1. Spazi di Fréchet

Riportiamo brevemente nozioni e risultati principali sugli spazi di Fréchet. Per le dimostrazioni ed eventuali approfondimenti si può consultare il libro di W. Rudin "*Functional Analysis*".

Su uno spazio vettoriale V (che supporremo complesso, salvo avviso contrario) si consideri una famiglia numerabile $\mathcal{P} = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di seminorme. Indichiamo con $\tau_{\mathcal{P}}$ la meno fine tra tutte le topologie τ su V che rendano continua l'applicazione identica $i : (V, \tau) \longrightarrow (V, p_n)$ per ogni n.

Si dice che $\mathcal{P}$ è una famiglia *separante* di seminorme se per ogni $x \in V$ esiste n tale che $p_n(x) > 0$. Supporremo sempre che $\mathcal{P}$ sia separante.

Proposizione 1.1. *La topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ gode delle seguenti proprietà:*

(1) *$(V, \tau_{\mathcal{P}})$ è separato e localmente convesso;*
(2) *le intersezioni finite degli insiemi*

$$B_{n,m} = \left\{ x : p_n(x) < \frac{1}{m} \right\}$$

formano un sistema findamentale di intorni di 0;
(3) *$\tau_{\mathcal{P}}$ è una topologia metrica, nel senso che è la topologia indotta dalla distanza*

$$d_{\mathcal{P}}(x, y) = \sum_n 2^{-n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)} \ ; \tag{1.1}$$

(4) *una successione $\{x_j\}$ di punti di V converge a x nella topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ se e solo se converge a x rispetto a ciascuna delle seminorme p_n, ossia se*

$$\lim_{j\to\infty} p_n(x - x_j) = 0 \qquad \forall\, n \ ;$$

(5) *una successione $\{x_j\}$ di punti di V è di Cauchy nella topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ se e solo se è di Cauchy rispetto a ciascuna delle seminorme p_n.*

La distanza $d_{\mathcal{P}}$ nella (1.1) è *invariante*, nel senso che

$$d_{\mathcal{P}}(x + z, y + z) = d_{\mathcal{P}}(x, y)$$

per ogni $x, y, z \in V$.

Proposizione 1.2. *Sia V uno spazio vettoriale topologico. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) *la topologia di V è definita da una famiglia numerabile e separante di seminorme;*
(2) *V è localmente convesso e la sua topologia è indotta da una distanza invariante.*

Uno spazio vettoriale topologico si dice *di Fréchet* se la sua topologia soddisfa le proprietà della Proposizione 1.2 ed è completo.

Esempio.

Dato un compatto K in $\mathbb{R}^n$, sia $\mathcal{D}(K)$ lo spazio delle funzioni di classe C^∞ su $\mathbb{R}^n$ con supporto contenuto in K. Si ponga

$$p_k(f) = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_\infty \ .$$

Chiaramente la famiglia $\mathcal{P} = \{p_k\}$ è separante, per il semplice fatto che ciascuna di esse è una norma. Verifichiamo che $\mathcal{D}(K)$ è completo per la distanza $d_\mathcal{P}$.

Sia $\{f_j\}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{D}(K)$. Segue dalla Proposizione 1.1(5) che

$$\lim_{i,j\to\infty} p_k(f_i - f_j) = 0$$

per ogni k. Di conseguenza per ogni α la successione $\{\partial^\alpha f_j\}$ è di Cauchy rispetto alla norma uniforme. In particolare le f_j convergono uniformemente a una funzione f, ed è un risultato ben noto che allora le derivare $\partial^\alpha f_j$ convergono a $\partial^\alpha f$ uniformemente per ogni α.

Dunque f è C^∞ e ha supporto in K, ossia è in $\mathcal{D}(K)$. Le f_j convergono a f rispetto a ognuna delle norme p_k. Per la Proposizione 1.1(4), esse convergono a f nella topologia $\tau_\mathcal{P}$.

Applicazioni lineari.

Sia $T : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare tra due spazi di Fréchet. Siano $\mathcal{P} = \{p_n\}$ e $\mathcal{Q} = \{q_n\}$ due famiglie di seminorme che definiscono le topologie di V e W rispettivamente.

Proposizione 1.3. *T è continua se e solo se per ogni intero n esistono un intero m e una costante C_n tali che*

$$q_n(Tx) \le C_n \sum_{k=0}^{m} p_k(x) \tag{1.2}$$

per ogni $x \in V$.

Da questo enunciato discendono le seguenti conseguenze:

Corollario 1.4.

(1) *Sia T un'applicazione lineare di uno spazio di Fréchet V (dotato di seminorme $\mathcal{P} = \{p_n\}$) in uno spazio di Banach W. Allora T è continua se e solo se esistono un intero m e una costante C tali che*

$$\|T(x)\|_W \le C \sum_{k=0}^{m} p_k(x) \ .$$

(2) *Due famiglie separanti di seminorme $\mathcal{P} = \{p_n\}$ e $\mathcal{P}' = \{p'_n\}$ su V definiscono la stessa topologia se e solo se per ogni intero n esistono un intero m e una costante C_n tali che*

$$p_n(x) \le C_n \sum_{k=0}^{m} p'_k(x) \ ,$$

$$p'_n(x) \le C_n \sum_{k=0}^{m} p_k(x)$$

per ogni $x \in V$.

Data una famiglia di seminorme $\mathcal{P} = \{p_n\}$, si ponga

$$p'_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) \ .$$

Poiché $p_n(x) \le p'_n(x) \le \sum_{k=0}^{n} p_k(x)$, le due famiglie di seminorme sono equivalenti, nel senso che definiscono la stessa topologia. La famiglia $\{p'_n\}$ ha il vantaggio di essere crescente.

