CAPITOLO IX
COPPIE DI GELFAND IN GEOMETRIA RIEMANNIANA

1. Gruppi di isometrie di varietà riemanniane

Sia M una varietà riemanniana completa e sia $G = I(M)$ il gruppo delle sue isometrie. Indichiamo con $(g, p) \mapsto g \cdot p$ l'azione di $I(M)$ su M. Introducendo su $I(M)$ la topologia della convergenza uniforme sui compatti, l'azione è continua.

Indichiamo con $dg_p : T_pM \to T_{g \cdot p}M$ il differenziale di $g \in I(M)$ in p.

Lemma 1.1. *Siano $g, g' \in I(M)$ due isometrie di M, e sia $p \in M$ tale che $g \cdot p = g' \cdot p$ e $dg_p = dg'_p$. Se M è connessa, $g = g'$.*

Dimostrazione. Consideriamo $h = g^{-1}g'$. Allora $h \cdot p = p$ e $dh_p = I$. Se γ è una geodetica uscente da p, $h \cdot \gamma$ è pure una geodetica, avente lo stesso vettore tangente in p. Dunque h è l'identità su γ. Siccome le geodetiche uscenti da p coprono un intero intorno U di p, h è l'identità su U.

Segue facilmente che l'insieme dei punti di M fissati da h è aperto e chiuso. Dunque h è l'identità su M. $\square$

Diamo senza dimostrazione il seguente teorema[1].

Teorema 1.2. *Sia M una varietà riemanniana connessa. Allora $I(M)$ ammette una struttura di gruppo di Lie tale che l'azione di $I(M)$ su M sia analitica. Dato $p \in M$, lo stabilizzatore di p in $I(M)$ è compatto.*

D'ora in poi supporremo M connessa.

Si dice che M è una varietà riemanniana *omogenea* se l'azione di $I(M)$ è transitiva. Una varietà riemanniana omogenea si dice uno *spazio commutativo* se la coppia (G, K), con $G = I(M)$ e K lo stabilizzatore di un dato punto x_0 in $I(M)$, è di Gelfand.

Osservazione. Le nozioni di coppia di Gelfand (per gruppi di Lie) e di spazio commutativo si sovrappongono parzialmente, ma sono di natura diversa.

Se (G, K) è una coppia di Gelfand (con G, K gruppi di Lie), è sempre possibile introdurre su G/K una metrica riemanniana rispetto alla quale G agisca per isometrie. Sia infatti $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ una decomposizione $\mathrm{Ad}(K)$-invariante dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G. Su $\mathfrak{p}$ introduciamo un prodotto scalare $\langle\ ,\rangle_{\mathfrak{p}}$ che sia $\mathrm{Ad}(K)$-invariante.

Sia $x_0 = eK \in G/K = M$. L'identificazione di $T_{x_0}M$ con $\mathfrak{p}$ (cfr. Cap. VIII, §4) fornisce un prodotto scalare $\langle\ ,\rangle_{x_0}$ su $T_{x_0}M$ invariante rispetto a $(dk)_{x_0}$ per ogni $k \in K$.

[1] v. S. Helgason, *Differential geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Chap. IV, §2.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Se $x = gK$, definiamo un prodotto scalare su T_xM come segue. Dati $v_1, v_2 \in T_xM$, siano $w_1, w_2 \in T_{x_0}M$ tali che $(dg)_{x_0} w_j = v_j$, $j = 1, 2$. Poniamo

$$\langle v_1, v_2 \rangle_x = \langle w_1, w_2 \rangle_{x_0} .$$

Questa è una buona definizione perché se $gK = g'K$, allora $g = g'k$ con $k \in K$ e $(dg)_{x_0} = (dg')_{x_0}(dk)_{x_0}$. Se $w'_j = (dg')^{-1}_{x_0} v_j$, allora $w'_j = (dk)_{x_0} w_j$, e dunque $\langle w'_1, w'_2 \rangle_{x_0} = \langle w_1, w_2 \rangle_{x_0}$.

