}\langle\Phi,(\hat f)_{r^{-1}}\rangle=r^{-n-s}\langle\Phi,\hat f\rangle=r^{-n-s}\langle\hat\Phi,f\rangle\ ,
$$

come da dimostrarsi. □

Combinando la Proposizione 9.1 con l'osservazione che la precede, si vede che esistono distribuzioni omogenee di ogni grado.

Lemma 9.2. *Un operatore di convoluzione $Tf=K*f$ soddisfa la proprietà $T(f_r)=r^\alpha(Tf)_r$ per ogni $f\in\mathcal{S}$ se e solo se K è omogenea di grado $s=-n+\alpha$.*

Dimostrazione. Si richiede che

$$
T(f_r)(rx)=\langle T,\tau_{rx}(f_r)\check{}\,\rangle=r^{\alpha-n}Tf(x)=r^{\alpha-n}\langle T,\tau_x\check f\rangle\ .
$$

Ma

$$\tau_{rx}(f_r)\check{}(y) = (f_r)\check{}(y - rx) = f_r(-y + rx) = r^{-n} f(-r^{-1}y + x) = (\tau_x \check{f})_r(y) \ ,$$

per cui la condizione richiesta è che sia

$$\langle T, (\tau_x \check{f})_r \rangle = r^{\alpha - n} \langle T, \tau_x \check{f} \rangle \ ,$$

per ogni f e ogni x. Ma ciò equivale a dire che K è omogenea di grado $\alpha - n$. $\square$

Teorema 9.3. *Se $K \in C_{pq}$ è omogenea di grado $-n+\alpha$ e diversa da 0, allora vale la relazione*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\Re\mathrm{e}\alpha}{n} \ . \tag{9.2}$$

Dimostrazione. Gli spazi L^p hanno una loro "omogeneità", nel senso che

$$\|f_r\|_p = \left(\int r^{-np} |f(r^{-1}x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\int r^{n-np} |f(y)|^p \, dy \right)^{1/p} = r^{-n/p'} \|f\|_p \ .$$

Sia $Tf = K * f$ limitato da L^p a L^q e tale che $T(f_r) = r^\alpha (Tf)_r$ per ogni f. Allora si deve avere per ogni f

$$\|T(f_r)\|_q = r^{\Re\mathrm{e}\alpha - n/q'} \|Tf\|_q \leq \|T\|_{pq} \|f_r\|_p = r^{-n/p'} \|f\|_p \ ,$$

da cui

$$\|T\|_{pq} \leq r^{-\Re\mathrm{e}\alpha + n/q' - n/p'} \|T\|_{pq} \ .$$

Se $T \neq 0$, deve essere $r^{-\Re\mathrm{e}\alpha + n/q' - n/p'} \geq 1$ per ogni $r > 0$, il che costringe l'esponente a essere nullo. $\square$

Si osservi che, poiché si hanno convolutori non nulli solo per $1 \leq p \leq q \leq \infty$, si possono avere convolutori omogenei non nulli solo di grado $s = -n + \alpha$ con $0 \leq \Re\mathrm{e}\alpha \leq n$.

10. Integrazione e derivazione frazionaria in $\mathbb{R}$

Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. La sua primitiva f_1, normalizzata ponendo $f_1(-\infty) = 0$, è

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt = f * H(x) \ ,$$

dove H, o *funzione di Heaviside*, è la funzione caratteristica della semiretta positiva.

Se definiamo induttivamente f_n come la primitiva di f_{n-1} tale che $f_n(-\infty) = 0$, otteniamo

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \, dt = f * \frac{x_+^{n-1}}{(n-1)!} \ ,$$

dove $x_+^k = x^k \chi_{\mathbb{R}^+}(x)$.

Generalizzando questa formula, consideriamo l'operatore di convoluzione

$$\mathcal{I}_+^s f(x) = f * \frac{x_+^{s-1}}{\Gamma(s)} \ , \tag{10.1}$$

dove prendiamo $s \in \mathbb{C}$ con parte reale positiva, in modo da garantire la locale integrabilità del nucleo.

Accanto all'operatore (10.1) consideriamo

$$\mathcal{I}_-^s f(x) = f * \frac{x_-^{s-1}}{\Gamma(s)} \ , \tag{10.2}$$

dove $x_-^k = |x|^k \chi_{\mathbb{R}^-}(x)$.

Gli operatori $\mathcal{I}_+^s, \mathcal{I}_-^s$, o anche loro combinazioni lineari, si chiamano *operatori di integrazione frazionaria* di ordine s. Chiameremo *nuclei di integrazione frazionaria* le distribuzioni

$$I_\pm^s(x) = \frac{x_\pm^{s-1}}{\Gamma(s)} \ ,$$

o loro combinazioni lineari.

I nuclei $I_\pm^s$ formano due *famiglie analitiche di distribuzioni*, nel senso che, data $f \in \mathcal{S}$, le funzioni

$$s \longmapsto \langle I_\pm^s, f\rangle$$

sono olomorfe.

Mostriamo ora come sia possibile prolungare analiticamente queste famiglie analitiche a tutto il piano complesso.

Lemma 10.1. *Se* $\Re\mathrm{e} s > 1$*,*

$$\frac{\partial}{\partial x} I_\pm^s = \pm I_\pm^{s-1} \ . \tag{10.3}$$

Dimostrazione. Se $f \in \mathcal{S}$, si ha, per $\Re\mathrm{e} s > 1$,

$$\begin{aligned}
\langle I_+^s, f'\rangle &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} x^{s-1} f'(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} x^{s-1} f(x)\Big|_0^{+\infty} - \frac{s-1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} x^{s-2} f(x)\,dx \\
&= -\langle I_+^{s-1}, f\rangle \ ,
\end{aligned}$$

per l'uguaglianza $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$. Analogamente per I_-^s. $\square$

Per $\Re\mathrm{e} s > -1$, si consideri la derivata distribuzionale di I_+^{s+1}. Si ottiene una nuova famiglia analitica che coincide con I_+^s per $\Re\mathrm{e} s > 0$. Essa ne costituisce dunque il prolungamento analitico.

Induttivamente, si definisca I_+^s per $\Re\mathrm{e} s > -n$ come la derivata n-esima di I_+^{s+n}. Questo procedimento consente di estendere la definizione a tutto $\mathbb{C}$.

Un modo equivalente, e più concreto, è il seguente: Supponendo per il momento $\Re e s > 0$, si scriva, per un $a > 0$ fissato e per $f \in \mathcal{S}$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x)\, dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^a x^{s-1} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] dx& \\
+ \frac{1}{\Gamma(s)} \int_a^{+\infty} x^{s-1} f(x)\, dx& \\
+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0) a^{s+k}}{\Gamma(s) k! (s+k)}& \ .
\end{aligned}
\tag{10.4}
$$

Si noti ora che questa espressione è ben definita per $\Re e s > -n$, in quanto entrambi gli integrali convergono e perché la funzione Γ è olomorfa e non nulla su tutto il piano, tranne che negli interi negativi, dove ha poli semplici. Inoltre la (10.4) dipende in modo analitico da s. Per l'unicità del prolungamento analitico, essa fornisce dunque l'azione di I_+^s su $f \in \mathcal{S}$. Il valore a può essere scelto a piacere.

In modo analogo si procede per estendere I_-^s.

È interessante osservare cosa succede quando s è un intero negativo.

Teorema 10.2. *Se $s = -k$, $k \in \mathbb{N}$, si ha*

$$
\begin{aligned}
I_+^{-k} &= \delta_0^{(k)} \\
I_+^{-k} &= (-1)^k \delta_0^{(k)} \ .
\end{aligned}
\tag{10.5}
$$

Dimostrazione. Si prenda $n > k$ e si applichi la (10.4). Poiché la funzione $1/\Gamma$ si annulla sugli interi negativi, scompaiono i due integrali e i tutti i termini della sommatoria, escluso quello di indice k. Essendo

$$
\Gamma(s)(s+k) = \frac{\Gamma(s+1)(s+k)}{s} = \cdots = \frac{\Gamma(s+k+1)}{s(s+1)\cdots(s+k-1)} \ ,
$$

si ha

$$
\lim_{s \to -k} \Gamma(s)(s+k) = \frac{(-1)^k}{k!} \ .
$$

Quindi

$$
\langle I_+^{-k}, f \rangle = (-1)^k f^{(k)}(0) = (-1)^k \langle \delta_0, f^{(k)} \rangle = \langle \delta_0^{(k)}, f \rangle \ .
$$

Per I_-^{-k} si procede in modo analogo, o si sfrutta il cambiamento di variabile $x \to -x$. $\square$

Per definizione, l'espressione "derivazione frazionaria di ordine s" equivale a "integrazione frazionaria di ordine $-s$".

Ci interessa descrivere le trasformate di Fourier dei nuclei di integrazione frazionaria. Premettiamo alcune considerazioni e notazioni su potenze complesse di numeri complessi.

Se $z = x + iy$ è un punto del semipiano destro $\Re e z > 0$, fissiamo la determinazione principale di $\log z$ che è reale per z reale positivo. Poniamo di conseguenza, per $s \in \mathbb{C}$,

$$
z^s = e^{s \log z} = e^{s(\log|z| + i \arctan y/x)} = |z|^s e^{is \arctan y/x} \ .
$$

Introduciamo la notazione

$$(0+iy)^s = \lim_{x\to 0^+}(x+iy)^s = |y|^s e^{is\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\,(y)} = y_+^s e^{is\frac{\pi}{2}} + y_-^s e^{-is\frac{\pi}{2}} \ .$$

Questa espressione, inizialmente definita per $\Re\mathrm{e} s > -1$, si estende a tutto $\mathbb{C}$ ponendo

$$(0+iy)^s = \Gamma(s+1)e^{is\frac{\pi}{2}} I_+^{s+1} + \Gamma(s+1)e^{-is\frac{\pi}{2}} I_-^{s+1} \ . \tag{10.6}$$

Non è immediato che la (10.6) sia ben definita anche in corrispondenza dei poli della funzione Γ. Da quanto segue si dedurrà che le singolarità dei due addendi si eliminano.

Teorema 10.3. *Se $s \in \mathbb{C}$,*

$$\widehat{I_\pm^s}(\xi) = (0 \pm i\xi)^{-s} \ . \tag{10.7}$$

Dimostrazione. Basta dimostrare la (10.7) quando $0 < \Re\mathrm{e} s < 1$, il resto deducendosi per l'unicità del prolungamento analitico.

Poniamo

$$I_{+,\varepsilon}^s(x) = \frac{1}{\Gamma(s)} x_+^{s-1} e^{-\varepsilon x} \ .$$

Le funzioni $I_{+,\varepsilon}^s$ sono integrabili e, al tendere di ε a 0, tendono a I_+^s nel senso delle distribuzioni. Di conseguenza, la trasformata di Fourier di I_+^s è il limite, nel senso delle distribuzioni, delle trasformate di Fourier delle $I_{+,\varepsilon}^s$.

Dato s con $0 < \Re\mathrm{e} s < 1$, consideriamo la funzione

$$G(z) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-zx} dx \ .$$

Essa è olomorfa nel semipiano destro $\Re\mathrm{e} z > 0$. Se $z \in \mathbb{R}^+$, cambiando variabile di integrazione, si ottiene

$$G(z) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{z}\right)^{s-1} e^{-t}\,\frac{dt}{z} = z^{-s}\Gamma(s) \ .$$

Per l'unicità del prolungamento analitico, questa identità si conserva su tutto il semipiano destro. Ponendo $z = \varepsilon + i\xi$, si ottiene

$$\widehat{I_{+,\varepsilon}^s}(\xi) = (\varepsilon + i\xi)^{-s} \ ,$$

e la conclusione segue dalla convergenza dominata. $\square$

Abbiamo visto nella (10.6) intervenire combinazioni lineari di I_+^s e I_-^s. Altre combinazioni che intervengono spesso sono quelle che forniscono distribuzioni pari e dispari.

Consideriamo la distribuzione

$$|x|^{s-1} = \Gamma(s)I_+^s + \Gamma(s)I_-^s \ ,$$

inizialmente definita per $\Re e s > 0$. In base alla (10.4) e al fatto che $\langle I_-^s, f\rangle = \langle I_+^s, \check{f}\rangle$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^{s-1} f(x)\,dx = \int_0^1 x^{s-1}\left[f(x) + f(-x) - 2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}\right] dx$$
$$+ \int_1^{+\infty} x^{s-1}\big(f(x) + f(-x)\big)\,dx$$
$$+ 2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!(s+2k)} ,$$

in quanto i termini di grado dispari si annullano per simmetria. Questa definizione si estende a $\Re e s > -n$, tuttavia con poli semplici per $s = 0, -2, -4, \ldots$.

Risulta dunque naturale eliminare questi poli dividendo $|x|^{s-1}$ per $\Gamma(s/2)$. Definiamo allora

(10.8)
$$I_p^s = \frac{|x|^{s-1}}{\Gamma(s/2)} = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s/2)}(I_+^s + I_-^s) .$$

Passando alle combinazioni dispari, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^{s-1}\operatorname{sgn} x\, f(x)\,dx = \int_0^1 x^{s-1}\left[f(x) - f(-x) - 2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1}\right] dx$$
$$+ \int_1^{+\infty} x^{s-1}\big(f(x) - f(-x)\big)\,dx$$
$$+ 2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!(s+2k+1)} .$$

In questo caso il prolungamento analitico ha dei poli semplici per $s = -1, -3, \ldots$. Poniamo allora

(10.9)
$$I_d^s = \frac{|x|^{s-1}\operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}(I_+^s - I_-^s) .$$

Le distribuzioni I_p^s e I_d^s sono combinazioni lineari di quelle viste precedentemente, tranne che per I_p^{-2k-1} e I_d^{-2k}, che non si riscontrano nelle formule precedenti.

Per esempio,

$$\langle I_d^0, f\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,dx ,$$

è, a meno del coefficiente $1/\sqrt{\pi}$, il *nucleo di Hilbert*, indicato con il simbolo $p.v.1/x$. Analogamente

$$\langle I_p^{-1}, f\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{f(x) + f(-x) - 2f(0)}{x^2}\,dx$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_1^{+\infty} \frac{f(x) + f(-x)}{x^2}\,dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(0) .$$

Si può verificare che queste distribuzioni, come le altre I_p^{-2k-1} e I_d^{-2k}, sono, a meno di coefficienti moltiplicativi, derivate distribuzionali di $\log|x|$.

Teorema 10.4. *Valgono le seguenti formule:*

$$\begin{aligned} \widehat{I_p^s}(\xi) &= \pi^{1/2} 2^s I_p^{1-s}(\xi) \\ \widehat{I_d^s}(\xi) &= i\pi^{1/2} 2^s I_d^{1-s}(\xi) \ . \end{aligned} \tag{10.10}$$

Dimostrazione. Dal Teorema 10.3 segue che

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(|x|^{s-1}) &= 2\Gamma(s)\left(\cos s\frac{\pi}{2}\right)|\xi|^{-s} \\ \mathcal{F}(|x|^{s-1}\mathrm{sgn}\, x) &= 2i\Gamma(s)\left(\sin s\frac{\pi}{2}\right)|\xi|^{-s}\mathrm{sgn}\,\xi \ . \end{aligned}$$

Applicando la formula di duplicazione della funzione Gamma:

$$\Gamma(2z) = \pi^{-1/2} 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) \ ,$$

e l'identità

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \ ,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} 2\Gamma(s)\cos s\frac{\pi}{2} &= \pi^{-1/2}2^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\cos s\frac{\pi}{2} \\ &= \pi^{-1/2}2^s\,\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\,\frac{\pi}{\sin\pi\frac{1+s}{2}}\cos s\frac{\pi}{2} \\ &= \pi^{1/2}2^s\,\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \ , \end{aligned}$$

e in modo analogo,

$$2i\Gamma(s)\sin s\frac{\pi}{2} = i\pi^{1/2}2^s\,\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} \ .$$

Con le dovute sostituzioni si giunge alle (10.10). □

Corollario 10.5. *La trasformata di Fourier del nucleo di Hilbert p.v.$1/x$ è la funzione $i\pi\mathrm{sgn}\,\xi$.*

11. Potenziali di Riesz in $\mathbb{R}^n$

Quanto visto nel paragrafo precedente ammette un'estensione a $\mathbb{R}^n$, di cui ci limitiamo a enunciare i risultati.

Si consideri, per $\Re s > 0$, la funzione localmente integrabile $|x|^{s-n}$.

Teorema 11.1. *Come famiglia analitica di distribuzioni, $|x|^{s-n}$ ammette un'estensione al piano complesso privato dei punti $s = 0, -2, -4, \dots$, dove ha dei poli* *semplici. Posto* $I^s(x) = |x|^{s-n}/\Gamma(s/2)$*,* I^s *è definita per ogni* $s \in \mathbb{C}$ *e si hanno le seguenti identità:*

$$I^{-2k} = \frac{\pi^{n/2}}{(-4)^k \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} \Delta^k \delta_0 \; ; \tag{11.1}$$

$$\Delta I^s = 2(s-n) I^{s-2} \; ; \tag{11.2}$$

$$\widehat{I^s} = \pi^{n/2} 2^s I^{n-s} \; . \tag{11.3}$$

Le distribuzioni I^s si chiamano anche *nuclei di Riesz* e i corrispondenti operatori di convoluzione $\mathcal{I}^s f = I^s * f$ *potenziali di Riesz.*

L'importanza dei potenziali di Riesz nella teoria delle equazioni alle derivate parziali è evidenziata dal risultato seguente.

Teorema 11.2. *Se* $n > 2$*, la distribuzione* $\Phi = -\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2\pi^{n/2}} |x|^{2-n}$ *è una soluzione fondamentale del Laplaciano, nel senso che* $\Delta\Phi = \delta_0$*. Quindi per ogni* $f \in \mathcal{S}$ *la funzione* $u = \Phi * f$ *risolve l'equazione* $\Delta u = f$*.*

Se $n = 2$, il coefficiente Γ nella definizione di Φ diventa infinito. Una soluzione fondamentale del Laplaciano è data da $\log|x|$ moltiplicato per una opportuna costante.

Passiamo ora a studiare le proprietà di limitatezza tra spazi L^p dei potenziali di Riesz. Osserviamo innanzitutto che la distribuzione I^s è omogenea di grado $s - n$, quindi per il Teorema 9.3 dobbiamo restringerci al caso $0 \le \Re s \le n$.

Naturalmente se $\Re s = n$, il nucleo I^s è limitato, per cui $I^s \in C^{1,\infty}$.

Il caso $\Re s = 0$ è più complicato. Per la (11.3) risulta $\widehat{I^s} \in L^\infty$, per cui $I^s \in C_{2,2}$. Sicuramente $I^s \notin C_{1,1}$, perché il nucleo non è una misura finita. In realtà $I^s \in C_{p,p}$ per ogni p con $1 < p < \infty$, ma la dimostrazione richede metodi che vedremo più avanti.

Nei casi intermedi $0 < \Re s < n$ si può avere limitatezza da L^p a L^q solo se $(1/p) - (1/q) = \Re s/n$, per il Teorema 9.3. Sicuramente non si ha limitatezza da L^1 all'opportuno L^q, in quanto i nuclei non sono in L^q, né da L^p a L^∞ per lo stesso motivo. I casi rimanenti sono trattati nel seguente teorema.

Teorema 11.3 (di Hardy-Littlewood-Sobolev). *Se* $0 < \Re s < n$*, e* $1 < p < q < \infty$*, con* $(1/p) - (1/q) = \Re s/n$*, allora* I^s *è limitato da* L^p *a* L^q*.*

Dimostrazione. Siano s, p, q come nell'enunciato. Dimostriamo per cominciare che $\mathcal{I}^s$ è di tipo debole (p, q).

Dato $\alpha > 0$, si decomponga il nucleo (localmente integrabile) I^s nella somma $K_\alpha + K^\alpha$, dove

$$K_\alpha(x) = \begin{cases} I^s(x) & \text{se } |x| > r \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad K^\alpha(x) = \begin{cases} I^s(x) & \text{se } |x| < r \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

con $r > 0$ da determinarsi in funzione di α.

Allora $K_\alpha \in L^{p'}$ e $K^\alpha \in L^1$, e, posto $\sigma = \Re s$,

$$\|K_\alpha\|_{p'} \le C r^{\sigma - \frac{n}{p}}, \qquad \|K^\alpha\|_1 \le C r^\sigma \; .$$

Se $\|f\|_p = 1$, si ha perciò $\|f * K_\alpha\|_\infty \leq Cr^{\sigma - \frac{n}{p}}$, mentre $\|f * K^\alpha\|_p \leq Cr^\sigma$.
Si fissi ora r in modo che $Cr^{\sigma-\frac{n}{p}} = \alpha/2$. Si ha dunque

$$\begin{aligned}
m\{x : |\mathcal{I}^s f(x)| > \alpha\} &\leq m\{x : |K_\alpha * f(x)| > \alpha/2\} + m\{x : |K^\alpha * f(x)| > \alpha/2\} \\
&= m\{x : |K^\alpha * f(x)| > \alpha/2\} \\
&\leq C \left(\frac{\|f * K^\alpha\|_p}{\alpha} \right)^p \\
&\leq C \left(\frac{r^\sigma}{\alpha} \right)^p \\
&= Cr^n \\
&= C\alpha^{-q} \ ,
\end{aligned}$$

in quanto $\alpha = 2Cr^{n\left(\frac{\sigma}{n} - \frac{1}{p}\right)} = 2Cr^{-\frac{n}{q}}$. Si conclude allora che $\mathcal{I}^s$ è di tipo debole (p, q).

Nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ si consideri ora il segmento di equazione $(1/p) - (1/q) = \sigma/n$ privato degli estremi. Preso un punto $(1/p, 1/q)$ su di esso, questo è combinazione convessa di altri due punti $(1/p_0, 1/q_0)$, $(1/p_1, 1/q_1)$ appartenenti al segmento stesso. La conclusione segue dal Teorema di Marcinkiewicz. $\square$

Corollario 11.4. *se $K(x)$ è una funzione misurabile tale che $|K(x)| \leq C|x|^{-n+\beta}$ con $0 < \beta < n$, allora $K \in C_{pq}$ per ogni p, q tali che $1 < p < q < \infty$ e $(1/p) - (1/q) = \beta/n$.*

Dimostrazione. Segue facilmente dal fatto che $|K * f| \leq C|x|^{-n+\beta} * |f|$. $\square$

12. Integrali oscillanti

Si consideri un integrale della forma

$$\int_\Omega f(x) e^{i\varphi(x)} \, dx \ , \tag{12.1}$$

dove Ω è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^n$ e la funzione φ, detta *fase*, è reale. Si può supporre che anche f sia reale.

Volendo valutare la grandezza di questo integrale, la maggiorazione ovvia

$$\left| \int_\Omega f(x) e^{i\varphi(x)} \, dx \right| \leq \int_\Omega |f(x)| \, dx \tag{12.2}$$

si rivela in molti casi troppo grossolana. Si consideri ad esempio l'integrale

$$I(\xi) = \int_{-r}^{r} e^{-i\xi x} \, dx \ .$$

Applicando la (12.2), si ottiene $|I(\xi)| \leq 2r$ indipendentemente da ξ. Tuttavia

$$I(\xi) = \frac{2 \sin r\xi}{\xi} \ ,$$

per cui

$$|I(\xi)| \le \frac{2}{|\xi|} \ , \tag{12.3}$$

in particolare tende a 0 quando ξ tende all'infinito. Addirittura, se nella definizione di $I(\xi)$ inseriamo una funzione $f(x)$ di classe C^∞ a supporto in $[-r, r]$, l'integrale tende a 0 più rapidamente di ogni potenza di $1/|\xi|$ quando ξ tende all'infinito. Si noti anche che la maggiorazione (12.3) è uniforme in r.

La spiegazione di questo comportamento sta nel fatto che il termine oscillante $e^{i\varphi(x)}$ può produrre cancellazioni tra i contributi di parti distinte del dominio di integrazione, cancellazioni di cui la stima (12.2) non riesce a tener conto.

Vediamo dunque come si può utilizzare la fase φ per migliorare la (12.2). La regolarità richiesta alle funzioni f e φ varia da un enunciato all'altro.

Lemma 12.1. *Sia φ una funzione di classe C^1 sull'intervallo $[a, b]$, tale che φ' sia monotona e $|\varphi'(x)| \ge \lambda > 0$ su $[a, b]$. Allora*

$$\left| \int_a^b e^{i\varphi(x)}\, dx \right| \le \frac{3}{\lambda} \ .$$

Dimostrazione. Possiamo supporre, cambiando se necessario φ in $-\varphi$, che φ' sia positiva.

Supponiamo inizialmente che φ sia C^2 a tratti. Allora

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{i\varphi(x)}\, dx &= \int_a^b \frac{1}{\varphi'(x)} \frac{d}{dx} e^{i\varphi(x)}\, dx \\ &= \frac{1}{\varphi'(x)} e^{i\varphi(x)} \Big|_a^b - \int_a^b e^{i\varphi(x)} \frac{d}{dx} \frac{1}{\varphi'(x)}\, dx \ . \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b e^{i\varphi(x)}\, dx \right| &\le \left| \frac{e^{i\varphi(b)}}{\varphi'(b)} - \frac{e^{i\varphi(a)}}{\varphi'(a)} \right| + \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{1}{\varphi'(x)}\, dx \\ &\le \frac{2}{\lambda} + \left(\frac{1}{\varphi'(b)} - \frac{1}{\varphi'(a)} \right) \\ &\le \frac{3}{\lambda} \ . \end{aligned}$$

Data ora una generica φ soddisfacente le ipotesi, si approssimi uniformemente φ' (che è continua e monotona) con funzioni ψ_n di classe C^1 a tratti e pure crescenti (per esempio utilizzando poligonali congiungenti punti del grafico). Si ponga quindi $\varphi_n(x) = \varphi(a) + \int_a^x \psi_n(t)\, dt$. Le φ_n sono C^2 a tratti e le loro derivate sono crescenti e maggiori o uguali a λ. Inoltre esse tendono a φ puntualmente. Dunque

$$\left| \int_a^b e^{i\varphi_n(x)}\, dx \right| \le \frac{3}{\lambda} \ ,$$

uniformemente in n. Passando al limite e applicando la convergenza dominata, si ha la conclusione. $\square$

Si noti che la maggiorazione non dipende dalla lunghezza dell'intervallo $[a, b]$.

Il senso del Lemma 12.1 è che quanto più rapidamente varia la fase, tanto più si producono cancellazioni nell'integrale, con l'effetto di ridurne il valore. Si pone quindi il problema di valutare l'integrale quando la derivata φ' si annulla in $[a, b]$, ossia quando la fase ha dei punti stazionari. Il teorema che segue riguarda il caso in cui la fase ha, anche in presenza di punti stazionari, una derivata successiva mai nulla.

Teorema 12.2 (di van der Corput). *Sia φ una funzione di classe C^n su $[a, b]$, con $n \geq 2$, e sia $|\varphi^{(n)}(x)| \geq \lambda > 0$ su $[a, b]$. Allora esiste una costante c_n dipendente solo da n tale che*

$$\left| \int_a^b e^{i\varphi(x)}\, dx \right| \leq \frac{c_n}{\lambda^{1/n}} \ .$$

Dimostrazione. Procedendo per induzione, supponiamo $n = 2$. Fissato un numero $\delta > 0$ consideriamo i punti $x \in [a, b]$ in cui $|\varphi'(x)| \leq \delta$. Essendo $\varphi'' \geq \lambda > 0$, φ' è crescente e questo insieme è un intervallo I_δ di ampiezza $m(I_\delta) \leq 2\delta/\lambda$. Il complementare $[a, b] \setminus I_\delta$ è l'unione di due intervalli I', I'', eventualmente vuoti. Su ciascuno di essi φ' è monotona e in valore assoluto maggiore di δ.

Per il Lemma 12.1 si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b e^{i\varphi(x)}\, dx \right| &\leq \left| \int_{I_\delta} e^{i\varphi(x)}\, dx \right| + \left| \int_{I'} e^{i\varphi(x)}\, dx \right| + \left| \int_{I''} e^{i\varphi(x)}\, dx \right| \\ &\leq m(I_\delta) + \frac{6}{\delta} \\ &\leq \frac{2\delta}{\lambda} + \frac{6}{\delta} \ . \end{aligned}$$

Scegliamo allora $\delta = \lambda^{1/2}$, in modo che i due addendi abbiano lo stesso ordine di grandezza. Si ottiene così che

$$\left| \int_a^b e^{i\varphi(x)}\, dx \right| \leq \frac{8}{\lambda^{1/2}} \ .$$

Supponiamo ora che la tesi sia vera per n e dimostriamola per $n + 1$. Come prima, essendo $\varphi^{(n+1)} \geq \lambda > 0$, $\varphi^{(n)}$ è crescente. Fissato $\delta > 0$, l'insieme I_δ dove $|\varphi^{(n)}| \leq \delta$ è un intervallo di ampiezza non superiore a $2\delta/\lambda$. Applicando l'ipotesi induttiva, si ottiene, esattamente come prima,

$$\left| \int_a^b e^{i\varphi(x)}\, dx \right| \leq \frac{2\delta}{\lambda} + \frac{2c_n}{\delta^{1/n}} \ .$$

Scegliendo $\delta = \lambda^{\frac{n}{n+1}}$, si ha la conclusione. $\square$

Corollario 12.3. *Sia φ di classe C^n in $[a,b]$, tale che $|\varphi^{(n)}(x)| \geq \lambda > 0$ su $[a,b]$. Se $n=1$, si supponga inoltre che φ' sia monotona. Se f è di classe C^1 su $[a,b]$, si ha*

$$\left| \int_a^b f(x) e^{i\varphi(x)}\, dx \right| \leq \frac{c_n}{\lambda^{1/n}} \big(\|f\|_\infty + \|f'\|_1 \big) \ ,$$

dove c_n è la costante che appare nel Teorema 12.2.

Dimostrazione. Si ponga $g(x) = \int_a^x e^{i\varphi(t)}\, dt$. Per il Lemma 12.1 e il Teorema 12.2, $|g(x)| \leq c_n \lambda^{-1/n}$. Integrando per parti,

$$\int_a^b f(x) e^{i\varphi(x)}\, dx = f(b)g(b) - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx \ ,$$

per cui

$$\left| \int_a^b f(x) e^{i\varphi(x)}\, dx \right| \leq |f(b)| \frac{c_n}{\lambda^{1/n}} + \frac{c_n}{\lambda^{1/n}} \int_a^b |f'(x)|\, dx \ ,$$

da cui segue la tesi. □

Nelle applicazioni si deve spesso valutare il comportamento dell'integrale

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda\varphi(x)}\, dx \tag{12.4}$$

quando il parametro λ tende all'infinito.

Corollario 12.4. *Siano f di classe C^1 su $[a,b]$, φ di classe C^n in $[a,b]$, con $\varphi^{(n)}$ diversa da zero in ogni punto (e monotona se $n=1$). Allora*

$$I(\lambda) = O(|\lambda|^{-1/n}) \ .$$

La dimostrazione segue facilmente dal Corollario 12.3.

Nei casi considerati l'ordine di infinitesimo di $I(\lambda)$ sembra non superare mai 1. Ciò è in parte inevitabile, in quanto le stime dipendono, tra l'altro, dai termini al bordo nelle integrazioni per parti. Se però si suppone che f si annulli agli estremi, si possono migliorare le stime. Vediamo un risultato "estremo" in questa direzione.

Teorema 12.5. *Sia f di classe C^∞ su $\mathbb{R}$ con supporto contenuto in $[a,b]$. Sia inoltre φ di classe C^∞ su $[a,b]$, con $\varphi'(x) \neq 0$ su $[a,b]$. Allora*

$$I(\lambda) = O(|\lambda|^{-n})$$

per ogni n.

Dimostrazione. Essendo $f(a) = f(b) = 0$, un'integrazione per parti dà

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_a^b \frac{f(x)}{\lambda\varphi'(x)} \frac{d}{dx} e^{i\lambda\varphi(x)}\, dx \\ &= -\frac{1}{\lambda} \int_a^b \left(\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{\varphi'(x)} \right) e^{i\lambda\varphi(x)}\, dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_a^b f_1(x) e^{i\lambda\varphi(x)}\, dx \ , \end{aligned}$$

dove $f_1(x) = -\big(f(x)\varphi'(x)\big)'$ è una funzione C^∞ con supporto in $[a,b]$. Procedendo induttivamente,

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda^n}\int_a^b f_n(x)e^{i\lambda\varphi(x)}\,dx\ ,$$

da cui segue facilmente la tesi. $\square$

Non sarebbe difficile aggiungere alla dimostrazione che $I(\lambda) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Rimane il dubbio che la stima $I(\lambda) = O(|\lambda|^{-1/n})$ sia comunque migliorabile. Vediamo ora che ciò non è possibile in un caso particolare.

Teorema 12.6. *Siano f di classe C^1 e φ di classe C^3 su $[a,b]$. Si supponga che φ abbia derivata seconda non nulla su $[a,b]$ e un punto stazionario $x_0 \in (a,b)$ in cui $\varphi''(x_0) \neq 0$. Si supponga anche che $f(x_0) \neq 0$. Allora*

$$I(\lambda) = \sqrt{2\pi}\frac{f(x_0)}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}}e^{i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\,(\lambda\varphi''(x_0))}|\lambda|^{-1/2} + O(|\lambda|^{-1}) \tag{12.5}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre che $\varphi(x_0) = 0$. Esiste allora un intorno $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ su cui

$$\varphi(x) = \frac{\varphi''(x_0)}{2}(x-x_0)^2\big(1+\varepsilon(x)\big)\ ,$$

con $|\varepsilon(x)| < 1/2$ e, per il Teorema di Whitney, di classe C^1. Decomponiamo $I(\lambda)$ come la somma dei tre integrali, utilizzando una funzione η di classe C^∞ con supporto in $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ e uguale a 1 su $[x_0-\delta/2, x_0+\delta/2]$.

I due integrali

$$\int_a^{x_0-\delta/2} f(x)\big(1-\eta(x)\big)e^{i\lambda\varphi(x)}\,dx\ , \qquad \int_{x_0+\delta/2}^b f(x)\big(1-\eta(x)\big)e^{i\lambda\varphi(x)}\,dx$$

sono entrambi $O(|\lambda|^{-1})$ perché su di essi φ' è diversa da 0 e monotona. Essi rientrano dunque nel resto della (12.5) e rimane da analizzare l'integrale

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\eta(x)e^{i\lambda\varphi(x)}\,dx\ .$$

Al fine di effettuare la sostituzione $t = \psi(x) = (x-x_0)\sqrt{1+\varepsilon(x)}$, si osservi che

$$\psi'(x) = \sqrt{1+\varepsilon(x)} + \frac{(x-x_0)\varepsilon'(x)}{\sqrt{1+\varepsilon(x)}}\ ,$$

per cui, riducendo il valore di δ se necessario, si ha $\psi'(x) \geq c > 0$. Allora

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\eta(x)e^{i\varphi(x)}\,dx = \int_{-\alpha}^{\beta} g(t)e^{i\frac{\lambda\varphi''(x_0)}{2}t^2}\,dt\ ,$$

dove $\alpha,\beta > 0$ e $g = (f\circ\psi^{-1})(\eta\circ\psi^{-1})(\psi^{-1})'$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}$ e ha supporto in $[-\alpha,\beta]$.

Ponendo, per semplicità di notazioni, $\mu = \lambda\varphi''(x_0)/2$, cerchiamo dunque la parte principale, per μ tendente all'infinito, di

$$J(\mu) = \int_{-\alpha}^{\beta} g(t) e^{i\mu t^2}\, dt \ ,$$

confrontando $J(\mu)$ con

$$K(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(0) e^{-t^2} e^{i\mu t^2}\, dt \ .$$

Dimostriamo allora che
(1) $K(\mu) = \sqrt{\pi} g(0) e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\mu} |\mu|^{-1/2} + O(|\mu|^{-3/2})$,
(2) $J(\mu) - K(\mu) = O(|\mu|^{-1})$.
Per dimostrare la (1), si osservi che se $\gamma > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t^2} dt = \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{1/2} \ .$$

Per l'unicità del prolungamento analitico, questa identità continua a valere per $\gamma \in \mathbb{C}$ con parte reale positiva. Ponendo $\gamma = 1 - i\mu$, si ha
(12.6)
$$K(\mu) = g(0)\left(\frac{\pi}{|1 - i\mu|}\right)^{1/2} e^{i\frac{\arctan\mu}{2}} = \sqrt{\pi} g(0) e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\mu} |\mu|^{-1/2} + O(|\mu|^{-3/2}) \ .$$

Quanto alla (2), si ha

$$\begin{aligned} J(\mu) - K(\mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(g(t) - g(0) e^{-t^2}\right) e^{i\mu t^2}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t) - g(0)e^{-t^2}}{2i\mu t} \frac{d}{dt} e^{i\mu t^2}\, dt \\ &= -\frac{1}{2i\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{g(t) - g(0)e^{-t^2}}{t}\right) e^{i\mu t^2}\, dt \\ &= O(|\mu|^{-1}) \ . \end{aligned}$$

La parte principale è dunque fornita dalla (12.6), in cui si può sostituire $g(0) = f(x_0)$. □

Passiamo ora a più dimensioni. Ci limiteremo a ottenere maggiorazioni nel parametro λ per integrali

$$I(\lambda) = \int_{\Omega} f(x) e^{i\lambda\varphi(x)}\, dx \ , \tag{12.7}$$

con f, φ sufficientemente regolari e f con supporto compatto contenuto in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
Il primo risultato è un'estensione del Teorema 12.5.

Teorema 12.7. *Siano f, φ di classe C^∞ su Ω, con f a supporto compatto in Ω. Se $\nabla\varphi \neq 0$ su Ω, allora $I(\lambda) = O(|\lambda|^{-N})$ per ogni N.*

Dimostrazione. Per il Teorema del Dini, fissato $x_0 \in \Omega$, esiste un sistema di coordinate locali $(t_1, \ldots, t_n)$ tali che, posto $x = \Psi(t)$, si abbia $\Psi(0) = x_0$, Ψ sia un diffeomorfismo da un intorno V di 0 a un intorno $U(x_0)$ di x_0, e inoltre $\varphi \circ \Psi(t) = t_1$.

Per la compattezza del supporto di f, l'integrale (12.7) si decompone, utilizzando una partizione dell'unità di classe C^∞, in una somma finita di integrali dello stesso tipo estesi a intorni coordinati.

Effettuando il cambiamento di coordinate su $U(x_0)$, si ha

$$\int_{U(x_0)} f(x) e^{i\lambda\varphi(x)}\, dx = \int_V (f \circ \Psi)(t) |\det \Psi'(t)| e^{i\lambda t_1}\, dt \ .$$

Integrando per parti nella variabile t_1 come nella dimostrazione del Teorema (12.5) si ottiene la conclusione. $\square$

Supponiamo ora che la fase φ abbia un punto stazionario x_0 nel supporto di f. Vedremo che il decadimento all'infinito di $I(\lambda)$ dipende dal rango della matrice Hessiana $H_{x_0}\varphi$.

Premettiamo un paio di lemmi.

Lemma 12.8. *Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\partial^\alpha f(0) = 0$ per ogni α con $|\alpha| \leq m$. Esistono allora funzioni $h_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tali che $f(x) = \sum_{|\alpha|=m+1} x^\alpha h_\alpha(x)$.*

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione su m.