Si noti che se una famiglia di seminorme $\{p_n\}$ su uno spazio V è crescente, la (1.2) si può scrivere più semplicemente nella forma

$$q_n(Tx) \le C_n p_m(x) \ ,$$

e analogamente nel Corollario 1.4(1).

Teoremi su operatori lineari e forme bilineari.

Teorema di Hahn-Banach. *Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio di Fréchet V, dotato di una famiglia crescente di seminorme $\{p_n\}$. Sia T un funzionale lineare su W, tale che $|T(x)| \le Cp_n(x)$ per ogni $x \in W$. Esiste allora un prolungamento lineare $\tilde{T}$ di T a tutto V tale che $|\tilde{T}(x)| \le Cp_n(x)$ per ogni $x \in V$.*

Un sottoinsieme E di uno spazio di Fréchet V si dice *limitato* se per ogni seminorma p_n si ha $\sup \big\{p_n(x) : x \in E\big\} < \infty$.

Una famiglia $\mathcal{T}$ di operatori lineari tra due spazi vettoriali topologici V e W si dice *equicontinua* se per ogni intorno U di 0 in W esiste un intorno U' di 0 in V tale che $T(U') \subset U$ per ogni $T \in \mathcal{T}$. Quando V e W sono spazi di Fréchet, dotati di famiglie crescenti di seminorme $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ rispettivamente, una famiglia $\mathcal{T}$ di operatori lineari è equicontinua se e solo se per ogni intero n esistono un intero m e una costante C_n tali che

$$q_n(Tx) \le C_n p_m(x)$$

per ogni $x \in V$ e $T \in \mathcal{T}$.

Teorema di limitatezza uniforme, o di Banach-Steinhaus. *Sia $\mathcal{T}$ una famiglia di operatori lineari continui tra due spazi di Fréchet V e W. Se per ogni $x \in V$ l'insieme $E_x = \{Tx : T \in \mathcal{T}\}$ è limitato in W, allora $\mathcal{T}$ è equicontinua.*

Teorema dell'applicazione aperta. *Sia T un operatore lineare continuo tra due spazi di Fréchet V e W. Se T è suriettivo, allora T è aperto. In particolare, se T è iniettivo, allora anche T^{-1} è continuo.*

Teorema del grafico chiuso. *Sia T un operatore lineare tra due spazi di Fréchet V e W. Si supponga che il suo grafico $\Gamma_T = \{(x, Tx) : x \in V\}$ sia chiuso in $V \times W$, ossia che le ipotesi:*

(1) $\lim_{j\to\infty} x_j = x$ *in* V,
(2) $\lim_{j\to\infty} T(x_j) = y$ *in* V

implichino che $y = Tx$. Allora T è continuo.

Una forma bilineare $B : V \times W \longrightarrow \mathbb{C}$, dove V e W sono spazi vettoriali topologici, si dice *separatamente continua* se

(1) $B(x_0, \cdot)$ è continua su W per ogni $x_0 \in V$;
(2) $B(\cdot, y_0)$ è continua su V per ogni $y_0 \in W$.

Teorema di Bourbaki. *Sia B una forma bilineare separatamente continua sul prodotto di due spazi di Fréchet V e W. Allora B è continua.*

2. Lo spazio delle funzioni test

Cominciamo con alcuni preliminari sulla duttilità delle funzioni C^∞.

Si consideri su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \ . \end{cases}$$

È noto che f è C^∞. Quindi

$$g(t) = f(t)f(1-t)$$

è pure C^∞ e ha supporto in $[0,1]$.

Sia $c > 0$ tale che $\int_0^1 g(t)\,dt = c^{-1}$ e si ponga

$$G(t) = c\int_{-\infty}^t g(u)\,du \ .$$

Allora G è C^∞, crescente, $G(t) = 0$ per $t \leq 0$ e $G(t) = 1$ per $t \geq 1$. Se si pone, per $\delta > 0$,

$$G_\delta(t) = G\left(\frac{t}{\delta}\right) \ ,$$

allora $G_\delta(t) = 1$ per $t \geq \delta$, e per il resto gode delle stesse proprietà di G.

Se $b > 2\delta$, la funzione

$$H_{b,\delta}(t) = G_\delta(t)G_\delta(b-t)$$

è C^∞, ha supporto in $[0,b]$, è uguale a 1 su $[\delta, b-\delta]$, è crescente su $[0,\delta]$ e decrescente su $[b-\delta, b]$.

È importante a questo punto valutare la grandezza delle derivate delle funzioni che abbiamo costruito. Si osservi che

$$G_\delta^{(n)}(t) = \delta^{-n}G^{(n)}\left(\frac{t}{\delta}\right) \ ,$$

per cui $|G_\delta^{(n)}(t)| \leq C_n\delta^{-n}$. Di conseguenza, applicando la regola di Leibniz,

$$|H_{b,\delta}^{(n)}(t)| \leq C_n'\delta^{-n} \ . \tag{2.1}$$

Per mezzo di una opportuna traslazione, la funzione $H_{b,\delta}$ può essere riportata su un generico intervallo $[a,b]$, in modo da avere il seguente enunciato.