Per costruzione, l'azione di G conserva la metrica, dunque $G \subset I(M)$. Va notato tuttavia che la scelta del prodotto scalare su $\mathfrak{p}$ (e dunque della metrica su M) non è unica, e che G può risultare un sottogruppo proprio di $I(M)$.

2. Spazi simmetrici

Una varietà riemanniana connessa M si dice uno *spazio simmetrico* se per ogni punto $x \in M$ esiste un'isometria $s_x \in I(M)$ tale che $s_x \cdot x = x$ e $(ds_x)_x = -I$.

Supponiamo che M sia uno spazio simmetrico. Se $\gamma(t)$ è una geodetica parametrizzata in modo che $\gamma(0) = x$, allora $s_x \cdot \gamma(t)$ è pure una geodetica, e il suo vettore tangente in x è uguale a $-\dot\gamma(0)$. Pertanto, $s_x \cdot \gamma(t) = \gamma(-t)$, ossia s_x è l'*inversione geodetica* centrata in x.

Su una varietà generica, l'inversione geodetica di centro x è definita sicuramente in un intorno geodetico[2] di x, ma non necessariamente su tutta la varietà. Inoltre non è vero in generale che essa sia un'isometria sull'intorno. La condizione di simmetria è dunque molto forte.

Un modo equivalente di definire la condizione di simmetria è la seguente[3]: per ogni $x \in M$ esiste un'isometria s_x involutiva (tale cioè che s_x^2 sia l'identità) e per la quale x sia un punto fisso isolato.

Proposizione 2.1. *Uno spazio simmetrico è omogeneo.*

Dimostrazione. Sia $x \in M$, con M spazio simmetrico. Se y è in un intorno geodetico U di x, si consideri la geodetica γ uscente da $x = \gamma(0)$, contenuta in U e passante per $y = \gamma(d)$ (con $d = d(x, y)$). Se $z = \gamma(d/2)$, l'inversione geodetica s_z scambia x con y.

Da ciò segue che, per ogni $x_0 \in M$, l'orbita di x_0 rispetto a $I(M)$ è aperta. Siccome M è connesso, consiste di una sola orbita. $\square$

Fissiamo dunque un punto $x_0 \in M$ e chiamiamo K lo stabilizzatore di x_0 in $G = I(M)$. Indichiamo poi con σ l'automorfismo interno $\sigma(g) = s_{x_0} g s_{x_0}$ di G, e con

$$\theta = \mathrm{Ad}(s_{x_0}) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} ,$$

il suo differenziale nell'identità. Poiché s_{x_0} è involutivo, si ha $\theta^2 = I$. Quindi $\mathfrak{g}$ si scompone nella somma diretta dei due autospazi $V_+ = \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = X\}$ e $V_- = \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = -X\}$.

[2]Se M è una varietà riemanniana e $x \in M$, si definisce l'applicazione $\mathrm{Exp}_x : T_xM \to M$ come segue: dato un vettore unitario $v \in T_xM$, si consideri la geodetica γ_v tale che $\dot\gamma_v(0) = v$. Si pone $\mathrm{Exp}_x(tv) = \gamma_v(t)$. Se $r < r_{\max}$ (detto *raggio di iniettività*), l'applicazione Exp_x è un diffeomorfismo della palla B_r su un intorno di x. Un tale intorno si chiama intorno geodetico di x.

[3]v. S. Helgason, *Differential geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, p. 205.

Proposizione 2.2. (1) *L'autospazio* V_+ *coincide con l'algebra di Lie* $\mathfrak{k}$ *di* K. *Posto* $\mathfrak{p} = V_-$, *si ha allora* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. *Inoltre,*

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k} \ , \qquad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p} \ , \qquad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k} \ . \tag{2.1}$$

(2) *Se* U *è un intorno sufficientemente piccolo di* 0 *in* $\mathfrak{p}$, *l'applicazione* $(k, X) \mapsto k \exp_G(X)$ *è un diffeomorfismo di* $K \times U$ *su un intorno di* K *in* G, *e l'applicazione* $X \mapsto \exp_G(X) \cdot x_0$ *è un diffeomorfismo di* U *su un intorno di* x_0 *in* M.