Per $m = 0$ abbiamo dall'ipotesi che $f(0) = 0$. Come nella dimostrazione del Lemma 5.1, scriviamo

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt = \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, dt \ .$$

Sia η una funzione C^∞ a supporto compatto tale che $\eta(x) = 1$ per $|x| \leq 1$. Allora

$$f(x) = \sum_{j=1}^n x_j \eta(x) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, dt + r(x) \ .$$

Le funzioni $\eta(x) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, dt$ sono C^∞ a supporto compatto. Di conseguenza $r \in \mathcal{S}$, e inoltre $r(x) = 0$ per $|x| \leq 1$. Quindi anche $s(x) = r(x)/|x|^2 \in \mathcal{S}$, e allora

$$r(x) = |x|^2 s(x) = \sum_{j=1}^n x_j s_j(x) \ ,$$

dove $s_j(x) = x_j s(x) \in \mathcal{S}$. Posto allora

$$h_j(x) = \eta(x) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, dt + s_j(x) \ ,$$

si ha $h_j \in \mathcal{S}$ e $f(x) = \sum_{j=1}^n x_j h_j(x)$.

Supponiamo la tesi vera per $m - 1$ e si supponga che $\partial^\alpha f(0) = 0$ per $|\alpha| \leq m$.

Per l'ipotesi induttiva,
$$f(x) = \sum_{|\beta|=m} x^\beta h_\beta(x)$$
con $h_\beta \in \mathcal{S}$. Ma $h_\beta(0) = \frac{\partial^\beta f(0)}{\beta!} = 0$. Quindi
$$h_\beta(x) = \sum_{j=1}^n x_j k_{\beta,j}(x)$$
e infine
$$f(x) = \sum_{|\beta|=m} \sum_{j=1}^n x^\beta x_j k_{\beta,j}(x)$$
da cui la tesi. $\square$

Lemma 12.9. *Per ogni intero k si ha*
$$\int_{\mathbb{R}} x^k e^{-x^2} e^{i\lambda x^2}\, dx = O(|\lambda|^{-\frac{k+1}{2}}) \ .$$

(Si osservi che per k dispari l'integrale è nullo, per cui la formula è di interesse solo per k pari.)

Dimostrazione. Il caso $k = 0$ è stato già considerato nel corso della dimostrazione del Teorema 12.6. Per induzione, abbiamo
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x^k e^{-x^2} e^{i\lambda x^2}\, dx &= \frac{1}{2i\lambda} \int_{\mathbb{R}} x^{k-1} e^{-x^2} \frac{d}{dx} e^{i\lambda x^2}\, dx \\ &= -\frac{1}{2i\lambda} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}\big(x^{k-1} e^{-x^2}\big) e^{i\lambda x^2}\, dx \\ &= -\frac{k-1}{2i\lambda} \int_{\mathbb{R}} x^{k-2} e^{-x^2} e^{i\lambda x^2}\, dx + \frac{1}{i\lambda} \int_{\mathbb{R}} x^k e^{-x^2} e^{i\lambda x^2}\, dx \ ,\end{aligned}$$
per cui
$$\int_{\mathbb{R}} x^k e^{-x^2} e^{i\lambda x^2}\, dx = -\frac{k-1}{2(i\lambda - 1)} \int_{\mathbb{R}} x^{k-2} e^{-x^2} e^{i\lambda x^2}\, dx \ .$$

La conclusione è ora ovvia. $\square$

Teorema 12.10. *Si supponga che f sia di classe C^∞ con supporto compatto contenuto in Ω, che φ sia di classe C^∞ in Ω. Se nei punti critici x di φ il rango della matrice Hessiana $H_{x_0}\varphi$ è almeno $k \le n$, allora $I(\lambda) = O(|\lambda|^{-k/2})$.*

Dimostrazione. Per ogni punto $x_0 \in \Omega$ fissiamo un intorno $U(x_0)$ come segue.

Se x_0 ùn punto critico, effettuiamo un cambiamento di coordinate lineare che diagonalizzi la matrice Hessiana $H_0\varphi$, in modo da poter scrivere

$$\varphi(x_0 + h) = \sum_{j=1}^m \mu_j h_j^2 + |h|^2 \varepsilon(h) \ , \tag{12.8}$$

con $m \geq k$, $\mu_j \neq 0$ e $\varepsilon(h)$ di classe C^∞ e uguale a 0 nell'origine. Si fissi un intorno U di 0 su cui $|\varepsilon(h)| < |\mu_j|/2$ per ogni j e si ponga $U(x_0) = x_0 + U$.

Se x_0 non è critico, si scelga $U(x_0)$ in modo che su di esso $|\nabla\varphi| \geq c > 0$.

Si può allora estrarre un numero finito di $U(x_i)$ che ricoprano il supporto di f. Si prenda una partizione dell'unità $\{\eta_i\}$ di classe C^∞ adattata a tale ricoprimento. Corrispondentemente l'integrale $I(\lambda)$ si decompone nella somma di integrali $I_i(\lambda)$,

$$I_i(\lambda) = \int f(x)\eta_i(x)e^{i\lambda\varphi(x)}\,dx \ .$$

Se $U(x_i)$ è un intorno del secondo tipo, per il Teorema 12.7, $I_i(\lambda) = O(|\lambda|^{-N})$ per ogni N.

Consideriamo dunque un intorno del primo tipo. Possiamo supporre che $x_i = 0$ e $\varphi(0) = 0$. Scriviamo allora la (12.8) nella forma

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m}\big(\mu_j + \varepsilon(x)\big)x_j^2 + \sum_{j=m+1}^{n}\varepsilon(x)x_j^2 \ .$$

Cambiamo variabili di integrazione ponendo:

$$t_j = \begin{cases} |\mu_j + \varepsilon(x)|^{1/2}x_j & \text{se } j \leq m \\ x_j & \text{se } j > m \ . \end{cases}$$

Poiché per $j \leq m$ $t_j = |\mu_j|^{1/2}x_j + O(|x|^2)$, la matrice Jacobiana $\partial t/\partial x$ nell'origine è la matrice diagonale $\mathrm{diag}(|\mu_1|^{1/2}, \dots, |\mu_m|^{1/2}, 1, \dots, 1)$. Restringendo U se necessario, otteniamo un diffeomorfismo Ψ di U su un intorno V di 0 per cui

$$I_i(\lambda) = \int_V g(t)e^{i\lambda\sum_{j=1}^m \pm t_j^2}\,dt \ ,$$

dove $g(t)$ è di classe C^∞ con supporto in V.

Integrando nelle variabili $t_{m+1}, \dots, t_n$, si giunge ad avere

$$I_i(\lambda) = \int_{V'} \tilde{g}(t_1, \dots, t_m)e^{i\lambda\sum_{j=1}^m \pm t_j^2}\,dt_1 \cdots dt_m \ ,$$

dove V' è la proiezione di V sul sottospazio coordinato con variabili $t_1, \dots, t_m$.

Vogliamo confrontare $I_i(\lambda)$ con l'integrale

$$K(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^m} P_m(t)e^{-|t|^2}e^{i\lambda\sum_{j=1}^m \pm t_j^2}\,dt \ ,$$

dove $P_m(t)$ è il polinomio di Taylor di $\tilde{g}(t)e^{|t|^2}$ centrato in 0 e di ordine m.

Si osservi che $\tilde{g}(t)e^{|t|^2} - P_m(t) = O(|t|^{m+1})$ per $t \to 0$, e lo stesso vale per $u(t) = \tilde{g}(t) - P_m(t)e^{-|t|^2}$. Quindi le derivate di u nell'origine sono tutte nulle fino all'ordine m compreso.

Per il Lemma 12.8 si ha

$$\begin{aligned} I_i(\lambda) - K(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^m} u(t)e^{i\lambda\sum_{j=1}^m \pm t_j^2}\,dt \\ &= \sum_{|\alpha|=m+1}\int_{\mathbb{R}^m} t^\alpha u_\alpha(t)e^{i\lambda\sum_{j=1}^m \pm t_j^2}\,dt \ . \end{aligned}$$

Supponendo che il monomio t^α contenga il fattore t_i, si indichi con α' il multi-indice tale che $t^\alpha = t_i t^{\alpha'}$ e, nel caso che t^α contenga anche il fattore t_i^2, con α'' quello tale che $t^\alpha = t_i^2 t^{\alpha''}$. Si ha allora, integrando per parti,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} t^\alpha u_\alpha(t) e^{i\lambda \sum_{j=1}^m \pm t_j^2}\,dt &= \frac{1}{\pm 2i\lambda}\int_{\mathbb{R}^m} t^{\alpha'} u_\alpha(t)\partial_{t_i} e^{i\lambda\sum_{j=1}^m \pm t_j^2}\,dt \\ &= \frac{c_1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^m} t^{\alpha''} u_\alpha(t) e^{i\lambda\sum_{j=1}^m \pm t_j^2}\,dt + \frac{c_2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^m} t^{\alpha'}\partial_{t_i} u_\alpha(t) e^{i\lambda\sum_{j=1}^m \pm t_j^2}\,dt\ .\end{aligned}$$

dove c_1 è nullo se t^α non contiene t_i^2.

Ne segue che, se $|\alpha| = 1$ oppure $|\alpha| = 2$, l'integrale è $O(|\lambda|^{-1})$. Induttivamente, si verifica che se $|\alpha| = m+1$, esso è $O(|\lambda|^{-\frac{m+1}{2}})$.

Dunque $I_i(\lambda) - K(\lambda) = O(|\lambda|^{-\frac{m+1}{2}})$.

Quanto a $K(\lambda)$, esso è la combinazione di un numero finito di termini della forma

$$\int_{\mathbb{R}^m} t^\alpha e^{-|t|^2} e^{i\lambda\sum_{j=1}^m \pm t_j^2}\,dt = \prod_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}} t_j^{\alpha_j} e^{-t_j^2} e^{\pm i\lambda t_j^2}\,dt_j = O(|\lambda|^{-\frac{m+|\alpha|}{2}})\ ,$$

per il Lemma 12.9.

In conclusione tutti i termini sono $O(|\lambda|^{-k/2})$. $\square$

13. Trasformate di Fourier di misure lisce su varietà

Premettiamo alcune considerazioni generali sulle trasformate di Fourier di misure finite. Se una misura μ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, allora $\hat\mu$ tende a zero all'infinito per il Teorema di Riemann-Lebesgue.

Sia ora $\mu_d = \sum_j c_j \delta_{x_j}$ la parte discreta di una misura finita μ. Vale l'identità di Wiener:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(B_R)}\int_{B_R} |\hat\mu(\xi)|^2\,d\xi = \sum_j |c_j|^2\ , \tag{13.1}$$

la cui dimostrazione è rinviata alla fine del paragrafo.

Segue dalla (13.1) che se $\mu_d \neq 0$, $\hat\mu$ non può tendere a zero all'infinito.

Se μ è una misura continua, il secondo membro della (13.1) vale zero, ma ciò non è sufficiente a garantire che $\hat\mu$ tende a zero all'infinito. Mostriamo con due esempi che si possono presentare entrambe le situazioni.

Esempio 1. Si prenda in $\mathbb{R}^2$ la misura σ data dalla lunghezza d'arco sul segmento $[-1,1]\times\{a\}$:

$$\int f(x,y)\,d\sigma(x,y) = \int_{-1}^1 f(t,a)\,dt\ .$$

Allora

$$\hat\sigma(\xi,\eta) = \int_{-1}^1 e^{-i(t\xi + a\eta)}\,dt = e^{-ia\eta}\frac{2\sin\xi}{\xi}\ ,$$

che non tende a zero andando all'infinito nella direzione verticale.

Esempio 2. Sempre in $\mathbb{R}^2$ si consideri la misura μ con supporto sull'arco di parabola $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$

$$\int f(x,y)\,d\mu(x,y) = \int_{-1}^{1} f(t,t^2)\,dt\ .$$

Si ha

$$\hat{\mu}(\xi,\eta) = \int_{-1}^{1} e^{-i(\xi t+\eta t^2)}\,dt\ .$$

La fase $\varphi(t) = \xi t + \eta t^2$ (trascurando il segno) ha derivata nulla in $t_0 = -\frac{\xi}{2\eta}$. Dividiamo il piano ξ,η in tre regioni: (1) il disco unitario, (2) l'insieme, al di fuori del disco unitario, dove $|\xi| > 4|\eta|$, (3) l'insieme, al di fuori del disco unitario, dove $|\xi| \le 4|\eta|$.

Nella regione (1) abbiamo semplicemente $|\hat{\mu}| \le 2$.

Se (ξ,η) è nella regione (2), si ha, per $|t| \le 1$,

$$|\varphi'(t)| = |\xi|\left|1 + \frac{2\eta}{\xi}t\right| \ge |\xi|\left(1 - \frac{2|\eta|}{|\xi|}\right) \ge \frac{|\xi|}{2}\ .$$

Per il Lemma 12.1, $|\hat{\mu}(\xi,\eta)| \le 6/|\xi|$. D'altra parte, $|(\xi,\eta)| = \sqrt{\xi^2+\eta^2} \le c|\xi|$, per cui $|\hat{\mu}(\xi,\eta)| \le 6/|(\xi,\eta)|$.

Nella regione (3) applichiamo il lemma di van der Corput con la derivata seconda. Essendo $\varphi''(t) = 2\eta$, si ha $|\hat{\mu}(\xi,\eta)| \le c/|\eta|^{1/2} \le 6/|(\xi,\eta)|^{1/2}$.

In conclusione $\hat{\mu}$ tende a zero all'infinito.

Sia ora S una varietà di classe C^∞ e di dimensione k immersa in $\mathbb{R}^n$. La misura superficiale σ su S si costruisce come segue.

Dato un punto $x_0 \in S$, si considerino coordinate locali $x = \Phi(t_1,\dots,t_k)$ in un intorno U di x_0, con $\Phi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ funzione di classe C^∞ avente per dominio un aperto $V \subset \mathbb{R}^k$, per immagine $U \cap S$ e rango k in ogni punto di V.

Data una funzione continua f con supporto compatto contenuto in $S \cap U$, si pone

$$\int_S f(x)\,d\sigma(x) = \int_V f\circ\Phi(t)J(t)\,dt\ ,$$

dove

$$J(t) = \sqrt{\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_k}\left(\det\frac{\partial(\varphi_{j_1},\varphi_{j_2},\dots,\varphi_{j_k})}{\partial(t_1,t_2,\dots,t_k)}\right)^2}$$

(per esempio, se $k=1$, $J(t) = \sqrt{\sum_{j=1}^n \varphi_j'(t)^2}$ fornisce l'elemento di lunghezza d'arco).

Si noti che J è una funzione di t positiva e di classe C^∞.

Data ora una generica funzione f continua a supporto compatto in S, è possibile ricoprire il supporto di f con un numero finito di aperti coordinati. Utilizzando una partizione dell'unità adattata a questo ricoprimento, si decomponga f nella somma $f_1+\cdots+f_m$ di funzioni continue, ognuna con supporto su uno di tali aperti coordinati. Si ponga quindi

$$\int_S f(x)\,d\sigma(x) = \sum_{i=1}^m \int_S f_i(x)\,d\sigma(x) = \sum_{i=1}^m \int_{V_i} f_i\circ\Phi_i(t)J_i(t)\,dt\ .$$

Non è difficile verificare che questa definizione è indipendente dal sistema di coordinate e dalla partizione dell'unità scelti.

Più in generale, considereremo misure $d\mu(x) = g(x)d\sigma(x)$ dove g è una funzione C^∞ su S. Diremo che una tale μ è una *misura liscia su S*.

Ci interessa sapere sotto quali condizioni si può affermare che la trasformata di Fourier di una misura liscia si annulli all'infinito. L'Esempio 1 suggerisce la seguente condizione necessaria.

Proposizione 13.1. *Affinché la trasformata di Fourier di una misura liscia μ su una varietà connessa S tenda a zero all'infinito, è necessario che S non sia contenuta in nessuna varietà affine propria.*

Dimostrazione. Con un cambiamento lineare di variabili, si può supporre che S sia contenuta nel sottospazio coordinato $x_1 = a_1, \ \ldots, \ x_m = a_m$. Posto $x' = (x_1, \ldots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ (e similmente per ξ', ξ'' e a'), si ha

$$\hat{\mu}(\xi', \xi'') = e^{-i\xi' \cdot a'} \int e^{-i\xi'' \cdot x''} \, d\mu \ ,$$

per cui non può tendere a zero quando ξ tende all'infinito nelle direzioni ξ'. $\square$

Consideriamo ora la misura superficiale σ sulla sfera S_r di centro l'origine e raggio $r > 0$ in $\mathbb{R}^3$. Per semplificare il calcolo di $\hat{\sigma}$, osserviamo che σ è ovviamente *invariante per rotazioni*, il che vuol dire quanto segue: data una rotazione in $\mathbb{R}^3$ con centro in 0, rappresentata da una matrice ortogonale A, e data una funzione continua f su S_r, si ha

$$\int_{S_r} f(Ax) \, d\sigma(x) = \int_{S_r} f(x) \, d\sigma(x) \ .$$

Dato $\xi \in \mathbb{R}^3$ con $|\xi| = s$, esiste una rotazione A che trasporta ξ nel vettore $\mathbf{s} = (0, 0, s)$. Poiché le matrici ortogonali sono caratterizzate dalla proprietà $A^{-1} = {}^tA$, si ha

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}(\xi) &= \int_{S_r} e^{-i\xi \cdot x} \, d\sigma(x) \\
&= \int_{S_r} e^{-iA^{-1}\mathbf{s} \cdot x} \, d\sigma(x) \\
&= \int_{S_r} e^{-i\mathbf{s} \cdot Ax} \, d\sigma(x) \\
&= \int_{S_r} e^{-i\mathbf{s} \cdot x} \, d\sigma(x) \\
&= \hat{\sigma}(\mathbf{s}) \ .
\end{aligned}$$

In altri termini, $\hat{\sigma}$ è una funzione radiale.

Utilizziamo ora le coordinate polari θ, φ su S_r:

$$\begin{aligned}
x &= r \sin\theta \cos\varphi \\
y &= r \sin\theta \sin\varphi \\
z &= r \cos\theta
\end{aligned}$$

con $0 \le \theta \le \pi$ e $0 \le \varphi \le 2\pi$. Allora $J(\theta) = r^2 \sin\theta$ e

$$\hat\sigma(\xi) = 2\pi r^2 \int_0^\pi e^{-isr\cos\theta} \sin\theta \, d\theta = \frac{2\pi r^2}{isr}\, e^{-isr\cos\theta}\Big|_0^\pi = 4\pi r^2 \frac{\sin(r|\xi|)}{r|\xi|} \ .$$

Quindi $\hat\sigma(\xi)$ tende a 0 per ξ tendente all'infinito.

Utilizzando le coordinate polari in $\mathbb{R}^n$ si dimostra che la trasformata di Fourier della misura superficiale σ sulla sfera $(n-1)$-dimensionale S_r di raggio r centrata in 0 è data dalla formula (dove $s = |\xi|$)

$$\hat\sigma(\xi) = c_n r^{n-1} \int_0^\pi e^{-isr\cos\theta} \sin^{n-2}\theta \, d\theta \ .$$

Questa espressione si riconduce alla definizione di *funzione di Bessel*. Dato un numero reale $\alpha > -1/2$, si pone, per $s > 0$,

$$J_\alpha(s) = \frac{s^\alpha}{\sqrt{\pi} 2^\alpha \Gamma(\alpha + \frac12)} \int_{-1}^1 e^{ist} (1-t^2)^{\alpha - \frac12} \, dt \ .$$

Sostituendo $t = \cos\theta$ con $\theta \in [0,\pi]$, si ha

$$J_\alpha(s) = \frac{s^\alpha}{\sqrt{\pi} 2^\alpha \Gamma(\alpha + \frac12)} \int_0^\pi e^{is\cos\theta} \sin^{2\alpha}\theta \, d\theta \ .$$

Quindi

$$\hat\sigma(\xi) = c_n r^{n-1} (rs)^{-(n-2)/2} J_{\frac{n-2}{2}}(rs) = c_n r^{n/2} s^{-(n-2)/2} J_{\frac{n-2}{2}}(rs) \ .$$

Essendo $J_\alpha(s) = O(s^{-1/2})$, si ottiene che

$$\hat\sigma(\xi) = O(|\xi|^{-(n-1)/2}) \ .$$

Questo risultato si può anche ritrovare come caso particolare di una situazione più generale, che ora esponiamo.

La curvatura di una ipersuperficie orientata S in un suo punto x_0 può essere definita come segue. Si introduca un sistema di riferimento ortogonale $(t_1, \dots, t_n)$ con origine in x_0, in modo che localmente S sia il grafico $t_n = \varphi(t_1, \dots, t_{n-1})$ di una funzione φ di classe C^∞ tale che $\varphi(0) = 0$ e $\nabla\varphi(0) = 0$. Si supponga inoltre che l'orientamento sia tale che il versore normale in 0 sia il versore coordinato e_n.

Le $n-1$ *curvature principali* di S in x_0 sono, per definizione, gli autovalori della matrice Hessiana $H_{x_0}\varphi$. La *curvatura Gaussiana* di S in x_0 è il prodotto delle sue curvature principali, ossia il determinante della matrice Hessiana.

Cambiando l'orientamento della superficie, le curvature principali cambiano di segno; la curvatura Gaussiana cambia di segno o rimane invariata secondo la parità della dimensione. In ogni caso la proprietà di avere curvatura Gaussiana non nulla (o un numero fissato k di curvature principali non nulle) è indipendente dall'orientamento. Poiché ogni superficie è localmente orientabile, si può parlare di superficie con curvatura Gaussiana diversa da zero (risp. con k curvature principali non nulle) anche quando essa non è orientabile.

Teorema 13.2. *Sia S una ipersuperficie avente almeno k curvature principali non nulle in ogni punto. Se μ è una misura liscia su S a supporto compatto, allora $\hat{\mu}(\xi) = O(|\xi|^{-k/2})$. Se in particolare S ha curvatura Gaussiana non nulla in ogni punto, è $\hat{\mu}(\xi) = O(|\xi|^{-(n-1)/2})$.*

Dimostrazione. Ogni punto di S ha un intorno in $\mathbb{R}^n$ la cui intersezione con S è il luogo degli zeri di una funzione di classe C^∞ con gradiente non nullo. Si consideri un ricoprimento finito del supporto di f mediante tali intorni.

Utilizzando una partizione dell'unità C^∞, possiamo allora ridurci alla situazione in cui S è descritta dall'equazione $\Psi(x) = 0$, dove $\nabla\Psi$ è non nullo su S.

Fissato $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, si ponga $\lambda = |\xi|$, $\xi = \lambda\omega$, con ω sulla sfera unitaria Σ. Allora

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_S e^{-i\lambda\omega\cdot x}\, d\mu(x)\ . \tag{13.2}$$

Consideriamo l'insieme E_ω dei punti $x \in S$ in cui $\nabla\Psi$ è un multiplo scalare di ω. Come vedremo questi saranno i punti di fase stazionaria dell'integrale (13.2). Per ognuno di tali punti fissiamo un intorno U tale che $S \cap U$ sia il grafico di una funzione C^∞ in $n-1$ variabili e scegliamo tra essi un ricoprimento finito di $E_\omega \cap \operatorname{supp} f$. Completiamo quindi un ricoprimento finito di $\operatorname{supp} f$ con aperti in S che siano pure grafici e la cui chiusura non intersechi E_ω.

Indichiamo con U' un elemento del ricoprimento del primo tipo e con U'' un elemento del secondo tipo.

Una nuova partizione dell'unità ci porta così a decomporre μ come somma finita di misure di due tipi, che indichiamo con μ' o μ'' secondo che abbiano supporto su un aperto U' o U'' rispettivamente.

Consideriamo dapprima una misura del tipo μ'. Effettuiamo un cambiamento affine di coordinate, in modo che l'origine del nuovo sistema di riferimento sia un punto di E_ω e che il supporto di μ' si rappresenti nella forma $x_n = \varphi(x')$, dove $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\varphi(0) = 0$, $\nabla\varphi(0) = 0$.

Se $d\mu' = g\, d\sigma$, si ha

$$\int f(x)\, d\mu'(x) = \int f(t,\varphi(t))g(t,\varphi(t))J(t)\, dt = \int f(t,\varphi(t))h(t)\, dt\ ,$$

dove $h(t) = g(t,\varphi(t))J(t)$ è C^∞ a supporto compatto.

Nel nuovo sistema di riferimento $\omega = (0, 0, \dots, \pm 1)$, in quanto esso è ortogonale a S, essendo $0 \in E_\omega$. Quindi

$$\widehat{\mu'}(\xi) = \int e^{\pm i\lambda\varphi(t)} h(t)\, dt\ .$$

Poiché S ha almeno k curvature principali non nulle in ogni punto, si può applicare il Teorema 12.10 e concludere che $|\widehat{\mu'}(\lambda\omega)| \leq C_\omega |\lambda|^{-k/2}$.

Si consideri ora una misura del tipo μ'' e si scelga un sistema di riferimento che consenta di rappresentare il supporto di μ'' come grafico $x_n = \varphi(x')$. Mostriamo che la fase $\varphi_\omega(t) = \omega' \cdot t + \omega_n \varphi(t)$ non ha punti stazionari.

Essendo

$$\partial_{t_j}\varphi(t) = -\frac{\partial_{x_j}\Psi\big(t,\varphi(t)\big)}{\partial_{x_n}\Psi\big(t,\varphi(t)\big)}\ ,$$

si ha

$$\partial_{t_j}\varphi_\omega(t) = \omega_j - \omega_n \frac{\partial_{x_j}\Psi\big(t,\varphi(t)\big)}{\partial_{x_n}\Psi\big(t,\varphi(t)\big)} \ .$$

In un punto stazionario si dovrebbe dunque avere

$$\omega_j \partial_{x_n}\Psi\big(t,\varphi(t)\big) = \omega_n \partial_{x_j}\Psi\big(t,\varphi(t)\big) \ ,$$

cioè $\nabla\Psi$ e ω allineati, il che è contro le ipotesi. Per il Teorema (12.7), $|\widehat{\mu''}(\lambda\omega)| \leq C_\omega|\lambda|^{-k/2}$. In conclusione

$$|\hat{\mu}(\lambda\omega)| \leq C_\omega|\lambda|^{-k/2} \ .$$

Rimane da dimostrare che le costanti C_ω possono essere maggiorate da una stessa costante.

Si osservi che ogni $\omega_0 \in \Sigma$ individua, come descritto, una suddivisione di μ in misure del tipo μ' o μ''. La stessa suddivisione è compatibile con gli ω in un intorno sufficientemente piccolo di ω_0. Inoltre le costanti C_ω dipendono dalla grandezza delle derivate delle funzioni φ, h ecc., per cui possono essere limitate uniformemente in un intorno di ω_0. Per la compattezza di Σ si ottiene la conclusione. $\square$

Diamo ora la dimostrazione dell'identità di Wiener.

Lemma 13.3. *Siano μ una misura finita e $f \in C_0$ tale che $f(0) = 1$. Allora*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int f(\varepsilon^{-1}x)\, d\mu(x) = \mu(\{0\}) \ .$$

Dimostrazione. Si decomponga μ come

$$\mu = c\delta_0 + \nu \ ,$$

dove $c = \mu(\{0\})$ e $\nu(\{0\}) = 0$. Poiché anche $|\nu|(\{0\}) = 0$, ciò implica che se B_δ è la palla di centro l'origine e raggio δ,

$$\lim_{\delta\to 0} |\nu|(B_\delta) = 0 \ .$$

Fissato $\lambda > 0$, si scelga δ in modo che $|\nu|(B_\delta) < \lambda$, e quindi ε in modo che $|f(\varepsilon^{-1}x)| < \lambda$ quando $|x| > \delta$. Allora

$$\begin{aligned}\left|\int f(\varepsilon^{-1}x)\, d\nu(x)\right| &\leq \int_{B_\delta} |f(\varepsilon^{-1}x)|\, d|\nu|(x) + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta} |f(\varepsilon^{-1}x)|\, d|\nu|(x) \\ &\leq \|f\|_\infty |\nu|(B_\delta) + \lambda\|\nu\|_1 \ ,\end{aligned}$$

per cui

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int f(\varepsilon^{-1}x)\, d\nu(x) = 0 \ .$$

Ma allora

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int f(\varepsilon^{-1}x)\, d\mu(x) = c \lim_{\varepsilon\to 0} \int f(\varepsilon^{-1}x)\, d\delta_0(x) \ ,$$

dove l'ultimo integrale non dipende da ε e vale 1. $\square$

Lemma 13.4. *Sia μ una misura finita. Allora*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(B_R)} \int_{B_R} \hat{\mu}(\xi)\, d\xi = \mu(\{0\}) \ .$$

Dimostrazione. Sia $f(x)$ la trasformata di Fourier di $\frac{1}{m(B_1)}\chi_{B_1}$. Allora f è continua, si annulla all'infinito e $f(0) = 1$. Poiché

$$\frac{1}{m(B_R)}\chi_{B_R}(\xi) = R^{-n}\frac{1}{m(B_1)}\chi_{B_1}(R^{-1}\xi) \ ,$$

la trasformata di Fourier di $\frac{1}{m(B_R)}\chi_{B_R}$ è $f(Rx)$. Quindi

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(B_R)} \int \chi_{B_R}(\xi)\hat{\mu}(\xi)\, d\xi = \lim_{R\to\infty} \int f(Rx)\, d\mu(x) = \mu(\{0\})$$

per il Lemma 13.3. $\square$

Lemma 13.5. *La convoluzione di due misure finite, di cui una almeno è continua, è continua.*

Dimostrazione. Siano μ, ν due misure finite, con ν continua. Basta dimostrare che $\mu * \nu(\{0\}) = 0$. Se B_δ è la palla di raggio δ centrata in 0, si ha

$$\begin{aligned} \mu * \nu(B_\delta) &= \iint \chi_{B_\delta}(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \\ &= \int f_\delta(x)\, d\mu(x) \ , \end{aligned}$$

dove

$$f_\delta(x) = \int \chi_{B_\delta}(x+y)\, d\nu(y) = \nu(B_{x,\delta}) \ .$$

Per la continuità di ν, si ha $\lim_{\delta\to 0} f_\delta(x) = 0$ per ogni x. Inoltre $|f_\delta(x)| \le \|\nu\|_1$ per ogni x e δ. Per la convergenza dominata,

$$\mu * \nu(\{0\}) = \lim_{\delta\to 0} \mu * \nu(B_\delta) = 0 \ ,$$

come da dimostrarsi. $\square$

Teorema 13.6. *Sia $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$,*

$$\mu = \nu + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \delta_{x_j}$$

con ν continua. Allora

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(B_R)} \int_{B_R} |\hat{\mu}(\xi)|^2\, d\xi = \sum_j |c_j|^2 \ .$$

Dimostrazione. Sia μ^* la misura tale che $\mu^*(E) = \overline{\mu(-E)}$ per ogni Boreliano E. In modo equivalente, μ^* è tale che

$$\int f(x)\, d\mu^*(x) = \overline{\int \overline{f(-x)}\, d\mu(x)}\ .$$

In particolare $\widehat{\mu^*}(\xi) = \overline{\hat{\mu}(\xi)}$ e dunque $\widehat{\mu * \mu^*}(\xi) = |\hat{\mu}(\xi)|^2$.
D'altra parte,

$$\mu * \mu^* = \left(\nu + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \delta_{x_j}\right) * \left(\nu^* + \sum_{j=0}^{\infty} \overline{c_j} \delta_{-x_j}\right)\ .$$

Per il Lemma 13.5, la parte discreta di $\mu * \mu^*$ proviene dalla convoluzione delle due parti discrete, ed è dunque uguale a

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} c_i \overline{c_j} \delta_{x_i} * \delta_{-x_j} = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_i \overline{c_j} \delta_{x_i - x_j}\ .$$

Quindi

$$\mu * \mu^*(\{0\}) = \sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2$$

e la conclusione segue allora dal Lemma 13.4. $\square$

14. Misure singolari e operatori di convoluzione

In questo paragrafo discutiamo le proprietà dell'insieme caratteristico di una misura liscia su una varietà e positiva.

Lemma 14.1. *Sia $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ una misura positiva liscia su una varietà S di dimensione k. Condizione necessaria affinché $\mu \in C_{pq}$ è che il punto $(1/p, 1/q)$ sia contenuto nel triangolo chiuso di vertici*

$$A = (0,0), \quad B = (1,1), \quad C = \left(\frac{n}{2n-k}, \frac{n-k}{2n-k}\right)\ .$$

Dimostrazione. Sia f_ε la funzione caratteristica della palla B_ε di centro 0 e raggio ε. Allora

$$\mu * f_\varepsilon(x) = \int f_\varepsilon(x-y)\, d\mu(y) = \int_{x+B_\varepsilon} d\mu(y) = \mu(x + B_\varepsilon)\ .$$

Se σ è la misura superficiale su S e $d\mu = g\, d\sigma$, sia S_0 un aperto relativamente compatto in S su cui $g \geq c > 0$. Chiamando σ_0 la restrizione di σ a S_0, si ha allora $\mu \geq c\sigma_0$. Per semplicità di notazioni, possiamo supporre $c = 1$. Supponiamo anche che ε sia sufficientemente piccolo in modo che le intersezioni di S_0 con le palle di raggio ε siano dei grafici.

Sia $E_\varepsilon = \{x : d(x,S_0) \le \varepsilon/2\}$. Se $x \in E_\varepsilon$, l'insieme $S_0 \cap (x + B_\varepsilon)$ è sufficientemente grande perché $\sigma_0(x+B_\varepsilon) \ge c\varepsilon^k$. Di conseguenza

$$\mu * f_\varepsilon(x) \ge c\varepsilon^k \qquad \forall\, x \in E_\varepsilon \ .$$

Si noti anche che $m(E_\varepsilon) \ge c\varepsilon^{n-k}$. Quindi

$$\|\mu * f_\varepsilon\|_q \ge c \left(\int_{E_\varepsilon} \varepsilon^{kq}\, dx \right)^{1/q} \ge c\varepsilon^{\frac{n-k}{q}+k} \ .$$

Essendo $\|f_\varepsilon\|_p = c\varepsilon^{\frac{n}{p}}$, se $\mu \in C_{pq}$ deve essere

$$\varepsilon^{\frac{n-k}{q}+k} \le C\varepsilon^{\frac{n}{p}}$$

quando ε è sufficientemente piccolo. Ciò implica che

$$\frac{n-k}{q} + k \ge \frac{n}{p} \ . \tag{14.1}$$

Poiché $C_{pq} = C_{q'p'}$, si deve anche avere

$$(n-k)\left(1 - \frac{1}{p}\right) + k \ge n\left(1 - \frac{1}{q}\right) \ ,$$

ossia

$$\frac{n-k}{p} \le \frac{n}{q} \ . \tag{14.2}$$

Mettendo insieme la (14.1) e la (14.2) si ha la conclusione. $\square$

Vediamo ora una situazione in cui l'insieme caratteristico è tutto il triangolo ABC. La dimostrazione richiede il Teorema di interpolazione complessa, che ora enunciamo.

Teorema 14.2 (di interpolazione complessa). *Sia $\{T_s\}$ una famiglia di operatori lineari dipendenti da un parametro $s \in \mathbb{C}$ con $a \le \Re s \le b$ e soddisfacenti le seguenti proprietà:*

(1) *per ogni f semplice, $T_s f$ è misurabile;*
(2) *per ogni f, g semplici, la funzione $s \longmapsto \int T_s f(x) g(x)\, dx$ è continua per $a \le \Re s \le b$ e olomorfa per $a < \Re s < b$;*
(3) *esiste una costante $c < \pi/(b-a)$ tale che per ogni f, g semplici la funzione*

$$s = x + iy \longmapsto e^{-c|y|} \log \left| \int T_s f(x) g(x)\, dx \right|$$

sia limitata;
(4) $\|T_{a+iy}\|_{p_0,q_0} \le M_0(y)$, $\|T_{b+iy}\|_{p_1,q_1} \le M_1(y)$, *e* $e^{-c|y|} \log M_j(y)$ *limitate per qualche* $c < \pi/(b-a)$.

Allora, dati $t \in (0,1)$ e s con $\Re s = (1-t)a + tb$, T_s è limitato da L^{p_t} a L^{q_t}, dove

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \qquad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} \ .$$

La norma di T_s dipende solo da t e dalle funzioni $M_j(y)$.

Per la dimostrazione, v. Stein-Weiss, Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Spaces, cap.5. Per funzione semplice si intende una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi limitati.

Teorema 14.3. *Sia S una ipersuperficie con curvatura Gaussiana mai nulla, e sia μ una misura positiva liscia su S e a supporto compatto. Allora l'insieme caratteristico di μ è l'intero triangolo ABC.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che il vertice C è nell'insieme caratteristico. Nel seguito intenderemo dunque $p = (n+1)/n$ e $q = n+1$.

Utilizzando una partizione dell'unità di classe C^∞, possiamo decomporre μ in una somma finita di misure con supporto su porzioni di S che siano grafici. Supponiamo quindi che μ stessa abbia un supporto sufficientemente piccolo da essere il grafico $x_n = \varphi(x')$, con $\varphi(0) = 0$, $\nabla\varphi(0) = 0$, e matrice Hessiana $H_0\varphi$ non degenere.

Sia $\{\psi_\varepsilon\}$ una identità approssimata C^∞ a supporto compatto, e si ponga $\mu_\varepsilon = \mu * \psi_\varepsilon$. Se noi dimostriamo che $\|\mu_\varepsilon\|_{pq} \leq C$, dove C è indipendente da ε quando ε è sufficientemente piccolo, possiamo concludere che $\mu \in C_{pq}$. Infatti, se $f, g \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}
|\langle \mu * f, g\rangle| &= \lim_{\varepsilon\to 0} |\langle \mu_\varepsilon * f, g\rangle| \\
&\leq \sup_{\varepsilon<\varepsilon_0} \|\mu_\varepsilon * f\|_q \|g\|_{q'} \\
&\leq C\|f\|_p \|g\|_{q'} \ .
\end{aligned}$$

Potremmo allora concludere che

$$\|\mu * f\|_q = \sup_{g\in\mathcal{S}, \|g\|_{q'}\leq 1} |\langle \mu * f, g\rangle| \leq C\|f\|_p \ .$$

Per $s \in \mathbb{C}$, definiamo la distribuzione $\Phi^s = \delta_0 \otimes I_p^s$, dove δ_0 si intende nella variabile $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e il nucleo di integrazione frazionaria I_p^s è inteso nella variabile $x_n \in \mathbb{R}$. Fissato $\varepsilon > 0$, poniamo

$$T_s f = f * \mu_\varepsilon * \Phi^s \ . \tag{14.3}$$

Vogliamo applicare il Teorema 14.2 sulla striscia $-\frac{n-1}{2} \leq \Re\mathrm{e}\, s \leq 1$, controllando che le $M_j(y)$ in (4) non dipendano da ε.

Osservando che μ_ε è una funzione C^∞ a supporto compatto, si ha che $\mu_\varepsilon * \Phi^s$ è una funzione C^∞. Pertanto la sua convoluzione con una funzione semplice f, che ha supporto compatto, è ben definita. Quindi la (1) è soddisfatta.