Proposizione 2.1. *Dati un intervallo $[a,b]$ e un sottointervallo $[a',b'] \subset (a,b)$, esiste una funzione f di classe C^∞ su $\mathbb{R}$ con supporto in $[a,b]$, tale che $0 \le f(t) \le 1$, identicamente uguale a 1 su $[a',b']$ e tale che, posto $\delta = \min\{a'-a, b-b'\}$, $|f^{(n)}(t)| \le C_n \delta^{-n}$, dove le C_n sono costanti assolute.*

Passiamo ora a più dimensioni. Si prenda una funzione g di classe C^∞ su $\mathbb{R}$, pari, tale che $0 \le g(t) \le 1$, con supporto in $[-1,1]$ e uguale a 1 su $[-1/2, 1/2]$.

Su $\mathbb{R}^n$ si ponga

$$\varphi_(x) = g(|x|) \ .$$

Poiché $|x|$ è una funzione C^∞ fuori dall'origine, φ è pure C^∞ fuori dall'origine. D'altra parte φ è anche C^∞ sulla palla di centro 0 e raggio $1/2$, essendo ivi costante.

Dato $\delta > 0$, la funzione

$$\varphi_\delta(x) = \varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

ha supporto nella palla chiusa di centro 0 e raggio δ, ed è identicamente uguale a 1 sulla palla di raggio $\delta/2$. Inoltre, se $b_\alpha = \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$, si ha

$$|\partial^\alpha \varphi_\delta(x)| \le b_\alpha \delta^{-|\alpha|} \ . \tag{2.2}$$

Teorema 2.2. *Dati un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e un compatto $K \subset A$, sia $d \in (0, +\infty]$ la distanza di K dal complementare di A. Dato $\delta < d$, esiste una funzione $\psi \ge 0$, di classe C^∞ su $\mathbb{R}^n$, con supporto compatto in A, identicamente uguale a 1 su un intorno di K, e tale che*

$$|\partial^\alpha \psi(x)| \le C_{\alpha,n} \delta^{-|\alpha|} \ ,$$

dove le costanti $C_{\alpha,n}$ dipendono solo da α e dalla dimensione n.

Dimostrazione. Siano $K' = \{x : d(x,K) \le \delta/4\}$, $K'' = \{x : d(x,K) \le \delta/2\}$, $K''' = \{x : d(x,K) \le 3\delta/4\}$. Allora K', K'' e K''' sono compatti e $K \subset K' \subset K'' \subset K''' \subset A$. Si definisca

$$\begin{aligned} u(x) &= \chi_{K''} * \varphi_{\delta/4}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K''}(y) \varphi_{\delta/4}(x-y)\, dy \\ &= \int_{K''} \varphi_{\delta/4}(x-y)\, dy \ . \end{aligned}$$

Derivando sotto integrale, si ha

$$\partial^\alpha u(x) = \int_{K''} \partial^\alpha \varphi_{\delta/4}(x-y)\, dy \ .$$

Poiché la funzione integranda è diversa da 0 solo quando $|x-y| < \delta/4$, l'integrale è esteso a $K'' \cap B(x, \delta/4)$, che ha misura minore o uguale a $\omega_n \delta^n / 4^n$ (dove ω_n è la misura della palla unitaria). Di conseguenza, per la (2.2),

$$|\partial^\alpha u(x)| \le C_{\alpha,n} \delta^{n-|\alpha|} \ .$$

Se $x \notin K'''$, allora $K'' \cap B(x, \delta/4) = \emptyset$, per cui $u(x) = 0$. Quindi $\operatorname{supp} u \subseteq K'''$.

Se $x \in K'$, $B(x, \delta/4) \subseteq K''$, per cui

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\delta/4}(x-y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\delta/4}(y)\, dy \\ &= 4^n \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \\ &= c_n \delta^{-n} \ . \end{aligned}$$

Si verifica allora facilmente che $\psi(x) = c_n^{-1}\delta^n u(x)$ ha le proprietà richieste. □

Topologia di $\mathcal{D}(A)$.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto. Ricordiamo che, dato un compatto $K \subset A$, si indica con $\mathcal{D}(K)$ lo spazio de Fréchet delle funzioni C^∞ su A con supporto in K, dotato delle norme

$$p_k(f) = \sum_{|\alpha| \le k} \|\partial^\alpha f\|_\infty \ .$$

La convergenza di una successione $\{f_k\}$ nella topologia di $\mathcal{D}(K)$ è la convergenza uniforme di tutte le successioni $\{\partial^\alpha f_k\}$, per ogni multiindice α.

Poniamo

$$\mathcal{D}(A) = \bigcup_{K \text{ compatto } ,K \subset A} \mathcal{D}(K) \ ,$$

e indichiamo con $i_K : \mathcal{D}(K) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$ l'inclusione. Su $\mathcal{D}(A)$ introduciamo la topologia più fine che renda continue le varie inclusioni i_K.

Proposizione 2.3. *Valgono le seguenti proprietà:*

(1) *un sottoinsieme $U \subset \mathcal{D}(A)$ è aperto se e solo se per ogni K $U \cap \mathcal{D}(K)$ è aperto nella topologia di $\mathcal{D}(K)$;*
(2) *la topologia indotta da $\mathcal{D}(A)$ su $\mathcal{D}(K)$ coincide con la topologia propria di $\mathcal{D}(K)$;*
(3) *un'applicazione lineare T da $\mathcal{D}(A)$ in uno spazio vettoriale topologico V è continua se e solo se per ogni $K \subset A$ compatto, l'applicazione $T \circ i_K : \mathcal{D}(K) \longrightarrow V$ è continua.*

Dimostrazione. La (1) è una riformulazione della condizione che definisce la topologia di $\mathcal{D}(A)$. La (2) e la (3) sono conseguenze immediate della (1). □

Dobbiamo ora premettere un lemma di carattere topologico, di facile verifica.