Dimostrazione. Se $\theta X = X$, la curva $\gamma_X(t) = \exp_G(tX) \cdot x_0$ è lasciata fissa da s_{x_0}. Infatti,

$$s_{x_0} \cdot \gamma_X(t) = (s_{x_0} \exp_G(tX) s_{x_0}) \cdot x_0 = \sigma\big(\exp_G(tX)\big) \cdot x_0 = \exp_G(t\theta X) \cdot x_0 = \gamma_X(t) \ .$$

Poiché x_0 è un punto fisso isolato di s_{x_0}, deve essere $\gamma_X(t) = x_0$ per t piccolo, e dunque per ogni t. Quindi $\exp_G(tX) \in K$, da cui $X \in \mathfrak{k}$.

Per dimostrare il viceversa, è sufficiente far vedere[4] che $\sigma(k) = k$ per ogni $k \in K$. Confrontando i differenziali delle isometrie k e $\sigma(k) = s_{x_0} k s_{x_0}$ nel punto x_0, si ha

$$\big(d\sigma(k)\big)_{x_0} = (ds_{x_0})_{x_0} (dk)_{x_0} (ds_{x_0})_{x_0} = (dk)_{x_0} \ .$$

Per il Lemma 1.1, $\sigma(k) = k$.

Le inclusioni (2.1) seguono dal fatto che θ è un automorfismo di algebre di Lie. Dalla relazione

$$\theta[X, Y] = [\theta X, \theta Y]$$

si ottiene che, se $\theta X = \varepsilon X$ e $\theta Y = \delta Y$, allora $\theta[X, Y] = \varepsilon\delta[X, Y]$.

La parte (2) dell'enunciato è conseguenza diretta delle considerazioni svolte nel §4 del Cap. VIII. □

Teorema 2.3. (G, K) *è una coppia di Gelfand.*

Dimostrazione. Sia V l'intorno di K in G i cui elementi sono i prodotti $g = k \exp_G(X)$, con $k \in K$ e X nell'intorno U dell'origine in $\mathfrak{p}$ del Teorema 2.2. Se $g \in V$,

$$\begin{aligned} g^{-1} &= \exp_G(-X) k^{-1} = \exp_G(\theta X) k^{-1} \\ &= s_{x_0} \exp_G(X) s_{x_0} k^{-1} \\ &= (s_{x_0} k^{-1}) g (s_{x_0} k^{-1}) \in KgK \ . \end{aligned}$$

Per la seconda delle (2.1), K agisce su $\mathfrak{p}$ tramite la rappresentazione aggiunta. Si può dunque supporre che U sia $\mathrm{Ad}(K)$-invariante, da cui segue che se $g \in V$, anche $kgk' \in V$ per ogni $k, k' \in K$. Sia ora W un intorno di e tale che $kWk^{-1} = W$ per ogni $k \in K$ e $W^2 \subset V$. Posto $V' = KWK$, anche $V'^2 \subset V$.

Per la bi-K-invarianza di V', se f ha supporto in V', anche $f^\sharp = \int_{K \times K} f(kgk')\, dk\, dk'$ ha supporto in V'.

---

[4]La condizione $\theta X = X$ per ogni $X \in \mathfrak{k}$ è equivalente alla condizione $\sigma(k) = k$ per ogni k nella componente connessa dell'identità in K. Stiamo dunque dimostrando una proprietà più forte, nel caso che K non sia connesso.

Siano dunque f_1, f_2 bi-K-invarianti con supporto in V'. Allora, con le notazioni della Proposizione 4.2 del Cap. VII, $\check{f}_j = f_j^\sigma$. Lo stesso vale per $f_1 * f_2$, che ha supporto in V. Come nella dimostrazione della Proposizione 4.2 del Cap. VII, si conclude che f_1 e f_2 commutano.

Si osservi ora che la dimostrazione del Lemma 5.1 del Cap. VIII continua a valere nell'ipotesi più debole che la convoluzione sia commutativa sulle funzioni bi-K-invarianti con supporto sufficientemente piccolo. Si ottiene così che l'algebra $\mathcal{D}(G/K)$ degli operatori differenziali G-invarianti su $G/K \cong M$ è commutativa.