Siano ora f, g semplici. Allora

$$\langle T_s f, g\rangle = \langle \Phi^s, \check{f} * \check{\mu}_\varepsilon * g\rangle \ .$$

La funzione $f * \check{\mu}_\varepsilon * g$ è C^∞ a supporto compatto. Quindi $\langle T_s f, g\rangle$ dipende analiticamente da s e la condizione (2) del Teorema 14.2 è verificata.

Per verificare la (3), osserviamo che se m è un intero pari,

$$\langle T_s f, g\rangle = \langle \Phi^{s+m}, \partial_{x_n}^m \big(\check{f} * \check{\mu}_\varepsilon * g\big)\rangle \ .$$

Scegliamo m in modo che $-\frac{n-1}{2} + m > 0$. Se il supporto di $f * \check{\mu}_\varepsilon * g$ è contenuto in B_R, si ha

$$\begin{aligned}
|\langle T_s f, g\rangle| &= \left| \frac{1}{\Gamma((s+m)/2)} \int_{|x_n|\leq R} f * \check{\mu}_\varepsilon * g(0, x_n) |x_n|^{s+m-1}\, dx_n \right| \\
&\leq \frac{C}{|\Gamma((s+m)/2)|} R^{\Re\mathrm{e}\, s+m} \\
&\leq \frac{C_R}{|\Gamma((s+m)/2)|} \ ,
\end{aligned}$$

se s è nella striscia che ci interessa.

Per la formula di Stirling (valida per es. quando z tende a ∞ dentro una striscia verticale)

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} ,$$

si ha

$$\log\left(\frac{1}{\Gamma((s+m)/2)}\right) \sim c - \left(\frac{s+m-1}{2}\right)\log\frac{s+m}{2} + \frac{s+m}{2} ,$$

quando s tende all'infinito nella striscia $-\frac{n-1}{2} \leq \Re \mathrm{e} s \leq 1$.

Quindi

$$\begin{aligned}
\log|\langle T_s f, g\rangle| &\leq \log\frac{C_R}{|\Gamma((s+m)/2)|} \\
&\leq \left|\log\frac{C_R}{\Gamma((s+m)/2)}\right| \\
&\leq c + \left|\frac{s+m-1}{2}\log\frac{s+m}{2}\right| + \left|\frac{s+m}{2}\right| .
\end{aligned}$$

Appare quindi evidente che questa espressione cresce in modo al più polinomiale nella striscia, per cui la (3) è senz'altro verificata, prendendo $c > 0$ arbitrariamente piccolo.

Passiamo ora alla (4), ponendo $p_0 = q_0 = 2$ (in corrispondenza di $\Re \mathrm{e} s = -(n-1)/2$) e $p_1 = 1$, $q_1 = \infty$ (in corrispondenza di $\Re \mathrm{e} s = 1$).

Per il Teorema 7.9, se $s = -\frac{n-1}{2} + i\gamma$, la norma di T_s come operatore da L^2 in sé è data dalla norma L^∞ della tarsformata di Fouirer del nucleo. Ora

$$\widehat{\mu_\varepsilon * \Phi^s}(\xi) = \hat{\mu}(\xi)\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi)\widehat{\Phi^s}(\xi) = \hat{\mu}(\xi)\hat{\psi}(\varepsilon\xi)\frac{\sqrt{\pi}2^{-\frac{n-1}{2}+i\gamma}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} - i\gamma\right)}|\xi_n|^{\frac{n-1}{2}-i\gamma} .$$

Per il Teorema 13.2, $|\hat{\mu}(\xi)| \leq C|\xi_n|^{-\frac{n-1}{2}}$, e dunque compensa l'ultimo fattore. Inoltre $\hat{\psi}(\varepsilon\xi)$ è limitata uniformemente in ε. Di conseguenza possiamo prendere

$$M_0(y) = \frac{c}{\left|\Gamma\left(\frac{n+1}{2} - i\gamma\right)\right|} .$$

Applicando nuovamente la formula di Stirling, si verifica che M_0 soddisfa la condizione richiesta.

Se ora $\Re \mathrm{e} s = 1$, scriviamo $T_s f = \psi_\varepsilon * (f * \mu * \Phi^s)$, dove

$$\begin{aligned}
f * \mu * \Phi^s(x) &= \frac{1}{\Gamma(s/2)}\int f * \mu(x', x_n - y_n)|y_n|^{s-1}\, dy_n \\
&= \frac{1}{\Gamma(s/2)}\iint f\big(x' - t', x_n - \varphi(t') - y_n\big)g(t')|y_n|^{s-1}\, dt'\, dy_n \\
&= \frac{1}{\Gamma(s/2)}\iint f\big(x' - t', x_n - t_n\big)g(t')|t_n - \varphi(t')|^{s-1}\, dt'\, dt_n \\
&= \frac{1}{\Gamma(s/2)}\iint f(x-t)g(t')|t_n - \varphi(t')|^{s-1}\, dt'\, dt_n .
\end{aligned}$$

Il nucleo di convoluzione

$$K_s(t) = \frac{1}{\Gamma(s/2)}|t_n - \varphi(t')|^{s-1}$$

è limitato se $\Re e s = 1$ e tale è la sua convoluzione con ψ_ε. Precisamente si ha:

$$\begin{aligned} \|T_s\|_{1\infty} &= \|\psi_\varepsilon * K_s\|_\infty \\ &\leq \|\psi_\varepsilon\|_1 \|K_s\|_\infty \\ &\leq \frac{C}{|\Gamma(s/2)|} \ . \end{aligned}$$

Applicando una terza volta la formula di Stirling, si verifica che anche $M_1(y)$ soddisfa la (4).

Segue allora dal Teorema 14.3 che T_0 è limitato tra due opportuni spazi L^p e L^q. Per verificare che si tratta dei valori cercati, osserviamo che per avere $0 = -\frac{n-1}{2}(1-t) + t$ si deve prendere $t = \frac{n-1}{n+1}$. Allora

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1 - \frac{n-1}{n+1}}{2} + \frac{\frac{n-1}{n+1}}{1} = \frac{n}{n+1} \ ,$$

mentre q_t è sicuramente il suo coniugato. $\square$

15. La funzione massimale di Hardy-Littlewood

Se f è localmente integrabile su $\mathbb{R}^n$, la sua media su una palla $B = B(x,r)$ di centro x e raggio $r > 0$ è data da

$$\frac{1}{|B|}\int_B f(y)\, dy \ ,$$

dove $|B|$ indica la misura di Lebesgue di B. La funzione

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \tag{15.1}$$

si chiama *funzione massimale di Hardy-Littlewood* di f e l'operatore $M : f \longmapsto Mf$ *operatore massimale di Hardy-Littlewood.* Chiaramente M non è lineare (si osservi che $Mf(x) \geq 0$), ma solo *sub-lineare*, nel senso che

$$M(f+g) \leq Mf + Mg \ , \qquad M(\lambda f) = |\lambda| Mf \ . \tag{15.2}$$

Lemma 15.1. *La funzione Mf è misurabile.*

Dimostrazione. Verifichiamo che la funzione

$$F(x,r) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \ ,$$

definita su $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, è continua. Poiché $|B(x,r)| = c_n r^n$, basta discutere la continuità del numeratore. Sia K un compatto di $\mathbb{R}^n$ e si prendano due palle $B(x,r)$ e $B(x',r')$ contenute in K. Essendo $|f| \in L^1(K)$, vale la condizione di assoluta continuità: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\int_E |f(y)|\,dy < \varepsilon$ per ogni $E \subset K$ con $|E| < \delta$. Basta allora prendere (x,r) e (x',r') abbastanza vicini in modo che $|B(x,r) \triangle B(x',r')| < \delta$.

In particolare, per ogni $r \in \mathbb{Q}$ la funzione

$$g_r(x) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

è continua, essendo la convoluzione di $|f|$, localmente integrabile, con la funzione limitata e a supporto compatto $(1/|B(0,r)|)\chi_{B(0,r)}$. Ne segue che $G(x) = \sup_{r\in\mathbb{Q}} g_r(x)$ è misurabile.

Ma per la continuità di $F(x,r)$ in r, si ha $G(x) = Mf(x)$. $\square$

Ci interessa ora discutere se M è limitato su $L^p(\mathbb{R}^n)$, ossia se

$$\|Mf\|_p \leq C\|f\|_p$$

per qualche costante C, o anche se M è di *tipo debole* (p,p), nel senso che per ogni $\alpha > 0$

$$|\{x : Mf(x) > \alpha\}| \leq C\left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p . \tag{15.3}$$

Si noti che per le (15.2), essendo in particolare $|Mf - Mg| \leq M(f-g)$, la limitatezza su L^p equivale alla continuità, come per gli operatori lineari.

Accanto alla funzione massimale M, è utile considerare alcune sue varianti, per esempio

$$M_1f(x) = \sup_{x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|\,dy , \tag{15.4}$$

$$M_2f(x) = \sup_{j\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|B(x,2^j)|}\int_{B(x,2^j)} |f(y)|\,dy , \tag{15.5}$$

o anche, sostituendo alle palle B i cubi Q,

$$M_3f(x) = \sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy , \tag{15.6}$$

ecc. Si vede facilmente che le funzioni Mf, M_1f, M_2f, M_3f si dominano a vicenda con costanti assolute, per cui sono di fatto intercambiabili per i nostri fini. Per esempio,

$$Mf(x) \leq M_1f(x) \leq 2^n Mf(x) .$$

Il primo risultato, ovvio, è il seguente:

Lemma 15.2. *M è limitato su $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Prendiamo ora l'altro valore estremo, $p = 1$. Il risultato è decisamente negativo.

Proposizione 15.3. *Se $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $f \equiv 0$.*

Dimostrazione. Se f non è identicamente nulla, esiste una palla B di centro 0 e raggio r tale che $\int_B |f(y)\,dy > 0$. Dato x, si prenda la palla B_x di centro x e raggio $|x|+r$. Poiché B_x contiene B, si ha

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|B_x|}\int_{B_x} |f(y)|\,dy \geq \frac{1}{|B_x|}\int_B |f(y)|\,dy \geq \frac{c}{(|x|+r)^n} \ .$$

Ma

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|x|+r)^n}\,dx = \infty \ ,$$

per cui $Mf \notin L^1$. $\square$

Tuttavia M risulta di tipo debole (1,1). Per dimostrare ciò occorre utilizzare la seguente versione del *lemma di ricoprimento di Vitali.*

Lemma 15.4. *Sia $\{B_j\}_{j\in J}$ un ricoprimento finito di un insieme misurabile E mediante palle. Esiste allora un sottoricoprimento $\{B_j\}_{j\in J'}$ tale che $B_j \cap B_k = \emptyset$ per $j,k \in J'$, $j \neq k$, e inoltre*

$$\left|\bigcup_{j\in J'} B_j\right| \geq 2^{-n}|E| \ .$$

Dimostrazione. Sia B_{j_1} una palla che abbia misura massima. Induttivamente si prenda $B_{j_{k+1}}$ in modo che abbia misura massima tra le palle disgiunte da $B_{j_1} \cup \cdots \cup B_{j_k}$. Ovviamente il procedimento si arresta dopo un numero finito di passi, precisamente quando non ci sono più palle disgiunte da $B_{j_1} \cup \cdots \cup B_{j_k}$. Poniamo $J' = \{j_1, \ldots, j_k\}$.

Se B è una palla, indichiamo con B^* la palla con lo stesso centro e raggio doppio.

Sia B' una delle palle avanzate. Necessariamente essa interseca almeno una di quelle selezionate. Sia $\bar\ell$ il primo intero ℓ tale che $B' \cap B_{j_\ell} \neq \emptyset$. Allora il raggio di $B_{j_{\bar\ell}}$ è maggiore o uguale al raggio di B', si ha

$$B' \subseteq B^*_{j_{\bar\ell}} \ .$$

Di conseguenza

$$E \subseteq \bigcup_{j\in J} B_j \subseteq \bigcup_{j\in J'} B^*_j \ ,$$

per cui

$$|E| \leq \sum_{j\in J'} |B^*_j| = 2^n \sum_{j\in J'} |B_j| = 2^n \left|\bigcup_{j\in J'} B_j\right| \ . \qquad \square$$

Teorema 15.5. *L'operatore M è di tipo debole $(1,1)$.*

Dimostrazione. Data $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e dato $\alpha > 0$, sia $E_\alpha = \{x : Mf(x) > \alpha\}$. Per il Lemma 15.1, E_α è misurabile, per cui la sua misura è l'estremo superiore delle misure dei suoi sottoinsiemi compatti. Sia E un sottoinsieme compatto di E_α.

Preso $x \in E$, essendo $Mf(x) > \alpha$, esiste una palla B_x con centro in x tale che

$$\frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f(y)|\, dy > \alpha \ ,$$

ossia

$$|B_x| \leq \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)|\, dy \ .$$

Per la compattezza di E, si estragga da $\{B_x\}$ un sottoricoprimento finito, e quindi, applicando il Lemma 15.4, un sottoinsieme finito $\{B_{x_j}\}$ di palle disgiunte tali che $\sum_j |B_{x_j}| \geq 2^{-n}|E|$. Si ha allora

$$|E| \leq 2^n \sum_j |B_{x_j}| \leq \frac{2^n}{\alpha} \sum_j \int_{B_{x_j}} |f(y)|\, dy \leq 2^n \frac{\|f\|_1}{\alpha} \ .$$

Di conseguenza $|E_\alpha| \leq 2^n \|f\|_1/\alpha$. □

Possiamo ora applicare il Teorema di interpolazione di Marcinkiewicz per ottenere quanto segue.

Corollario 15.6. *Se $1 < p \leq \infty$, M è limitato su $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Vediamo ora un'applicazione del Teorema 15.5.

Teorema 15.7. *Se f è localmente integrabile, il limite*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy \tag{15.7}$$

esiste finito per quasi ogni x.

Premettiamo un lemma.

Lemma 15.8. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Posto $f_r(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy$, si ha*

$$\lim_{r\to 0} \|f_r - f\|_1 = 0 \ .$$

Dimostrazione. Sia $\varphi(x) = \big(1/|B(0,1)|\big)\chi_{B(0,1)}(x)$ e si ponga $\varphi_r(x) = r^{-n}\varphi(x/r)$. Si verifica facilmente che $f_r = f * \varphi_r$. Poiché $\int \varphi(x)\, dx = 1$, le φ_r formano un'identità approssimata, in particolare valgono le conclusioni del Lemma 7.3. Si noti che l'ipotesi $\varphi \in \mathcal{S}$ non è necessaria nella dimostrazione del Lemma 7.3. □

Dimostrazione del Teorema 15.7. Poiché il problema è di carattere locale, possiamo supporre che f abbia supporto compatto, e dunque che $f \in L^1$. Inoltre possiamo supporre f reale.

Per il Lemma 15.8, esiste una successione $r_k \to 0$ tale che $\lim_{k\to\infty} f_{r_k}(x)$ esiste finito quasi ovunque.

Sia ora
$$\Omega_f(x) = \limsup_{r\to 0} f_r(x) - \liminf_{r\to 0} f_r(x) \ .$$

Dimostreremo che $|\{x : \Omega_f(x) > \alpha\}| = 0$ per ogni $\alpha > 0$. Ciò implica che per quasi ogni x
$$\limsup_{r\to 0} f_r(x) = \liminf_{r\to 0} f_r(x) = \lim_{k\to\infty} f_{r_k}(x)$$
esiste finito, il che conclude la dimostrazione.

Dato $\varepsilon > 0$, sia g una funzione continua a supporto compatto tale che $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Per le proprietà di limsup e liminf,

$$\Omega_f(x) \le \Omega_{f-g}(x) + \Omega_g(x) \ .$$

Inoltre $\Omega_g(x) = 0$ per ogni x. Osserviamo ora che $\Omega_{f-g}(x) \le 2M(f-g)(x)$, per cui

$$\begin{aligned}
|\{x : \Omega_f(x) > \alpha\}| &= |\{x : \Omega_{f-g}(x) > \alpha\}| \\
&\le |\{x : M(f-g)(x) > \alpha/2\}| \\
&\le c\frac{\|f-g\|_1}{\alpha} \\
&< c\frac{\varepsilon}{\alpha} \ .
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha la tesi. □

Sia E_f l'insieme dei punti x per cui il limite (15.7) esiste finito. Per $x \in E_f$ definiamo $f(x)$ uguale a tale limite.

Un punto di E_f si chiama *punto di Lebesgue* per f se

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0 \ . \tag{15.8}$$

Teorema 15.9. *Se f è localmente integrabile, quasi ogni punto di $\mathbb{R}^n$ è un punto di Lebesgue per f.*

Dimostrazione. Ancora una volta possiamo supporre che f sia integrabile e reale.

Dato $q \in \mathbb{Q}$, consideriamo l'insieme $E_{|f-q|}$, costituito dai punti x per cui

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - q|\, dy \tag{15.9}$$

esiste finito. La funzione definita da questo limite (come elemento di L^1) è $|f-q|$, pertanto per quasi ogni $x \in E_{|f-q|} \cap E_f$ il limite (15.9) è uguale a $|f(x) - q|$, dove $f(x)$ è il valore del limite (15.7). Indichiamo con E'_q l'insieme di tali x.

Sia E_0 l'intersezione dei vari E'_q al variare di q in $\mathbb{Q}$. Trattandosi di una famiglia numerabile, $|\mathbb{R}^n \setminus E_0| = 0$.

Se $x \in E_0$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - q|\, dy = |f(x) - q| \tag{15.10}$$

per ogni $q \in \mathbb{Q}$. Il limite a primo membro è funzione uniformemente continua di q, in quanto

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)-q|\,dy-\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)-q'|\,dy\right|&\\ \le \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|q-q'|\,dy&\\ = |q-q'|\ .&\end{aligned}$$

Quindi l'uguaglianza (15.10) si estende a ogni $q \in \mathbb{R}$, in particolare a $q = f(x)$. $\square$

Esempio. Se $f(x) = \mathrm{sgn} x$, $0 \in E_f$ e $f(0) = 0$. Ma 0 non è un punto di Lebesgue.

Consideriamo una funzione $\varphi \geq 0$ integrabile. Poniamo $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Se $\int \varphi(x)\,dx = 1$, per il Lemma 7.3,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f * \varphi_\varepsilon = f \tag{15.11}$$

in norma L^p se $f \in L^p$ con $p < \infty$. Ci interessa vedere se il limite (15.11) è anche un limite puntuale (quasi ovunque). La dimostrazione si può effettuare imitando quella del Teorema 15.7, purché si dimostri che la funzione massimale

$$M_\varphi f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \big| f * \varphi_\varepsilon(x)\big| \tag{15.12}$$

è di tipo debole (1,1). Per dare una risposta affermativa è necessario imporre una condizione aggiuntiva su φ.

Indichiamo con φ^* la funzione

$$\varphi^*(x) = \operatorname*{ess\,sup}_{|y|\geq|x|} \varphi(y)\ .$$

Essa è la minima funzione radiale e radialmente decrescente che maggiori φ.

Teorema 15.10. *Se $\varphi^* \in L^1$, vale la maggiorazione puntuale*

$$M_\varphi f(x) \leq C M f(x)\ .$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $f \geq 0$, in quanto

$$M_\varphi f(x) \leq M_\varphi |f|(x)\ ,\ \text{e}\ \ M|f|(x) = Mf(x)\ .$$

Se $f \geq 0$, si ha $M_\varphi f(x) \leq M_{\varphi^*}(x)$, per cui possiamo direttamente supporre che φ sia radiale e radialmente decrescente.

Consideriamo inizialmente il caso in cui φ sia una funzione semplice a supporto compatto,

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j \chi_j(x)\ ,$$

dove $c_j > 0$ e χ_j è la funzione caratteristica della palla di centro 0 e raggio r_j. Quindi

$$\begin{aligned} f * \varphi_\varepsilon(x) &= \sum_{j=0}^{N} c_j f * (\chi_j)_\varepsilon(x) \\ &= \sum_{j=0}^{N} \frac{c_j}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon r_j)} f(y)\,dy \\ &\le \sum_{j=0}^{N} c_j |B_{r_j}| Mf(x) \\ &= \|\varphi\|_1 Mf(x) \ . \end{aligned}$$

Per una φ generica, si considerano tutte le $\psi \le \varphi$ semplici, con supporto compatto, radiali e radialmente decrescenti. Allora

$$f * \varphi_\varepsilon(x) = \sup_\psi f * \psi_\varepsilon(x) \le \|\varphi\|_1 Mf(x) \ .$$

Quindi $M_\varphi f(x) \le \|\varphi\|_1 Mf(x)$. $\square$

Si osservi che la condizione $\varphi^* \in L^1$ è sicuramente verificata se $|\varphi(x)| \le C(1+|x|)^{-n-\delta}$ per qualche $\delta > 0$, o addirittura se $f \in \mathcal{S}$.

16. Estensione a spazi di natura omogenea

I risultati del paragrafo 15 si possono rivedere in un ambito molto più generale.

Sia X un insieme. Una *quasi-distanza* su X è una funzione d da $X \times X$ in $\mathbb{R}$ tale che

(1) $d(x,y) \ge 0$ per ogni $x, y \in X$;
(2) $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$;
(3) $d(x,y) = d(y,x)$ per ogni $x, y \in X$;
(4) esiste una costante $c \ge 1$ tale che

$$d(x,z) \le c\big(d(x,y) + d(y,z)\big) \tag{16.1}$$

per ogni $x, y, z \in X$.

Una quasi-distanza induce in modo naturale una topologia su X, una cui base è costituita dalle palle $B(x,r) = \{y : d(x,y) < r\}$. Sia ora m una misura di Borel positiva su X. Si dice che m è *doubling* se esiste una costante c' tale che

$$m\big(B(x,2r)\big) \le c' m\big(B(x,r)\big) \tag{16.2}$$

per ogni $x \in X$ e $r > 0$.

Una terna (X, d, m), dove d è una una quasi-distanza su X e m è una misura doubling, si dice uno *spazio di natura omogenea.*

Esempi.

(1) Ovviamente $\mathbb{R}^n$, con la distanza Euclidea e la misura di Lebesgue, è di natura omogenea.
(2) Anche $\mathbb{Z}$, con la distanza $d(n,m) = |n - m|$ e la misura del conteggio $m(E) = \mathrm{card}E$, è di natura omogenea.
(3) Sia $\alpha > -n$. Allora $\mathbb{R}$, con la distanza Euclidea e la misura $dm(x) = |x|^\alpha dx$, è di natura omogenea.
(4) Si prenda $X = \mathbb{R}^n$, e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. Si ponga

$$d(x,y) = \max\left\{|x_1|^{1/\lambda_1}, \dots, |x_n|^{1/\lambda_n}\right\} .$$

Allora d è una quasi-distanza e, con la misura di Lebesgue, $\mathbb{R}^n$ è uno spazio di natura omogenea.
(5) La sfera unitaria S^{n-1}, dotata della distanza indotta da $\mathbb{R}^n$ e della misura superficiale σ, è uno spazio di natura omogenea.

Vedremo più avanti altri esempi.

Occorre una certa cautela nel definire la funzione massimale nel contesto generale per assicurarsi che essa sia misurabile. Infatti nulla garantisce in generale la continuità della funzione $(x,r) \mapsto m\big(B(x,r)\big)$. Per questo motivo è preferibile considerare la funzione massimale

$$M_1 f(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\, dy \ , \tag{16.3}$$

dove f è localmente integrabile rispetto alla misura m, e l'estremo superiore è calcolato rispetto a tutte le palle B, relative alla distanza d, contenenti x. Si ha allora la seguente proprietà.

Lemma 16.1. *La funzione $M_1 f$ è semicontinua inferiormente, e dunque misurabile.*

Dimostrazione. Sia $M_1(x_0) > \alpha$. Esiste allora una palla B contenente x tale che

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\, dy > \alpha \ .$$

Ma allora per ogni $x \in B$ $M_1 f(x) > \alpha$. $\square$

Per dimostrare che M_1 è di tipo debole (1,1), è sufficiente provare un lemma di ricoprimento analogo al Lemma 15.4.

Lemma 16.2. *Sia $\{B_j\}_{j\in J}$ un ricoprimento finito di un insieme misurabile E mediante palle. Esiste allora un sottoricoprimento $\{B_j\}_{j\in J'}$ tale che $B_j \cap B_k = \emptyset$ per $j,k \in J'$, $j \neq k$, e inoltre*

$$\left|\bigcup_{j\in J'} B_j\right| \geq \kappa |E| \ ,$$

dove κ è una costante assoluta.

Dimostrazione. Si costruisca il sottoricoprimento $\{B_j\}_{j\in J'}$ come nel Lemma 15.4. Data una palla B di raggio r, sia B^* la palla con lo stesso centro e raggio $2cr$, dove c è la costante che appare nella (16.1). Allora

$$E \subseteq \bigcup_{j\in J'} B_j^* \ .$$

Se $2^k \geq 2c$, posto $B = B(x,r)$ si ha allora

$$m(B_j^*) \leq m\big(B(x,2^k r)\big) \leq {c'}^k m(B) \ .$$

Il resto della dimostrazione è identico. □

Teorema 16.3. *L'operatore M è di tipo debole $(1,1)$ e limitato su $L^p(X,m)$ per ogni p con $1 < p \leq \infty$.*

L'ultima parte del paragrafo 15 si estende senza modifiche al caso generale.

Presentiamo due risultati di cui avremo bisogno più avanti. Il primo è un lemma di ricoprimento, detto di Whitney.

Lemma 16.4. *Sia F un chiuso non vuoto di X, e sia A il suo complementare. Esistono costanti k e k', indipendenti da F, e una famiglia numerabile di palle $B_j = B(x_j, r_j) \subset A$ tali che*

(1) *le palle B_j sono a due a due disgiunte;*
(2) *l'unione delle palle $B_j^* = B(x_j, kr_j)$ è uguale a A;*
(3) *ogni palla $B_j^{**} = B(x_j, k'r_j)$ ha intersezione non vuota con F.*

Dimostrazione. Sia c la costante nella (16.1). Per ogni $x \in A$, sia $d_x = d(x,F)$ e si prenda $B_x = B(x, \delta d_x)$, con δ da determinarsi. Si scelga quindi una famiglia $\{B_j = B_{x_j}\}_{j\in J}$ di tali palle che sia massimale rispetto alla proprietà che esse siano a due a due disgiunte.

La famiglia $\{B_j\}$ è numerabile. Ciò segue dal fatto che, fissati $x_0 \in X$ e un intero n, le palle B_j che hanno misura maggiore di $1/n$ e sono contenute in $B(x_0, n)$ possono essere solo in numero finito. Si noti anche che se una palla avesse misura nulla, tutto X avrebbe misura nulla per la (16.2).

La (1) è dunque verificata. Per la (3), basta prendere $B_j^{**} = B(x_j, 2d_{x_j})$. Passiamo quindi alla (2).

Si considerino le palle $B_j^* = B(x_j, d_{x_j}/2)$. Esse sono chiaramente contenute in A. Sia ora $x \in A$. Per la massimalità della famiglia $\{B_j\}$, la palla B_x interseca una delle B_j. Vogliamo mostrare che $x \in B_j^*$, se δ è stato scelto opportunamente. Sia y un punto in $B_x \cap B_j$ e sia $z \in F$ tale che $d(x_j, z) < 2d_{x_j}$. Allora

$$\begin{aligned} d_x &\leq d(x,z) \\ &\leq c\big(d(x,y) + d(y,z)\big) \leq c^2\big(d(x,y) + d(y,x_j) + d(x_j,z)\big) \\ &< c^2\left(\delta d_x + \delta d_{x_j} + 2d_{x_j}\right) \ . \end{aligned}$$

Quindi, se $\delta c^2 < 1$,

$$d_x < \frac{(\delta+2)c^2}{1-\delta c^2} d_{x_j} = \sigma d_{x_j} \ .$$

Ora

$$\begin{aligned} d(x,x_j) &\le c\big(d(x,y)+d(y,x_j)\big) \\ &< c\delta(d_x + d_{x_j}) \\ &< c\delta(1+\sigma)d_{x_j}\ . \end{aligned}$$

Si tratta ora di prendere δ tale che

$$\begin{cases} \delta < \frac{1}{c^2} \\ \delta\left(1+\frac{(\delta+2)c^2}{1-\delta c^2}\right) < \frac{1}{2} \end{cases} ,$$

cioè $\delta < 1/(2+5c^2)$. $\square$

Il secondo risultato prende il nome di *decomposizione di Calderón-Zygmund*. Per semplicità supponiamo che $m(X)=\infty$.

Teorema 16.5. *Sia $f \in L^1(X,m)$ e sia $\alpha > 0$. È possibile decomporre f come*

$$f(x) = g(x) + \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x)$$

in modo che

(1) $|g(x)| \le \alpha$;
(2) *le funzioni b_j hanno supporto in palle B_j' e sono tali che*

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(B_j')}\int |b_j(x)|\, dm(x) \le \alpha \\ \int b_j(x)\, dx = 0\ ; \end{aligned}$$

(3) $\sum_j m(B_j') \le \frac{C}{\alpha}\|f\|_1$.

Dimostrazione. Sia $A = \{x : M_1 f(x) > \kappa\alpha\}$, con κ da determinarsi, e si costruiscano le palle B_j come nel Lemma 16.4. Si ponga quindi

$$\begin{aligned} Q_0 &= B_0^* \setminus \left(\bigcup_{\ell\ge 1} B_\ell\right) \\ Q_1 &= B_1^* \setminus \left(Q_0 \cup \bigcup_{\ell \ge 2} B_\ell\right) \\ &\dots \\ Q_j &= B_j^* \setminus \left(\bigcup_{\ell<j} Q_\ell \cup \bigcup_{\ell>j} B_\ell\right)\ . \end{aligned}$$

I Q_j danno una partizione di A e $B_j \subset Q_j \subset B_j^*$. Quindi

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(Q_j)}\int_{Q_j}|f(x)|\,dm(x) &\le \frac{1}{m(B_j)}\int_{B_j^*}|f(x)|\,dm(x)\\ &\le \frac{c'}{m(B_j^*)}\int_{B_j^*}|f(x)|\,dm(x)\\ &\le c'M_1f(x_j)\\ &\le c'\kappa\alpha\ ,\end{aligned}$$

se c' è la costante nella (16.2) e $x_j \in B_j^* \subset A$.

In particolare, se

$$\beta_j = \frac{1}{m(Q_j)}\int_{Q_j} f(x)\,dm(x)\ ,$$

risulta

$$|\beta_j| \le c'\kappa\alpha\ .$$

Si ponga allora

$$g = f\chi_{X\setminus A} + \sum_j \beta_j\chi_{Q_j}\ .$$

Poiché $|f(x)| \le M_1f(x)$ quasi ovunque, risulta

$$|g(x)| \le c'\kappa\alpha$$

quasi ovunque.

Si ponga ora

$$b_j = (f-\beta_j)\chi_{Q_j}\ .$$

Allora b_j ha supporto nella palla B_j^*, ha integrale nullo e

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(B_j^*)}\int|b_j(x)|\,dm(x) &\le \frac{1}{m(B_j^*)}\int_{Q_j}|f(x)|\,dm(x) + \frac{m(Q_j)}{m(B_j^*)}|\beta_j|\\ &\le (1+c')\kappa\alpha\ .\end{aligned}$$

Quindi se $\kappa = 1/(1+c')$ e $B_j' = B_j^*$, le condizioni (1) e (2) sono verificate. Quanto alla (3), abbiamo

$$\sum_j m(B_j^*) \le c'\sum_j m(B_j) \le c'm(A) \le C\frac{\|f\|_1}{\alpha}$$

perché M_1 è di tipo debole (1,1). $\square$

17. Distribuzioni omogenee di grado $-n$

Riprendiamo in considerazione gli operatori di convoluzione in $\mathbb{R}^n$

$$Tf = K * f$$

con nucleo K omogeneo. Nei paragrafi precedenti abbiamo visto quanto segue:

(1) se K è omogenea di grado $-n+\alpha$ e T è limitato da L^p a L^q, allora

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\Re e\alpha}{n} \; ; \tag{17.1}$$

(2) se K è localmente integrabile e $|K(x)| \le c|x|^{-n+\alpha}$, con $0 < \alpha \le n$, allora T è limitato per p, q soddisfacenti la (17.1) e inoltre $1 < p < q < \infty$.

Per gli operatori con nucleo omogeneo di grado $-n + i\gamma$, con γ reale, si pone, per la (1), un problema di limitatezza da L^p in sé. La seguente osservazione mostra che in generale si ha a che fare con distribuzioni di ordine positivo.

Lemma 17.1. *A parte i multipli scalari della δ_0 (che è omogenea di grado $-n$), nessuna misura non nulla è omogenea di grado $-n + i\gamma$.*

Dimostrazione. Sia μ una misura di Borel regolare omogenea di grado $-n+i\gamma$, e si considerino le corone sferiche $D_j = \{x : 2^{-j} \le |x| < 2^{-j+1}\}$. Dato un sottoinsieme $E \subset D_j$, sia $E' = 2^j E \subset D_0$.

Poiché $\chi_E(x) = \chi_{E'}(2^j x)$,

$$\mu(E) = \langle \mu, \chi_E \rangle = 2^{-ij\gamma} \langle \mu, \chi_{E'} \rangle = 2^{-ij\gamma} \mu(E') \; .$$

Quindi

$$|\mu|(D_j) = \sup_{\bigsqcup_\alpha E_\alpha = D_j} \sum_\alpha |\mu(E_\alpha)| = \sup_{\bigsqcup_\alpha E'_\alpha = D_0} \sum_\alpha |\mu(E'_\alpha)| = |\mu|(D_0) \; .$$

Se B è la palla unitaria,

$$|\mu|(B) = \sum_{j \ge 1} |\mu|(D_j) \; .$$

Affinché questo sia un valore finito, occorre che $|\mu|(D_0) = 0$, da cui $\mu(\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = 0$. $\square$

Gli operatori "integrali" corrispondenti a distribuzioni omogenee di grado $-n+i\gamma$ richiederanno quindi un trattamento particolare a cominciare dalla loro definizione.

Consideriamo inizialmente una funzione $K_0(x)$ omogenea di grado $-n$ su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e ivi localmente integrabile. Se $\Omega(x')$ è la restrizione di K_0 alla sfera unitaria S^{n-1}, si ha allora

$$K_0(x) = \frac{\Omega(x')}{|x|^n} \; , \qquad x' = \frac{x}{|x|} \; .$$

Lemma 17.2. *Se*

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x')\, dx' = 0 \ , \tag{17.2}$$

si può definire una distribuzione K su $\mathbb{R}^n$, omogenea di grado $-n$ e coincidente con K_0 su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, attraverso la formula

$$\langle K, f\rangle = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} K_0(x) f(x)\, dx \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} K_0(x) f(x)\, dx \ . \tag{17.3}$$

Ogni altra distribuzione, omogenea di grado $-n$ e coincidente con K_0 su $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, differisce da K per un multiplo scalare di δ_0.

Ricordiamo che K coincide con K_0 su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se, data $f \in \mathcal{S}$ con $0 \notin \operatorname{supp} f$, $\langle K, f\rangle = \int K_0(x) f(x)\, dx$.

Dimostrazione. Mostriamo che se $f \in \mathcal{S}$, gli integrali nell'espressione

$$U(f) = \int_{|x|<1} K_0(x)\big(f(x) - f(0)\big)\, dx + \int_{|x|>1} K_0(x) f(x)\, dx$$

convergono e che il limite in (17.3) è uguale a $U(f)$. Per il teorema del valor medio, $|f(x) - f(0)| \le C|x|$. Quindi

$$\int_{|x|<1} |K_0(x)|\big|f(x) - f(0)\big|\, dx \le C \int_{S^{n-1}} \int_0^1 r^{-n} |\Omega(x')| r^n\, dr\, dx' < \infty \ ;$$

il secondo integrale è finito in modo banale. Sia ora $\varepsilon < 1$. Poiché

$$\int_{\varepsilon<|x|<1} K_0(x)\, dx = 0 \ ,$$

si ha

$$\begin{aligned}
U(f) - \int_{|x|>\varepsilon} & K_0(x) f(x)\, dx = \\
&= \int_{|x|<1} K_0(x)\big(f(x) - f(0)\big)\, dx - \int_{\varepsilon<|x|<1} K_0(x) f(x)\, dx \\
&= \int_{|x|<1} K_0(x)\big(f(x) - f(0)\big)\, dx - \int_{\varepsilon<|x|<1} K_0(x)\big(f(x) - f(0)\big)\, dx \\
&= \int_{|x|<\varepsilon} K_0(x)\big(f(x) - f(0)\big)\, dx \ .
\end{aligned}$$

Decomponendo, come sopra, $x = rx'$, si vede allora che

$$\left| U(f) - \int_{|x|>\varepsilon} K_0(x) f(x)\, dx \right| \le C\varepsilon \ .$$

Inoltre

$$|U(f)| \leq \|\nabla f\|_\infty \int_{|x|<1} |K_0(x)||x|\,dx + \|f\|_{(1)} \int_{|x|>1} |K_0(x)||x|^{-1}\,dx \leq C\|f\|_{(1)} \ .$$

Quindi la (17.2) definisce una distribuzione temperata K. Fuori dall'origine coincide con K_0 perché , se $f \in \mathcal{S}$ si annulla in un intorno di 0, $U(f) = \int K_0(x)f(x)\,dx$.

Se ora $f_r(x) = r^{-n}f(r^{-1}x)$, si ha

$$\begin{aligned}
\langle K, f_r\rangle &= p.v. \int_{\mathbb{R}^n} K_0(x)f_r(x)\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} K_0(x)r^{-n}f(r^{-1}x)\,dx \\
&\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|y|>r^{-1}\varepsilon} K_0(ry)f(y)\,dy \\
&= r^{-n}\, p.v. \int_{\mathbb{R}^n} K_0(x)f(x)\,dx \\
&= r^{-n}\langle K, f\rangle \ ,
\end{aligned}$$

per cui K è omogenea di grado $-n$.

Sia infine $\tilde{K}$ un'altra distribuzione omogenea di grado $-n$ coincidente con K_0 fuori dall'origine. Allora la differenza $K - \tilde{K}$ è pure omogenea di grado $-n$ e ha supporto in 0. Essa è dunque un multiplo scalare di δ_0. $\square$

La condizione (17.2) è necessaria per avere una distribuzione omogenea. Infatti vale il seguente risultato.

Proposizione 17.3. *Se Ω non soddisfa la* (17.2)*, non esiste nessuna distribuzione omogenea che coincida con K_0 fuori dall'origine.*

Dimostrazione. Se $c_n = \int_{S^{n-1}} dx'$, poniamo

$$b_\Omega = \frac{1}{c_n}\int_{S^{n-1}} \Omega(x')\,dx' \ ,$$

uguale alla media di Ω su S^{n-1}. Allora

$$\Omega(x') = \big(\Omega(x') - b_\Omega\big) + b_\Omega = \Omega_1(x') + b_\Omega \ ,$$

dove Ω_1 soddisfa la (17.2). È dunque sufficiente considerare il caso in cui $\Omega(x')$ è costante.

Supponiamo dunque per assurdo che esista $K \in \mathcal{S}'$, omogenea di grado $-n$ e uguale a $|x|^{-n}$ fuori dall'origine.