Lemma 2.4. *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$. Posto*

$$K_j = \left\{ x \in A : |x| \le j,\ d(x, {}^cA) \ge \frac{1}{j} \right\}$$

se $A \ne \mathbb{R}^n$, e $K_j = \{x : |x| \le j\}$ se $A = \mathbb{R}^n$, allora $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = A$ e ogni compatto $K \subset A$ è contenuto in uno dei K_j.

Teorema 2.5. *Una successione $\{f_n\}$ converge a f in $\mathcal{D}(A)$ se e solo se i supporti delle f_n e di f sono contenuti in un unico compatto $K \subset A$, e tutte le derivate $\partial^\alpha f_n$ convergono a $\partial^\alpha f$ uniformemente.*

Dimostrazione. Se i supporti delle f_n sono contenuti in un unico compatto K ed esse convergono a f in $\mathcal{D}(K)$, allora esse convergono a f anche in $\mathcal{D}(A)$ per la Proposizione 2.3(2).

Supponiamo viceversa che le f_n convergano a f in $\mathcal{D}(A)$. Sostituendo f_n con $f_n - f$, possiamo supporre che $f = 0$. Per assurdo, ammettiamo che i supporti delle f_n non siano contenuti in un unico compatto. Esisterebbe allora una sottosuccessione f_{n_j} con la seguente proprietà: considerati i compatti K_j del Lemma 2.4, per ogni j esiste un punto $x_j \notin K_j$ tale che $f_{n_j}(x_j) \neq 0$. Posto $\varepsilon_j = |f_{n_j}(x_j)|$, si consideri l'insieme

$$U = \{g \in \mathcal{D}(A) : |g(x_j)| < \varepsilon_j \quad \forall\, j\} \ .$$

Verifichiamo che U è aperto in $\mathcal{D}(A)$. Dato un compatto $K \subset A$, sia $\bar{j}$ tale che $K \subset K_{\bar{j}}$. Allora solo i punti $x_1, \ldots, x_{\bar{j}-1}$ possono essere contenuti in K. Pertanto

$$U \cap \mathcal{D}(K) = \{g \in \mathcal{D}(K) : |g(x_j)| < \varepsilon_j \quad j = 1, \ldots, \bar{j} - 1\} \ .$$

Per $j = 1, \ldots, \bar{j}$ si consideri il funzionale lineare $\Phi_j(g) = g(x_j)$ su $\mathcal{D}(K)$. Esso è continuo perché $|\Phi(g)| \leq p_0(g)$. Dunque l'insieme $U_j = \{g : |g(x_j)| < \varepsilon_j\}$ è aperto in $\mathcal{D}(K)$. Ma $U \cap \mathcal{D}(K) = \bigcap_{j=1}^{\bar{j}} U_j$, da cui l'asserto.

Quindi U è un intorno di 0 in $\mathcal{D}(A)$. Tuttavia nessuna delle f_{n_j} è in U, da cui l'assurdo.

Una volta stabilito che i supporti delle f_n sono contenuti in un unico compatto, il resto segue dalla Proposizione 2.3(2). $\square$

Corollario 2.6. *Sia T un'applicazione lineare di $\mathcal{D}(A)$ in $\mathcal{D}(A')$. Allora T è continua se e solo se per ogni compatto $K \subset A$ esiste un compatto $K' \subset A'$ tale che $T\big(\mathcal{D}(K)\big) \subset \mathcal{D}(K')$ e $T \circ i_K : \mathcal{D}(K) \longrightarrow \mathcal{D}(K')$ è continua.*

Dimostrazione. Supponiamo che la condizione nell'enunciato sia soddisfatta. Allora $T \circ i_K$ è continua per ogni K come funzione da $\mathcal{D}(K)$ in $\mathcal{D}(A')$, per la continuità dell'inclusione $i_{K'}$. Per la Proposizione 2.3(3), T è continua.

Viceversa, si supponga T continua e sia $K \subset A$ compatto. Allora $T \circ i_K$ è continua. Presa una successione $\{K'_j\}$ di compatti di A' come nel Lemma 2.4, ammettiamo per assurdo che $T\big(\mathcal{D}(K)\big)$ non sia contenuto in $\mathcal{D}(K'_j)$ per nessun j. Per ogni j esisterebbe allora $f_j \in \mathcal{D}(K)$ tale che $\operatorname{supp} Tf_j \not\subset K'_j$.

Possiamo supporre che $\lim_{j\to\infty} f_j = 0$. Infatti, se d è la distanza (1.1) su $\mathcal{D}(K)$, si può sostituire f_j con un opportuno multiplo scalare $\lambda_j f_j$ in modo che $d(\lambda_j f_j, 0) < 1/j$.

Ma essendo T continua, dovremmo allora avere $\lim_{j\to\infty} Tf_j = 0$, in particolare i supporti delle Tf_j dovrebbero essere contenuti in un unico compatto K'. Ma ciò è assurdo perché ogni compatto di A' è contenuto in uno dei K'_j. $\square$

Corollario 2.7. *Le seguenti applicazioni lineari di $\mathcal{D}(A)$ in sé sono continue:*

(1) $T_\alpha f = \partial^\alpha f$ *per ogni multi-indice* α*;*
(2) $T_\Phi f = f\Phi$ *per ogni* $\Phi \in C^\infty(A)$*.*

Inoltre, se $A = \mathbb{R}^n$, l'applicazione

$$T_g f = f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$$

è continua per ogni $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con supporto compatto.

Dimostrazione. Osserviamo che se $f \in \mathcal{D}(K)$, con $K \subset A$, allora anche $T_\alpha f \in \mathcal{D}(K)$. Inoltre $p_k(T_\alpha f) \leq p_{k+|\alpha|}(f)$. Dunque $T_\alpha \circ i_K$ è continua da $\mathcal{D}(K)$ in sé. Per il Corollario 2.6, T_α è continua.