La conclusione segue allora dal Teorema 5.4 del Capitolo VIII. $\square$

3. Spazi doppiamente omogenei

Una varietà riemanniana connessa M si dice uno *spazio doppiamente omogeneo* (in inglese: *two-point homogeneous space*) se, date due coppie di punti (x, y), (x', y') di punti di M, con $d(x, y) = d(x', y')$, esiste una isometria di M che manda x in x' e y in y'.

Uno spazio doppiamente omogeneo è sicuramente omogeneo. Per es. dalla definizione segue che, dati comunque $x, y \in M$ esiste una isometria che scambia x con y.

Lemma 3.1. *Una varietà riemanniana connessa M è doppiamente omogenea se e solo se, per ogni $x \in M$, lo stabilizzatore di x in* $\mathrm{Iso}(M)$ *agisce transitivamente sulle sfere geodetiche di centro x.*

Dimostrazione. Se M è doppiamente omogenea, dati due punti y, y' equidistanti da x, esiste una isometria che fissa x e manda y in y'. Questo dimostra una implicazione.

Viceversa, si supponga che, dati x, y, y' con $d(x, y) = d(x, y')$, esista una isometria che fissi x e mandi y in y'. Siano ora (x, y), (x', y') due coppie di punti con $d(x, y) = d(x', y')$. Si consideri un arco geodetico γ congiungente x con x' e di lunghezza uguale alla distanza tra x e x'. Se z è il punto medio di γ, esiste una isometria g che fissa z e manda x in x'. Sia $y'' = g \cdot y$. Allora

$$d(x', y'') = d(x, y) = d(x', y') \ .$$

Esiste per ipotesi un'isometria h che fissa x' e manda y'' in y'. Allora hg manda x in x' e y in y'. $\square$

Teorema 3.2. *Una varietà riemanniana connessa M è doppiamente omogenea se e solo se, per ogni $x \in M$, lo stabilizzatore di x in* $\mathrm{Iso}(M)$ *agisce transitivamente sulla sfera unitaria in T_xM.*

Dimostrazione. Si supponga M doppiamente omogenea e sia $x \in M$. Dati $v, v' \in T_xM$ di norma 1, si considerino le geodetiche γ, γ' uscenti da x e con vettore tangente rispettivamente v e v' in x. Se $r > 0$ è un numero fissato sufficientemente piccolo, i punti $y_r = \gamma(r)$, $y'_r = \gamma'(r)$ hanno distanza r da x. Sia $g \in \mathrm{Iso}(M)$ tale che $g \cdot x = x$ e $g \cdot y_r = y'_r$. Allora $g \cdot \gamma$ è una geodetica $\tilde{\gamma}$ uscente da x e tale che $\tilde{\gamma}(r) = y'_r$. Se r è sufficientemente piccolo, la geodetica di lunghezza minima congiungente x a y'_r è unica. Dunque $\tilde{\gamma} = \gamma'$ e allora $(dg)_x v = v'$.

Viceversa, si supponga che lo stabilizzatore di x in $\mathrm{Iso}(M)$ agisca transitivamente sulla sfera unitaria in T_xM. Siano y, y' a uguale distanza r da x, e siano γ, γ' archi geodetici uscenti da x e aventi come secondo estremo y e y' rispettivamente. Se $v = \dot\gamma(0)$, $v' = \dot\gamma'(0)$ sia $g \in \mathrm{Iso}(M)$ tale che $(dg)_x v = v'$. Allora $g \cdot \gamma = \gamma'$ e dunque $g \cdot y = y'$. Per il Lemma 3.1, M è doppiamente omogenea. $\square$

Il Teorema 3.2 fornisce una caratterizzazione degli spazi doppiamente omogenei di tipo geometrico-differenziale. Una terza condizione equivalente si ha in termini di operatori differenziali su M invarianti per isometrie.