Sia ψ una funzione C^∞ a supporto compatto su $\mathbb{R}$, pari, non negativa, decrescente per $r > 0$, e tale che $\psi(r) = 1$ su un intorno di 0. Se $f_1(x) = \psi(|x|)$ e $f_2(x) = \psi(2|x|)$, si avrebbe allora $\langle K, f_1\rangle = \langle K, f_2\rangle$, per l'omogeneità di K.

Ma allora, essendo $0 \notin \operatorname{supp}(f_1 - f_2)$, sarebbe

$$\langle K, f_1 - f_2\rangle = \int \frac{f_1(x) - f_2(x)}{|x|^n}\,dx = 0 \ ,$$

il che è assurdo in quanto $f_1 - f_2 > 0$. $\square$

Vi sono distribuzioni omogenee di grado $-n$ di tipo più generale dei nuclei finora considerati. Si può infatti prendere come Ω una generica distribuzione sulla sfera tale che $\langle \Omega, 1\rangle = 0$. Data $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, l'espressione

$$\langle K, f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^\infty \langle \Omega, f(r\cdot)\rangle \frac{1}{r}\, dr \tag{17.4}$$

definisce una distribuzione omogenea di grado $-n$ su $\mathbb{R}^n$. Si può anzi dimostrare che ogni distribuzione omogenea di grado $-n$ è la somma di una della forma (17.4) più un multiplo della δ_0.

18. Nuclei di Calderón-Zygmund

In base al Lemma 17.1, un nucleo omogeneo di grado $-n + i\gamma$ non è mai in C_{11}, né quindi in $C_{\infty\infty}$. Rimane da discutere la limitatezza su L^p per $1 < p < \infty$. Per fare ciò è conveniente considerare una classe più ampia di nuclei.

Una funzione $K(x)$ localmente integrabile su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ soddisfa la *condizione di Calderón-Zygmund* se esiste una costante C tale che per ogni $h \neq 0$

$$\int_{|x|>4|h|} \big|K(x+h) - K(x)\big|\, dx \leq C\ . \tag{18.1}$$

La (18.1) va interpretata come una ipotesi molto debole di Lipschitzianità. Vediamo alcuni esempi rilevanti.

Esempio 1.
Sia $K(x)$ una funzione di classe C^1 fuori dall'origine che soddisfi la condizione

$$|\nabla K(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}\ . \tag{18.2}$$

Si noti per inciso che la (18.2) implica che

$$|K(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}\ .$$

Una tale K soddisfa la (18.1). Infatti, se $|h| < |x|/4$,

$$\big|K(x+h) - K(x)\big| \leq |h| \max_{0<t<1} |\nabla K(x+th)| \leq C\frac{|h|}{|x|^{n+1}}\ ,$$

in quanto $|x + th| \geq \frac{3}{4}|x|$. Quindi

$$\int_{|x|>4|h|} \big|K(x+h) - K(x)\big|\, dx \leq C|h| \int_{|x|>4|h|} |x|^{-n-1}\, dx = C'\ .$$

Soddisfano la (18.2) le funzioni

$$K(x) = \frac{\Omega(x')}{|x|^{n+i\gamma}}$$

quando Ω è di classe C^1 sulla sfera.

Esempio 2.

La condizione (18.2) può essere rilassata come segue. Si supponga che esista $\alpha > 0$ tale che, se $|h| < |x|/4$,

$$|K(x+h) - K(x)| \leq C\frac{|h|^\alpha}{|x|^{n+\alpha}} \ . \tag{18.3}$$

Rientrano in questo caso i nuclei della forma $K(x) = \Omega(x')|x|^{-n}$, dove Ω soddisfa una condizione di Hölder di ordine $\alpha > 0$ sulla sfera:

$$|\Omega(x') - \Omega(y')| \leq c|x' - y'|^\alpha \ .$$

Infatti, presi x, h con $0 < |h| < |x|/4$, si ha

$$\begin{aligned} |K(x+h) - K(x)| &\leq \frac{\big|\Omega\big((x+h)'\big) - \Omega(x')\big|}{|x+h|^n} + |\Omega(x')|\left|\frac{1}{|x+h|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right| \\ &\leq C\left(\frac{\big|(x+h)' - x'\big|^\alpha}{|x+h|^n} + \left|\frac{1}{|x+h|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right|\right) \ . \end{aligned}$$

Per il teorema del valor medio

$$\left|\frac{1}{|x+h|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right| \leq c\frac{|h|}{|x|^{n+1}} \ .$$

Vale inoltre la disuguaglianza

$$\big|(x+h)' - x'\big| \leq c\frac{|h|}{|x|} \ ,$$

come si può verificare riducendosi prima, per omogeneità, al caso $|x| = 1$ e poi con considerazioni elementari di geometria piana. In definitiva

$$|K(x+h) - K(x)| \leq C\left(\frac{|h|^\alpha}{|x|^{n+\alpha}} + \frac{|h|}{|x|^{n+1}}\right) \leq C\frac{|h|^\alpha}{|x|^{n+\alpha}} \ .$$

Vedremo altri esempi più avanti.

Una distribuzione $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si dice un *nucleo di Calderón-Zygmund* se

(i) fuori dall'origine K coincide con una funzione $K(x)$ che soddisfi la (18.1);

(ii) $K \in C_{22}$, ossia $\hat{K} \in L^\infty$.

Nella parte rimanente di questo paragrafo dimostreremo il seguente teorema.

Teorema 18.1. *Sia K un nucleo di Calderón-Zygmund. Allora l'operatore $Tf = f * K$ è di tipo debole $(1,1)$ e limitato su L^p per $1 < p < \infty$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che T è di tipo debole (1,1). Sia $f \in L^1$. Dato $\alpha > 0$, si consideri la decomposizione di Calderón-Zygmund

$$f(x) = g(x) + \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x) \ ,$$

come dal Teorema 16.5, corrispondente al valore di α fissato. Se $b(x) = \sum_j b_j(x)$, si ha

$$\left|\{x : |Tf(x)| > 2\alpha\}\right| \le \left|\{x : |Tg(x)| > \alpha\}\right| + \left|\{x : |Tb(x)| > \alpha\}\right| .$$

Osserviamo ora che $g \in L^2$; più precisamente, con le notazioni della dimostrazione del Teorema 16.5,

$$\begin{aligned}\|g\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus A} |f(x)|^2\, dx + \sum_j \int_{Q_j} |\beta_j|^2\, dx \\ &\le \alpha \int_{\mathbb{R}^n \setminus A} |f(x)|\, dx + \sum_j \alpha^2 |Q_j| \\ &\le C\alpha \|f\|_1 .\end{aligned}$$

Poiché T è limitato su L^2 e per la disuguaglianza di Chebishev,

$$\begin{aligned}\left|\{x : |Tg(x)| > \alpha\}\right| &\le \frac{\|Tg\|_2^2}{\alpha^2} \\ &\le C\frac{\|g\|_2^2}{\alpha^2} \\ &\le C\frac{\|f\|_1}{\alpha} .\end{aligned}$$

Passiamo ora a Tb. Sia $B_j' = B(x_j, r_j)$. Poniamo $B_j'' = B(x_j, 4r_j)$. Se $x \notin B_j'$, si ha

$$Tb_j(x) = \int_{B_j'} K(x-y) b_j(y)\, dy = \int_{B_j'} \big(K(x-y) - K(x-x_j)\big) b_j(y)\, dy ,$$

in quanto b_j ha integrale nullo. Si osservi che $x - y$ non è mai nullo per y nel supporto di b_j.

Allora

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_j''} |Tb_j(x)|\, dx &\le \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_j''} \int_{B_j'} \left|K(x-y) - K(x-x_j)\right| |b_j(y)|\, dy\, dx \\ &= \int_{B_j'} |b_j(y)| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_j''} \left|K(x-y) - K(x-x_j)\right| dx\, dy .\end{aligned}$$

Ponendo $t = x - x_j$, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_j''} \left|K(x-y) - K(x-x_j)\right| dx &= \int_{|t| > 4r_j} \left|K(t + x_j - y) - K(t)\right| dt \\ &\le \int_{|t| > 4|x_j - y|} \left|K(t + x_j - y) - K(t)\right| dt \\ &\le C .\end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_j''} |Tb_j(x)|\, dx \le C\alpha |B_j'| .$$

Di conseguenza

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\bigcup_j B_j''} |Tb(x)|\,dx \le C\alpha \sum_j |B_j'| \le C\|f\|_1 \ .$$

Per la disuguaglianza di Chebishev,

$$\big|\{x \notin \bigcup_j B_j'' : |Tb(x)| > \alpha\}\big| \le C\frac{\|f\|_1}{\alpha} \ .$$

Rimane da considerare la misura dell'insieme $\{x \in \bigcup_j B_j'' : |Tb(x)| > \alpha\}$. Ma questa è sicuramente minore o uguale a

$$\Big|\bigcup_j B_j''\Big| \le \sum_j |B_j''| \le C\sum_j |B_j'| \le C\frac{\|f\|_1}{\alpha} \ .$$

Abbiamo così dimostrato che T è di tipo debole (1,1). Essendo limitato su L^2, esso è limitato su L^p, $1 < p \le 2$, per il Teorema di interpolazione di Marcinkiewicz. La limitatezza per $2 < p < \infty$ segue per dualità. □

Corollario 18.2. *I seguenti operatori sono di tipo debole* $(1,1)$ *e limitati su* L^p *per* $1 < p < \infty$*:*

(1) *la trasformata di Hilbert in* $\mathbb{R}$*:*

$$Hf(x) = p.v.\int f(x-y)\frac{1}{y}\,dy \ ; \tag{18.4}$$

(2) *le trasformate di Riesz in* $\mathbb{R}^n$*,* $n \ge 2$*:*

$$R_jf(x) = p.v.\int f(x-y)\frac{y_j}{|y|^{n+1}}\,dy \ ; \tag{18.5}$$

(3) *i potenziali di Riesz (o operatori di integrazione frazionaria)* $\mathcal{I}^{i\gamma}$ *di ordine immaginario, con* $\gamma \ne 0$ *(v. par. 10 e 11).*

Dimostrazione. Fuori dall'origine i nuclei sono del tipo considerato nell'Esempio 1, e dunque soddisfano la (18.1). Quanto alle trasformate di Fourier, i casi (1) e (3) sono già stati considerati nei paragrafi 10 e 11. Per le trasformate di Riesz, vale la relazione

$$p.v.\frac{x_j}{|x|^{n+1}} = c\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x|^{n-1}} \ .$$

Poiché la trasformata di Fourier di $|x|^{-n+1}$ è una costante per $|\xi|^{-1}$, si ha

$$\mathcal{F}\left(p.v.\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right) = c\frac{\xi_j}{|\xi|} \ ,$$

e dunque è limitata. □

19. Condizione di Calderón-Zygmund e limitatezza in L^2

Il Teorema 18.1 richiede che si sappia a priori che l'operatore $Tf = f * K$ sia limitato[1] su L^2. In alcuni casi particolari, come quelli indicati nel Corollario 18.2, ciò è desumibile direttamente dalla formula esplicita della trasformata di Fourier del nucleo.

Vediamo in questo paragrafo alcune situazioni di carattere generale cui si applica il Teorema 18.1. Le ipotesi aggiuntive sul nucleo sono di due tipi

(a) ipotesi di media nulla;
(b) ipotesi di regolarità leggermente più forti della (18.1).

È utile cercare condizioni di regolarità quanto più deboli possibile. In generale la sola condizione di Calderón-Zygmund (18.1) non è sufficiente, mentre quelle considerate negli esempi del paragrafo 18 risultano essere più forti del necessario.

Si dice che una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ soddisfa una condizione L^1-Lipschitz di ordine $\alpha > 0$, o che $f \in B^{\alpha}_{1\infty}$, se esiste una costante c tale che[2]

$$\int |f(x+h) - f(x)|\, dx \le c|h|^{\alpha} \tag{19.1}$$

per ogni $h \in \mathbb{R}^n$. Si pone in tal caso

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{1\infty}} = \|f\|_1 + \sup_{h\neq 0} |h|^{-\alpha} \int |f(x+h) - f(x)|\, dx \ . \tag{19.2}$$

Si osservi che la norma (19.2) è equivalente a ciascuna delle norme

$$\|f\|'_{B^{\alpha}_{1\infty}} = \|f\|_1 + \sup_{0<|h|<a} |h|^{-\alpha} \int |f(x+h) - f(x)|\, dx \ .$$

Infatti basta maggiorare, per $|h| \ge a$,

$$|h|^{-\alpha} \int |f(x+h) - f(x)|\, dx \le 2a^{-\alpha}\|f\|_1 \ .$$

Le condizioni di Lipschitz integrali sono localmente più deboli delle ordinarie condizioni di Lipschitz (o di Hölder).

Esempio.

Per $0 < \alpha < 1$, sia $f(x) = |x|^{-n+\alpha}\varphi(x)$, dove φ è una funzione C^{∞} a supporto

[1] Le ipotesi possono essere modificate supponendo che T sia limitato su L^q per qualche q, $1 < q < \infty$; si veda Stein, "Harmonic Analysis" p.19. Tuttavia per operatori di convoluzione la condizione più naturale è la limitatezza in L^2.

[2] Si dimostra che se $f \in B^{\alpha}_{1\infty}$ e $\alpha > 1$, allora $f = 0$.

compatto uguale a 1 in un intorno di 0. Se $|h| < 1/10$,

$$
\begin{aligned}
&\int \big||x+h|^{-n+\alpha}\varphi(x+h) - |x|^{-n+\alpha}\varphi(x)\big|\,dx \\
&\quad \le \int_{|x|>2|h|} \big||x+h|^{-n+\alpha}\varphi(x+h) - |x|^{-n+\alpha}\varphi(x)\big|\,dx \\
&\qquad + 2\int_{|x|<3|h|} |x|^{-n+\alpha}|\varphi(x)|\,dx \\
&\quad \le C|h| \int_{|x|>2|h|} |x|^{-n+\alpha-1}\,dx + C\int_{|x|<3|h|} |x|^{-n+\alpha}\,dx \\
&\quad = C|h| \int_{2|h|}^{\infty} r^{-2+\alpha}\,dr + C\int_0^{3|h|} r^{-1+\alpha}\,dr \\
&\quad = C|h|^{\alpha}\ .
\end{aligned}
$$

Dunque $f \in B^{\alpha}_{1\infty}$. $\square$

Più in generale, lo *spazio di Besov* B^{α}_{pq} è definito, per $0 < \alpha < 1$ e $1 \le p, q \le \infty$, come lo spazio delle funzioni $f \in L^p$ tali che

$$
\|f\|_{B^{\alpha}_{pq}} = \begin{cases} \|f\|_p + \left(\int (|h|^{-\alpha}\|\tau_h f - f\|_p)^q\, \frac{dh}{|h|^n}\right)^{1/q} & \text{se } q < \infty \\ \|f\|_p + \sup_{h\ne 0} |h|^{-\alpha}\|\tau_h f - f\|_p & \text{se } q = \infty\ . \end{cases}
$$

Lemma 19.1. *Se $f \in B^{\alpha}_{1\infty}$, allora*

$$
|\hat f(\xi)| \le C\|f\|_{B^{\alpha}_{1\infty}}(1+|\xi|)^{-\alpha}\ .
$$

Dimostrazione. Si osservi che

$$
\hat f(\xi) = \int f(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx = -\int f\left(x + \pi\frac{\xi}{|\xi|^2}\right)e^{-ix\cdot\xi}\,dx\ .
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
|\hat f(\xi)| &= \frac12\left|\int f\left(x+\pi\frac{\xi}{|\xi|^2}\right)e^{-ix\cdot\xi}\,dx - \int f(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx\right| \\
&\le \frac12\int\left|f\left(x+\pi\frac{\xi}{|\xi|^2}\right) - f(x)\right|dx \\
&\le C|\xi|^{-\alpha}\|f\|_{B^{\alpha}_{1\infty}}\ .
\end{aligned}
$$

D'altra parte,

$$
|\hat f(\xi)| \le \|f\|_1 \le \|f\|_{B^{\alpha}_{1\infty}}\ .
$$

Utilizzando la prima maggiorazione per $|\xi|$ grande e la seconda per $|\xi|$ piccolo, si ha la tesi. $\square$

Rinviamo alla fine del paragrafo la dimostrazione del seguente teorema.

Teorema 19.2. *Se $f \in B^\alpha_{1\infty}$, allora $f \in L^p$ per ogni $p < \frac{n}{n-\alpha}$.*

Dati una funzione f e $j \in \mathbb{Z}$, poniamo $f^{(j)}(x) = 2^{-nj} f(2^{-j}x)$.

Teorema 19.3. *Si consideri una famiglia $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ di funzioni con le seguenti proprietà:*

(a) $\operatorname{supp}\varphi_j \subset \{x : \frac{1}{2} \le |x| \le 4\}$;
(b) $\int \varphi_j(x)\, dx = 0$;
(c) $\|\varphi_j\|_{B^\alpha_{1\infty}} \le C$ *per ogni* j.

Allora la serie $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j^{(j)}$ converge in $\mathcal{S}'$ a un nucleo di Calderón-Zygmund.

Dimostrazione. Procedendo come nella dimostrazione del Lemma 17.2, si verifica che l'espressione

$$\langle K, f\rangle = \sum_{j<0} \int \varphi_j^{(j)}(x)\big(f(x) - f(0)\big)\, dx + \sum_{j\ge 0} \int \varphi_j^{(j)}(x) f(x)\, dx \tag{19.3}$$

definisce una distribuzione temperata. È inoltre evidente che fuori dall'origine K coincide con la funzione

$$K(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j^{(j)}(x)\ .$$

La convergenza della serie è garantita dal fatto che per quasi ogni $x \neq 0$ solo tre termini sono diversi da zero.

Dimostriamo che $\hat{K} \in L^\infty$. Per il Lemma 19.1, $|\hat{\varphi}_j(\xi)| \le C(1 + |\xi|)^{-\alpha}$. Inoltre dalla (b) di ricava che

$$\begin{aligned}
|\hat{\varphi}_j(\xi)| &= \left| \int \varphi_j(x) \left(e^{-ix\cdot\xi} - 1\right)\, dx \right| \\
&\le \int |\varphi_j(x)| \left|e^{-ix\cdot\xi} - 1\right|\, dx \\
&\le |\xi| \int |\varphi_j(x)||x|\, dx \\
&\le C|\xi|\ .
\end{aligned}$$

Per $\xi \neq 0$, consideriamo la serie

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}_j^{(j)}(\xi)\right| &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}_j(2^j\xi)\right| \\
&\le C \sum_{2^j|\xi|\le 1} 2^j|\xi| + C \sum_{2^j|\xi|>1} (2^j|\xi|)^{-\alpha} \\
&= C|\xi| \sum_{2^j\le|\xi|^{-1}} 2^j + C|\xi|^{-\alpha} \sum_{2^j>|\xi|^{-1}} 2^{-j\alpha} \\
&\le C\ .
\end{aligned}$$

Quindi la serie $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}_j^{(j)}(\xi)$ converge quasi ovunque e nel senso delle distribuzioni a una funzione limitata.

Dimostriamo infine che $K(x)$ soddisfa la condizione (18.1). Supponiamo che $1/2 \le |h| < 1$ e consideriamo

$$\int_{|x|>4|h|} \big|K(x+h)-K(x)\big|\,dx \le \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{|x|>4|h|} \big|\varphi_j^{(j)}(x+h)-\varphi_j^{(j)}(x)\big|\,dx \ .$$

Per l'ipotesi (a), solo i valori di $j \ge -2$ intervengono nella somma. Quindi

$$\begin{aligned}\int_{|x|>4|h|} \big|K(x+h)-K(x)\big|\,dx &\le \sum_{j=-2}^{\infty} \int \big|\varphi_j^{(j)}(x+h)-\varphi_j^{(j)}(x)\big|\,dx \\ &= \sum_{j=-2}^{\infty} \int 2^{-nj}\big|\varphi_j\big(2^{-j}(x+h)\big)-\varphi_j(2^{-j}x)\big|\,dx \\ &= \sum_{j=-2}^{\infty} \int \big|\varphi_j(y+2^{-j}h))-\varphi_j(y)\big|\,dy \\ &\le c\sum_{j=-2}^{\infty} 2^{-\alpha j} = c' \ .\end{aligned}$$

Dato poi un generico $h \ne 0$, si prenda $m \in \mathbb{Z}$ in modo che $2^{-m-1} \le |h| < 2^{-m}$. Posto $h' = 2^m h$ e $y = 2^m x$, si ha

$$\int_{|x|>4|h|} \big|K(x+h)-K(x)\big|\,dx = \int_{|y|>4|h'|} \big|K^{(m)}(y+h')-K^{(m)}(y)\big|\,dy \ .$$

Ma si osservi che $K^{(m)} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j^{(j+m)}$ ha la stessa forma di K. Si può quindi applicare la prima parte della dimostrazione. $\square$

Corollario 19.4. *Sia Ω una funzione sulla sfera tale che*

$$|\Omega(x')-\Omega(y')| \le c|x'-y'|^\alpha \ ; \tag{19.4}$$

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x')\,dx' = 0 \ . \tag{19.5}$$

ove $0<\alpha\le 1$. Sia K la distribuzione p.v.$\Omega(x')|x|^{-n}$. Allora $Tf = f*K$ è di tipo debole $(1,1)$ e limitato su L^p per $1<p<\infty$.

Dimostrazione. Per quanto visto nell'Esempio 2 del paragrafo 18, se $|h| < |x|/4$,

$$|K(x+h)-K(x)| \le C\frac{|h|^\alpha}{|x|^{n+\alpha}} \ .$$

Sia $D = \{x : 1 < |x| < 2\}$ e si ponga $\varphi(x) = K(x)\chi_D(x)$.

Si verifica facilmente che la serie $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi^{(j)}$ converge a K nel senso delle distribuzioni. Evidentemente φ soddisfa le ipotesi (a) e (b) del Teorema 19.3. Quanto alla (c) si ha, per $|h| < 1/4$,

$$\begin{aligned}\int |\varphi(x+h)-\varphi(x)|\,dx &= \int_{D\cap(D-h)} |K(x+h)-K(x)|\,dx \\ &\quad + \int_{D\setminus(D-h)} |K(x)|\,dx + \int_{(D-h)\setminus D} |K(x+h)|\,dx \\ &\le C\int_{|x|>1} \frac{|h|^\alpha}{|x|^{n+\alpha}}\,dx + C|D\setminus(D-h)| + C|(D-h)\setminus D| \ .\end{aligned}$$

Ma queste due ultime misure sono maggiorabili con una costante per $|h|$. Pertanto

$$\int |\varphi(x+h) - \varphi(x)|\, dx \le C|h|^\alpha + C|h| \le C'|h|^\alpha \ .$$

Se invece $|h| \ge 1/4$,

$$\int |\varphi(x+h) - \varphi(x)|\, dx \le 2\int |\varphi(x)|\, dx \le C \le C'|h|^\alpha \ .$$

Dunque $\varphi \in B^\alpha_{1\infty}$, da cui la tesi per il Teorema 19.3. $\square$

Teorema 19.5. *Sia $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ una famiglia di funzioni per cui esistano costanti $\varepsilon, \alpha, C > 0$ per cui valgano le seguenti proprietà:*

(a) $\int |\varphi_j(x)|(1+|x|)^\varepsilon\, dx \le C$;
(b) $\int \varphi_j(x)\, dx = 0$;
(c) $\|\varphi_j\|_{B^\alpha_{1\infty}} \le C$.

Allora la serie $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j^{(j)}$ converge in $\mathcal{S}'$ a un nucleo di Calderón-Zygmund.

Dimostrazione. Come per il Teorema 19.3, mostriamo che la serie converge nel senso delle distribuzioni a

$$\langle K, f\rangle = \sum_{j<0} \int \varphi_j^{(j)}(x)\big(f(x) - f(0)\big)\, dx + \sum_{j\ge 0} \int \varphi_j^{(j)}(x) f(x)\, dx \ .$$

Nella prima sommatoria maggioriamo

$$|f(x) - f(0)| \le \begin{cases} 2\|f\|_\infty \\ \|\nabla f\|_\infty |x| \end{cases}$$

da cui, potendo noi supporre che $\varepsilon \le 1$,

$$|f(x) - f(0)| \le C\|f\|_{(N)}|x|^\varepsilon \ .$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \int |\varphi_j^{(j)}(x)|\big|f(x) - f(0)\big|\, dx &\le C\|f\|_{(N)} \int 2^{-nj}|\varphi_j(2^{-j}x)||x|^\varepsilon\, dx \\ &= C\|f\|_{(N)} 2^{\varepsilon j} \int |\varphi_j(x)||x|^\varepsilon\, dx \\ &\le C\|f\|_{(N)} 2^{\varepsilon j} \ . \end{aligned}$$

Quindi la prima sommatoria converge. Per la seconda applichiamo il Teorema 19.2. Sia $p < \frac{n}{n-\alpha}$. Allora

$$\begin{aligned} \int |\varphi_j^{(j)}(x)||f(x)|\, dx &\le \|\varphi_j^{(j)}\|_p \|f\|_{p'} \\ &= 2^{-nj/p'}\|\varphi_j\|_p \|f\|_{p'} \\ &\le C\|f\|_{(N)} \|\varphi_j\|_{B^\alpha_{1\infty}} 2^{-nj/p'} \\ &\le C\|f\|_{(N)} 2^{-nj/p'} \ . \end{aligned}$$

Dunque anche la seconda serie converge.

Mostriamo ora che fuori dall'origine K è una funzione. Sia A un aperto relativamente compatto in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Allora, sempre con $p < \frac{n}{n-\alpha}$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_A |\varphi_j^{(j)}(x)|\,dx &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{2^{-j}A} |\varphi_j(x)|\,dx \\
&\le C\sum_{j<0} 2^{j\varepsilon} \int_{2^{-j}A} |\varphi_j(x)||x|^\varepsilon\,dx + \sum_{j\ge 0} |2^{-j}A|^{1/p'} \|\varphi_j\|_p \\
&\le C\sum_{j<0} 2^{j\varepsilon} + C\sum_{j\ge 0} 2^{-nj/p'}\ ,
\end{aligned}
$$

ed entrambe le serie convergono.

Verifichiamo ora la condizione di Calderón-Zygmund. Se $1/2 \le |h| \le 1$,

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|>4|h|} \big|K(x+h) - K(x)\big|\,dx &\le \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{|x|>2} \big|\varphi_j^{(j)}(x+h) - \varphi_j^{(j)}(x)\big|\,dx \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{|y|>2^{-j+1}} \big|\varphi_j(y+2^{-j}h) - \varphi_j(y)\big|\,dy \\
&\le 2\sum_{j<0} \int_{|y|>2^{-j}} |\varphi_j(y)|\,dy + \sum_{j\ge 0} \int \big|\varphi_j(y+2^{-j}h) - \varphi_j(y)\big|\,dy \\
&\le 2\sum_{j<0} 2^{j\varepsilon} \int_{|y|>2^{-j}} |\varphi_j(y)||y|^\varepsilon\,dy + C\sum_{j\ge 0} 2^{-j\alpha} \\
&\le C\sum_{j<0} 2^{j\varepsilon} + C\sum_{j\ge 0} 2^{-j\alpha}\ .
\end{aligned}
$$

Per $h \neq 0$ generico si procede come nel Teorema 19.3.

Infine consideriamo la trasformata di Fourier di K. Per il Lemma (19.2),

$$
|\hat{\varphi}_j(\xi)| \le C(1+|\xi|)^{-\varepsilon}\ .
$$

Inoltre, dalle due stime $|e^{-i\xi\cdot x} - 1| \le |\xi||x|$ e $|e^{-i\xi\cdot x} - 1| \le 2$ si ricava che

$$
|e^{-i\xi\cdot x} - 1| \le C|\xi|^\varepsilon |x|^\varepsilon\ .
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
|\hat{\varphi}_j(\xi)| &= \left| \int \varphi_j(x) \left(e^{-ix\cdot\xi} - 1\right)\,dx \right| \\
&\le \int |\varphi_j(x)| \left|e^{-ix\cdot\xi} - 1\right|\,dx \\
&\le C|\xi|^\varepsilon \int |\varphi_j(x)||x|^\varepsilon\,dx \\
&\le C|\xi|^\varepsilon\ .
\end{aligned}
$$

La dimostrazione che $\hat{K} \in L^\infty$ si conclude come per il Teorema 19.3. $\square$

Vedremo nel prossimo paragrafo una importante applicazione del Teorema 19.5. Concludiamo invece qui dimostrando il Teorema 19.2.

Lemma 19.6. *Una funzione $f \in L^1$ è in $B^\alpha_{1\infty}$ se solo se*

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \ , \tag{19.6}$$

con $f_j \in C^\infty$ e

$$\|f_j\|_1 \le C 2^{-\alpha j} \ , \qquad \|\nabla f_j\|_1 \le C 2^{(1-\alpha)j} \ . \tag{19.7}$$

Inoltre $\|f\|_{B^\alpha_{1\infty}}$ è equivalente all'estremo inferiore delle costanti C al variare di tutte le decomposizioni (19.6) *per cui valgano le* (19.7)*.*

Dimostrazione. Sia $f \in B^\alpha_{1\infty}$ e si prenda una identità approssimata $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, dove φ è C^∞ a supporto nella palla unitaria. Si ponga

$$\psi_j(x) = \varphi_{2^{-j}}(x) - \varphi_{2^{-j+1}}(x) \ ,$$

e quindi

$$f_0 = f * \varphi_0 \ , \qquad f_j = f * \psi_j \text{ per } j \ge 1 \ .$$

Si osservi che

$$\psi_j(x) = 2^{nj}\psi_0(2^j x) \ , \qquad \int \psi_j(x)\, dx = 0 \ , \int |\psi_j(x)|\, dx \le C \ .$$

Allora, per $j \ge 1$,

$$\begin{aligned}
\|f_j\|_1 &= \int \left| \int f(x-y)\psi_j(y)\, dy \right| dx \\
&= \int \left| \int \big(f(x-y) - f(x)\big)\psi_j(y)\, dy \right| dx \\
&\le \int |\psi_j(y)| \int \big|f(x-y) - f(x)\big|\, dx\, dy \\
&\le \|f\|_{B^\alpha_{1\infty}} \int_{|y|\le 2^{-j+1}} |\psi_j(y)||y|^\alpha\, dy \\
&\le C\|f\|_{B^\alpha_{1\infty}} 2^{-\alpha j} \ .
\end{aligned} \tag{19.8}$$

Si osservi anche che

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x_k}(x) = 2^{(n+1)j} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_k}(2^j x) \ ,$$

per cui

$$\int \left| \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k}(x) \right| dx \le C 2^j \ .$$

Inoltre si ha banalmente che

$$\int \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k}(x)\, dx = 0 \ .$$

Sostituendo nella (19.8) ψ_j con $\partial\psi_j/\partial x_k$, si ottiene quindi

$$\left\|\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)\right\| \le C\|f\|_{B^\alpha_{1\infty}} 2^{(1-\alpha)j} \ .$$

Quanto a f_0, essa è ovviamente in L^1 insieme alle sue derivate parziali.
Inoltre

$$\sum_{j=0}^N f_j = f * \varphi_0 + \sum_{j=1}^N f * \left(\varphi_{2^{-j}} - \varphi_{2^{-j+1}}\right) = f * \varphi_{2^{-N}} \ ,$$

per cui la serie delle f_j converge a f in L^1.

Viceversa, si supponga di avere una successione f_j che soddisfi le (19.7) con una data costante C. Allora

$$\left\|\sum_{j=0}^\infty f_j\right\|_1 \le C\sum_{j=0}^\infty 2^{-\alpha j} \le cC \ .$$

Inoltre,se $|h| < 1$,

$$\begin{aligned}
\int |f(x+h) - f(x)|\, dx &\le \sum_{j=0}^\infty \int |f_j(x+h) - f_j(x)|\, dx \\
&\le \sum_{2^j < |h|^{-1}} \int\int_0^1 \left|h\cdot\nabla f_j(x+th)\right| dt\, dx \\
&\qquad + 2\sum_{2^j \ge |h|^{-1}} \int |f_j(x)|\, dx \\
&\le |h| \sum_{2^j < |h|^{-1}} \int_0^1 \int \left|\nabla f_j(x+th)\right| dx\, dt + 2\sum_{2^j \ge |h|^{-1}} \|f_j\|_1 \\
&\le |h| \sum_{2^j < |h|^{-1}} \int_0^1 \|\nabla f_j\|_1\, dt + C\sum_{2^j \ge |h|^{-1}} 2^{-\alpha j} \\
&\le C|h| \sum_{2^j < |h|^{-1}} 2^{(1-\alpha)j} + C\sum_{2^j \ge |h|^{-1}} 2^{-\alpha j} \\
&\le cC|h||h|^{\alpha-1} + cC|h|^\alpha \\
&\le cC|h|^\alpha \ . \qquad \square
\end{aligned}$$

Lemma 19.7. *Sia $f \in L^1$ e si supponga che anche le derivate parziali $\partial_j f$ siano in L^1. Allora $f \in L^p$ per $p < \frac{n}{n-1}$ e per tali p*

$$\|f\|_p \le C_p \left(\|f\|_1 + \|\nabla f\|_1\right) \ .$$

Dimostrazione. Se $n = 1$ la tesi vale anche per $p = \infty$ e la dimostrazione è molto semplice. Infatti

$$|f(x)| = \left|\int_{-\infty}^x f'(t)\, dt\right| \le \|f'\|_1 \ .$$

Applicando la disuguaglianza di Hölder, si ha per p finito e θ opportuno

$$\|f\|_p \le \|f\|_1^\theta \|\nabla f\|_1^{1-\theta} \le \|f\|_1 + \|\nabla f\|_1 \ .$$

Supponiamo dunque $n \ge 2$.
Essendo $\widehat{\partial_j f}(\xi) = i\xi_j \hat{(}\xi)$, si ha

$$\hat{f}(\xi) = -\sum_{j=1}^n \frac{i\xi_j}{|\xi|^2} \widehat{\partial_j f}(\xi) \ .$$

Sia H_j la distribuzione tale che $\hat{H}_j(\xi) = i\xi_j/|\xi|^2$. Allora

$$f = -\sum_{j=1}^n H_j * \partial_j f \ .$$

Se $n \ge 3$, sapendo dal Teorema 11.1 che $\mathcal{F}\big(|x|^{-n+2}\big) = c_n|\xi|^{-2}$, si ricava che

$$H_j(x) = \partial_j \frac{c'_n}{|x|^{n-2}} = c''_n \frac{x_j}{|x|^n} \ . \tag{19.9}$$

In particolare, H_j è localmente integrabile e

$$|H_j(x)| \le \frac{C}{|x|^{n-1}} \ . \tag{19.10}$$

Le (19.9) e (19.10) valgono anche per $n = 2$, ma la dimostrazione richiede maggiore cautela. Occorre partire dall'identità

$$\mathcal{F}\big(|x|^{-\varepsilon}\big) = c\frac{\Gamma(1-\varepsilon/2)}{\Gamma(\varepsilon/2)}|\xi|^{-2+\varepsilon} \ ,$$

per $0 < \varepsilon < 1$ (v. Teorema 11.1). Derivando $|x|^{-\varepsilon}$ si ottiene una funzione omogenea di grado $-1-\varepsilon$, e dunque ancora localmente integrabile:

$$\partial_j |x|^{-\varepsilon} = -\varepsilon x_j |x|^{-2-\varepsilon} \ .$$

Quindi

$$\mathcal{F}\big(x_j|x|^{-2-\varepsilon}\big) = c\frac{\Gamma(1-\varepsilon/2)}{\varepsilon\Gamma(\varepsilon/2)} i\xi_j|\xi|^{-2+\varepsilon} \ .$$

Poiché $\varepsilon\Gamma(\varepsilon/2) = 2\Gamma(1+\varepsilon/2)$, si può passare al limite per ε tendente a 0 e dedurre la (19.9).

Decomponiamo H_j nella somma $H_j^0 + H_j^\infty$, dove H_j^0 si annulla per $|x| > 1$ e H_j^∞ per $|x| < 1$. Per la (19.10), $H_j^0 \in L^p$ per $p < n/(n-1)$ e $H_j^\infty \in L^q$ per $q > n/(n-1)$.

Dunque

$$f(x) = \sum_{j=1}^n H_j * \partial_j f(x) = \sum_{j=1}^n H_j^0 * \partial_j f(x) + \sum_{j=1}^n H_j^\infty * \partial_j f(x) = f^0 + f^\infty \ .$$

Inoltre, se $p < n/(n-1)$ e $q > n/(n-1)$

$$\begin{aligned} \|f^0\|_p &\le \sum_{j=1}^n \|H_j^0\|_p \|\partial_j f(x)\|_1 \le C_p \|\nabla f\|_1 \\ \|f^\infty\|_q &\le \sum_{j=1}^n \|H_j^\infty\|_q \|\partial_j f(x)\|_1 \le C_q \|\nabla f\|_1 \ . \end{aligned}$$

In particolare $f^0 \in L^1$, da cui si deduce che $f^\infty = f - f^0 \in L^1$, con

$$\|f^\infty\|_1 \le C\left(\|f\|_1 + \|\nabla f\|_1\right) \ .$$

Allora, se $p < n/(n-1) < q$,

$$\|f^\infty\|_p \le \|f^\infty\|_1^\theta \|f^\infty\|_q^{1-\theta} \le C_p \|f^\infty\|_1^\theta \|\nabla f\|_1^{1-\theta} \le C_p\left(\|f\|_1 + \|\nabla f\|_1\right) \ . \qquad \square$$

Dimostrazione del Teorema 19.2. Decomponiamo $f = \sum_{j=0}^\infty f_j$ come nella (19.6), con

$$\|f_j\|_1 \le C2^{-\alpha j} \ , \qquad \|\nabla f_j\|_1 \le C 2^{(1-\alpha)j} \ .$$

Applicando il Lemma 19.7, se $q < n/(n-1)$,

$$\|f_j\|_q \le C_q\big(2^{-\alpha j} + 2^{(1-\alpha)j}\big) \le C_q 2^{(1-\alpha)j}$$

per ogni j.

Prendiamo ora $p < n/(n-\alpha)$. Introduciamo un q, che verrà detrminato più avanti, con $1 < p < q < n/(n-1)$ e sia θ tale che

$$\frac{1}{p} = 1 - \theta + \frac{\theta}{q} \ . \tag{19.11}$$

Per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\|f_j\|_p \le \|f_j\|_1^{1-\theta} \|f_j\|_q^\theta \le C_q 2^{j\left(-\alpha(1-\theta)+(1-\alpha)\theta\right)} = C_q 2^{j(\theta-\alpha)} \ .$$

Si tratta allora di verificare che si può scegliere $q < n/(n-1)$ in modo che risulti $\theta < \alpha$; in tal caso la serie $\sum_j \|f_j\|_p$ converge e si ottiene che $f \in L^p$.