Per $f \in \mathcal{D}(K)$ si ha poi, per la regola di Leibniz,

$$\begin{aligned} p_k(f\Phi) &= \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha(f\Phi)\|_\infty \\ &\leq \sum_{|\alpha|\leq k}\sum_{\beta\leq\alpha} c_{\alpha,\beta}\|\partial^\beta f\partial^{\alpha-\beta}\Phi)\|_\infty \\ &\leq \sum_{|\alpha|\leq k, |\beta|\leq k} c_{\alpha,\beta}\|\partial^\beta f\|_\infty\|\partial^{\alpha-\beta}\Phi)\|_{\infty,K} \\ &\leq C_K \sum_{|\beta|\leq k}\|\partial^\beta f\|_\infty \\ &= C_K p_k(f)\ . \end{aligned}$$

Dunque anche T_Φ è continua.

Infine sia $f \in \mathcal{D}(K)$, e si consideri la convoluzione $f*g$. Derivando sotto integrale, si vede che $f*g$ è C^∞. Inoltre, sia K_0 il supporto compatto di g. Allora la somma $K' = K + K_0 = \{y+z : y \in K,\ z \in K_0\}$ è pure compatta. Ma $f*g(x) = 0$ se $x \notin K'$. Infatti l'integrale di convoluzione è esteso agli y che soddisfano entrambe le condizioni $y \in K_0$ e $x - y \in K$. Se esistesse almeno un y con queste proprietà, si avrebbe $x \in K + K_0$, contro l'ipotesi.

Dunque T_g applica $\mathcal{D}(K)$ in $\mathcal{D}(K')$. A questo punto si ha

$$\begin{aligned} |f*g(x)| &\leq \int_{K_0} |f(x-y)||g(y)|\,dy \\ &\leq \|g\|_1\|f\|_\infty\ , \end{aligned}$$

per cui $p_0(f*g) \leq \|g\|_1 p_0(f)$. $\square$

3. Distribuzioni

Si chiama *distribuzione* su A un funzionale lineare continuo

$$T : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathbb{C}\ .$$

Useremo la notazione $\langle T, f\rangle$ in luogo di $T(f)$. In base alla Proposizione 2.3(3), un funzionale lineare T su $\mathcal{D}(A)$ è continuo (cioè definisce una distribuzione) se e solo se per ogni compatto $K \subset A$ esistono un intero $n = n(K)$ e una costante $C = C(K)$ tali che per ogni $f \in \mathcal{D}(K)$

$$\big|\langle T, f\rangle\big| \leq C p_n(f)\ ,$$

dove

$$p_n(f) = \sum_{|\alpha| \le n} \|D^\alpha f\|_\infty \ .$$

Esempi.

Sia $\varphi(x)$ una funzione localmente integrabile su A. Il funzionale

$$\langle T_\varphi, f\rangle = \int_A f(x)\varphi(x)\, dx$$

definisce una distribuzione su A. Se infatti $f \in \mathcal{D}(K)$ con $K \subset A$, si ha

$$\big|\langle T_\varphi, f\rangle\big| \le \int_K |f(x)||\varphi(x)|\, dx \le \|f\|_\infty \int_K |\varphi(x)|\, dx \ .$$

Si ha quindi in questo caso $n(K) = 0$ per ogni K e $C(K) = \int_K |\varphi(x)|\, dx$.

Scriveremo nel seguito $\langle \varphi, f\rangle$ in luogo di $\langle T_\varphi, f\rangle$ quando la distribuzione e' definita dall'integrazione con la funzione φ localmente integrabile. Diremo anche che la distribuzione *coincide* con la funzione φ.

Più in generale, si ponga

$$\langle T, f\rangle = \int_A \partial^\alpha f(x)\varphi(x)\, dx \ ,$$

sempre con φ localmente integrabile su A. Si ha allora

$$\big|\langle T, f\rangle\big| \le \int_K |\varphi(x)|\, dx \; p_n(f)$$

con $n = |\alpha|$.

La *delta di Dirac* nel punto $x_0 \in A$ è definita da

$$\langle \delta_{x_0}, f\rangle = f(x_0) \ .$$

Si verifica facilmente che $n(K) = 0$ e $C(K) = 1$ per ogni K.

Operazioni su distribuzioni.

Ovviamente le distribuzioni su A si possono sommare e moltiplicare per scalari. Esse formano dunque uno spazio vettoriale, che si indica con $\mathcal{D}'(A)$.

Vediamo ora come si definiscono le derivate di una distribuzione. Per motivare la definizione, supponiamo inizialmente di avere una distribuzione coincidente con una funzione φ di classe C^1. In questo caso vogliamo che la derivata $\partial_j\varphi$ di φ *come distribuzione* nella variabile x_j coincida con la derivata di φ *come funzione* nella variabile x_j. Si osservi allora che integrando per parti

$$\begin{aligned}\langle \partial_j\varphi, f\rangle &= \int_A f(x)\partial_j\varphi(x)\, dx \\ &= -\int_A \partial_j f(x)\varphi(x)\, dx \\ &= -\langle \varphi, \partial_j f\rangle\end{aligned}$$

(l'integrazione per parti non produce termini al bordo in quanto f si annulla sulla frontiera di A).

Per estensione definiamo allora per una generica $T \in \mathcal{D}'(A)$

$$\langle \partial_j T, f\rangle = -\langle T, \partial_j f\rangle \ . \tag{3.1}$$

Proposizione 3.1. *La* (3.1) *definisce una distribuzione* $\partial_j T$.

Dimostrazione. In base al Corollario 2.7(1), l'applicazione $\partial_j : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$ è continua. Di conseguenza la composizione

$$T \circ \partial_j : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathbb{C}$$

è continua. Per definizione, $\partial_j T = -T \circ \partial_j$, da cui la tesi. $\square$

Iterando l'operazione di derivazione, si pone

$$\langle \partial^\alpha T, f\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha f\rangle \ . \tag{3.2}$$

Siano $T \in \mathcal{D}'(A)$ e $\Phi \in C^\infty(A)$. Si definisce $T\Phi \in \mathcal{D}'(A)$ ponendo

$$\langle T\Phi, f\rangle = \langle T, \Phi f\rangle \ . \tag{3.3}$$

La continuità di $T\Phi$ segue dal Corollario 2.7(2).

Vogliamo ora definire la convoluzione $T * g$ di $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ con $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Per motivare la definizione, supponiamo che T coincida con la funzione φ localmente integrabile su $\mathbb{R}^n$. In tal caso vogliamo ottenere la normale convoluzione

$$\varphi * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) g(x-y)\, dy \ .$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}
\langle \varphi * g, f\rangle &= \iint \varphi(y) g(x-y)\, dy\, f(x)\, dx \\
&= \int \varphi(y) \left(\int g(x-y) f(x)\, dx \right) dy \\
&= \langle \varphi, \check{g} * f\rangle \ ,
\end{aligned}$$

dove si è posto $\check{g}(x) = g(-x)$.

Per estensione, sostituendo φ con una generica distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, si pone

$$\langle T * g, f\rangle = \langle T, \check{g} * f\rangle \ . \tag{3.4}$$

Esempi.

Abbiamo detto che se T coincide con una funzione φ di classe C^1 le sua derivate prime distribuzionali coincidono con le derivate ordinarie. Se φ non è C^1, ma solo localmente integrabile, le sue derivate possono differire notevolmente dalla nozione ordinaria di derivata puntuale.

Si prenda ad esempio su $\mathbb{R}$ una funzione a gradino

$$\varphi(x) = \begin{cases} a & \text{se } x < x_0 \\ b & \text{se } x > x_0 \ , \end{cases}$$

con $a \neq b$. La derivata puntuale esiste per $x \neq x_0$ ed è nulla. La derivata *distribuzionale* di φ, che indichiamo qui con $D\varphi$, si ottiene invece come segue (considerando una funzione test $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$):

$$\begin{aligned}\langle D\varphi, f\rangle &= -\langle \varphi, f'\rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{x_0} a f'(x)\,dx - \int_{x_0}^{\infty} b f'(x)\,dx \\ &= -a f(x)\Big|_{-\infty}^{x_0} - b f(x)\Big|_{x_0}^{\infty} \\ &= (b-a) f(x_0)\ .\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$D\varphi = (b-a)\delta_{x_0}\ .$$

Un altro esempio interessante è il seguente. Si consideri la funzione localmente integrabile $\varphi(x) = \log|x|$ su $\mathbb{R}$. Per calcolarne la derivata distribuzionale $D\varphi$ procediamo come prima, ponendo, per $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle D\varphi, f\rangle = -\langle \varphi, f'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\log|x|\,dx\ .$$

L'integrazione per parti non può essere fatta direttamente, per la singolarità del logaritmo in 0. Conviene invece eliminare dal dominio di integrazione un intorno simmetrico $(-\varepsilon, \varepsilon)$ di 0, osservando che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\log|x|\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} f'(x)\log|x|\,dx\ .$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}\langle D\varphi, f\rangle &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f'(x)\log|x|\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} f'(x)\log|x|\,dx\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(-f(x)\log|x|\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - f(x)\log x\Big|_{\varepsilon}^{\infty} \\ &\qquad + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x)\frac{1}{x}\,dx\Bigg) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\big(f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)\big)\log\varepsilon + \int_{|x|>\varepsilon} f(x)\frac{1}{x}\,dx\right)\ .\end{aligned}$$

Poiché f è derivabile in 0, $\big|f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)\big| \leq C\varepsilon$, per cui

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big(f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)\big)\log\varepsilon = 0\ .$$

Si ha quindi

$$\langle D\varphi, f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} f(x)\frac{1}{x}\,dx\ .$$

L'espressione a secondo membro prende il nome di *integrale con valore principale* e si indica con il simbolo

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{x}\, dx \ .$$

Occorre tener presente che non si tratta di un normale integrale. Per esempio, non è assolutamente convergente; inoltre la sua convergenza presuppone che f sia derivabile in 0.

Si verifica facilmente che le derivate della delta di Dirac in x_0 sono date da

$$\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha f(x_0) \ .$$

Vediamo ora un esempio di convoluzione. Se $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, calcoliamo $\delta_{x_0} * g$. Per la (3.4) si ha

$$\begin{aligned}
\langle \delta_{x_0} * g, f \rangle &= \langle \delta_{x_0}, \check{g} * f \rangle \\
&= \check{g} * f(x_0) \\
&= \int \check{g}(x_0 - x) f(x)\, dx \\
&= \int g(x - x_0) f(x)\, dx \ .
\end{aligned}$$

da cui si deduce che $\delta_{x_0} * g$ coincide con una funzione, precisamente

$$\delta_{x_0} * g(x) = g(x - x_0) \ .$$

L'effetto su g della convoluzione con δ_{x_0} è dunque la traslazione del suo grafico di un incremento x_0.

Supporto di una distribuzione.