Riscriviamo allora la (19.11) nella forma

$$\frac{1}{p'} = \theta \frac{1}{q'} \ ,$$

dove $\frac{1}{p'} < \frac{\alpha}{n}$ è dato e si vuole $\frac{1}{q'} < \frac{1}{n}$. Basta allora prendere θ tale che $\frac{n}{p'} < \theta < \alpha$ per avere $\frac{1}{q'} = \frac{1}{\theta p'} < \frac{1}{n}$. $\square$

20. Moltiplicatori di Fourier e condizione di Mihlin-Hörmander

Un operatore $T : \mathcal{S} \longmapsto \mathcal{S}'$ che commuta con le traslazioni può essere definito in modo equivalente

(a) dal suo nucleo di convoluzione $K \in \mathcal{S}'$: $Tf = f * K$;
(b) dal suo moltiplicatore di Fourier $m \in \mathcal{S}'$: $Tf = \mathcal{F}^{-1}(m\hat{f})$.

La relazione tra nucleo e moltiplicatore è $m = \hat{K}$.

È interessante cercare condizioni sul moltiplicatore m che assicurino che T si estende a un operatore limitato su L^p per qualche p. Poiché $C_{pp} \subset C_{22}$, bisogna per prima cosa richiedere che T sia limitato su L^2, ossia, in base al Teorema 7.9, che $m \in L^\infty$.

La condizione di Mihlin-Hörmander, che ora vedremo, è più restrittiva ed assicura la limitatezza su L^p per ogni $p \in (1, \infty)$. Essa è tale da garantire che il nucleo $K = \mathcal{F}^{-1}m$ è un nucleo di Calderón-Zygmund.

Prendiamo ad esempio le trasformate di Riesz e gli operatori di integrazione frazionaria $\mathcal{I}^{i\gamma}$ del Corollario 18.2. I corrispondenti moltiplicatori di Fourier sono, a meno di costanti moltiplicative, $m_j(\xi) = \xi_j/|\xi|$ e $|\xi|^{i\gamma}$ rispettivamente. Trattandosi di funzioni C^∞ fuori dall'origine e omogenee di grado 0 o puramente immaginario, esse soddisfano la seguente disuguaglianza:

$$|\partial^\alpha m(\xi)| \le C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|} \tag{20.1}$$

per ogni multiindice α. In particolare, per ogni $R > 0$,

$$\frac{1}{R^n} \int_{R<|\xi|<2R} |\partial^\alpha m(\xi)|^2 \, d\xi \le C_\alpha R^{-2|\alpha|} \ . \tag{20.2}$$

Diremo che una funzione m è un *moltiplicatore di Mihlin-Hörmander* se soddisfa la (20.2) per ogni α con

$$|\alpha| \le \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \ .$$

La rilevanza di questo ordine critico di derivazione può essere compresa dal seguente lemma.

Lemma 20.1. *Se $\varphi \in \mathcal{S}'$ ed esiste $N \ge [n/2] + 1$ tale che $\partial^\alpha \hat{\varphi} \in L^2$ per ogni $|\alpha| \le N$, allora $\varphi \in L^1$. Inoltre per ogni $\varepsilon < 2N - n$*

$$\int |\varphi(x)|(1 + |x|)^\varepsilon \, dx \le C \sum_{|\alpha| \le N} \|\partial^\alpha \hat{\varphi}\|_2 \ .$$

Dimostrazione. Per la formula di Plancherel,

$$\int |\varphi(x)|^2 |x^\alpha|^2 \, dx = c \|\partial^\alpha \hat{\varphi}\|_2^2 \ ,$$

da cui, scomponendo $(1 + |x|^2)^N = (1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)^N$ in somma di monomi con esponenti pari,

$$\int |\varphi(x)|^2 (1 + |x|^2)^N \, dx \le C \sum_{|\alpha| \le N} \|\partial^\alpha \hat{\varphi}\|_2^2 \ .$$

Ma allora, per la disuguaglianza di Hölder,

$$
\begin{aligned}
\int |\varphi(x)|(1+|x|)^\varepsilon\,dx &\le C\int |\varphi(x)|(1+|x|^2)^{\varepsilon/2}\,dx \\
&\le C\left(\int \frac{1}{(1+|x|^2)^{N-\varepsilon/2}}\,dx\right)^{1/2}\left(\int |\varphi(x)|^2(1+|x|^2)^N\,d\xi\right)^{1/2} \\
&\le C\sum_{|\alpha|\le N}\|\partial^\alpha\hat\varphi\|_2\ .
\end{aligned}
$$

La conclusione è resa possibile dal fatto che l'ipotesi fatta su N ed ε assicura che $\int(1+|x|^2)^{-N+\varepsilon/2}\,dx$ converge. $\square$

Costruiamo una partizione dell'unità su $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ adattata alle corone sferiche diadiche $\{\xi : 2^j\le|\xi|\le 2^{j+1}\}$ come segue. Sia $\psi\ge 0$ una funzione C^∞ uguale a 1 per $1\le|\xi|\le 2$ e nulla fuori $\{\xi : \frac12\le|\xi|\le 4\}$. Allora

$$
\Psi(\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi(2^j\xi)
$$

è strettamente positiva per $\xi\ne 0$. Si ponga

$$
\eta(\xi)=\frac{\psi(\xi)}{\Psi(\xi)}\ ,\qquad \eta_j(\xi)=\eta(2^j\xi)\ .
$$

Allora $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\eta_j(\xi)=1$ per ogni $\xi\ne 0$.

Teorema 20.2. *Sia m un moltiplicatore di Mihlin-Hörmander. Allora $K=\mathcal{F}^{-1}m$ è un nucleo di Calderón-Zygmund. In particolare l'operatore $Tf=\mathcal{F}^{-1}(m\hat f)$ è di tipo debole $(1,1)$ e limitato su L^p per $1<p<\infty$.*

Dimostrazione. Si ponga $m_j(\xi)=m(\xi)\eta_j(\xi)$. Allora $\operatorname{supp} m_j\subseteq\{\xi : 2^{-j-1}\le|\xi|\le 2^{-j+2}\}$ e $m=\sum_{j\in\mathbb{Z}}m_j$ quasi ovunque e nel senso delle distribuzioni.

Poniamo

$$
\tilde m_j(\xi)=m_j(2^{-j}\xi)=m(2^{-j}\xi)\eta(\xi)\ ,
$$

di modo che $\operatorname{supp}\tilde m_j\subseteq\{\xi : 1/2\le|\xi|\le 4\}$.

Applicando la (20.2), si ha

$$
\begin{aligned}
\|\partial^\alpha\tilde m_j\|_2^2 &= \int_{1/2<|\xi|<4}\left|\partial^\alpha\big(m(2^{-j}\xi)\eta(\xi)\big)\right|^2 d\xi \\
&\le C\sum_{\beta\le\alpha}2^{-2|\beta|j}\int_{1/2<|\xi|<4}|\partial^\beta m(2^{-j}\xi)|^2|\partial^{\alpha-\beta}\eta(\xi)|^2\,d\xi \\
&\le C\sum_{\beta\le\alpha}2^{-2|\beta|j}\int_{1/2<|\xi|<4}|\partial^\beta m(2^{-j}\xi)|^2\,d\xi \qquad (20.3)\\
&= C\sum_{\beta\le\alpha}2^{(n-2|\beta|)j}\int_{2^{-j-1}<|\xi|<2^{-j+2}}|\partial^\beta m(\xi)|^2\,d\xi \\
&\le C\ .
\end{aligned}
$$

Sia poi $\varphi_j(x) = \mathcal{F}^{-1}\tilde{m}_j(x)$. Allora $\mathcal{F}^{-1}m_j(x) = 2^{-nj}\varphi(2^{-j}x) = \varphi_j^{(j)}(x)$, nelle notazioni del paragrafo 19. Il nucleo di convoluzione dell'operatore T è dunque

$$K = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j^{(j)}(x) \ .$$

Verifichiamo che le φ_j soddisfano le ipotesi del Teorema 19.5.

Per la (20.3), l'ipotesi (a) segue dal Lemma 20.1, posto $N = \nu = [n/2] + 1$, e $\varepsilon = 1/2$. Quanto alla (b),

$$\int \varphi_j(x)\, dx = \hat{\varphi}_j(0) = \tilde{m}_j(0) = 0 \ .$$

Per la verifica dell'ipotesi (c), si osservi che $\partial_k \varphi_j = \mathcal{F}^{-1}(i\xi_k \tilde{m}_j)$. Procedendo come nella (20.3), si verifica che per $|\alpha| \le \nu$,

$$\|\partial^\alpha(\xi_k \tilde{m}_j)\|_2 \le C \ .$$

Per il Lemma 20.1, $\|\partial_k\varphi_j\|_1 \le C$. Quindi

$$\begin{aligned}\int |\varphi_j(x+h) - \varphi_j(x)|\, dx &= \int \left| \int_0^1 h \cdot \nabla\varphi_j(x+th)\, dt \right| dx \\ &\le |h| \int_0^1 \int |\nabla\varphi_j(x+th)|\, dx\, dt \\ &\le |h| \|\nabla\varphi_j\|_1 \\ &\le C|h| \ .\end{aligned}$$

Poiché anche le norme in L^1 delle φ_j sono uniformemente limitate, esse sono uniformemente in $B^1_{1\infty}$. $\square$

Intervengono spesso moltiplicatori ottenuti con la seguente costruzione. Si prende una funzione $m_0(\xi)$ di classe $C^{[n/2]+1}$ con supporto nella corona sferica $1 - \delta \le |\xi| \le 2 + \delta$, con $\delta < 1$, e si pone

$$m(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} m_0(2^j\xi) \ . \tag{20.4}$$

Si noti che per ogni $\xi \neq 0$ solo un numero finito di termini della serie è diverso da 0.

Proposizione 20.3. *La* (20.4) *definisce un moltiplicatore di Mihlin-Hörmander.*

Dimostrazione. Valendo l'uguaglianza $m(2^k\xi) = m(\xi)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, basta dimostrare che m è di classe $C^{[n/2]+1}$ sulla corona chiusa $1 \le |\xi| \le 2$. Fatto ciò, per un $\xi \neq 0$ fissato, si scelga k in modo che $1 \le 2^{-k}|\xi| \le 2$. Allora, se $|\alpha| \le [n/2] + 1$,

$$|\partial^\alpha m(\xi)| = |\partial^\alpha\big(m(2^{-k}\xi)\big)| = 2^{-k|\alpha|}|\partial^\alpha m(2^{-k}\xi)| \le C2^{-k|\alpha|} \le C|\xi|^{-|\alpha|} \ ,$$

e sappiamo che questa disuguaglianza implica la (20.2).

Ma in un intorno della corona $1 \le |\xi| \le 2$ solo un numero finito di termini della serie (20.4) intervengono, e dunque la loro somma è di classe $C^{[n/2]+1}$. $\square$

Vediamo un paio di applicazioni del Teorema 20.2. Un'operatore differenziale del secondo ordine, omogeneo e a coefficienti costanti ha la forma

$$Lf = \sum_{jk} a_{jk}\partial_j\partial_k \ , \tag{20.5}$$

dove la matrice $A = (a_{jk})$ è simmetrica. Si dice che L è *ellittico* se la matrice A è definita, ossia se la forma quadratica

$$Q(\xi) = \sum_{jk} a_{jk}\xi_j\xi_k$$

si annulla solo per $\xi = 0$.

Corollario 20.4. *Sia L un operatore ellittico della forma* (20.5). *Se $F \in \mathcal{S}'$ e $LF \in L^p$ per qualche $p \in (1,\infty)$, allora tutte le derivate seconde $\partial_j\partial_k F$ sono in L^p.*

Dimostrazione. Essendo

$$\widehat{LF} = -Q(\xi)\hat{F} \ , \qquad \widehat{\partial_j\partial_k F} = -\xi_j\xi_k\hat{F} \ ,$$

risulta

$$\partial_j\partial_k F = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\xi_j\xi_k}{Q(\xi)}\widehat{LF}\right) \ .$$

Verifichiamo che il moltiplicatore

$$m(\xi) = \frac{\xi_j\xi_k}{Q(\xi)}$$

soddisfa la condizione di Mihlin-Hörmander. Poiché fuori dall'origine il denominatore non si annulla, m è C^∞ fuori dall'origine, e omogeneo di grado zero. Esso soddisfa pertanto la (20.1), e di conseguenza la (20.2) per ogni α. $\square$

L'operatore T corrispondente al moltiplicatore $m(\xi) = \xi_j\xi_k Q(\xi)^{-1}$ si indica significativamente con il simbolo $\partial_j\partial_k L^{-1}$. Si osservi che se $L = \Delta$ è l'operatore di Laplace, si ha

$$\partial_j\partial_k\Delta^{-1} = R_jR_k \ ,$$

dove R_j, R_k sono le trasformate di Riesz.

Si indica con W^p_k lo spazio delle funzioni $f \in L^p$ le cui derivate distribuzionali $\partial^\alpha f$ con $|\alpha| \le k$ sono pure in L^p. Si pone

$$\|f\|_{W^p_k} = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_p \ .$$

Corollario 20.5. *Siano $k = 2\ell$ pari e $p \in (1, \infty)$. Se $f, \Delta^\ell f \in L^p$, allora $f \in W^p_k$.*

Dimostrazione. Se $|\alpha| \leq k$, si ha

$$\begin{aligned}\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) &= (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \\ &= \frac{(i\xi)^\alpha}{1+|\xi|^k}\Big(\hat{f}(\xi) + (-1)^\ell \widehat{\Delta^\ell f}(\xi)\Big) \ .\end{aligned}$$

Sia

$$m(\xi) = \frac{(i\xi)^\alpha}{1+|\xi|^k}$$

e sia T il corrispondente operatore. Allora

$$\partial^\alpha f = Tf + (-1)^\ell T(\Delta^\ell f) \ .$$

Si verifica facilmente che m soddisfa la (20.1). $\square$

21. Funzioni quadratiche e teoria di Littlewood-Paley

Sia $I = [0,1]$. La *funzione di Rademacher* $r_n \in L^2(I)$ è definita, per $n \geq 0$, da

$$r_n(t) = (-1)^{[2^n t]} \ .$$

In altri termini, decomponendo I nell'unione degli intervalli

$$[j2^{-n}, (j+1)2^{-n}] \ , \qquad j = 0, \ldots, 2^n - 1 \ ,$$

r_n assume il valore costante $(-1)^j$ su ciascun intervallo.

Lemma 21.1. *(a) Se $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_j$, allora*

$$\int_0^1 r_{n_1}(t) r_{n_2}(t) \cdots r_{n_j}(t)\, dt = 0 \ .$$

(b) Le funzioni di Rademacher formano un sistema ortonormale, non completo, in $L^2(I)$.

Dimostrazione. Se $j = 1$, l'asserto (a) è ovvio. Supponiamo dunque $j \geq 2$. Su ognuno degli intervalli $[j2^{-n_{j-1}}, (j+1)2^{-n_{j-1}}]$ il prodotto $r_{n_1}(t) r_{n_2}(t) \cdots r_{n_{j-1}}(t)$ è costante, mentre $r_{n_j}(t)$ assume i valori ± 1 su sottoinsiemi di uguale misura. Quindi l'integrale dell'intero prodotto è nullo su ciascuno di tali intervalli.

L'ortonormalità è dunque ovvia. Si osservi infine che la funzione $r_1 r_2$ è ortogonale a tutte le r_n per concludere che il sistema non è completo. $\square$

La rilevanza delle funzioni di Rademacher è dovuta al seguente risultato, noto come *teorema di Khintchin*.

Teorema 21.2. *Sia $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(t) \in L^2(I)$. Allora per ogni $p < \infty$, la norma di f in L^p è equivalente alla norma di f in L^2, ossia*

$$c_p \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_p \leq C_p \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} .$$

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente $p > 2$. Per la disuguaglianza di Hölder, $\|f\|_2 \leq \|f\|_p$. È sufficiente dunque dimostrare la disuguaglianza opposta per $p = 2k$ ed f reale. Si ha

$$\begin{aligned} \|f\|_{2k}^{2k} &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(t) \right)^{2k} dt \\ &= \sum_{(n_1,\ldots,n_{2k}) \in \mathbb{N}^{2k}} \int_0^1 a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_{2k}} r_{n_1}(t) r_{n_2}(t) \cdots r_{n_{2k}}(t)\, dt . \end{aligned} \tag{21.1}$$

Per il Lemma 21.1(a), gli addendi non nulli nella (21.1) possono essere solo quelli in cui uno stesso indice compare un numero pari di volte. In tal caso l'integrando è una costante. Pertanto

$$\|f\|_{2k}^{2k} \leq C_k \sum_{n_1 \leq \cdots \leq n_k} a_{n_1}^2 a_{n_2}^2 \cdots a_{n_k}^2 ,$$

dove C_k è un maggiorante del numero di elementi di $\mathbb{N}^{2k}$ in cui compaiono ripetuti due volte gli indici $n_1 \leq \cdots \leq n_k$.

Ma allora

$$\begin{aligned} \|f\|_{2k}^{2k} &\leq C_k \sum_{(n_1,\ldots,n_k) \in \mathbb{N}^k} a_{n_1}^2 a_{n_2}^2 \cdots a_{n_k}^2 \\ &= C_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \right)^k , \end{aligned}$$

che fornisce la tesi per $p > 2$.

Se $1 < p < 2$, dalla disuguaglianza di Hölder segue che $\|f\|_p \leq \|f\|_2$. Sempre per la disuguaglianza di Hölder, e per la parte precedente della dimostrazione,

$$\|f\|_2^2 \leq \|f\|_p \|f\|_{p'} \leq C_{p'} \|f\|_p \|f\|_2 .$$

Quindi $\|f\|_2 \leq C_{p'} \|f\|_p$.

Rimane da considerare il caso $p = 1$. Procedendo come sopra,

$$\|f\|_{4/3}^2 \leq \|f\|_1 \|f\|_2 \leq C \|f\|_1 \|f\|_{4/3} ,$$

da cui $\|f\|_{4/3} \leq C\|f\|_1$. Essendo anche $\|f\|_1 \leq \|f\|_{4/3}$ per la disuguaglianza di Hölder, la dimostrazione è completata. $\square$

Corollario 21.3. *Sia T_n una successioni di operatori limitati su $L^p(X)$, dove X è uno spazio di misura e $p < \infty$. Se esiste una costante A tale che per ogni scelta possibile dei segni $\varepsilon_n = \pm 1$, risulta*

$$\| \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n T_n \|_{pp} \leq A \ , \tag{21.2}$$

allora vale la maggiorazione

$$\left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |T_n f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_p A \|f\|_p \ .$$

Dimostrazione. Preso $t \in [0,1]$, si consideri l'operatore

$$T_t = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(t) T_n \ ,$$

dove r_n è l'n-esima funzione di Rademacher. Per ipotesi,

$$\|T_t f\|_p^p = \leq A \|f\|_p^p \ .$$

Allora anche

$$\int_0^1 \int_X |T_t f(x)|^p \, dx \, dt = \int_0^1 \|T_t f\|_p^p \, dt \leq A \|f\|_p^p \ .$$

Cambiando ordine di integrazione, si ha internamente

$$\begin{aligned} \int_0^1 |T_t f(x)|^p \, dt &= \int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{\infty} r_n(t) T_n f(x) \right|^p \, dt \\ &\geq c_p \left(\sum_{n=0}^{\infty} |T_n f(x)|^2 \right)^{p/2} \end{aligned}$$

per il Teorema 21.2. Quindi

$$\begin{aligned} \int_X \left(\sum_{n=0}^{\infty} |T_n f(x)|^2 \right)^{p/2} \, dx &\leq c_p^{-1} \int_X \int_0^1 |T_t f(x)|^p \, dt \, dx \\ &\leq c_p^{-1} A \|f\|_p^p \ , \end{aligned}$$

come da dimostrarsi. □

Il Corollario 21.3 può essere visto nel modo seguente. Si consideri lo spazio $L^p(\ell^2)$ costituito dalle successioni $F = \{f_n\}$ di funzioni misurabili su X tali che $F(x) = \{f_n(x)\} \in \ell^2$ per quasi ogni $x \in X$ e inoltre

$$\|F\|_{L^p(\ell^2)} = \left(\int_X \|F(x)\|_{\ell^2}^p \, dx \right)^{1/p} < \infty \ .$$

Il Corollario 21.3 afferma che, sotto l'ipotesi (21.2), l'operatore

$$\mathbf{T} f = \{T_n f\}$$

è limitato da L^p a $L^p(\ell^2)$. Per dualità si ha allora il seguente corollario.

Corollario 21.4. *Sia T_n una successione di operatori che soddisfino la* (21.2)*, e sia $1 < p < \infty$. Allora, data $F = \{f_n\} \in L^p(\ell^2$, risulta*

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} T_n f_n \right\|_p \leq C_p A \|F\|_{L^p(\ell^2)} \ .$$

Dimostrazione. La (21.2) implica la stessa maggiorazione per gli operatori T_n^* e con p' al posto di p. Essendo $p > 1$, p' è finito. Dunque l'operatore $\mathbf{U}f = \{T_n^* f\}$ è limitato da $L^{p'}$ a $L^{p'}(\ell^2)$. Di conseguenza, $\mathbf{U}^*$ è limitato dal duale di $L^{p'}(\ell^2)$ a L^p.

Data $G \in L^p(\ell^2)$, si ponga

$$\langle F, G \rangle = \int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \overline{g_n(x)} \, dx \ .$$

Si verifica facilmente che le applicazioni lineari $F \mapsto \langle F, G \rangle$ sono tutti e soli i funzionali continui su $L^{p'}(\ell^2)$, ossia lo spazio duale di $L^{p'}(\ell^2)$ si identifica con $L^p(\ell^2)$. Inoltre

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}^* F, g \rangle &= \langle F, \mathbf{U} g \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n(x) \overline{T_n^* g(x)} \, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_X T_n f_n(x) \overline{g(x)} \, dx \\ &= \int_X \left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n f_n \right) \overline{g(x)} \, dx \ . \end{aligned}$$

Quindi $\mathbf{U}^* F = \sum_{n=0}^{\infty} T_n f_n$, da cui la segue la tesi. $\square$

Passiamo ora a illustrare alcuni punti salienti della teoria di Littlewood-Paley.

Fissata $\varphi \in \mathcal{S}$ tale che $\int \varphi(x) \, dx = 1$, sia $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$ la corrispondente identità approssimata. Si ponga

$$\psi_j = \varphi_{2^j} - \varphi_{2^{j+1}} \ . \tag{21.3}$$

Proposizione 21.5. *Se $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, allora la serie $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f * \psi_j$ converge a f in L^p.*

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{j=-M}^{N} f * \psi_j &= \sum_{j=-M}^{N} f * (\varphi_{2^j} - \varphi_{2^{j+1}}) \\ &= f * \varphi_{2^{-M}} - \varphi_{2^{N+1}} \ . \end{aligned}$$

Ma, per il Lemma 7.3,

$$\lim_{M \to +\infty} f * \varphi_{2^{-M}} = \lim_{\varepsilon \to 0} f * \varphi_\varepsilon = f$$

in L^p. Dimostriamo ora che

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \|f * \varphi_\varepsilon\|_p = 0 \ .$$

Se g è continua a supporto compatto, si ha

$$\|g * \varphi_\varepsilon\|_p \le \|g\|_1 \|\varphi_\varepsilon\|_p \le C\varepsilon^{-n/p'} \ ,$$

e dunque tende a 0 per $\varepsilon \to \infty$. Dato $\delta > 0$, si fissi g continua a supporto compatto in modo che $\|f - g\|_p < \delta$. Se ε è sufficientemente grande, $\|g * \varphi_\varepsilon\|_p < \delta$, e dunque

$$\begin{aligned}\|f * \varphi_\varepsilon\|_p &\le \|(f-g) * \varphi_\varepsilon\|_p + \|g * \varphi_\varepsilon\|_p \\ &\le \|f-g\|_p \|\varphi_\varepsilon\|_1 + \|g * \varphi_\varepsilon\|_p \\ &< 2\delta \ .\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\lim_{N\to+\infty} f * \varphi_{2^{N+1}} = \lim_{\varepsilon\to\infty} f * \varphi_\varepsilon = 0 \ . \qquad \square$$

Scegliamo ora φ in modo tale che $0 \le \hat\varphi(\xi) \le 1$, $\hat\varphi(\xi) = 1$ per $|\xi| \le 1 - \delta$ e $\hat\varphi(\xi) = 0$ per $|\xi| \ge 1 + \delta$ dove $0 < \delta < 1$.

Teorema 21.6. *Sia φ come sopra e siano le ψ_j definite dalla* (21.3). *Allora per $1 < p < \infty$ le norme*

$$\|f\|_p \ , \qquad \|\{f * \psi_j\}\|_{L^p(\ell^2)}$$

sono equivalenti.

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema 21.3 agli operatori $T_j f = f * \psi_j$. In base al Teorema 19.5, per ogni scelta dei segni ε_j, la somma $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon_j \psi_j$ converge a un nucleo di Calderón-Zygmund. Poiché le costanti che intervengono nelle maggiorazioni non dipendono dalla scelta dei segni, la norma dell'operatore $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon_j T_j$ si maggiora con una costante assoluta.

Per il Teorema 21.3,

$$\|\{f * \psi_j\}\|_{L^p(\ell^2)} \le C\|f\|_p \ . \tag{21.4}$$

Si ponga $\psi_j^*(x) = \overline{\psi_j(-x)}$, di modo che $\widehat{\psi^*}_j(\xi) = \overline{\hat\psi_j(\xi)}$. Ovviamente la (21.4) vale anche con ψ_j^* al posto di ψ_j. Per il Corollario 21.4,

$$\Big\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} f * \psi_j * \psi_j^*\Big\|_p \le C\|\{f * \psi_j\}\|_{L^p(\ell^2)} \ .$$

Se dimostriamo che

$$\|f\|_p \le C\Big\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} f * \psi_j * \psi_j^*\Big\|_p \ , \tag{21.5}$$

si ottiene la tesi. Osserviamo che

$$\mathcal{F}(f * \psi_j * \psi_j^*)(\xi) = |\hat{\psi}_j(\xi)|^2 \hat{f}(\xi) \ .$$

Posto

$$m(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_j(\xi)|^2 \ , \tag{21.6}$$

verifichiamo che $1/m(\xi)$ è un moltiplicatore di Mihlin-Hörmander. Si noti che $\hat{\psi}_j(\xi) = \hat{\psi}_0(2^j\xi)$. Inoltre $\hat{\psi}_0(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) - \hat{\varphi}(2\xi)$ è diverso da 0 solo per $(1-\delta)/2 < |\xi| < 1+\delta$. Pertanto esiste un intero N tale che per ogni $\xi \neq 0$, solo N termini della serie (21.6) sono diversi da 0. Quindi

$$1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}_j(\xi) \leq \sqrt{N} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_j(\xi)|^2 \right)^{1/2} \ ,$$

da cui $m(\xi) \geq 1/N$.

Per la Proposizione (20.3), m soddisfa le condizioni

$$|\partial^\alpha m(\xi)| \leq C|\xi|^{-|\alpha|} \tag{21.7}$$

per $|\alpha| \leq [n/2]+1$ (in realtà per ogni α, con costanti C_α dipendenti da α). Usando il fatto che m è limitata dal basso, è allora semplice verificare per induzione che $1/m$ soddisfa le stesse condizoni (21.7).

Essendo

$$f = \mathcal{F}^{-1}\left(m\mathcal{F}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} f * \psi_j * \psi_j^* \right) \right) \ ,$$

la (21.5) segue dal Teorema 20.2. $\square$

22. Dilatazioni non isotropiche in $\mathbb{R}^n$

Siano dati n numeri reali positivi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. La trasformazione lineare

$$\delta \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\delta^{\lambda_1} x_1, \dots, \delta^{\lambda_n} x_n)$$

si chiama *dilatazione non isotropica* di parametro $\delta > 0$. Il termine "non isotropico" sembra essere antitetico al termine "isotropico", che si intende riferito alle dilatazioni ordinarie; in realtà queste costituiscono un caso particolare "non isotropico", corrispondente a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$.

Buona parte delle nozioni relative alle dilatazioni ordinarie possono essere estese alle dilatazioni non isotropiche. Per esempio, diremo che una funzione f è omogenea di grado α se

$$f(\delta \cdot x) = \delta^\alpha f(x) \ .$$

Si osservi che

$$\int f(\delta \cdot x)\, dx = \delta^{-Q} \int f(x)\, dx \ , \tag{22.1}$$

con

$$Q = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ .$$

Questo numero si chiama la *dimensione omogenea* di $\mathbb{R}^n$ rispetto alle dilatazioni date.

Di conseguenza, una distribuzione K si dirà omogenea di grado α se, posto $f_\delta(x) = \delta^{-Q} f(\delta^{-1} \cdot x)$, si ha

$$\langle K, f_\delta \rangle = \delta^\alpha \langle K, f \rangle \ .$$

Per esempio, δ_0 è omogenea di grado $-Q$. In analogia a quanto visto per le dilatazioni isotropiche, se una distribuzione K è omogenea di grado α e $K \in C_{pq}$, allora

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\Re e \alpha}{Q} \ . \tag{22.2}$$

Si noti che due n-uple di esponenti, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$, individuano le stesse distribuzioni omogenee se e solo se c'è una costante $a > 0$ tale che $\lambda'_j = a\lambda_j$ per ogni j. In questo caso i gradi di omogeneità riferiti alle due famiglie di dilatazioni differiscono per un fattore a, così come la dimensione omogenea. Ciò fa sì che la relazione (22.2) tra p e q rimanga inalterata.

Una funzione $\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ si chiama una *norma omogenea* se valgono le seguenti proprietà:

(1) è continua;
(2) $\rho(x) = 0$ se e solo se $x = 0$;
(3) $\rho(-x) = \rho(x)$;
(4) $\rho(\delta \cdot x) = \delta\rho(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$.

Proposizione 22.1. *(a) Se $\rho(x)$ è una norma omogenea, esiste una costante $c \geq 1$ tale che*

$$\rho(x + y) \leq c\big(\rho(x) + \rho(y)\big)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(b) Esiste una norma omogenea che è C^∞ fuori dall'origine.

Dimostrazione. La funzione ρ assume minimo $m > 0$ sulla sfera $|x| = 1$. Da ciò segue che

$$B_m = \{x : \rho(x) \leq m\} \subseteq \{x : |x| \leq 1\} \ .$$

Si supponga infatti per assurdo che vi sia un punto x tale che $\rho(x) \leq m$ e $|x| > 1$. Si consideri la funzione $r \mapsto r \cdot x$. Per $r = 1$ l'immagine è fuori dalla sfera unitaria, mentre per $r \to 0$ tende a 0. Esiste allora $r < 1$ tale che $|r \cdot x| = 1$. Ma $\rho(r \cdot x) = r\rho(x) < m$, il che è assurdo.

Di conseguenza B_m è compatto. Poiché $x \mapsto m \cdot x$ è un omeomorfismo, anche B_1 è compatto. Ma allora $B_1 + B_1$ è compatto; sia c il massimo assunto da ρ su $B_1 + B_1$.

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, si ponga $s = \rho(x) + \rho(y)$. Allora $s^{-1} \cdot x$ e $s^{-1} \cdot y$ sono in B_1, per cui

$$\rho(s^{-1} \cdot x + s^{-1} \cdot y) \leq c \ ,$$

ossia

$$\rho(x + y) \leq cs = c\big(\rho(x) + \rho(y)\big) \ .$$

Per dimostrare la (b), si osservi che, dato $x \neq 0$, la funzione

$$\delta \longmapsto |\delta \cdot x|^2 = \delta^{2\lambda_1} x_1^2 + \cdots + \delta^{2\lambda_n} x_n^2$$

è continua e strettamente crescente in $[0, +\infty)$, vale 0 per $\delta = 0$ e tende all'infinito per $\delta \to \infty$. Quindi esiste uno e un solo $\delta > 0$ tale che $|\delta \cdot x| = 1$. Si ponga allora

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{\delta} & \text{se } x \neq 0 \ . \end{cases}$$

Le proprietà (2),(3),(4) sono ovvie. Se mostriamo che ρ è C^∞ fuori dall'origine, la continuità in 0 segue per il fatto che ρ è omogenea di grado 1. La funzione $\delta(x) = 1/\rho(x)$ è implicitamente definita dall'equazione

$$\Phi(\delta, x) = \delta^{2\lambda_1} x_1^2 + \cdots + \delta^{2\lambda_n} x_n^2 = 1 \ .$$

Ma

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \delta} = 2\lambda_1 \delta^{2\lambda_1 - 1} x_1^2 + \cdots + 2\lambda_n \delta^{2\lambda_n - 1} x_n^2 \ ,$$

che è diverso da 0 per $x \neq 0$. Per il teorema delle funzioni implicite, $\delta(x)$, e dunque $\rho(x)$, è C^∞. $\square$

Altre norme omogenee sono date da

$$\rho_p(x) = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^{p/\lambda_j} \right)^{1/p} \ , \qquad \rho_\infty(x) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|^{1/\lambda_j} \ ,$$

con $0 < p < \infty$. Esse non sono in generale C^∞, ma hanno il vantaggio di essere esplicite.

Se ρ e ρ' sono due norme omogenee riferite alla stessa famiglia di dilatazioni, esistono costanti $c_1, c_2 > 0$ tali che

$$\rho(x) \leq c_1 \rho'(x) \leq c_2 \rho(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Inoltre si verificano facilmente le seguenti relazioni con la norma euclidea: se $\lambda = \min \lambda_j$ e $\Lambda = \max \lambda_j$,

$$\begin{aligned} \rho(x) &\leq \begin{cases} C|x|^{1/\Lambda} & \text{se } |x| \leq 1 \\ C|x|^{1/\lambda} & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases} \\ \rho(x) &\geq \begin{cases} C|x|^{1/\lambda} & \text{se } |x| \leq 1 \\ C|x|^{1/\Lambda} & \text{se } |x| \geq 1 \ . \end{cases} \end{aligned} \tag{22.3}$$

Fissate una famiglia di dilatazioni con esponenti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e una corrispondent norma omogenea ρ, si ottiene una quasi-distanza su $\mathbb{R}^n$ ponendo

$$d(x, y) = \rho(x - y) \ .$$

Essa è una quasi-distanza nel senso del paragrafo 16 che, per quanto visto sopra induce su $\mathbb{R}^n$ la topologia euclidea. Segue dalla (22.1) che se $B_r = \{x : \rho(x) < r\}$, allora

$$|B_r| = r^Q |B_1| \ .$$

In particolare la misura di Lebesgue è doubling, per cui $\mathbb{R}^n$ acquista la struttura di spazio di natura omogenea. Utilizzando i risultati del paragrafo 16, ciò consente di estendere buona parte della teoria di Calderón-Zygmund sugli integrali singolari al contesto non isotropico. La condizione di Calderón-Zygmund (18.1) va riscritta nella forma

$$\int_{\rho(x) > A\rho(h)} |K(x+h) - K(x)| \, dx \leq C \ , \tag{22.4}$$

con A sufficientemente grande rispetto alla costante c che figura nella disuguaglianza triangolare ($A = 4c$ è sufficiente).

Il Teorema 18.1 si estende senza variazioni al caso non isotropico, così come i Teoremi 19.3 e 19.5, pur di definire $f^{(j)}(x) = 2^{-Qj} f(2^{-j} \cdot x)$. In base alla (22.3), nell'ipotesi (a) del Teorema 19.5 è indifferente mettere il modulo $|x|$ o una norma omogenea $\rho(x)$. Quanto alle norme di Besov, si possono definire spazi di Besov non isotropici, sostituendo la (19.2) con

$$\|f\|_{\tilde{B}^\alpha_{1\infty}} = \|f\|_1 + \sup_{h \neq 0} \rho(h)^{-\alpha} \int |f(x+h) - f(x)| \, dx \ .$$

Per la (22.3) si ha

$$B^\alpha_{1\infty} \subset \tilde{B}^{\lambda\alpha}_{1\infty} \ , \qquad \tilde{B}^\alpha_{1\infty} \subset B^{\alpha/\Lambda}_{1\infty} \ .$$

Quindi anche l'ipotesi (c) nei Toeoremi 19.3 e 19.5 può essere formulata indifferentemente in termini di spazi isotropici e non isotropici.

Passando alla condizione di Mihlin-Hörmander, si noti che se una funzione f è omogenea di grado s (rispetto a una famiglia di dilatazioni non isotropiche), allora $\partial_j f$ è omogenea di grado $s - \lambda_j$. Di conseguenza, se m è C^∞ fuori dall'origine e omogenea di grado 0, vale il seguente analogo della (20.1):

$$|\partial^\alpha m(\xi)| \leq C_\alpha \rho(\xi)^{-d(\alpha)} \ ,$$

dove

$$d(\alpha) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j$$

(si noti che questi ordini non isotropici di derivazione non sono necessariamente interi).

La condizione di Mihlin-Hörmander non isotropica che sostituisce la (20.2) diventa così:

$$\frac{1}{R^Q}\int_{R<\rho(\xi)<2R} |\partial^\alpha m(\xi)|\, d\xi \le C_\alpha R^{-2d(\alpha)} \ . \tag{22.5}$$

Si può verificare (ma tralasciamo i dettagli) che è sufficiente verificare la (22.5) per un numero finito di derivate (la condizione $d(\alpha) \le Q/2+\Lambda$ basta) per ottenere l'analogo del Teorema 20.2.

Vediamo un'applicazione di una struttura non isotropica. Si consideri l'operatore del calore

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

in $\mathbb{R}^{n+1}$. Esso non è ellittico; tuttavia la formula

$$\widehat{Lf}(\tau,\xi) = (i\tau + |\xi|^2)\hat f(\tau,\xi)$$

mostra che il *simbolo* $\sigma(\tau,\xi) = i\tau + |\xi|^2$ di L si annulla solo per $(\tau,\xi) = (0,0)$. Si dice allora che L è *ipoellittico*. Il seguente enunciato va confrontato con il Corollario 20.4.

Corollario 22.2. *Sia $F \in \mathcal{S}'$ tale che $LF \in L^p$ per qualche $p \in (1,\infty)$. Allora le derivate seconde $\partial_{x_j}\partial_{x_k}F$ e la derivata prima $\partial_t F$ sono in L^p.*

Dimostrazione. Si considerino i moltiplicatori

$$m_{jk}(\tau,\xi) = -\frac{\xi_j\xi_k}{i\tau + |\xi|^2} \ , \qquad m_0(\tau,\xi) = \frac{i\tau}{i\tau + |\xi|^2} \ .$$

Essi sono C^∞ fuori dall'origine e omogenei di grado 0 rispetto alle dilatazioni $\delta\cdot(\tau,\xi) = (\delta^2\tau, \delta\xi)$. La condizione di Mihlin-Hörmander è dunque soddisfatta. Il resto procede come nella dimostrazione del Corollario 20.4. □

23. Integrali singolari e operatori massimali lungo curve

In questo paragrafo utilizziamo tutti gli strumenti accumulati finora per studiare un tipo di operatore a integrali singolari che non è coperto dalla teoria di Calderón-Zygmund.

In R^2 consideriamo la parabola $y = x^2$ e definiamo la distribuzione

$$\langle K, f\rangle = p.v.\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,t^2)\,\frac{dt}{t} \ . \tag{23.1}$$

Chiameremo il corrispondente operatore di convoluzione $Hf = f*K$ *trasformata di Hilbert lungo la parabola.*

È naturale introdurre in $\mathbb{R}^2$ le dilatazioni $\delta\cdot(x,y) = (\delta x, \delta^2 y)$, in quanto esse lasciano invariata la parabola. Si noti che $Q = 3$ e che K è omogenea del grado critico -3 rispetto a queste dilatazioni.