Si dice che una distribuzione T *è nulla su un aperto* $A' \subseteq A$ se $\langle T, f \rangle = 0$ per ogni funzione test f con supporto contenuto in A'.

Lemma 3.2. *Se una distribuzione T è nulla su due aperti A_1 e A_2, allora è nulla anche su $A_1 \cup A_2$.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{D}(A)$ con supporto K contenuto in $A_1 \cup A_2$. L'insieme $K_1 = K \setminus A_2$ è compatto e contenuto in A_1. Sia φ una funzione C^∞ con supporto compatto in A_1 e uguale a 1 in un intorno V di K_1. Si decomponga f come $f = f\varphi + (f - f\varphi)$. Allora

$$\langle T, f \rangle = \langle T, f\varphi \rangle + \langle T, f - f\varphi \rangle \ .$$

Poiché T è nulla su A_1, $\langle T, f\varphi \rangle = 0$. Inoltre il supporto di $f - f\varphi$ è contenuto in $K \setminus V$, che è un compatto contenuto in A_2. Di conseguenza anche $\langle T, f - f\varphi \rangle = 0$.
Si conclude allora che $\langle T, f \rangle = 0$. $\square$

Corollario 3.3. *Data $T \in \mathcal{D}'(A)$, esiste un massimo aperto $A' \subseteq A$ su cui T è nulla.*

Dimostrazione. Si consideri la famiglia $\mathcal{A}$ degli aperti $A' \subseteq A$ su cui T è nulla, parzialmente ordinata per inclusione. A questa famiglia si può applicare il Lemma di Zorn. Sia infatti $\{A_j\}_{j \in J}$ una sottofamiglia di $\mathcal{A}$ totalmente ordinata e si prenda $A' = \bigcup_{j \in J} A_j$. Se f ha supporto compatto $K \subset A'$, per la proprietà di ricoprimento finito esiste $j \in J$ tale che $K \subset A_j$. Ma allora $\langle T, f \rangle = 0$ perché T è nulla su A_j. In conclusione T è nulla su A'.

Esistono dunque, per il Lemma di Zorn, elementi massimali in $\mathcal{A}$. Se A_1 e A_2 sono due di tali aperti massimali, T è nulla su entrambi. Per il Lemma 3.2, T è nulla anche sull'unione, e dunque $A_1 = A_2$ per la loro massimalità. □

Si chiama *supporto di* T il complementare del massimo aperto su cui T è nulla. Esso viene indicato con $\operatorname{supp} T$.

Per definizione, il supporto di una distribuzione è un chiuso. Esso è vuoto se e solo se T si annulla su tutto A, ossia se e solo se $T = 0$.

Proposizione 3.4. *Valgono le seguenti proprietà:*

(1) *se $f \in \mathcal{D}(A)$ e $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$, allora $\langle T, f \rangle = 0$;*
(2) *se $\Phi \in C^\infty(A)$ e $\operatorname{supp} \Phi \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$, allora $T\Phi = 0$;*
(3) *se $\Psi \in C^\infty(A)$ e $\Psi(x) = 1$ su un intorno di $\operatorname{supp} T$, allora $T\Psi = T$.*

Dimostrazione. La (1) è ovvia, in quanto T è nulla sul complementare del suo supporto.

Per la (2), si prenda $f \in \mathcal{D}(A)$. Allora

$$\langle T\Phi, f \rangle = \langle T, \Phi f \rangle \ ,$$

dove $f\Phi \in \mathcal{D}(A)$ e $\operatorname{supp}(f\Phi) \subseteq \operatorname{supp} \Phi$. Per la (1), $\langle T, \Phi f \rangle = 0$, da cui la conclusione.

Per la (3), si osservi che il supporto di $\Psi - 1$ è disgiunto dal supporto di T. Per la (2), $T(\Psi - 1) = T\Psi - T = 0$, da cui la tesi. □

Si osservi che, nella (2), l'ipotesi che $\operatorname{supp} \Phi \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$ è più forte che richiedere semplicemente che Φ si annulli sul supporto di T: si richiede infatti che Φ si annulli *in un intorno di* $\operatorname{supp} T$. La conclusione della (2) non è vera nella sola ipotesi che Φ sia nulla su $\operatorname{supp} T$.

Si prenda ad esempio $T = \delta_0'$, $\Phi(x) = x$ su $\mathbb{R}$. Osserviamo innanzitutto che $supp\delta_0' = \{0\}$. Infatti se $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ha supporto in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora $\langle \delta_0', f \rangle = -f'(0) = 0$. Quindi Φ si annulla sul supporto di T. Ma, se ora $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle x\delta_0', f \rangle = \langle \delta_0', xf \rangle = -\langle \delta_0, f + xf' \rangle = -f(0) \ .$$

Quindi $x\delta_0' = -\delta_0$.

Considerazioni analoghe valgono per la (1) e la (3).

Si dice che due distribuzioni T e U *coincidono su un aperto* $A' \subseteq A$ se $T - U$ è nulla su A'. Segue facilmente dalla Proposizione 3.4 che date $T \in \mathcal{D}'(A)$ e $\Phi \in C^\infty(A)$ con $\Phi(x) = 1$ su A', allora $T\Phi$ coincide con T su A'.