Ne consegue che H commuta con le dilatazioni e per esso si pone il problema della limitatezza da L^p in sé. Poiché K non è una misura finita, la limitatezza per $p = 1$ è esclusa. Pur non essendo noto se H è di tipo debole (1,1), dimostreremo che tale operatore è limitato su L^p per $1 < p < \infty$. Dimostreremo inoltre che l'operatore massimale

$$\mathcal{M}f(x,y) = \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} |f(x-t, y-t^2)|\, dt \tag{23.2}$$

è limitato su L^p per $1 < p \leq \infty$.

Il primo passo consiste in una decomposizione diadica di K. Si prenda una funzione $\psi(t)$ su $\mathbb{R}$ che sia C^∞, con supporto in $[1/2, 4] \cup [-4, -1/2]$, e tale che

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi(2^{-j}t) = 1 \tag{23.3}$$

per ogni $t \neq 0$. Si consideri quindi la misura $\mu_j \in M(\mathbb{R}^2)$ data da

$$\int f(x,y)\, d\mu_j(x,y) = \int f(t,t^2)\psi(2^{-j}t)\, \frac{dt}{t} \ . \tag{23.4}$$

Ognuna delle μ_j è ottenuta dalla μ_0 componendo con una dilatazione non isotropica di rapporto 2^j. Infatti, cambiando variabile nella (23.4), si ha

$$\int f(x,y)\, d\mu_j(x,y) = \int f(2^j t, 2^{2j}t^2)\psi(t)\, \frac{dt}{t} = \int f(2^j x, 2^{2j} y)\, d\mu_0(x,y) \ .$$

In analogia con la notazione introdotta nel paragrafo 19, possiamo scrivere che $\mu_j = \mu_0^{(j)}$, e quindi che

$$K = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_0^{(j)} \ .$$

Osserviamo che, modificando leggermente l'Esempio 2 del paragrafo 13 e utilizzando la (22.3), si ottiene che per $|(\xi,\eta)| > 1$

$$\hat{\mu}_0(\xi,\eta) \leq C|(\xi,\eta)|^{-1/2} \leq C\rho(\xi,\eta)^{-1/2} \ . \tag{23.5}$$

Qui ρ indica una qualunque norma omogenea riferita alle dilatazioni considerate. Inoltre $\hat{\mu}_0(0,0) = 0$ e, per il teorema del valor medio, se $|(\xi,\eta)| < 1$,

$$\hat{\mu}_0(\xi,\eta) \leq C|(\xi,\eta)| \leq C\rho(\xi,\eta) \ . \tag{23.6}$$

Si noti che le (23.5) e (23.6) sono già sufficienti ad assicurare che la serie

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\mu}_j(\xi,\eta)| = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\mu}_0(2^j\xi, 2^{2j}\eta)|$$

converge a una funzione limitata, e quindi che H è limitato su L^2.

Il secondo passo consiste nell'immergere H in una famiglia analitica di operatori modulandone la regolarità.

Si ponga $\Phi^s = \delta_0 \otimes (\omega I_p^s)$, dove I_p^s è il nucleo pari di integrazione frazionaria di ordine s e ω è una funzione C^∞ a supporto compatto che valga 1 in un intorno di 0. La presenza di ω non modifica il fatto che $\Phi^0 = \delta_0$.

Definiamo $\mu_s = \mu_0 * \Phi^s$ e quindi

$$H_s = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_s^{(j)} \ . \tag{23.7}$$

Ci interessa considerare gli s con parte reale vicina a 0, diciamo $|\Re\mathrm{e}\, s| < 1/2$.

Lemma 23.1. *Se $|\Re\mathrm{e}s| < 1/2$, H_s è limitato su L^2.*

Dimostrazione. Poiché μ_s ha supporto compatto, la sua trasformata di Fourier è analitica. Essendo $\hat{\mu}_s(0,0) = 0$, vale la (23.6) con μ_s al posto di μ_0.

Inoltre $\hat{\mu}_s(\xi,\eta) = \hat{\mu}_0(\xi,\eta)\hat{\Phi}_s(\eta)$, dove

$$\hat{\Phi}_s(\eta) = c_s I_p^{1-s} * \hat{\omega}(\eta) \ .$$

Dunque $\hat{\mu}_s$ è C^∞. Per quanto riguarda il comportamento all'infinito, ooserviamo che, essendo $\Re\mathrm{e}(1-s) > 0$, I_p^{1-s} è localmente integrabile ed uguale, a meno di una costante moltiplicativa, a $|\eta|^{-s}$. Posto $\sigma = \Re\mathrm{e}s$, si ha

$$\begin{aligned}
|I_p^{1-s} * \hat{\omega}(\eta)| &\le \int |\tau|^{-\sigma} |\hat{\omega}(\eta-\tau)|\, d\tau \\
&\le C \int |\tau|^{-\sigma}(1+|\eta-\tau|)^{-N}\, d\tau \\
&\le C \int_{|\eta-\tau|<|\eta|/2} |\eta|^{-\sigma}(1+|\eta-\tau|)^{-N}\, d\tau + C\int_{|\eta-\tau|>|\eta|/2} |\tau|^{-\sigma}|\eta-\tau|^{-N}\, d\tau \\
&\le C|\eta|^{-\sigma}\int (1+|\eta-\tau|)^{-N}\, d\tau + C|\eta|^{-\sigma-N+1}\int_{|1-u|>1/2} |u|^{-\sigma}|1-u|^{-N}\, du \\
&\le C|\eta|^{-\sigma} \ .
\end{aligned}$$

In definitiva,

$$|\hat{\Phi}_s(\eta)| \le C(1+|\eta|)^{-\sigma} \ .$$

Quindi, se $|(\xi,\eta)| > 1$,

$$|\hat{\mu}_s(\xi,\eta)| \le c_s |(\xi,\eta)|^{-1/2}(1+|\eta|)^{-\sigma} \le \begin{cases} c_s|(\xi,\eta)|^{-1/2} & \text{se } \sigma \ge 0 \\ c_s|(\xi,\eta)|^{-1/2-\sigma} & \text{se } \sigma < 0 \ . \end{cases}$$

Secondo quanto già visto, ciò implica che la serie

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\mu}_s(2^j\xi, 2^{2j}\eta)|$$

converge a una funzione limitata, e dunque che H_s è limitato su L^2. $\square$

Lemma 23.2. *Se $\Re\mathrm{e}s > 0$, H_s è limitato su L^p per $1 < p < \infty$.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare, in base al Teorema 19.3, che $\mu_s \in B^\alpha_{1\infty}$ per qualche $\alpha > 0$ (le ipotesi (a) e (b) sono ovviamente verificate). Si ha

$$\begin{aligned}
\langle \mu_s, f\rangle &= \langle \mu_0 * \Phi^s, f\rangle \\
&= c_s \int f(t, t^2+y)|y|^{-1+s}\omega(y)\frac{\psi(t)}{t}\, dt\, dy \\
&= c_s \int f(x,y)|y-x^2|^{-1+s}\omega(y-x^2)\frac{\psi(x)}{x}\, dx\, dy \ .
\end{aligned}$$

Dunque μ_s è effettivamente una funzione integrabile, precisamente

$$\mu_s(x,y) = c_s|y-x^2|^{-1+s}\omega(y-x^2)\frac{\psi(x)}{x} = |y-x^2|^{-1+s}\lambda(x,y) \ ,$$

dove λ è C^∞ a supporto compatto. Per stimare l'integrale

$$\int |\mu_s(x+h, y+k) - \mu_s(x,y)|\, dx\, dy \ ,$$

si procede come nell'Esempio del paragrafo 19, decomponendo il dominio di integrazione in due parti, secondo che la distanza del punto (x,y) dalla parabola sia maggiore o minore di $2|(h,k)|$. In questo modo si verifica che $\mu_s \in B^\sigma_{1\infty}$. $\square$

Teorema 23.3. *H è limitato su L^p per $1 < p < \infty$.*

Dimostrazione. Fissato $p \in (1,\infty)$, si scelgano q compreso tra 1 e p, e una striscia $a \leq \Re\mathrm{e}\, s \leq b$ con $-1/2 < a < 0 < b < 1/2$ in modo tale che, se

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{q} \ ,$$

sia

$$0 = \theta a + (1-\theta) b \ .$$

La tesi segue allora dal Teorema di interpolazione per famiglie analitiche di operatori. $\square$

Passiamo ora all'operatore massimale $\mathcal{M}$ definito dalla (23.2). Poiché stiamo integrando su insiemi di misura di Lebesgue nulla, occorre verificare che $\mathcal{M}f$ è ben definita quando f è solo localmente integrabile.

La funzione di tre variabili $g(x,y,t) = f(x+t, y+t^2)$ è pure localmente integrabile. Restringendoci al cubo $|x| \leq N, |y| \leq N, |t| \leq N$, si ottiene una funzione integrabile. Dunque g è integrabile in t per quasi ogni (x,y). Facendo tendere N ha infinito, si vede allora che per quasi ogni (x,y) gli integrali che compaiono in $\mathcal{M}f$ sono ben definiti.

Si prenda una funzione ψ come nella (23.3), con l'ulteriore condizione $\psi \geq 0$.

Lemma 23.4. *Posto*

$$\mathcal{M}'f(x,y) = \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \int |f(x-t, y-t^2)|\psi(2^{-j}t)\, dt \ ,$$

si ha $\mathcal{M}'f(x,y) \leq c_1 \mathcal{M}f(x,y) \leq c_2 \mathcal{M}'f(x,y)$ per ogni f e ogni (x,y).

Analogamente, se

$$M'f(x,y) = \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-2j} \int |f(x-u_1, y-u_2)|\psi(2^{-j}|u|)\, du \ ,$$

si ha $M'f(x,y) \leq C_1 Mf(x,y) \leq C_2 M'f(x,y)$ per ogni f e ogni (x,y).

Dimostrazione. Poiché il supporto di $\psi(2^{-j}t)$ è contenuto in $I_j = [-2^{j+2}, 2^{j+2}]$, si ha

$$2^{-j} \int |f(x-t, y-t^2)|\psi(2^{-j}t)\, dt \leq \frac{8}{|I_j|} \int_{I_j} |f(x-t, y-t^2)|\, dt \ ,$$

per cui $M'f(x,y) \leq 8\mathcal{M}f(x,y)$.

Se ora $2^j \le r < 2^{j+1}$, si ha anche

$$\begin{aligned}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}|f(x-t,y-t^2)|\,dt &\le \frac{1}{2^{j+1}}\int_{-2^{j+1}}^{2^{j+1}}|f(x-t,y-t^2)|\,dt\\ &\le \frac{1}{2^{j+1}}\sum_{-\infty}^{j+2}{}_k\int|f(x-t,y-t^2)|\psi(2^{-k}t)\,dt\\ &= \frac{1}{2^{j+1}}\sum_{-\infty}^{j+2}{}_k 2^k\mathcal{M}'f(x,y)\\ &= 4\mathcal{M}'f(x,y)\ .\end{aligned}$$

Per M' si procede in modo analogo. $\square$

Indichiamo con ν la misura

$$\int f(x,y)\,d\nu(x,y)=\int f(t,t^2)\psi(t)\,dt\ ,$$

poniamo $\Psi(x,y)=\psi(|(x,y)|)$, e scegliamo la costante k in modo che

$$\int d\nu(x,y)=k\int\Psi(x,y)\,dx\,dy\ .$$

Così facendo, $\nu-\Psi$ ha integrale nullo. Si osservi allora che

$$\begin{aligned}\mathcal{M}'f(x,y) &= \sup_{j\in\mathbb{Z}}|f|*\nu^{(j)}(x,y)\\ &\le \sup_{j\in\mathbb{Z}}|f|*\Psi^{(j)}(x,y)+\sup_{j\in\mathbb{Z}}\big||f|*(\nu-\Psi)^{(j)}(x,y)\big|\\ &\le M'f(x,y)+\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\big||f|*(\nu-\Psi)^{(j)}(x,y)\big|^2\right)^{1/2}\ .\end{aligned}\tag{23.8}$$

Teorema 23.5. *L'operatore massimale $\mathcal{M}$ è limitato su L^p per $1<p\le\infty$.*

Dimostrazione. L'enunciato è ovvio

Per la (23.8) e il Lemma 23.4, è sufficiente dimostrare che l'operatore

$$f\longmapsto\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\big|f*(\nu-\Psi)^{(j)}(x,y)\big|^2\right)^{1/2}$$

è limitato su L^p per $1<p<\infty$. In base al Corollario 21.3, consideriamo gli operatori lineari

$$T_\varepsilon f=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\varepsilon_j f*(\nu-\Psi)^{(j\ \cdot)}$$

La limitatezza su L^p si dimostra con lo stesso procedimento di interpolazione complessa utilizzato per la trasformata di Hilbert lungo la parabola. $\square$

Corollario 23.6. *Sia $f\in L^p$, $1<p\le\infty$. Per quasi ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*

$$\lim_{r\to0}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}f(x+t,y+t^2)\,dt=f(x,y)\ .$$

24. Operatori in spazi prodotto

In questo paragrafo vediamo alcuni problemi che si riferiscono alla struttura di $\mathbb{R}^n$ come prodotto cartesiano di spazi di dimensione inferiore.

Lemma 24.1. *Siano $K_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_1})$, $K_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_2})$. Se $K_j \in C_{pq}(\mathbb{R}^{n_j})$, $j = 1, 2$, allora $K = K_1 \otimes K_2 \in C_{pq}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ e $\|K\|_{pq} = \|K_1\|_{pq}\|K_2\|_{pq}$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre $p \leq q$. Supponiamo anche, inizialmente, che K_1, K_2 siano funzioni. Presa $f(x, y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$, si ha

$$\begin{aligned}\|K * f\|_q^q &= \int \left| \int K_1(x - x')K_2(y - y')f(x', y')\, dx'\, dy' \right|^q dx\, dy \\ &= \int \left| \int K_1(x - x')(K_2 * f_{x'})(y)\, dx' \right|^q dx\, dy\ .\end{aligned}$$

Per y fissato, si ponga $g_y(x) = K_2 * f_x(y)$. Allora, per la disuguaglianza di Minkowski,

$$\begin{aligned}\|K * f\|_q^q &= \int |K_1 * g_y(x)|^q\, dx\, dy \\ &= \int \|K_1 * g_y\|_q^q\, dy \\ &\leq \|K_1\|_{pq}^q \int \|g_y\|_p^q\, dy \\ &= \|K_1\|_{pq}^q \int \left(\int |K_2 * f_x(y)|^p\, dx \right)^{q/p} dy \\ &\leq \|K_1\|_{pq}^q \left(\int \left(\int |K_2 * f_x(y)|^q\, dy \right)^{p/q} dx \right)^{q/p} \\ &= \|K_1\|_{pq}^q \left(\int \|K_2 * f_x\|_q^p\, dx \right)^{q/p} \\ &\leq \|K_1\|_{pq}^q \|K_2\|_{pq}^q \left(\int \|f_x\|_p^p\, dx \right)^{q/p} \\ &= \|K_1\|_{pq}^q \|K_2\|_{pq}^q \|f\|_p^q\ .\end{aligned}$$

Per K_1, K_2 generiche, si arriva alla stessa conclusione utilizzando identità approssimate nelle due variabili separatamente.

Ciò dimostra che $\|K\|_{pq} \leq \|K_1\|_{pq}\|K_2\|_{pq}$. Scegliendo $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ in modo opportuno, si ottiene la disuguaglianza opposta. $\square$

In modo sostanzialmente analogo si dimostra quanto segue.

Lemma 24.2. *Sia M un operatore massimale su $\mathbb{R}^n$,*

$$Mf(x) = \sup_{j \in J} |f * \mu_j(x)|\ ,$$

dove le μ_j sono misure di probabilità. Si definisca M' su $\mathbb{R}^{n+m}$ come

$$M'f(x, y) = \sup_{j \in J} |f * (\mu_j \otimes \delta_0)(x, y)|\ .$$

Se M è limitato su $L^p(\mathbb{R}^n)$, allora M' è limitato su $L^p(\mathbb{R}^{n+m})$ con la stessa norma.

Corollario 24.3. *In* $\mathbb{R}^2$ *i seguenti operatori sono limitati:*

(a) *la trasformata di Hilbert doppia:*

$$Hf(x,y) = \lim_{\varepsilon,\delta\to 0} \int_{|t|>\varepsilon, |u|>\delta} f(x-t, y-u)\frac{1}{tu}\,dt\,du \ , \tag{24.1}$$

per $1 < p < \infty$*;*

(b) *la funzione massimale forte:*

$$Mf(x,y) = \sup_{r,s>0} \frac{1}{rs}\int_{-r}^{r}\int_{-s}^{s} |f(x-t,y-u)|\,dt\,du \ . \tag{24.2}$$

per $1 < p < \infty$.

Dimostrazione. La (a) segue dal Lemma 24.1 in quanto H è il prodotto tensoriale delle trasformate di Hilbert H_x, H_y in $\mathbb{R}$.

La (b) segue dal fatto che, indicando con M_x, M_y le funzioni massimali di Hardy-Littlewood (unidimensionali) nelle due variabili, si ha

$$Mf \le M_y(M_x f) \ .$$

La tesi segue allora dal Lemma 24.2. □

Si può notare che né la trasformata di Hilbert doppia, né la funzione massimale forte, sono di tipo debole (1,1). Per esempio, se f è la funzione caratteristica del quadrato $[-1,1]\times[-1,1]$, si ha

$$Mf(x,y) \ge \frac{c}{(1+|x|)(1+|y|)} \ .$$

Si verifica facilmente che $|\{(x,y) : Mf(x,y) > 1/2\}| = \infty$. □

Ovviamente gli operatori (24.1) e (24.2) hanno analoghi in n dimensioni.

I risultati precedenti danno luogo a una decomposizone di Littlewood-Paley a più parametri. Per semplicità di notazioni, limitiamoci a lavorare in $\mathbb{R}^2$, introducendo le dilatazioni a due parametri $(x,y)\mapsto(\delta x, \varepsilon y)$, con $\delta,\varepsilon > 0$.

Si consideri una partizione diadica dell'unità in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi(2^j\xi) \ ,$$

dove ψ è C^∞ a supporto in $[-4,-1/2]\cup[1/2,4]$. Allora

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \psi(2^j\xi)\psi(2^k\eta)$$

è una partizione dell'unità C^∞ in $\mathbb{R}^2$ privato degli assi coordinati, in cui ogni termine

$$\Psi_{jk}(\xi,\eta) = \psi(2^j\xi)\psi(2^k\eta)$$

ha supporto nell'unione di quattro rettangoli, precisamente dove $|\xi|\sim 2^{-j}$ e $|\eta|\sim 2^{-k}$.

Teorema 24.4. *Sia* $\Delta_{jk} f = \mathcal{F}^{-1}(\Psi_{jk}\hat{f})$. *Le norme*

$$\|f\|_p \ , \qquad \|\{\Delta_{jk} f\}\|_{L^p(\ell^2)}$$

sono equivalenti per $1 < p < \infty$.

Dimostrazione. Premettiamo una osservazione sulle serie di Rademacher in due variabili. Sia

$$g(t,s) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} r_j(t) r_k(s) \ .$$

Allora, se $0 < p < \infty$, le norme $\|g\|_p$ e $\|g\|_2$ sono equivalenti. Come nella dimostrazione del Teorema 21.2, basta considerare $p > 2$ e dimostrare che $\|g\|_p \leq C\|g\|_2$. Per la disuguaglianza di Minkowski, si ha

$$\begin{aligned}
\|g\|_p^p &= \iint \left| \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} r_j(t) r_k(s) \right|^p dt\, ds \\
&\leq C \int \left(\sum_j \left| \sum_k a_{jk} r_k(s) \right|^2 \right)^{p/2} ds \\
&\leq C \left(\sum_j \left(\int \left| \sum_k a_{jk} r_k(s) \right|^p ds \right)^{2/p} \right)^{p/2} \\
&\leq C \left(\sum_{jk} |a_{jk}|^2 \right)^{p/2} \qquad .
\end{aligned}$$

Per poter ripetere le considerazioni svolte nel paragrafo 21, basta allora verificare che i moltiplicatori

$$m_{ts}(\xi,\eta) = \sum_{j,k} r_j(t) r_k(s) \Psi_{jk}(\xi,\eta)$$

forniscono operatori limitati su $L^p(\mathbb{R}^2)$ uniformemente rispetto a t, s. Ma basta osservare che m_{ts} è il prodotto di due moltiplicatori di Mihlin-Hörmander nelle due variabili separatamente e applicare il Lemma 24.1. $\square$

25. Trasferimento di convolutori e il metodo di rotazione di Calderón

Segue dal Teorema 24.1 che se $K_0 \in C_{pp}(\mathbb{R}^k)$ e $n > k$, la distribuzione $K = K_0 \otimes \delta_0$ (dove la delta di Dirac va ovviamente intesa in $\mathbb{R}^{n-k}$) è in $C_{pp}(\mathbb{R}^n)$. Questo è un primo esempio di trasferimento di convolutore, in questo caso da $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^n$.

In particolare la *trasformata di Hilbert lungo una retta*

$$H_v f(x) = p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - tv) \frac{1}{t}\, dt \tag{25.1}$$

è limitata su $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 < p < \infty$, qualunque sia il vettore $v \neq 0$. Si noti che H_v dipende solo dalla direzione e dal verso di v, e non dal suo modulo. Inoltre $H_{-v} = -H_v$ e la norma di H_v non dipende da v.

Da questa osservazione segue il seguente teorema sugli integrali singolari con nucleo omogeneo e dispari.

Teorema 25.1. *Sia $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ e dispari. Allora $K(x) = p.v.\Omega(x')|x|^{-n}$ è un convolutore di L^p per $1 < p < \infty$.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_{|y|>\varepsilon} f(x-y)K(y)\,dy &= \int_{S^{n-1}} \Omega(y') \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x-ty')\frac{1}{t}\,dt\,dy' \\
&= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} \Omega(y')\left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x-ty')\frac{1}{t}\,dt + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x-ty')\frac{1}{t}\,dt\right)dy' \\
&= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} \Omega(y')\int_{|t|>\varepsilon} f(x-ty')\frac{1}{t}\,dt\,dy' \ .
\end{aligned}$$

Quindi

$$K * f(x) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} \Omega(y')H_{y'}f(x)\,dy' \ .$$

Per la disuguaglianza di Minkowski,

$$\begin{aligned}
\|K*f\|_p &\le \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\Omega(y')|\|H_{y'}f\|_p\,dy' \\
&\le C\|\Omega\|_1\|f\|_p \ . \qquad \square
\end{aligned}$$

L'ipotesi che Ω sia dispari implica automaticamente che $\int_{S^{n-1}} \Omega(y')\,dy' = 0$. Se da un lato non si richiede nessuna forma di regolarità su Ω, dall'altro non si ottiene il tipo debole (1,1).

Vediamo ora un'altra procedura di trasferimento, in questo caso da una dimensione maggiore a una minore. Decomponendo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, indichiamo con $(x,y) = (x_1, \dots x_k, y_1, \dots y_{n-k})$ le variabili.

Inizialmente consideriamo un nucleo $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e poniamo

$$K_0(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} K(x,y)\,dy \ .$$

Lemma 25.2. $\|K_0\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^k)} \le C\|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)}$.

Dimostrazione. Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$, e $R > 0$. Si ponga $g_R(x,y) = f(x)\chi_{B_R}(y)$ e $g^R(x,y) = f(x)\big(1-\chi_{B_R}(y)\big)$.

Vogliamo dimostrare che

$$K_0 * f(x) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{|B_{R/2}|}\int_{B_{R/2}} K * g_R(x,y)\,dy \tag{25.2}$$

nella norma di $L^p(\mathbb{R}^k)$. Avremo allora, per le disuguaglianze di Minkowski e di Hölder,

$$\begin{aligned}
\|K_0 * f\|_p &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{|B_{R/2}|} \left\| \int_{B_{R/2}} K * g_R(\cdot, y)\, dy \right\|_p \\
&\le \sup_R \frac{1}{|B_{R/2}|} \int_{B_{R/2}} \|K * g_R(\cdot, y)\|_p\, dy \\
&\le \sup_R \left(\frac{1}{|B_{R/2}|} \int_{B_{R/2}} \|K * g_R(\cdot, y)\|_p^p\, dy \right)^{1/p} \\
&\le CR^{-(n-k)/p} \|K * g_R\|_p \\
&\le CR^{-(n-k)/p} \|K\|_{pp} \|f\|_p \|\chi_{B_R}\|_p \\
&\le C\|K\|_{pp}\|f\|_p \ .
\end{aligned}$$

Passiamo dunque a dimostrare la (25.2). Essendo

$$K_0 * f(x) - K * g_R(x, y) = K * g^R(x, y) \ ,$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
K_0 * f(x) - &\frac{1}{|B_{R/2}|} \int_{B_{R/2}} K * g_R(x, y)\, dy \\
&= \frac{1}{|B_{R/2}|} \int_{B_{R/2}} \big(K_0 * f(x) - K * g_R(x, y)\big)\, dy \\
&= \frac{1}{|B_{R/2}|} \int_{B_{R/2}} K * g^R(x, y)\, dy \ .
\end{aligned}$$

Si noti che se $|y| < R/2$, posto $K^{R/2}(x, y) = K(x, y)\big(1 - \chi_{B_{R/2}}(y)\big)$, si ha

$$\begin{aligned}
K * g^R(x, y) &= \int_{|u|>R} K(x - t, y - u) f(t)\, dt\, du \\
&= \int_{|u|>R} K^{R/2}(x - t, y - u) f(t)\, dt\, du \\
&= K^{R/2} * g^R(x, y) \ .
\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
\left\| K_0 * f - \frac{1}{|B_{R/2}|} \int_{B_{R/2}} K * g_R(\cdot, y)\, dy \right\|_p &= \left\| \frac{1}{|B_{R/2}|} \int_{B_{R/2}} K * g^R(\cdot, y)\, dy \right\|_p \\
&= \left\| \frac{1}{|B_{R/2}|} \int_{B_{R/2}} K^{R/2} * g^R(\cdot, y)\, dy \right\|_p \\
&\le \frac{1}{|B_{R/2}|} \int_{B_{R/2}} \|K^{R/2} * g^R(\cdot, y)\|_p\, dy \\
&\le \left(\frac{1}{|B_{R/2}|} \int_{B_{R/2}} \|K^{R/2} * g^R(\cdot, y)\|_p^p\, dy \right)^{1/p} \\
&\le CR^{-(n-k)/p} \|K^{R/2} * g^R\|_p \\
&\le C\|K^{R/2}\|_1 \|f\|_p \ .
\end{aligned}$$

Basta ora osservare che $\lim_{R\to\infty} \|K^{R/2}\|_1 = 0$. $\square$

Supponiamo ora che $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e abbia supporto nella palla B_R di centro l'origine e raggio R. In tal caso si può definire $K_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ fissando una $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ tale che $\psi(y) = 1$ per $|y| \le R + \delta$ e ponendo

$$\langle K_0, f\rangle = \langle K, f \otimes \psi\rangle$$

per $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$.

Lemma 25.3. *Se $K \in C_{pp}(\mathbb{R}^n)$, allora $K_0 \in C_{pp}(\mathbb{R}^k)$ e*

$$\|K_0\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^k)} \le C\|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)} \ ,$$

dove la costante non dipende da R.

Dimostrazione. Siano $\eta_\varepsilon, \varphi_\varepsilon$ identità approssimate C^∞ con supporto compatto in $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^{n-k}$ rispettivamente. Allora $\omega_\varepsilon = \eta_\varepsilon \otimes \varphi_\varepsilon$ è un'identità approssimata in $\mathbb{R}^n$ con supporto compatto.

Si ponga $K^\varepsilon = K * \omega_\varepsilon$. Allora K^ε è C^∞ a supporto compatto, e dunque integrabile. Inoltre

$$\|K^\varepsilon * f\|_p = \|K * \omega_\varepsilon * f\|_p \le \|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)}\|\omega_\varepsilon * f\|_p \le \|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)}\|\omega_\varepsilon\|_1\|f\|_p \ .$$

Essendo $\|\omega_\varepsilon\|_1$ costante, si ha $\|K^\varepsilon\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)} \le C\|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)}$. Inoltre

$$\begin{aligned} K_0^\varepsilon(x) &= \int K^\varepsilon(x,y)\,dy \\ &= \int \langle K, (\tau_x\check{\eta}_\varepsilon) \otimes (\tau_y\check{\varphi}_\varepsilon)\rangle\,dy \\ &= \int \langle K, (\tau_x\check{\eta}_\varepsilon) \otimes \psi(\tau_y\check{\varphi}_\varepsilon)\rangle\,dy \\ &= \langle K, (\tau_x\check{\eta}_\varepsilon) \otimes \psi\rangle \ , \end{aligned}$$

poiché

$$\int \tau_y\check{\varphi}_\varepsilon(u)\,dy = \int \varphi_\varepsilon(y-u)\,dy = \int \varphi_\varepsilon(y)\,dy = 1$$

per ogni u. Dunque

$$K_0^\varepsilon(x) = \langle K_0, \tau_x\check{\eta}_\varepsilon\rangle = K_0 * \eta_\varepsilon(x) \ .$$

Per il Lemma 25.2,

$$\|K_0 * \eta_\varepsilon\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^k)} \le C\|K^\varepsilon\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)} \le C\|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)} \ .$$

Allora, data $f \in L^p(\mathbb{R}^k)$, si ha

$$\|K_0 * f\|_p = \lim_{\varepsilon\to 0}\|K_0 * \eta_\varepsilon * f\|_p \le C\|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)}\lim_{\varepsilon\to 0}\|\eta_\varepsilon * f\|_p = C\|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)}\|f\|_p \ .$$

Dunque $\|K_0\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^k)} \le C\|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)}$. $\square$

Con un po' più di lavoro si possono dimostrare analoghi del Lemma 25.2 In casi più generali, per esempio quando $\operatorname{supp} K$ è tale che per ogni compatto $M \subset \mathbb{R}^k$ l'intersezione $M \cap \operatorname{supp} K$ risulti compatta.

Vediamo ora come risultati come i Lemmi 25.2 e 25.3 abbiano dei corrispondenti con ipotesi sui moltiplicatori. Per capire la natura dei risultati, occorre riflettere sulla corrispondenza tra le seguenti due operazioni:

(1) integrazione di una funzione f lungo le direzioni individuate da un sottospazio;
(2) restrizione di $\hat{f}$ al sottospazio ortogonale.

Come sopra, consideriamo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ e, data $f(x,y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, poniamo

$$f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} f(x,y)\, dy \ .$$

Calcoliamo allora la trasformata di Fourier di f_0 in $\mathbb{R}^k$. Se $\xi \in \mathbb{R}^k$, abbiamo

$$\hat{f}_0(\xi) = \int_{\mathbb{R}^k} f_0(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y) e^{-ix\cdot\xi}\, dx\, dy = \hat{f}(\xi, 0) \ .$$

La stessa relazione esiste tra $\hat{K}$ e $\hat{K}_0$, quando K è una distribuzione a supporto compatto.

Appare dunque naturale che, sotto opportune ipotesi, la restrizione di un moltiplicatore di Fourier di $L^p(\mathbb{R}^n)$ al sottospazio $\mathbb{R}^k$ sia un moltiplicatore di Fourier di $L^p(\mathbb{R}^k)$.

Premettiamo un altro lemma.

Lemma 25.4. *Siano $K \in C_{pp}(\mathbb{R}^n)$ e $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$. Allora il prodotto $K\hat{\mu}$ è ben definito in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|K\hat{\mu}\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)} \le \|\mu\|_1 \|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)} \ .$$

Dimostrazione. Prendiamo per cominciare $\mu = \delta_{\xi_0}$. Allora $\widehat{\delta_{\xi_0}}(x) = e^{-i\xi_0\cdot x}$. In questo caso $\hat{\mu}$ è C^∞ e limitata, per cui $K\hat{\mu}$ è ben definita. Inoltre

$$(K\widehat{\delta_{\xi_0}}) * f(x) = \langle K, \widehat{\delta_{\xi_0}}(\tau_x \check{f})\rangle \ .$$

Se poniamo $f_{\xi_0}(x) = e^{i\xi_0\cdot x} f(x)$,

$$\widehat{\delta_{\xi_0}}(t)\tau_x\check{f}(t) = e^{-i\xi_0\cdot t} f(x-t) = e^{-i\xi_0\cdot x}\tau_x \check{f}_{\xi_0} \ ,$$

per cui

$$(K\widehat{\delta_{\xi_0}}) * f(x) = e^{-i\xi_0\cdot x} K * f_{\xi_0}(x) \ .$$

Quindi

$$\|(K\widehat{\delta_{\xi_0}}) * f\|_p = \|K * f_{\xi_0}\|_p \le \|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)} \|f_{\xi_0}\|_p = \|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_p \ .$$

In generale

$$\hat{\mu}(x) = \int e^{-i\xi\cdot x}\, d\mu(\xi) = \int \widehat{\delta_\xi}(x)\, d\mu(\xi) \ .$$

Definiamo allora

$$K\hat{\mu} = \int \widehat{\delta_\xi} K\, d\mu(\xi) \ ,$$

dove l'integrale converge nella norma di $C_{pp}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre

$$\|K\hat{\mu}\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)} \le \int \|K\widehat{\delta_\xi}\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)}\, d|\mu|(\xi) \le \|\mu\|_1 \|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)} \ ,$$

come da dimostrarsi. $\square$

Teorema 25.5. *Sia $m(\xi,\zeta)$ un moltiplicatore di Fourier di $L^p(\mathbb{R}^n)$ e si supponga che m sia continuo sul sottospazio k-dimensionale di equazione $\zeta = 0$. Allora $m_0(\xi) = m(\xi, 0)$ è un moltiplicatore di Fourier di $L^p(\mathbb{R}^k)$.*

Dimostrazione. Sia $K = \mathcal{F}^{-1}m$. Si fissino una funzione φ C^∞ a supporto compatto su $\mathbb{R}^n$, tale che $\varphi(x,y) = 1$ per $|x|, |y| \leq 1$. Si ponga $\varphi^\varepsilon(x,y) = \varphi(\varepsilon x, \varepsilon y)$.
Infine sia $K^\varepsilon = K\varphi^\varepsilon$. Per il Lemma 25.4,

$$\|K^\varepsilon\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)} \leq \|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)} \|\mathcal{F}^{-1}\varphi^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)} \ .$$

Avendo K^ε supporto compatto, per il Lemma 25.3,

$$\|K_0^\varepsilon\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^k)} \leq C\|K^\varepsilon\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R}^n)} \ .$$

Esiste allora una successione $\varepsilon_j \to 0$ tale che $\lim_{j\to\infty} K_0^{\varepsilon_j} = \tilde{K} \in C_{pp}(\mathbb{R}^k)$ nella topologia debole degli operatori, e dunque nel senso delle distribuzioni. Calcoliamo allora la trasformata di Fourier di $K_0^{\varepsilon_j}$ si ottiene da quella di K^{ε_j} restringendosi al sottospazio $\zeta = 0$. Allora

$$\widehat{K_0^{\varepsilon_j}}(\xi) = \widehat{K^{\varepsilon_j}}(\xi, 0) = m * (\hat{\varphi}_{\varepsilon_j})(\xi, 0) \ .$$

Passando al limite per $j \to \infty$, data la continuità di m per $\zeta = 0$, si ha $\mathcal{F}(\tilde{K})(\xi) = m(\xi, 0)$. $\square$

La differenza tra le due operazioni di trasferimento sopra esposte pu essere sintetizzata come segue: nella (25.1) $\mathbb{R}^k$ viene visto come un sottogruppo di $\mathbb{R}^n$ e il convolutore viene trasferito dal sottogruppo al gruppo utilizzando l'immersione.

Nei risultati dal Lemma 25.2 in poi, invece, si identifica di fatto $\mathbb{R}^k$ come il quoziente $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^{n-k}$ e il trasferimento dal gruppo al gruppo quoziente utilizza la proiezione canonica.

È allora utile osservare che la stessa tecnica di trasferimento a un gruppo quoziente può essere utilizzata anche in altri contesti. Si consideri infatti il sottogruppo $2\pi\mathbb{Z}$ di $\mathbb{R}$ e il gruppo quoziente $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Esso viene detto *toro unidimensionale* ed è isomorfo e omeomorfo al gruppo moltiplicativo $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ attraverso l'applicazione $x + 2\pi\mathbb{Z} \longmapsto e^{ix}$. Le funzioni su $\mathbb{T}$ si sollevano a $\mathbb{R}$ componendole con la proiezione canonica, e danno luogo alle funzioni periodiche di periodo 2π.

È noto che l'analisi di Fourier di funzioni su $\mathbb{T}$ (o di funzioni periodiche su $\mathbb{R}$, che è lo stesso) si effettua attraverso i coefficienti di Fourier

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \ ,$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Come per $\mathbb{R}^n$ si ha equivalenza tra i seguenti oggetti:

(1) operatori lineari continui(*) da $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ a $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$ che commutino con le traslazioni;

(*)essendo $\mathbb{T}$ compatto, non ha senso parlare di funzioni a decrescenza rapida. Pertanto in luogo della classe di Schwartz $\mathcal{S}$ facciamo riferimento alla classe $\mathcal{D}$ delle funzioni C^∞. Analogamente, essendo $\mathbb{Z}$ discreto, $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ consiste semplicemente delle successioni a crescita polinomiale.

(2) operatori di convoluzione $Tf = f * K$, con $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$, dove la convoluzione su $\mathbb{T}$ è definita da

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)\,dy \ ;$$

(3) operatori definiti da moltiplicatori di Fourier $m(n) \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$, attraverso la formula

$$Tf(x) = \mathcal{F}^{-1}(m\hat{f})(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} m(n)\hat{f}(n)e^{inx} \ .$$

Adattando le dimostrazioni dei risultati precedenti, si può dimostrare quanto segue.

Teorema 25.6. *(a) Data $K \in L^1(\mathbb{R})$, si consideri la funzione*

$$K_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} K(x+2k\pi) \in L^1(\mathbb{T}) \ .$$

Allora $\|K_0\|_{C_{pp}(\mathbb{T})} \le C\|K\|_{C_{pp}(\mathbb{R})}$.

(b) Sia $m(\xi)$ un moltiplicatore di Fourier per $L^p(\mathbb{R})$ che sia continuo per ogni $\xi = n \in \mathbb{Z}$. Allora $m(n)$ è un moltiplicatore di Fourier per $L^p(\mathbb{T})$, la cui norma si controlla con una costante per la norma del corrispondente operatore su $\mathbb{R}$.

Questo teorema ha varie conseguenze interessanti.

Teorema 25.7. *(a) L'operatore*

$$Tf(x) = \sum_{n\neq 0} \mathrm{sgn}\,(n)\hat{f}(n)e^{inx} = \frac{i}{2\pi} p.v. \int_{\mathbb{T}} f(x-y)\mathrm{cotg}\, y\,dy$$

è limitato su $L^p(\mathbb{T})$ per $1 < p < \infty$.

(b) Data $f \in L^p(\mathbb{T})$, sia $S_N f$ la ridotta N-esima della sua serie di Fourier,

$$S_N f(x) = \sum_{|n|\le N} \hat{f}(n)e^{inx} \ .$$

Se $1 < p < \infty$, esiste una costante C_p, dipendente da p ma non da N, tale che $\|S_N f\|_p \le C_p\|f\|_p$. Inoltre, per $1 < p < \infty$, si ha

$$\lim_{N\to\infty} \|f - S_N f\|_p = 0 \ . \tag{25.3}$$

Dimostrazione. (a) Cerchiamo di descrivere il moltiplicatore $m(n) = \mathrm{sgn}\,(n)$ come la restrizione a $\mathbb{Z}$ di un moltiplicatore su $\mathbb{R}$ continuo su $\mathbb{Z}$. Per eliminare la discontinuità di $\mathrm{sgn}\,(\xi)$ in 0, utilizziamo una funzione $\eta(\xi)$ di classe C^∞, con supporto in $(-1,1)$, e uguale a 1 per $|\xi| \le 1/2$. Allora $m(\xi) = \mathrm{sgn}\,(\xi)\big(1-\eta(\xi)\big)$ soddisfa la condizione di Mihlin-Hörmander su $\mathbb{R}$, è continuo su $\mathbb{Z}$ e $m(n) = \mathrm{sgn}\,(n)$.

Si tratta ora di calcolare il nucleo di convoluzione $K = \mathcal{F}^{-1}m$ su $\mathbb{T}$. Si ponga $m_\varepsilon(n) = \mathrm{sgn}\,(n)e^{-\varepsilon|n|} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Allora

$$\begin{aligned}
K_\varepsilon(x) &= \sum_{n\neq 0} \mathrm{sgn}\,(n)e^{-\varepsilon|n|}e^{inx} \\
&= 2i\Im\mathrm{m}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(\varepsilon-ix)}\right) \\
&= 2i\Im\mathrm{m}\left(\frac{e^{-\varepsilon+ix}}{1-e^{-\varepsilon+ix}}\right) \\
&= 2i\Im\mathrm{m}\left(\frac{e^{ix}}{e^{\varepsilon}-e^{ix}}\right) \\
&= 2i\Im\mathrm{m}\left(\frac{e^{ix}(e^{\varepsilon}-e^{-ix})}{|e^{\varepsilon}-e^{ix}|^2}\right) \\
&= \frac{2ie^{\varepsilon}\sin x}{(e^{\varepsilon}-1)^2+2e^{\varepsilon}(1-\cos x)}\ .
\end{aligned}$$

Per $x \neq 0(\mod 2\pi)$, il limite per $\varepsilon \to 0$ è uguale a

$$\frac{i\sin x}{1-\cos x} = i\mathrm{cotg}\,\frac{x}{2}\ .$$

Calcolando il limite nel senso delle distribuzioni, si verifica che la distribuzione limite è $K(x) = ip.v.\mathrm{cotg}\,x/2$.

(b) Si prenda una funzione $\eta(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\eta(\xi) = 0$ per $\xi \leq 0$ e $\eta(\xi) = 1$ per $\xi \geq 1$. Allora $\eta(\xi)$ e $\eta(-\xi)$ soddisfano la condizione di Mihlin-Hörmander. Per il Teorema 25.6,

$$\begin{aligned}
m_+(n) &= \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases} \\
m_-(n) &= \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 0 \\ 0 & \text{se } n > 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{25.4}$$

sono moltiplicatori di Fourier per $L^p(\mathbb{T})$ per $1 < p < \infty$.

È un fatto generale che, se $m(n)$ è un moltiplicatore di Fourier per $L^p(\mathbb{T})$, anche $\tilde{m}(n) = m(n-n_0)$ lo è, e l'operatore corrispondente ha norma che non dipende da n_0. Infatti $\mathcal{F}^{-1}\tilde{m}(x) = e^{in_0x}\mathcal{F}^{-1}m(x)$ e basta ripetere la parte iniziale della dimostrazione del Lemma 25.4.

Partendo allora dai moltiplicatori nella (25.4), si vede che

$$m_-(n-N)m_+(n+N) = \begin{cases} 1 & \text{se } |n| \leq N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è il moltiplicatore di Fourier di S_N. Da ciò segue la prima parte della tesi (b).

Per dimostare la (25.3), osserviamo innanzitutto che lo spazio dei polinomi trigonometrici (ossia le combinazioni lineari finite dei caratteri e^{inx}) è uniformemente denso in $C(\mathbb{T})$ per il Teorema di Stone-Weierstrass. Da ciò segue che esso è denso in L^p per $p < \infty$.

Fissati $p \in (1,\infty)$, $f \in L^p(\mathbb{T})$, e $\varepsilon > 0$, sia P un polinomio trigonometrico tale che $\|f - P\|_p < \varepsilon$. Allora

$$\|S_N f - S_N P\|_p < C_p \varepsilon$$

per ogni N. Se N è maggiore del grado di P, si ha $S_N P = P$, per cui

$$\|f - S_N f\|_p \le \|f - P\|_p + \|S_N P - S_N f\|_p \le (1 + C_p)\varepsilon \ ,$$

da cui segue la (25.3). $\square$

Come ultima applicazione, vediamo una proprietà delle serie di Fourier lacunari. Si chiama *lacunare* una serie di Fourier

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{i n_k x}$$

dove

$$fraca_{k+1}a_k \ge \lambda > 1$$

per ogni n. Le serie lacurani hanno molte proprietà in comune con le serie di Rademacher. Ci limiteremo a considerare il caso $n_k = 2^k$.

Teorema 25.8. *Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$ con $\hat{f}(n) = 0$ tranne che per $n = 2^k$. Allora $f \in L^p(\mathbb{T})$ per ogni $p < \infty$ ed esiste una costante C_p tale che*

$$C_p^{-1}\|f\|_p \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(2^k)|^2\right)^{1/2} \le C_p \|f\|_p \ .$$

Dimostrazione. Consideriamo $p > 2$, e sia f una generica funzione in $L^p(\mathbb{T})$. Per la disuguaglianza di Hölder e l'identità di Parseval si ha

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(2^k)|^2\right)^{1/2} = \|f\|_2 \le \|f\|_p$$

Si prenda ora una funzione $\psi(\xi)$ su $\mathbb{R}$ di classe C^∞, con supporto nell'intervallo $[3/4, 3/2]$ e tale che $\psi(1) = 1$. Dati $\varepsilon_k = \pm 1$, si ponga

$$m_\varepsilon(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \psi(2^{-k}\xi) \ .$$

Allora m_ε soddisfa la condizione di Mihlin-Hörmander con costanti indipendenti da ε. Ne risulta che gli operatori $T_\varepsilon f = \mathcal{F}^{-1}(m_\varepsilon \hat{f})$ sono uniformemente limitati su $L^p(\mathbb{R})$. Per il Teorema 25.6(b), gli operatori

$$\tilde{T}_\varepsilon f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) m_\varepsilon(n) e^{inx}$$

sono pure uniformemente limitati su $L^p(\mathbb{T})$. Si ponga

$$U_k f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \psi(2^{-k} n) e^{inx} \ ,$$

di modo che

$$\tilde{T}_\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k U_k \ .$$

Per il Teorema 21.3,

$$\left\| \left(\sum_{k=0\infty} |U_k f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_p \|f\|_p \ , \tag{25.5}$$

per $f \in L^p(\mathbb{T})$. Se ora f ha solo i coefficienti di Fourier $\hat{f}(2^k)$ diversi da 0, si ha $U_k f(x) = \hat{f}(2^k) e^{i2^k x}$. L'espressione a primo membro della (25.5) diventa allora la norma in ℓ^2 della successione dei coefficienti di Fourier. Ciò dimostra la tesi per $p > 2$.

Per $p < 2$ si procede come nella dimostrazione del Teorema 21.2. □

26. Integrali di Poisson sul disco

Vediamo ora alcune questioni relative a funzioni armoniche in $\mathbb{R}^2$ e collegate a risultati visti finora. Molti dei risultati che seguono possono essere estesi a dimensioni arbitrarie, ma preferiamo limitarci a $\mathbb{R}^2$ per semplicità di notazioni e anche per agganci a questioni relative a funzioni olomorfe in $\mathbb{C}$. Per le estensioni a più dimensioni, si può consultare E.M. Stein e G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*.

Quando sarà conveniente, anche solo per comodità di notazioni, useremo la notazione complessa $z = x + iy$.

Ricordiamo che una funzione armonica su un aperto A di $\mathbb{R}^2$ è, per definizione, una soluzione di classe C^2 dell'equazione

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ . \tag{26.1}$$

Una funzione armonica è automaticamente C^∞.

Le funzioni armoniche soddisfano la *proprietà della media*: se la palla chiusa $\overline{B(z_0, r)} \subset A$, allora

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta = f(z_0) \ . \tag{26.2}$$

Viceversa, una funzione continua u che soddisfi la (26.2) ogni volta che $\overline{B(z_0, r)} \subset A$, allora u è C^∞ e armonica.

È utile osservare che la (26.2) implica la proprietà della media "solida":

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{B(z_0,r)} u(w)\, dw = u(z_0) \ . \tag{26.3}$$

Dalla proprietà della media segue il *principio del massimo forte*:

Lemma 26.1. *Sia D un aperto connesso e limitato di $\mathbb{R}^2$, e sia u una funzione armonica in D e continua su $\bar{D}$. Se u assume modulo massimo in un punto interno a D, allora u è costante.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in D$ un punto di modulo massimo. Se $u(z_0) = 0$, non c'è niente da dimostrare. Altrimenti, moltiplicando u per una costante di modulo 1, possiamo supporre che $u(z_0) > 0$. Se $B(z_0, r) \subset A$, dalla (26.3) segue che

$$u(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(z_0,r)} \Re\mathrm{e}\, u(w)\, dw \ ,$$

ossia

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{B(z_0,r)} \big(\Re\mathrm{e}\, u(w) - u(z_0) \big)\, dw = 0 \ .$$

Essendo $\Re\mathrm{e}\, u(w) - u(z_0) \leq |u(w)| - u(z_0) \leq 0$ per ogni w, e per la continuità di u, si deve avere $\Re\mathrm{e}\, u(w) = u(z_0)$ in ogni punto di $B(z_0, r)$. Ma allora $\Im\mathrm{m}\, u(w) = 0$, da cui $u(w) = u(z_0)$.

Ne segue che l'insieme $\{z \in D : u(z) = u(z_0)\}$ è sia chiuso che aperto in D, da cui la tesi. $\square$

Il Lemma 26.1 implica l'unicità della soluzione del *problema di Dirichlet* su un aperto connesso e limitato D: trovare una funzione armonica u in D che si estenda per continuità al bordo ∂D e assuma ivi valori assegnati:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ u\big|_{\partial D} = f \ . \end{cases} \tag{26.4}$$

Siano infatti u_1, u_2 due soluzioni del problema (26.4). Allora la differenza $u_1 - u_2$ è armonica in D, continua su $\bar{D}$ e nulla sul bordo. Per il Lemma 26.1, essa è identicamente nulla.

Discutiamo ora l'esistenza della soluzione del problema (26.4) quando $D = \{z : |z| < 1\}$ è il disco unitario. Osserviamo che $\partial D = \mathbb{T}$, per cui aiuta prendere in considerazione sviluppi in serie di Fourier.

Supponiamo per cominciare che il dato al bordo sia $f_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$, con $n \in \mathbb{Z}$. Utilizzando il fatto che le funzioni olomorfe e quelle anti-olomorfe sone armoniche, si vede immediatamente che la soluzione u_n è data da

$$u_n(z) = \begin{cases} z^n & \text{se } n \geq 0 \\ \bar{z}^{|n|} & \text{se } n < 0 \ . \end{cases}$$

Più in generale, se f è un polinomio trigonometrico,

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{|n| \leq N} a_n e^{in\theta} \ ,$$

la soluzione è

$$u(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n + \sum_{n=-N}^{-1} a_n \bar{z}^{|n|} \ . \tag{26.5}$$

Conviene ora utilizzare le coordinate polari $z = re^{i\theta}$ e considerare u come una famiglia di funzioni in θ dipendenti dal parametro r:

$$u_r(\theta) = u(re^{i\theta}) \ ,$$

definite su $\mathbb{T}$. La (26.5) diventa allora

$$u_r(\theta) = \sum_{|n|\le N} a_n r^{|n|} e^{in\theta} \ .$$

In altri termini, alla funzione al bordo f è stato applicato il moltiplicatore di Fourier $m_r(n) = r^{|n|}$.

Ciò suggerisce che, per una generica funzione $f \in C(\mathbb{T})$, la soluzione u del problema (26.4) sia data da

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) r^{|n|} e^{in\theta} \ . \tag{26.6}$$

Per dimostrare ciò, occorre scrivere la (26.6) in forma di convoluzione.

Lemma 26.2. *Per $r < 1$ vale l'uguaglianza*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} \ .$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta \\
&= 1 + 2\Re\mathrm{e}\left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta}\right) \\
&= 1 + 2\Re\mathrm{e}\left(\frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) \\
&= 1 + 2\frac{\Re\mathrm{e}\big(re^{i\theta}(1-re^{-i\theta})\big)}{|1-re^{i\theta}|^2} \\
&= 1 + 2\frac{r\cos\theta - r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} \\
&= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} \ . \qquad \square
\end{aligned}$$

La famiglia di funzioni

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}$$

prende il nome di *nucleo di Poisson*. La (26.6) può allora essere riscritta nella forma

$$u(re^{i\theta}) = f * P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')P_r(\theta-\theta')\,d\theta' \ . \tag{26.7}$$

Occorre dimostare che la (26.7) effettivamente risolve il problema di Dirichlet (26.4). Per quanto riguarda i valori al bordo, si tratta di verificare che il nucleo di Poisson ha le proprietà di un'identità approssimata su $\mathbb{T}$ per $r \to 1$. Non avendo a disposizione una struttura di dilatazioni su $\mathbb{T}$, introduciamo una nozione di identità approssimata più ampia di quella data su $\mathbb{R}^n$.

Diciamo che una famiglia di funzioni $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ è un'identità approssimata su $\mathbb{T}$ per $\varepsilon \to 0$ se valgono le seguenti proprietà:

(1) $\|\varphi_\varepsilon\|_1 \le C$ per ogni $\varepsilon > 0$;
(2) $(1/2\pi) \int \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1$ per ogni $\varepsilon > 0$;
(3) per ogni a, $0 < a < \pi$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a<|x|<\pi} |\varphi_\varepsilon(x)|\, dx = 0$.

Lemma 26.3. *Sia $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ un'identità approssimata per $\varepsilon \to 0$. Se $1 \le p < \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{T})$, allora*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f - f * \varphi_\varepsilon\|_p = 0 \ .$$

Se $f \in C(\mathbb{T})$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f - f * \varphi_\varepsilon\|_\infty = 0 \ .$$

La dimostrazione si ottiene adattando quella del Lemma 7.3.

Lemma 26.4. *Il nucleo di Poisson è un'identità approssimata per $r \to 1$.*

Dimostrazione. Poiché $P_r(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx}$ e la serie converge uniformemente, si ha

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} \int_0^{2\pi} e^{inx}\, dx = 1 \ .$$

Inoltre $P(x) \ge 0$, per cui la (1) è verificata con $C = 1$. Infine, dato $a > 0$, $a < \pi$, si ha

$$\int_{a<|x|<\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos x}\, dx \le 2\pi \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos a} \ ,$$

che tende a 0 per r che tende a 1. $\square$

Teorema 26.5. *La funzione $u(re^{i\theta}) = f * P_r(\theta)$ è l'unica soluzione del problema* (26.4) *con dato $f \in C(\mathbb{T})$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 26.4, le funzioni $u_r(\theta) = u(re^{i\theta})$ tendono uniformemente a f per $r \to 1$. Si tratta quindi di verificare che u è armonica nell'interno del disco.

Usiamo per questo scopo l'espressione (26.6) di u. Osserviamo che vale la maggiorazione

$$|\hat{f}(n)| \le \|f\|_\infty$$

per ogni n, per cui la serie (26.6) converge uniformemente in r e in θ su ogni disco $B(z_0, \rho)$ relativamente compatto nel disco unitario. Questo ci permette di verificare la proprietà della media integrando la serie termine a termine. Ma ogni termine della serie è una costante per una potenza intera di z o di $\bar{z}$, per cui soddisfa evidentemente la proprietà della media. $\square$

27. Integrali di Poisson sul semipiano

Studiamo ora le proprietà delle funzioni armoniche sul semipiano superiore

$$D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \ .$$

Rispetto al disco, una complicazione è costituita dal fatto che D' non è limitato. Per esempio, il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D' \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \tag{27.1}$$

non avrà in generale soluzione unica. Infatti per $f(x) = 0$ si hanno almeno le due soluzioni $u_1(x,y) = 0$ e $u_2(x,y) = y$.

In generale la soluzione del problema (27.1) potrà diventare unica solo aggiungendo qualche condizione sul comportamento all'infinito della soluzione.

D'altra parte, la forma del dominio permette considerazioni di invarianza più semplici che non sul disco.

A questo proposito osserviamo che, date una funzione u armonica e una funzione F olomorfa, allora $u \circ F$ è armonica, come si verifica facilmente utilizzando le equazioni di Laplace e di Cauchy-Riemann.

In particolare, terremo conto dell'esistenza delle seguenti trasformazioni conformi di D' in sé:

(1) le traslazioni orizzontali $z \mapsto z + b$, con $b \in \mathbb{R}$;
(2) le dilatazioni $z \mapsto az$, con $a > 0$.

Inoltre utilizzeremo la *trasformata di Cayley*

$$C(z) = i\frac{1-z}{1+z} \ .$$

Essa è una trasformazione conforme del disco unitario D sul semipiano D'. La sua inversa è

$$C^{-1}(z) = \frac{z-i}{z+i} \ .$$

Inoltre C sia estende con continuità a $\bar{D} \setminus \{1\}$ e

$$C(e^{i\theta}) = -\mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2} \ . \tag{27.2}$$

Infine C è un omeomorfismo di $\bar{D}$ sulla compattificazione di Alexandroff $\overline{D'} \cup \{\infty\}$.

L'enunciato che segue mostra come i risultati ottenuti sul disco possono essere trasferiti al semipiano.

Proposizione 27.1. *Sia $f \in C_0(\mathbb{R})$. Allora il problema di Dirichlet* (27.1) *ha una e una sola soluzione che si annulla all'infinito. Essa è data dalla formula*

$$u(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\frac{y}{t^2+y^2}\,dt \ . \tag{27.3}$$

Dimostrazione. Sia $\tilde{f}(e^{i\theta}) = f \circ C(e^{i\theta})$. Poiché f si annulla all'infinito, $\tilde{f}$ di estende a una funzione continua su $\mathbb{T}$ ponendo $\tilde{f}(1) = 0$.

Inoltre u è armonica in D' se e solo se $\tilde{u} = u \circ C$ è armonica in D. Di conseguenza dire che u è soluzione del problema (27.1) e si annulla all'infinito equivale a dire che $\tilde{u}$ è soluzione del problema (26.4) con dato al bordo $\tilde{f}$.

Per ricavare l'espressione esplicita di u, calcoliamo innanzitutto $u(i)$. Si ha

$$\begin{aligned} u(i) &= \tilde{u}(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta})\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(-\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{t^2+1}\, dt \ , \end{aligned}$$

grazie alla sostituzione $\theta = -2\operatorname{arccotg} t$ indotta dalla (27.2).

Preso ora un punto generico $x_0 + iy_0 \in D'$, si consideri la trasformazione conforme $\varphi(z) = x_0 + y_0 z$ di D' su se stesso. Essa si estende per continuità a un omeomorfismo di $\overline{D'}$ su se stesso. Ne consegue che, se u è soluzione del problema (27.1) con dato al bordo f, allora $u \circ \varphi$ è soluzione del problema (27.1) con dato al bordo $f \circ \varphi$. Inoltre u si annulla all'infinito se e solo se $u \circ \varphi$ si annulla all'infinito.

Premesso ciò, si ottiene

$$\begin{aligned} u(x_0 + iy_0) &= u \circ \varphi(i) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f \circ \varphi(t) \frac{1}{t^2+1}\, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x_0 + y_0 t) \frac{1}{t^2+1}\, dt \ . \end{aligned}$$

Il cambiamento di variabile $t' = x_0 + y_0 t$ dà la (27.3). $\square$

L'integrale nella (27.3) è un integrale di convoluzione. Definito il *nucleo di Poisson*

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \ ,$$

si ha infatti

$$u(x,y) = f * P_y(x) \ .$$

Si osservi anche che

$$P_y(x) = y^{-1} P_1(y^{-1} x) \ . \tag{27.4}$$

Poiché $P_1 \in L^1(\mathbb{R})$ e $\int P_1(x)\, dx = 1$, il nucleo di Poisson è un'identità approssimata su $\mathbb{R}$.

Lemma 27.2. *Il nucleo di Poisson ha la proprietà di semigruppo, ossia*

$$P_{y_1} * P_{y_2} = P_{y_1 + y_2} \ .$$

Dimostrazione. Anziché svolgere il calcolo diretto, calcoliamo la trasformata di Fourier di P_y. Per la (27.4),

$$\widehat{P_y}(\xi) = \widehat{P_1}(y\xi) \ .$$

Inoltre dall'equazione $(\partial_x^2 + \partial_y^2)P_y(x) = 0$, valida per $y > 0$, ricaviamo che

$$(-\xi^2 + \partial_y^2)\widehat{P_1}(y\xi) = 0 \ .$$

Calcolando la derivata per $\xi = 1$,

$$\widehat{P_1}''(y) - \widehat{P_1}(y) = 0 \ .$$

Quindi $\widehat{P_1}(y) = c_1 e^y + c_2 e^{-y}$ per $y > 0$. Poiché $\widehat{P_1}$ è pari e tende a 0 all'infinito, si ricava che

$$\widehat{P_1}(\xi) = e^{-|\xi|} \ ,$$

da cui

$$\widehat{P_y}(\xi) = e^{-y|\xi|} \ .$$

Quindi $\widehat{P_{y_1+y_2}}(\xi) = \widehat{P_{y_1}}(\xi)\widehat{P_{y_2}}(\xi)$.
La proprietà di semigruppo segue immediatamente. $\square$

Queste osservazioni consentono di considerare il problema (27.1) con dati al bordo di tipo più generale.

Proposizione 27.3. *Sia f una funzione continua e limitata su $\mathbb{R}$. Allora la* (27.3) *fornisce l'unica soluzione limitata del problema* (27.1).

La dimostrazione si basa su un paio di lemmi. Il primo è la variante per funzioni armoniche del *Teorema di Liouville.*

Lemma 27.4. *Sia u una funzione armonica su tutto $\mathbb{R}^2$ e limitata. Allora u è costante.*

Dimostrazione. Siano z_1, z_2 due punti di $\mathbb{R}^2$. Per la (26.3), dato $r > 0$,

$$\begin{aligned}
|u(z_1) - u(z_2)| &= \left| \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(z_1,r)} f(w)\,dw - \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(z_2,r)} f(w)\,dw \right| \\
&\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(z_1,r)\triangle B(z_2,r)} |f(w)|\,dw \\
&\leq \frac{C}{\pi r^2} \big| B(z_1,r) \triangle B(z_2,r) \big| \\
&\leq \frac{C}{r} \ .
\end{aligned}$$

Facendo tendere r a ∞, si conclude che $u(z_1) = u(z_2)$. $\square$

Lemma 27.5. *Sia u una funzione armonica e limitata in D' e si supponga che u si prolunghi per continuità a $\bar{D}'$ in modo che $u(x,0) = 0$. Allora u è identicamente nulla.*

Dimostrazione. Per $y < 0$ si ponga $u(x,y) = -u(x,-y)$. La funzione u così estesa è continua limitata su tutto $\mathbb{R}^2$. Se dimostriamo che è armonica, possiamo concludere che è costante, e dunque nulla.

Si consideri il disco D_R di centro l'origine e raggio R. Allora u è armonica in D_R se e solo se $u_R(z) = u(Rz)$ è armonica nel disco unitario D.

Se P_r (con $r < 1$) indica il nucleo di Poisson per il disco D, si consideri la funzione

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_R(e^{i\theta'}) P_r(\theta - \theta')\, d\theta' \ .$$

Essa è armonica in D, continua su $\bar{D}$ e coincide con u_R sul bordo. Per calcolare i valori di v sull'asse reale, bisogna porre θ uguale a 0 o a π. Per $\theta = 0$ ha

$$v(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_R(e^{i\theta'}) P_r(-\theta')\, d\theta' \ .$$

Poiché P_r è pari in θ' e $u_R(e^{i\theta'})$ dispari, l'integrale è nullo. Lo stesso vale per $\theta = \pi$.

Sia ora A la metà superiore del disco D, $A = D \cap D'$. La funzione $u_R - v$ è armonica in A, continua su $\bar{A}$ e nulla sul bordo. Per il principio del massimo, essa è nulla anche nell'interno. Analogamente si verifica che $u_R - v$ è nulla nella metà inferiore del disco.

Dunque $u_R = v$, per cui u_R è armonica in D. Quindi u è armonica in D_R. Per l'arbitrarietà di R, u è armonica su tutto $\mathbb{R}^2$. $\square$

Passando a dati al bordo di tipo ancora più generale, supponiamo $f \in L^p(\mathbb{R})$ e poniamo

$$u(x + iy) = f * P_y(x) \ .$$

Vogliamo sapere se u è armonica e in che senso tende a f quando y tende a 0.

Proposizione 27.6. *Se $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, allora $u(x+iy) = f * P_y(x)$ è armonica in D'. Al tendere di y a 0, le funzioni $u_y(x) = u(x+iy)$ tendono a f quasi ovunque e in norma L^p.*

Dimostrazione. Con un semplice calcolo si verifica che per ogni t

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} = 0 \ .$$

Essendo

$$u(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}\, dt \ ,$$

si verifica allora la proprietà della media cambiando l'ordine di integrazione. Quindi u è armonica.

La convergenza delle u_y a f segue dal fatto che le P_y formano un'identità approssimata e dal Teorema 15.4. $\square$

Proposizione 27.7. *(a) Se $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, la funzione $u(x+iy) = f * P_y(x)$ è armonica in D' e le u_y convergono a f nella topologia debole-* di $L^\infty(\mathbb{R})$ e quasi ovunque.*

(b) se $\mu \in M(\mathbb{R})$, la funzione $u(x+iy) = \mu * P_y(x)$ è armonica in D' e le u_y convergono a μ nella topologia debole- di $M(\mathbb{R})$.*

La dimostrazione è analoga.

Osserviamo che se $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, la funzione $u(x+iy) = f * P_y(x) = u_y(x)$ soddisfa la condizione

$$\sup_{y>0} \|u_y\|_p \le \sup_{y>0} \|f\|_p \|P_y\|_1 \le \|f\|_p \ . \tag{27.5}$$

Analogamente, se $\mu \in M(\mathbb{R})$ e $u(x+iy) = \mu * P_y(x) = u_y(x)$, allora

$$\sup_{y>0} \|u_y\|_1 \le \|\mu\|_1 \ . \tag{27.6}$$

Per $1 \le p \le \infty$, indichiamo con $\mathcal{H}^p(D')$ lo spazio delle funzioni u armoniche in D' e tali che, posto $u_y(x) = u(x+iy)$, si abbia

$$\|u\|_{\mathcal{H}^p} = \sup_{y>0} \|u_y\|_p < \infty \ .$$

Le (27.5) e (27.6) mostrano che se $f \in L^p(\mathbb{R})$ o $\mu \in M(\mathbb{R})$, allora $f*P_y \in \mathcal{H}^p(D')$, o rispettivamente $\mu * P_y \in \mathcal{H}^1(D')$. Ci interessa ora dimostrare il viceversa, ossia che data $u \in \mathcal{H}^p(D')$, questa è l'integrale di Poisson di una funzione o di una misura sulla retta.

Lemma 27.8. *Se $u \in \mathcal{H}^p(D')$, per $y > 0$ si ha*

$$|u(x+iy)| \le C \|u\|_{\mathcal{H}^p} y^{-1/p} \ .$$

Dimostrazione. Sia $p < \infty$. Se B è il disco di centro $x_0 + iy_0$ e raggio $y_0/2$, per la proprietà della media si ha

$$\begin{aligned}
|u(x_0+iy_0)| &\le \frac{4}{\pi y_0^2} \int_B |u(x+iy)|\, dx\, dy \\
&\le \left(\frac{4}{\pi y_0^2} \int_B |u(x+iy)|^p \, dx\, dy \right)^{1/p} \\
&\le \left(\frac{4}{\pi y_0^2} \int_{y_0/2}^{3y_0/2} \int_{\mathbb{R}} |u(x+iy)|^p \, dx\, dy \right)^{1/p} \\
&\le \left(\frac{4}{\pi y_0^2} \int_{y_0/2}^{3y_0/2} \|u\|_{\mathcal{H}^p}^p \, dy \right)^{1/p} \\
&= \left(\frac{4}{\pi} \right)^{1/p} \|u\|_{\mathcal{H}^p} y_0^{-1/p} \ .
\end{aligned}$$

Se $p = \infty$ la tesi è ovvia. $\square$

Proposizione 27.9. *(a) La convergenza nella norma di $\mathcal{H}^p(D')$ implica la convergenza uniforme sui compatti di D'.*

(b) $\mathcal{H}^p(D')$ è uno spazio di Banach.

Dimostrazione. Sia K un compatto di D' e sia $d > 0$ la sua distanza dall'asse reale. Per il Lemma 27.8,

$$\max_{z \in K} |u(z)| \leq C d^{-1/p} \|u\|_{\mathcal{H}^p} \ .$$

Questo dimostra (a).

Sia ora $\{u_n\}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{H}^p$. Allora le u_n convergono uniformemente sui compatti a una funzione u. Nel passaggio al limite la proprietà della media si conserva, e dunque u è armonica in D'.

D'altra parte, per ogni $y > 0$ la successione $u_{n,y}(x) = u_n(x+iy)$ è di Cauchy in $L^p(\mathbb{R})$, perché $\|u_{n,y} - u_{m,y}\|_p \leq \|u_n - u_m\|_{\mathcal{H}^p}$. Fissato $y > 0$, esiste allora una sottosuccessione $\{u_{n_k,y}\}$ che converge in media di ordine p e quasi ovunque a una funzione $v_y \in L^p$. Ma tale v_y non può essere altro che u_y. Dunque $u_y \in L^p$ per ogni $y > 0$. Poiché $\|u_y\|_p \leq \sup_n \|u_{n,y}\|_p \leq \sup_n \|u_n\|_{\mathcal{H}^p}$, si ha $u \in H^p(D')$.

Infine, dato $\varepsilon > 0$, sia $\bar{n}$ tale che $\|u_n - u_m\|_{\mathcal{H}^p} < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \bar{n}$. Se $n \geq \bar{n}$ e $y > 0$,

$$\|u_y - u_{n,y}\|_p = \lim_{m \to \infty} \|u_{m,y} - u_{n,y}\|_p \leq \varepsilon \ .$$

Quindi per $n \geq \bar{n}$, $\|u - u_n\|_{\mathcal{H}^p} \leq \varepsilon$. $\square$

Teorema 27.10. *Sia $1 < p \leq \infty]$. Allora $u \in \mathcal{H}^p(D')$ se e solo se esiste $f \in L^p(\mathbb{R})$ tale che $u(x+iy) = f * P_y(x)$. Per $p = 1$, $u \in \mathcal{H}^1(D')$ se e solo se esiste $\mu \in M(\mathbb{R})$ tale che $u(x+iy) = \mu * P_y(x)$. Inoltre tale f (risp. μ) è unica e $\|f\|_p = \|u\|_{\mathcal{H}^p}$ (risp. $\|\mu\|_1 = \|u\|_{\mathcal{H}^1}$).*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che se $f \in L^p$ o $\mu \in M$, allora $u = f * P_y \in \mathcal{H}^p$ e $u = \mu * P_y \in \mathcal{H}^1$. Per le (27.5) e (27.6), si ha

$$\|u\|_{\mathcal{H}^p} \leq \|f\|_p$$

se $p > 1$, e

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1} \leq \|\mu\|_1 \ .$$

Inoltre, per il Lemma 27.2, se $y > y'$,

$$\|f * P_y\|_p = \|f * P_{y'} * P_{y-y'}\|_p \leq \|f * P_{y'}\|_p \ ,$$

ossia la norma di $f * P_y$ è decrescente in y. Segue che

$$\|u\|_{\mathcal{H}^p} = \lim_{y \to 0} \|f * P_y\|_p \ . \tag{27.7}$$

Se $1 < p < \infty$, le $f * P_y$ convergono a f in norma L^p, per cui $\|u\|_{\mathcal{H}^p} = \|f\|_p$.

Se $f \in L^\infty$, siano $\varepsilon > 0$ e $g \in L^1$ tale che $\|g\|_1 = 1$ e

$$\left| \int f(x) g(x) \, dx \right| > \|f\|_\infty - \varepsilon \ .$$

Allora

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty - \varepsilon &< \lim_{y\to 0}\left|\int f(x)(g*P_y)(x)\,dx\right| \\ &= \lim_{y\to 0}\left|\int (f*P_y)(x)g(x)\,dx\right| \\ &\le \sup_{y>0}\|f*P_y\|_\infty \\ &= \|u\|_{\mathcal{H}^\infty}\ .\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε, si ha $\|f\|_\infty \le \|u\|_{\mathcal{H}^\infty}$, e quindi l'uguaglianza.

Rimane da dimostrare, data $u \in \mathcal{H}^p$, l'esistenza di f o μ. Per comodità di notazioni, supponiamo $p > 1$.

Sia $u_y(x) = u(x+iy)$. Per il Teorema di Banch-Alaoglu, esiste una successione $y_k \to 0$ tale che u_{y_k} ha un limite $f \in L^p$ nella topologia debole-*. Si tratta di dimostrare che $u_y = f * P_y$ per $y > 0$.

Si ponga $v_k(z) = u(z+iy_k)$. Per il Lemma 27.8, v_k è limitata su $\overline{D'}$. Inoltre essa è continua su $\overline{D'}$, armonica in D' e $v_k(x) = u_{y_k}(x)$. Per la Proposizione 27.3, si ha

$$v_k(x+iy) = u_{y_k} * P_y(x)\ ,$$

da cui

$$u(x+i(y+y_k)) = u_{y_k} * P_y(x) = \langle u_{y_k}, \tau_x P_y\rangle\ .$$

Ma $\tau_x P_y \in L^{p'}$ qualunque sia p, per cui, facendo tendere k a infinito, e quindi y_k a 0, si ha

$$u(x+iy) = \langle f, \tau_x P_y\rangle = f * P_y(x)\ .$$

Per $p = 1$ l'unica differenza consiste nel considerare l'inclusione di L^1 in M per utilizzare la topologia debole-* di M. $\square$

28. Spazi di Hardy

Se $1 \le p \le \infty$, si chiama *spazio di Hardy complesso* il sottospazio $H^p(D') \subset \mathcal{H}^p(D')$ costituito dalle funzioni olomorfe in D'.

Proposizione 28.1. *(a) $H^p(D')$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}^p(D')$, e dunque è uno spazio di Banach.*

(b) Sia $u(x+iy) = f*P_y(x) \in \mathcal{H}^p(D')$ se $p > 1$, $u(x+iy) = \mu * P_y(x) \in \mathcal{H}^1(D')$ se $p = 1$. Allora $u \in H^p(D')$ se e solo se il supporto di $\hat f$, o di $\hat\mu$, è contenuto nella semiretta $[0, +\infty)$.

Dimostrazione. Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni in H^p convergente a $u \in \mathcal{H}^p$. Per la Proposizione 27.9, le u_n convergono a u uniformemente sui compatti. Dunque anche u è olomorfa.

Per la (b), supponiamo $p > 1$ per comodità di notazioni, e osserviamo che u è olomorfa se soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial y} = i\frac{\partial u}{\partial x} \tag{28.1}$$

per $y>0$. Passando alla trasformata di Fourier in x e ricordando che

$$\widehat{u_y}(\xi)=\hat{f}(\xi)e^{-y|\xi|}\ .$$

La (28.1) diventa allora

$$-|\xi|\hat{f}(\xi)e^{-y|\xi|}=i(i\xi)\hat{f}(\xi)e^{-y|\xi|}\ .$$

Vale l'identità se e solo se supp $\hat{f}\subseteq[0,+\infty)$. $\square$

Per $p=2$, $\mathcal{H}^2(D')$ è uno spazio di Hilbert, in quanto l'applicazione $\Phi: L^2(\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{H}^2(D')$ data da $(\Phi f)(x+iy)=f*P_y(x)$ è un'isometria suriettiva. Per polarizzazione della (27.7) si ottiene il prodotto scalare in $\mathcal{H}^2(D')$

$$(u|v)_{\mathcal{H}^2}=\lim_{y\to 0}\int_{\mathbb{R}}u(x+iy)\overline{v(x+iy)}\,dx\ .$$

Esso coincide ovviamente con il prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R})$ delle due funzioni di cui u e v sono gli integrali di Poisson.

Poiché $H^2(D')$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}^2(D')$, ha senso considerare il proiettore ortogonale di $\mathcal{H}^2(D')$ su $H^2(D')$. Per descriverlo, facciamo riferimento al seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{H}^2(D') & \xleftarrow{\ \Phi\ } & L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\ \mathcal{F}\ } & L^2(\mathbb{R})\\
{\scriptstyle P}\big\downarrow & & {\scriptstyle P'}\big\downarrow & & {\scriptstyle P''}\big\downarrow\\
H^2(D') & \xleftarrow{\ \Phi\ } & L^2_+(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\ \mathcal{F}\ } & L^2(\mathbb{R}_+)
\end{array}$$

dove abbiamo indicato con $L^2(\mathbb{R}_+)$ il sottospazio di $L^2(\mathbb{R})$ costituito dalle funzioni con supporto in $[0,+\infty)$, e con $L^2_+(\mathbb{R})$ il sottospazio di $L^2(\mathbb{R})$ costituito dalle funzioni la cui trasformata di Fourier ha supporto in $[0,+\infty)$.

Le frecce orizzontali sono tutte delle isometrie, mentre le frecce verticali indicano i proiettori ortogonali sui corrispondenti sottospazi.

Il proiettore sulla destra è ovviamente dato da

$$P''f(\xi)=f(\xi)m(\xi)\ ,$$

dove m è la funzione caratteristica di $[0,+\infty)$. Di conseguenza

$$P'f(x)=(\mathcal{F}^{-1}\circ P''\circ\mathcal{F})f(x)=\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}m)(x)\ .$$

Poiché

$$m(\xi)=\frac{1}{2}(1+\operatorname{sgn}\xi)\ ,$$

si ha

$$P'f(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2i\pi}Hf(x)\ , \tag{28.2}$$

dove $Hf=f*(p.v.1/x)$ è la trasformata di Hilbert.

Analogamente, $P = \Phi \circ P' \circ \Phi^{-1}$ si ottiene come segue: se $u = f * P_y = \Phi f$, allora

$$\begin{aligned} Pu(x+iy) &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}m) * P_y(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}me^{-y\cdot}) \ . \end{aligned}$$

La trasformata di Fourier inversa di $m(\xi)e^{-y\xi}$ è data da

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-y\xi}e^{ix\xi}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{i(x+iy)\xi}\,d\xi = -\frac{1}{2\pi i(x+iy)} \ .$$

Quindi

$$Pu(x+iy) = f * \left(-\frac{1}{2\pi i(x+iy)}\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{1}{x-t+iy}\,dt \ .$$

Ponendo $z = x+iy$, il proiettore P_2 prende la nota forma dell'integrale di Cauchy:

$$Pu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{1}{t-z}\,dt \ . \tag{28.3}$$

Esso prende il nome di *proiettore di Cauchy*.