Sia T una distribuzione su A *con supporto compatto*. In tal caso il funzionale lineare $T : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ si può estendere a $C^\infty(A)$. Per fare ciò si prenda una funzione $F \in \mathcal{D}(A)$ che sia identicamente uguale a 1 in un intorno si $\operatorname{supp} T$. Si ponga allora

$$\langle T, \Phi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, F\Phi\rangle \ .$$

Questa è una buona definizione in quanto

(1) $F\Phi \in \mathcal{D}(A)$, in quanto F ha supporto compatto;

(2) la definizione non dipende dalla scelta di F; infatti se G è un'altra funzione in $\mathcal{D}(A)$ uguale a 1 in un intorno di $\operatorname{supp} T$, allora

$$\langle T, F\Phi\rangle - \langle T, G\Phi\rangle = \langle T, (F-G)\Phi\rangle = 0 \ ,$$

in quanto $(F-G)\Phi$ si annulla in intorno di $\operatorname{supp} T$.

Ordine di una distribuzione.

Nella definizione di distribuzione data all'inizio di questo paragrafo compare un intero $n(K)$, dipendente dal compatto $K \subset A$, che indica quale norma $p_n(f)$ su $\mathcal{D}(K)$ controlla il valore di $\langle T, f\rangle$.

Si dice che $T \in \mathcal{D}'(A)$ ha *ordine finito* n se questi interi $n(K)$ si possono prendere tutti uguali a n (o minori), ossia se per ogni compatto K esiste una costante $C = C(K)$ tale che

$$\big|\langle T, f\rangle\big| \le C p_n(f) \ .$$

Le distribuzioni che abbiamo incontrato finora hanno tutte ordine finito. In particolare quelle definite da integrali con funzioni localmente integrabili hanno ordine 0.

Inoltre è abbastanza evidente che se T ha ordine finito n, allora $\partial^\alpha T$ ha ordine $n + |\alpha|$.

Si verifichi che la distribuzione $p.v.1/x$ ha ordine 1 (in quanto derivata di $\log|x|$ che ha ordine 0), *ma non ha ordine zero*!

Esistono distribuzioni che non hanno ordine finito. Per costruirne una, si prenda una successione di punti $\{x_k\}$ che tendano verso un punto in $\partial A \cup \{\infty\}$, e si ponga

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{x_k}^{(k)} \ .$$

Se $f \in \mathcal{D}(A)$,

$$\langle T, f\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(k)}(x_k) \ .$$

Poiché f ha supporto compatto, solo un numero finito dei termini della serie è diverso da 0, per cui $\langle T, f\rangle$ è ben definito.

Dato un compatto $K \subset A$, esso contiene solo un numero finito di punti, compresi nell'insieme $\{x_1, \ldots, x_m\}$, con m dipendente da K. Se $f \in \mathcal{D}(K)$,

$$\big|\langle T, f\rangle\big| \le \sum_{k=0}^{m} \big|f^{(k)}(x_k)\big| \le \sum_{k=0}^{m} \|f^{(k)}\|_\infty = p_m(f) \ .$$

Poiché al variare di K intervengono tutte le derivate di f, è ovvio che non si può controllare il valore di $\langle T, f\rangle$ con una stessa norma $p_m(f)$.

Proposizione 3.5. *Una distribuzione con supporto compatto ha ordine finito.*

Dimostrazione. Sia $K = \operatorname{supp} T$ il supporto compatto della distribuzione T. Si prenda $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ uguale a 1 su un intorno di K e sia K' il supporto di φ. Esiste allora un intero n tale che per ogni $g \in \mathcal{D}(K')$

$$\big|\langle T, g\rangle\big| \leq C p_n(g) \ .$$

Sia ora $f \in \mathcal{D}(A)$. Per la Proposizone 3.4(3),

$$\langle T, f\rangle = \langle T\varphi, f\rangle = \langle T, f\varphi\rangle \ .$$

Poiché $f\varphi \in \mathcal{D}(K')$,

$$\big|\langle T, f\rangle\big| \leq C p_n(f\varphi) \leq C' p_n(f) \ ,$$

come si verifica facilmente applicando la regola di Leibniz. $\square$

Se K è un comptto contenuto in A, indichiamo con $\mathcal{D}^m(K)$ lo spazio di Banach delle funzioni di classe C^m in $\mathbb{R}^n$ e con supporto in K, dotato della norma p_m. In dichiamo poi con $\mathcal{D}^m(A)$ lo spazio delle funzioni di classe C^m con supporto compatto in A, dotato della topologia più fine che rende continue le inclusioni $i_K : \mathcal{D}^m(K) \longrightarrow \mathcal{D}^m(A)$ per ogni K compatto.

Si verifica facilmente che l'inclusione

$$i_m : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}^m(A)$$

è continua e ha immagine densa per ogni m.

Proposizione 3.6. *Una distribuzione T ha ordine finito m se e solo se si estende con continuità a $\mathcal{D}^m(A)$.*

Dimostrazione. Un funzionale lineare T su $\mathcal{D}^m(A)$ è continuo se e solo se per ogni K esiste una costante $C(K)$ tale che per ogni $f \in \mathcal{D}^m(K)$

$$\big|\langle T, f\rangle\big| \leq C(K) p_m(f) \ . \tag{3.5}$$

Se T è una distribuzione di ordine m, vale la (3.5) per ogni $f \in \mathcal{D}(K)$. Essendo $\mathcal{D}(K)$ denso in $\mathcal{D}^m(K)$, T si estende in modo unico a $\mathcal{D}^m(K)$ e si conserva la disuguaglianza (3.5). Poiché ciò vale per ogni K, T si estende a tutto $\mathcal{D}^m(A)$ rimanendo continuo.

Viceversa se T ha un'estensione continua a $\mathcal{D}^m(A)$, allora vale la (3.5) per ogni K compatto e per ogni $f \in \mathcal{D}^m(K)$. A maggior ragione la (3.5) vale per $f \in \mathcal{D}(K)$, per cui T è una distribuzione di ordine m. $\square$