Teorema 28.2. *Il proiettore di Cauchy è limitato da $\mathcal{H}^p(D')$ a $H^p(D')$ se e solo se $1 < p < \infty$.*

Dimostrazione. In base al diagramma, P è limitato da $\mathcal{H}^p(D')$ a $H^p(D')$ se e solo se P' è limitato su $L^p(\mathbb{R})$, se $p > 1$, o su $M(\mathbb{R})$ se $p = 1$. Per la (28.2), la limitatezza di P' equivale a quella della trasformata di Hilbert, e questa si ha se e solo se $1 < p < \infty$. $\square$

Concludiamo con qualche accenno agli spazi di Hardy reali. Si definisce $H^p(\mathbb{R})$ come lo spazio delle funzioni $f \in L^p(\mathbb{R})$ tali che la trasformata di Hilbert $Hf = f * (p.v.1/x)$ è pure in $L^p(\mathbb{R})$. $H^p(\mathbb{R})$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R})} = \|f\|_p + \|Hf\|_p \ .$$

Ovviamente se $1 < p < \infty$, $H^p(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$ e le norme $\|f\|_p$ e $\|f\|_{H^p}$ sono equivalenti. È invece di grande interesse lo spazio $H^1(\mathbb{R})$. Esso è un sottospazio proprio di $L^1(\mathbb{R})$, e non è neanche denso. Si osservi infatti che la condizione $Hf \in L^1$ implica che la funzione $\hat{f}(\xi)\mathrm{sgn}\,(\xi)$ sia continua in zero, per cui

$$H^1(\mathbb{R}) \subset L^1_0(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^1 : \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0 \right\} \ .$$

Tuttavia l'inclusione di H^1 in L^1_0 è ancora propria. Vale il seguente teorema.

Teorema 28.3. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) $f \in H^1(\mathbb{R})$;

(b) *la funzione massimale*

$$M_P f(x) = \sup_{y>0} |f * P_y(x)|$$

è in $L^1(\mathbb{R})$;

(c) *f ammette una "decomposizione atomica"*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j(x) \ ,$$

dove $\sum_j |\lambda_j| < \infty$ e le a_j sono "atomi", ossia

(i) *ogni a_j ha supporto in un intervallo I_j limitato;*

(ii) *$|a_j(x)| \le 1/|I_j|$ per ogni x e ogni j;*

(iii) *$\int a_j(x)\,dx = 0$.*

29. Analisi armonica su gruppi

L'analisi armonica in $\mathbb{R}^n$ o sul toro $\mathbb{T}$ è governata dalla struttura di gruppo soggiacente a tali spazi. Essa interviene

(1) nella definizione di convoluzione,

(2) nella nozione di operatore invariante per traslazione,

(3) nella individuazione dei *caratteri* $e^{i\xi x}$ o e^{inx}, i quali determinano a loro volta la nozione di trasformata di Fourier.

L'ambito più generale cui si possono estendere le linee principali dell'analisi armonica è quello dei *gruppi topologici localmente compatti.* Per definizione, un gruppo topologico è un gruppo G dotato di una topologia di Hausdorff che renda continue le applicazioni

$$G \times G \ni (x,y) \longmapsto xy \in G \ , \qquad G \ni x \longmapsto x^{-1} \in G$$

(o, equivalentemente, la sola applicazione $(x,y) \longmapsto xy^{-1}$).

Enunciamo alcuni risultati generali riguardanti i gruppi localmente compatti. Come riferimento, si prenda Rudin, *Fourier Analysis on Groups* per il caso commutativo e Hewitt-Ross *Abstract Harmonic Analysis*, vol. 1 per il caso generale.

(a) Misura di Haar.

Una misura di Borel regolare e positiva m su un gruppo localmente compatto si dice una *misura di Haar sinistra* se è invariante per traslazioni sinistre, ossia se per ogni $x \in G$ e ogni Boreliano $E \subset G$ vale l'uguaglianza

$$m(xE) = m(E) \ .$$

Ciò equivale a dire che per ogni $x \in G$ e ogni funzione f continua a supporto compatto su G si ha

$$\int_G f(xy)\, dm(y) = \int_G f(y)\, dm(y) \ .$$

Analogamente si definisce una misura di Haar destra. Si noti che se m è una misura di Haar sinistra, allora $\tilde{m}(E) = m(E^{-1})$ è una misura di Haar destra.

Teorema 29.1. *Sia G un gruppo localmente compatto. Esiste allora una misura di Haar sinistra su G. Inoltre essa è unica a meno di costanti moltiplicative. Analogamente, esiste una misura di Haar destra su G, unica a meno di costanti moltiplicative.*

In generale le misure di Haar sinistra e destra sono diverse. Se esse coincidono, si dice che il gruppo è *unimodulare.*

Esempi. (a) La misura di Lebesgue è una misura di Haar su $\mathbb{R}^n$. Ovviamente su un gruppo abeliano traslazioni destre e sinistre coincidono.

(b) Analogamente, la misura $dm(\theta) = \frac{1}{2\pi} d\theta$ è una misura di Haar su $\mathbb{T}$, normalizzata in modo che $m(\mathbb{T}) = 1$.

(c) Sul gruppo $\mathbb{R}_+$ moltiplicativo, una misura di Haar è data da $dm(x) = dx/x$.

(d) Su ogni gruppo discreto la misura $m(E) = \operatorname{card} E$ è una misura di Haar destra e sinistra.

(e) Il gruppo lineare $GL(2, \mathbb{R})$, costituito dalle matrici quadrate 2×2 invertibili,

$$GL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} : xw - yz \neq 0 \right\} \ .$$

Come spazio topologico, esso si identifica quindi con un aperto di $\mathbb{R}^4$. Per determinare una sua misura di Haar sinistra, supponiamo che essa sia assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue,

$$dm(x, y, z, w) = \varphi\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \right) dx\, dy\, dz\, dw \ .$$

Imponiamo quindi che per ogni elemento $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$ e ogni f continua a supporto compatto valga l'uguaglianza

$$\begin{aligned} \int f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \right) \varphi\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \right) dx\, dy\, dz\, dw = \\ = \int f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \right) \varphi\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \right) dx\, dy\, dz\, dw \ . \end{aligned}$$

A primo membro cambiamo variabili ponendo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & w' \end{pmatrix} \ .$$

Allora

$$dx'\,dy'\,dz'\,dw' = (ad-bc)^2\,dx\,dy\,dz\,dw\ ,$$

per cui si dovrà avere

$$(ad-bc)^{-2}\int f\left(\begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & w' \end{pmatrix}\right)\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & w' \end{pmatrix}\right)dx'\,dy'\,dz'\,dw' =$$

$$= \int f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right)\varphi\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right)dx\,dy\,dz\,dw\ .$$

La funzione φ deve dunque soddisfare la condizione

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = (ad-bc)^2\varphi\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right)\ .$$

Scegliendo $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = I$ e chiamando $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = X$, si ricava che

$$\varphi(X) = c(\det X)^{-2}\ .$$

Si verifica che questa misura è anche invariante a destra, per cui $GL(2,\mathbb{R})$ è unimodulare.

(f) Un esempio di gruppo non unimodulare è il seguente: si considerino le matrici reali della forma $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $x > 0$. Procedendo come nell'esempio (d), si trova che $dm_l(x,y) = dx\,dy/x^2$ è una misura di Haar sinistra, mentre $dm_r(x,y) = dx\,dy/x$ è una misura di Haar destra.

Proposizione 29.2. *Se G è unimodulare, vale l'uguaglianza*

$$\int f(x^{-1})\,dx = \int f(x)\,dx \tag{29.1}$$

per ogni $f \in L^1(G)$.

Dimostrazione. Sia m la misura di Haar fissata. Allora $\tilde{m}(E) = m(E^{-1})$ è pure invariante per traslazioni destre e sinistre. Dunque esiste una costante $c > 0$ tale che $m(E^{-1}) = cm(E)$ per ogni Boreliano E. Mettendo $E \cup E^{-1}$ al posto di E, si trova $c = 1$.

La (29.1) segue allora facilmente se f è una funzione semplice. Per densità si ha il resto. $\square$

Quando G è unimodulare, i cambiamenti di variabile negli integrali della forma $x' = ax$, $x' = xa$, $x' = x^{-1}$ sono tali che $dx' = dx$.

(b) Convoluzione.

Supponiamo per semplicità che G sia unimodulare. Fissata una misura di Haar, indicata negli integrali come dx, gli spazi $L^p(G)$ si intendono riferiti a questa misura di Haar.

La convoluzione di due funzioni $f, g \in L^1(G)$ è data da

$$f * g(x) = \int f(xy^{-1})g(y)\,dy = \int f(y)g(y^{-1}x)\,dy \ . \tag{29.2}$$

Come per $\mathbb{R}^n$, si verifica che l'integrale converge per quasi ogni x e inoltre

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \ .$$

Inoltre $\operatorname{supp}(f * g) \subseteq (\operatorname{supp} f)(\operatorname{supp} g)$. La convoluzione si estende a funzioni di tipo più generale; in particolare vale la disuguaglianza di Young.

Proposizione 29.3. *La convoluzione è commutativa su $L^1(G)$ se e solo se G è abeliano.*

Dimostrazione. Se G è abeliano, per la (29.2) si ha

$$f * g(x) = \int f(xy^{-1})g(y)\,dy = \int f(y^{-1}x)g(y)\,dy = g * f(x) \ .$$

Viceversa, se G non è abeliano, esistono $a, b \in G$ tali che $ab \neq ba$. Siano U_1 e U_2 intorni disgiunti di ab e ba rispettivamente. Per la continuità del prodotto, esistono intorni V_1 e V_2 di a e b rispettivamente (che possiamo supporre compatti) tali che $V_1V_2 \subset U_1$, $V_2V_1 \subset U_2$.

Si ponga $f = \chi_{V_1}$, $g = \chi_{V_2}$. Essendo funzioni positive su insiemi di misura positiva, le convoluzioni $f * g$ e $g * f$ non sono nulle. Inoltre

$$\operatorname{supp}(f * g) \subseteq V_1V_2 \subset U_1 \ , \qquad \operatorname{supp}(g * f) \subseteq V_2V_1 \subset U_2 \ .$$

Quindi $f * g \neq g * f$. $\square$

(c) Trasformata di Fourier.

Sia G un gruppo localmente compatto e *abeliano*. Si chiama *carattere* di G una funzione $\chi : G \longrightarrow \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ che sia continua e un omomorfismo di gruppi, cioè(*):

$$\chi(x + y) = \chi(x)\chi(y)$$

per ogni $x, y \in G$.

Per esempio, i caratteri di $\mathbb{R}^n$ sono le funzioni $\chi_\xi(x) = e^{i\xi\cdot x}$ al variare di $\xi \in \mathbb{R}^n$; invece i caratteri di $\mathbb{T}$ sono le funzioni $\chi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ al variare di $n \in \mathbb{Z}$.

I caratteri di G formano a loro volta un gruppo abeliano rispetto alla moltiplicazione puntuale. Questo gruppo si indica con $\hat{G}$ e si chiama il *gruppo duale* di G. Esso diventa un gruppo localmente compatto se si introduce la topologia della convergenza uniforme sui compatti di G.

(*)Quando G è abeliano si usa la notazione additiva $x + y$ in luogo di quella moltiplicativa

Teorema 29.4 (Teorema di dualità di Pontryagin). *Il gruppo duale di $\hat{G}$ si identifica con G stesso. Più precisamente, i caratteri di $\hat{G}$ sono dati dalle funzioni $\chi \longmapsto \chi(x)$ al variare di $x \in G$.*

Se $f \in L^1(G)$ la sua trasformata di Fourier è la funzione $\hat{f}$ definita su $\hat{G}$ da

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}\, dx \ .$$

Si verifica facilmente che

$$\widehat{f * g}(\chi) = \hat{f}(\chi)\hat{g}(\chi) \ .$$

Per le altre proprietà della trasformata di Fourier, e in particolare le formule di inversione e di Plancherel, si veda il libro di W. Rudin *Fourier analysis on groups*.

La definizione di trasformata di Fourier su un gruppo G localmente compatto ma non abeliano richiede l'introduzione di nozioni di teoria delle rappresentazioni che esulano dall'ambito di questo corso.

Accenniamo solo a un problema connesso con il fatto che la convoluzione non è commutativa. Se la trasformata di Fourier deve essere iniettiva e rispettare la regola per cui

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g} \ ,$$

appare evidente che le funzioni $\hat{f}$ e $\hat{g}$ non possono essere più a valori scalari. Infatti la definizione di trasformata di Fourier in ambito non commutativo viene data in modo che i valori assunti siano matrici, o, più in generale, operatori lineari su spazi di Hilbert.

30. Il gruppo di Heisenberg

Vediamo ora in dettaglio il gruppo di Heisenberg, che, pur non essendo abeliano, ha vari aspetti in comune con $\mathbb{R}^n$. Svilupperemo quella parte della teoria degli integrali singolari che non utilizza la trasformata di Fourier, e quindi richiede solo alcune variazioni rispetto a quanto già visto per $\mathbb{R}^n$.

Si considerino le matrici reali di dimensione $(n+2) \times (n+2)$ della forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & c \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Brevemente scriviamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & Id & {}^t b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \tag{30.1}$$

intendendo $a, b \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$.

Se A, A' sono della forma (30.1), si ha

$$AA' = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & Id & {}^t b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & Id & {}^t b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a + a' & c + c' + a \cdot b' \\ 0 & Id & {}^t b + {}^t b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \tag{30.2}$$

inoltre

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -c + a \cdot b \\ 0 & Id & -{}^t b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; . \tag{30.3}$$

Dunque queste matrici formano un gruppo, detto il *gruppo di Heisenberg* H_n.

Risulta più pratico cambiare le coordinate a, b, c come segue. Ogni matrice della forma (30.1) si può ottenere esponenziando una generica matrice

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x & t \\ 0 & 0 & {}^t y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; .$$

Osserviamo infatti che

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \cdot y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e che $X^3 = 0$. Quindi

$$\exp X = I + X + \frac{1}{2} X^2 = \begin{pmatrix} 1 & x & t + \frac{1}{2} x \cdot y \\ 0 & Id & {}^t y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; . \tag{30.4}$$

Dato quindi $(x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, poniamo $A(x, y, t) = \exp X$. Dalle (30.2) e (30.4) si ricava che

$$A(x, y, t) A(x', y', t') = A \left(x + x', y + y', t + t' + \frac{1}{2}(x \cdot y' - y \cdot x') \right) \; .$$

Possiamo quindi mettere da parte le matrici e ridefinire (in modo equivalente) H_n come $\mathbb{R}^{2n+1}$ dotato del prodotto

$$(x, y, t)(x', y', t') = \left(x + x', y + y', t + t' + \frac{1}{2}(x \cdot y' - y \cdot x') \right) \; . \tag{30.5}$$

Allora l'identità di H_n è l'origine $(0, 0, 0)$ e dalla (30.3)

$$(x, y, t)^{-1} = (-x, -y, -t) \; . \tag{30.6}$$

Si verifica facilmente che la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^{2n+1}$ è una misura di Haar, sia destra che sinistra su H_n. Infatti

$$\int f\Big(x+a, y+b, t+c+\frac{1}{2}(x\cdot b - y\cdot a)\Big)\,dx\,dy\,dt = \int f(x,y,t)\,dx\,dy\,dt$$

e

$$\int f\Big(x+a, y+b, t+c+\frac{1}{2}(a\cdot y - b\cdot x)\Big)\,dx\,dy\,dt = \int f(x,y,t)\,dx\,dy\,dt\ .$$

Vogliamo ora definire su H_n una struttura di spazio di natura omogenea compatibile con la struttura di gruppo. Per far ciò introduciamo delle opportune dilatazioni. A questo proposito è bene premettere una osservazione sulla relazione tra convoluzione e composizione con trasformazioni lineari in $\mathbb{R}^n$ che finora è rimasta in ombra.

Sia A una trasformazione lineare invertibile in $\mathbb{R}^n$. Data una funzione $f(x)$, si ponga $f_A(x) = f(Ax)$. Allora

$$\begin{aligned} f_A * g_A(x) &= \int f\big(A(x-y)\big)g(Ay)\,dy \\ &= \int f(Ax-Ay)g(Ay)\,dy \\ &= (\det A)^{-1}\int f(Ax-y)g(y)\,dy \\ &= (\det A)^{-1} f*g(Ax) \\ &= (\det A)^{-1}(f*g)_A(x)\ . \end{aligned}$$

Questa proprietà è stata usata, in modo più o meno implicito, in vari punti, soprattutto quando A è una dilatazione. È cruciale l'identità $A(x-y) = Ax - Ay$, conseguenza ovvia del fatto che, essendo A lineare, è in particolare un automorfismo di $\mathbb{R}^n$ come gruppo additivo.

Sia dunque G un gruppo unimodulare, e sia $\varphi : G \longrightarrow G$ un automorfismo. Se m è una misura di Haar fissata su G, si ponga $\tilde{m}(E) = m\big(\varphi(E)\big)$. Allora anche $\tilde{m}$ è una misura di Haar, perché

$$\tilde{m}(xE) = m\big(\varphi(x)\varphi(E)\big) = m\big(\varphi(E)\big) = \tilde{m}(E)\ .$$

Allora $\tilde{m}(E) = c_\varphi m(E)$, ossia la sostituzione $x' = \varphi(x)$ in un integrale porta a $dx' = c_\varphi dx$. Se si pone $f_\varphi(x) = f\big(\varphi(x)\big)$, si ha, in analogia con il calcolo fatto sopra,

$$\begin{aligned} f_\varphi * g_\varphi(x) &= \int f\big(\varphi(xy^{-1})\big)g\big(\varphi(y)\big)\,dy \\ &= \int f\big(\varphi(x)\varphi(y)^{-1}\big)g\big(\varphi(y)\big)\,dy \\ &= c_\varphi^{-1}\int f\big(\varphi(x)y^{-1}\big)g(y)\,dy \\ &= c_\varphi^{-1}(f*g)_\varphi(x)\ . \end{aligned} \tag{30.7}$$

Volendo quindi introdurre delle dilatazioni su H_n è bene fare in modo che siano automorfismi di gruppo. Il caso più rilevante(*) è dato da

$$\delta \cdot (x, y, t) = (\delta x, \delta y, \delta^2 t) \ . \tag{30.8}$$

La costante c_φ che appare nella (30.7) è uguale a δ^{2n+2}. L'esponente $Q = 2n+2$ è dunque la dimensione omogenea di H_n rispetto alle dilatazioni (30.8).

Sia $\rho(x, y, t)$ una norma omogenea, secondo la definizione data nel paragrafo 22. Adattando la dimostrazione della Proposizione 22.1, si dimostra che vale una disuguaglianza triangolare riferita al prodotto su H_n.

Lemma 30.1. *Esiste una costante $c \geq 1$ tale che per ogni $u, v \in H_n$*

$$\rho(uv) \leq c\big(\rho(u) + \rho(v)\big) \ .$$

Si ponga ora $d(u, v) = \rho(u^{-1}v)$. Allora d è una quasi-distanza. Infatti

(1) $d(u, v) = 0$ se e solo se $u^{-1}v = 0$, cioè $u = v$;
(2) $d(v, u) = \rho(v^{-1}u) = \rho\big((u^{-1}v)^{-1}\big) = \rho(u^{-1}v) = d(u, v)$, per la (30.6) e per il fatto che $\rho(-x, -y, -t) = \rho(x, y, t)$;
(3) $d(u, w) = \rho(w^{-1}u) = \rho(w^{-1}vv^{-1}u) \leq c\big(\rho(w^{-1}v) + \rho(v^{-1}u)\big) = c\big(d(u, v) + d(v, w)\big)$.

Inoltre d è *invariante a sinistra*, ossia $d(wu, wv) = d(u, v)$ per ogni u, v, w. Ciò implica che, se B è la palla di centro 0 e raggio r, allora la palla di centro u e raggio r coincide con uB.

Proposizione 30.2. *H_n, dotato della misura di Haar e della quasi-distanza d, è uno spazio di natura omogenea.*

Dimostrazione. Bisogna verificare la proprietà doubling. Poiché sia la distanza che la misura sono invarianti a sinistra, è sufficiente considerare palle centrate in 0. Ma, essendo $B(0, r) = \{u : \rho(u) < r\}$, si ha banalmente che $m\big(B(0, 2r)\big) = 2^Q m\big(B(0, r)\big)$. $\square$

Si ponga ora $d'(u, v) = \rho(uv^{-1})$. Come prima si verifica che anche d' è una quasi-distanza, ma questa volta è invariante a destra.

Proposizione 30.3. *Le quasi-distanze d e d' non sono equivalenti.*

Dimostrazione. Supponendo per semplicità $n = 1$, si prendano i punti $u_k = (k, 0, 0)$ e $v_k = (k, 1, k/2)$. Allora

$$u_k^{-1}v_k = (-k, 0, 0)(k, 1, k/2) = (0, 1, 0) \ ,$$

mentre

$$u_k v_k^{-1} = (k, 0, 0)(-k, -1, -k/2) = (0, -1, -k) \ .$$

Dunque $d(u_k, v_k)$ è indipendente da k, mentre $d'(u_k, v_k)$ diventa arbitrariamente grande all'aumentare di k. $\square$

(*)Anche altre dilatazioni sono automorfismi, per es. $\delta \cdot (x, y, t) = (\delta x, \delta^2 y, \delta^3 t)$

31. Integrali singolari sul gruppo di Heisenberg

Sarebbe un esercizio interessante, ma noioso, riprendere questo corso dall'inizio e ripetere buona parte degli argomenti (tranne quelli che richiedono la trasformata di Fourier!) sostituendo alla convoluzione di $\mathbb{R}^n$ quella di H_n. L'operazione richiede un po' di cura perché non tutto si trasporta in modo ovvio.

Un fatto che si adatta senza modifiche è il seguente: la convoluzione di due funzioni in $\mathcal{S}$ è ancora in $\mathcal{S}$. Di conseguenza la convoluzione di una funzione in $\mathcal{S}$ con una distribuzione temperata è ben definita.

Un fatto invece che richiede qualche modifica è la caratterizzazione degli operatori che commutano con le traslazioni. Osserviamo a questo proposito che dato un nucleo $K \in L^1(H_n)$, ad esso si associano due operatori di convoluzione: $T_1 f = K * f$ e $T_2 f = f * K$. Essi non solo sono diversi, ma hanno diverse proprietà di invarianza.

Indichiamo con $L_v f$ la *traslata sinistra* di una funzione f per un elemento $v \in H_n$,

$$L_v f(u) = f(v^{-1}u) \ .$$

L'inverso è stato introdotto per avere l'identità $L_{vw} f = L_v L_w f$. Analogamente, indichiamo con $R_v f$ la *traslata destra* di una funzione f per un elemento $v \in H_n$,

$$R_v f(u) = f(uv) \ .$$

Valgono le relazioni

$$L_v f = \delta_v * f \ , \qquad R_v f = f * \delta_{v^{-1}} \ .$$

Si vede allora che

$$R_v(T_1 f) = (K * f) * \delta_{v^{-1}} = K * (f * \delta_{v^{-1}}) = T_1(R_v f) \ ,$$

e analogamente

$$L_v(T_2 f) = T_2(L_v f) \ .$$

Quindi quando il nucleo agisce da sinistra, l'operatore commuta con le traslazioni destre, e viceversa. Il risultato allora è il seguente.

Teorema 31.1. *Sia $T : \mathcal{S}(H_n) \longrightarrow \mathcal{S}'(H_n)$ un operatore lineare e continuo che commuti con le traslazioni sinistre (risp. destre). Esiste allora un'unica $K \in \mathcal{S}'(H_n)$ tale che $Tf = f * K$ (risp. $Tf = K * f$).*

È bene fare alcune osservazioni sulla relazione tra operatori di convoluzione destra e sinistra su un gruppo non commutativo.

Se su un gruppo G abeliano si pone la dualità

$$\langle f, g \rangle = \int_G f(x) g(-x)\, dx \ ,$$

vale (come abbiamo visto su $\mathbb{R}^n$) l'identità

$$\langle K * f, g \rangle = \langle f, K * g \rangle \ .$$

Ciò implica che l'aggiunto T^* di un operatore di convoluzione T coincide con T stesso. Di conseguenza $C_{pq} = C_{q'p'}$.

Questo non vale più, in generale, su un gruppo non commutativo. Esistono infatti operatori di convoluzione "asimmetrici", nel senso che sono limitati da L^p a L^q ma non da $L^{q'}$ a $L^{p'}$.

Se su un gruppo unimodulare si introduce la dualità

$$\langle f, g\rangle = \int_G f(x) g(x^{-1})\, dx = f * g(e) \ ,$$

si ha allora

$$\langle f * K, g\rangle = (f * K) * g(e) = f * (K * g)(e) = \langle f, K * g\rangle \ .$$

Si ha allora il seguente enunciato.

Proposizione 31.2. *Sia $T_1 f = f * K$ limitato(*) da L^p a L^q. Allora $T_2 f = K * f$ è limitato da $L^{q'}$ a $L^{p'}$.*

Si ponga ora (sempre su un gruppo unimodulare) $\check{f}(x) = f(x^{-1})$. Si verifica facilmente la relazione

$$(f * g)\check{} = \check{g} * \check{f} \ .$$

Proposizione 31.3. *Sia $T_1 f = f * K$ limitato da L^p a L^q. Allora $T' f = \check{K} * f$ è limitato da $L^{q'}$ a $L^{p'}$.*

Dimostrazione. Si ha $T' f = (\check{f} * K)\check{} = (T_2 \check{f})\check{}$. Poiché l'applicazione $f \longmapsto \check{f}$ è un'isometria su ogni L^p, segue la tesi. $\square$

Con riferimento alle dilatazioni $\delta \cdot (x, y, t) = (\delta x, \delta y, \delta^2 t)$ introdotte nel paragrafo precedente, il grado di omogeneità di una distribuzione è definito come su $\mathbb{R}^n$. Tenendo conto del fatto che la dimensione omogenea è $Q = 2n + 2$, si ha il seguente enunciato.

Proposizione 31.2. *Sia K una distribuzione omogenea di grado $-2n-2+\alpha$, con $0 \leq \Re e\alpha \leq 2n+2$. Se l'operatore $Tf = f * K$ (o anche $Tf = K * f$) è limitato da L^p a L^q, allora vale la relazione*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\Re e\alpha}{2n+2} \ . \tag{31.1}$$

Il Teorema di Hardy-Littlewood-Sobolev ha il seguente analogo.

Teorema 31.3. *Sia ρ una norma omogenea su H_n e si ponga $K(u) = \rho(u)^{-2n-2+\alpha}$, con $0 < \Re e\alpha < 2n+2$. Allora gli operatori $T_1 f = f * K$ e $T_2 f = K * f$ sono limitati da L^p a L^q per $1 < p < q < \infty$ legati dalla relazione* (31.1).

Molte attenzioni in più richiede lo studio degli operatori di convoluzione il cui nucleo è omogeneo di grado $-2n-2$, o, più in generale, una distribuzione con valore principale. La parte della teoria sviluppata nel paragrafo 18 per $\mathbb{R}^n$ si estende ad H_n con alcune modifiche.

(*)Ricordiamo che se $p = \infty$ in luogo di L^∞ si considera C_0.

Teorema 31.4. *Sia K una distribuzione tale che*

(1) *l'operatore $T_1 f = f * K$ sia limitato su L^2;*
(2) *fuori dall'origine K coincide con una funzione localmente integrabile $K(u)$ tale che*

$$\int_{|u|>C|h|} \big|K(hu) - K(u)\big|\, du \le C \ . \tag{31.1}$$

Allora T_1 è limitato su L^p per $1 < p < 2$ e di tipo debole $(1,1)$.

Analogamente, sia K una distribuzione tale che

(1) *l'operatore $T_2 f = K * f$ sia limitato(*) su L^2;*
(2) *fuori dall'origine K coincide con una funzione localmente integrabile $K(u)$ tale che*

$$\int_{|u|>C|h|} \big|K(uh) - K(u)\big|\, du \le C \ . \tag{31.2}$$

Allora T_2 è limitato su L^p per $1 < p < 2$ e di tipo debole $(1,1)$.

Corollario 31.5. *Sia K una distribuzione tale che gli operatori $T_1 f = f * K$ e $T_2 f = K * f$ siano limitati su L^2 e inoltre valgano le* (31.1) *e* (31.2)*. Allora T_1 e T_2 sono limitati su L^p per $1 < p < \infty$ e di tipo debole $(1,1)$.*

Consideriamo un caso molto rilevante di distribuzione con valore principale, analogo a quello già considerato nel Teorema 19.3.

Sia $\{\varphi_j\}$ una famiglia di funzioni di classe C^1 tali che

(1) $\operatorname{supp} \varphi_j \subset \{u : \rho(u) \le A\}$;
(2) $\int \varphi_j(u)\, du = 0$ per ogni j;
(3) $\|\varphi_j\|_{C^1} \le C$.

Posto $\varphi_j^{(j)}(u) = 2^{-Qj} \varphi_j(2^{-j} \cdot u)$, la serie

$$K = \sum_j \varphi_j^{(j)} \tag{31.3}$$

converge nel senso delle distribuzioni.

Lemma 31.6. *La distribuzione K nella* (31.3) *soddisfa le condizioni* (31.1) *e* (31.2)*.*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che le φ_j soddisfano delle condizioni di Lipschitz

$$|\varphi_j(hu) - \varphi_j(u)| \le C\rho(h) \ , \qquad |\varphi_j(uh) - \varphi_j(u)| \le C\rho(h) \ ,$$

uniformemente in j.

Se $\rho(h) > 1$ basta considerare che

$$|\varphi_j(hu) - \varphi_j(u)| \le 2\|\varphi_j\|_\infty \le 2C\rho(h) \ .$$

(*)Di fatto la limitatezza di T_2 su L^2 è equivalente e quella di T_1.

Se $\rho(h) < 1$, si ponga $u = (x, y, t)$ e $h = (h_1, h_2, h_3)$. Allora

$$\begin{aligned}|\varphi_j(hu) - \varphi_j(u)| &= \big|\varphi_j\big((h_1, h_2, h_3)(x, y, t)\big) - \varphi_j(x, y, t)\big| \\ &= \Big|\varphi_j\Big(x + h_1, y + h_2, t + h_3 + \frac{1}{2}(y \cdot h_1 - x \cdot h_2)\Big) - \varphi_j(x, y, t)\Big| \\ &\le C\Big(|h_1| + |h_2| + \Big|h_3 + \frac{1}{2}(y \cdot h_1 - x \cdot h_2)\Big|\Big) \ .\end{aligned}$$

Se $\rho(u)$ è grande, sia $\varphi_j(u)$ che $\varphi_j(hu)$ sono nulli. Supponiamo dunque $\rho(u)$ limitato superiormente da una costante, il che implica che anche $|x|$ e $|y|$ sono limitati superiormente. Quindi

$$|\varphi_j(hu) - \varphi_j(u)| \le C(|h_1| + |h_2| + |h_3|) \le C'\rho(h) \ .$$

Ricavare da questa disuguaglianza la (31.1) è ormai routine. In modo analogo si ottiene la (31.2). $\square$

Per poter applicare il Corollario 3.5 rimane da dimostrare che $T_1 f = f * K$ è limitato su L^2. Per far ciò, se fossimo in $\mathbb{R}^n$, cercheremmo di dimostrare che $\hat{K} \in L^\infty$. Anche su H_n sarebbe teoricamente possibile dimostrare qualcosa di analogo, ma non abbiamo introdotto la giusta nozione di trasformata di Fourier, e peraltro sarebbe una verifica troppo complicata.

Un metodo alternativo, che evita l'uso della trasformata di Fourier, consiste nell'applicazione del *principio di quasi ortogonalità* di Cotlar-Knapp-Stein.

Teorema 31.7. *Sia $\{T_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ una famiglia di operatori limitati su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, e sia $\{a(n)\}$ una successione tale che*

$$\|T_j T_k^*\| \le a(j-k) \ , \qquad \|T_j^* T_k\| \le a(j-k) \ .$$

Allora, posto $A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)^{1/2}$, vale per ogni $N > 0$ la disuguaglianza

$$\Big\|\sum_{|j|\le N} T_j\Big\| \le A \ .$$

Dimostrazione. Innanzitutto si ha $\|T_j\| = \|T_j^* T_j\|^{1/2} \le a(0)^{1/2} \le A$.

Posto $T = \sum_{|j|\le N} T_j$, si ha $\|T\|^2 = \|T^*T\|$, per cui basta valutare la norma di $U = T^*T$. Poiché $U = U^*$, si ha

$$\begin{aligned}\|U^2\| &= \sup_{\|x\|\le 1, \|y\|\le 1} \langle U^2 x, y\rangle \\ &= \sup_{\|x\|\le 1, \|y\|\le 1} \langle Ux, Uy\rangle \\ &\ge \sup_{\|x\|\le 1} \langle Ux, Ux\rangle \\ &= \|U\|^2 \ .\end{aligned}$$

Essendo anche $\|U^2\| \leq \|U\|^2$, si ha l'uguaglianza $\|U^2\| = \|U\|^2$. Induttivamente, $\|U^{2^k}\| = \|U\|^{2^k}$, ossia

$$\|T^*T\| = \left\|(T^*T)^{2^k}\right\|^{1/2^k} .$$

Posto $n = 2^k$, si ha

$$(T^*T)^n = \sum_{-N \leq i_1, i_2, \ldots, i_{2n} \leq N} T^*_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_{2n}} .$$

Su ogni addendo si possono fare due maggiorazioni:

$$\|T^*_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_{2n}}\| \leq \|T^*_{i_1} T_{i_2}\| \cdots \|T^*_{i_{2n-1}} T_{i_{2n}}\| \leq a(i_1 - i_2) a(i_3 - i_4) \cdots a(i_{2n-1} - i_{2n})$$
$$\|T^*_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_{2n}}\| \leq \|T^*_{i_1}\| \|T_{i_2} T^*_{i_3}\| \cdots \|T_{i_{2n}}\| \leq A^2 a(i_2 - i_3) \cdots a(i_{2n-2} - i_{2n-1}) .$$

Moltiplicando membro a membro ed estraendo la radice quadrata, si ottiene

$$\|T^*_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_{2n}}\| \leq A a(i_1 - i_2)^{1/2} a(i_2 - i_3)^{1/2} \cdots a(i_{2n-1} - i_{2n})^{1/2} .$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\|(T^*T)^n\| &= \sum_{-N \leq i_1, i_2, \ldots, i_{2n} \leq N} \|T^*_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_{2n}}\| \\
&\leq A \sum_{-N \leq i_1, i_2, \ldots, i_{2n} \leq N} a(i_1 - i_2)^{1/2} a(i_2 - i_3)^{1/2} \cdots a(i_{2n-1} - i_{2n})^{1/2} \\
&\leq A^2 \sum_{-N \leq i_2, \ldots, i_{2n} \leq N} a(i_2 - i_3)^{1/2} \cdots a(i_{2n-1} - i_{2n})^{1/2} \\
&\cdots\cdots \\
&\leq A^{2n-1} \sum_{-N \leq i_{2n-1}, i_{2n} \leq N} a(i_{2n-1} - i_{2n})^{1/2} \\
&\leq N A^{2n} .
\end{aligned}$$

Quindi

$$\|T^*T\| \leq N^{1/2^k} A^2 .$$

Passando al limite per k che tende a infinito, si ha la tesi. $\square$

Teorema 31.8. *Sia K definita dalla* (31.3)*. Allora gli operatori di convoluzione con nucleo K sono limitati su L^2.*

Dimostrazione. Limitiamoci a considerare l'operatore $f \longmapsto f * K$.

Basta dimostrare che per ogni N l'operatore con nucleo

$$K_N = \sum_{|j| \leq N} \varphi_j^{(j)}$$

è limitato su L^2 con norma indipendente da N.

Si ponga $T_j f = f * \varphi_j^{(j)}$. Risulta

$$\begin{aligned}
\langle T_j^* f, g\rangle &= \langle f, T_j g\rangle \\
&= \int f(u) \overline{\int g(v)\varphi_j^{(j)}(v^{-1}u)\, dv}\, du \\
&= \iint f(u)\overline{\varphi_j^{(j)}(v^{-1}u)}\, du\, \overline{g(v)}\, dv \\
&= \langle f * \overline{\check{\varphi}_j}^{(j)}, g\rangle \ .
\end{aligned}$$

Se chiamiamo $\varphi_j^*(u) = \overline{\varphi_j(u^{-1})}$, abbiamo allora che $T_j^* f = f * \varphi_j^{*(j)}$. Allora

$$T_j T_k^* f = f * \varphi_j^{(j)} * \varphi_k^{*(k)} \ .$$

Poiché $\|T_j T_k^* f\|_2 \leq \|\varphi_j^{(j)} * \varphi_k^{*(k)}\|_1 \|f\|_2$, calcoliamo queste norme L^1. Supponiamo $j \leq k$. Con un cambiamento di scala, si ha

$$\|\varphi_j^{(j)} * \varphi_k^{*(k)}\|_1 = \|\varphi_j^{(j-k)} * \varphi_k^*\|_1 \ .$$

Per la condizione di media nulla,

$$\begin{aligned}
\varphi_j^{(j-k)} * \varphi_0^*(u) &= \int \varphi_j^{(j-k)}(v)\varphi_0^*(v^{-1}u)\, dv \\
&= \int \varphi_j^{(j-k)}(v)\big(\varphi_0^*(v^{-1}u) - \varphi_0^*(u)\big)\, dv \ .
\end{aligned}$$

Poiché $\varphi_j^{(j-k)}$ ha supporto dove $\rho(v) \leq A2^{j-k}$, si ha

$$\begin{aligned}
\big|\varphi_j^{(j-k)} * \varphi_0^*(u)\big| &\leq C2^{j-k} \int |\varphi_j^{(j-k)}(v)|\, dv \\
&\leq C2^{j-k} \int |\varphi_j(v)|\, dv \\
&\leq C2^{j-k} \ .
\end{aligned}$$

Il supporto di $\varphi_j^{(j-k)} * \varphi_0^*$ è contenuto nel prodotto della palla di raggio A con quella di raggio $A2^{j-k}$. Per la disuguaglianza triangolare, essendo $j - k \leq 0$, esso è contenuto in una palla di raggio indipendente da j e k. Quindi

$$\|\varphi_j^{(j-k)} * \varphi_k^*\|_1 \leq C2^{j-k} \ .$$

Se $j > k$ si cambia scala si un fattore 2^j, in modo da avere

$$\|\varphi_j^{(j)} * \varphi_k^{*(k)}\|_1 = \|\varphi_j * \varphi_k^{*(k-j)}\|_1 \ .$$

Procedendo come sopra, si ottiene

$$\|\varphi_j^{(j-k)} * \varphi_k^*\|_1 \leq C2^{k-j} \ .$$

In definitiva,

$$\|T_j T_k^*\| \leq C2^{-|k-j|} \ .$$

Poiché la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-|n|/2}$ è convergente, si ha la tesi. $\square$