Sia M una varietà riemanniana omogenea. Posto $G = \mathrm{Iso}(M)$, si identifichi M con G/K, K essendo lo stabilizzatore di un punto fissato $x_0 \in M$. Un elemento di $\mathbb{D}(G/K)$ è sicuramente l'operatore di Laplace-Beltrami Δ. Di conseguenza, ogni polinomio in Δ è in $\mathbb{D}(G/K)$.

Riprendendo le notazioni del §4 del Cap. VIII, sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ una decomposizione dell'algebra di Lie di G, con $\mathfrak{p}$ $\mathrm{Ad}(K)$-invariante, e si identifichi $\mathfrak{p}$ con $T_{x_0}M$. Attraverso questa identificazione, la metrica su $T_{x_0}M$ si trasporta su $\mathfrak{p}$ introducendovi un prodotto scalare $\mathrm{Ad}(K)$-invariante, che indichiamo con $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{p}}$.

Il polinomio $\mathrm{Ad}(K)$-invariante P_Δ su $\mathfrak{p}$ che corrisponde all'operatore Δ nel senso del Teorema 4.2 del Cap. VIII, è

$$P_\Delta(X) = -\|X\|_{\mathfrak{p}}^2 \ .$$

Teorema 3.3. *Uno spazio omogeneo M è doppiamente omogeneo se e solo se gli unici operatori in $\mathbb{D}(G/K)$ sono i polinomi in Δ.*

Dimostrazione. Se M è doppiamente omogenea, per il Teorema 3.2, i polinomi $\mathrm{Ad}(K)$-invarianti su $\mathfrak{p}$ sono costanti sulle sfere di centro l'origine. Gli unici polinomi con questa proprietà sono i polinomi in $\|X\|_{\mathfrak{p}}^2$. Segue per induzione sul grado che la corrispondenza $q\big(-\|X\|_{\mathfrak{p}}^2\big) \leftrightarrow q(\Delta)$ è biunivoca tra lo spazio dei polinomi radiali su $\mathfrak{p}$ e $\mathbb{D}(G/K)$.

Viceversa, se $\mathbb{D}(G/K)$ è costituito dai soli polinomi in Δ, segue che gli unici polinomi $\mathrm{Ad}(K)$-invarianti su $\mathfrak{p}$ sono quelli radiali. Se $\mathrm{Ad}(K)$ non agisse transitivamente sulla sfera unitaria, questa si decomporrebbe in orbite, e dovrebbero esistere sufficienti polinomi $\mathrm{Ad}(K)$-invarianti da separarle. Quindi $\mathbb{K}$ agisce transitivamnete sulla sfera unitaria di $T_{x_0}M$. Siccome M è omogenea per ipotesi, lo stesso vale in ogni spazio tangente. $\square$

Gli spazi doppiamente omogenei costituiscono una sottoclasse propria degli spazi simmetrici, precisamente essi sono gli spazi simmetrici *di rango uno*[5].

Essi sono relativamente pochi, precisamente: gli spazi euclidei $\mathbb{R}^n$, le sfere reali, gli spazi proiettivi reali, complessi e quaternionici, gli spazi iperbolici reali, complessi e quaternionici, più due spazi "eccezionali", assimilabili rispettivamente al piano proiettivo bidimensionale e al piano iperbolico bidimensionale sull'algebra dei numeri di Cayley.

[5]Si veda S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces.*

4. Spazi debolmente simmetrici

Una varietà riemanniana connessa M si dice uno *spazio debolmente simmetrico* se, dati due punti $x, y \in M$, esiste una isometria g tale che $g \cdot x = y$ e $g \cdot y = x$.

Il termine è giustificato dal seguente enunciato.

Proposizione 4.1. *Uno spazio simmetrico è debolmente simmetrico.*

Dimostrazione. Sia M simmetrica. Dati $x, y \in M$ sia γ un arco geodetico tale che $\gamma(-1) = x$ e $\gamma(1) = y$. Se $z = \gamma(0)$, l'inversione geodetica di centro z inverte l'orientamento di γ e dunque scambia x con y. $\square$

Uno spazio debolmente simmetrico è ovviamente omogeneo.

Lemma 4.2. *Le seguenti proprietà sono equivalenti per una varietà connessa M:*

(1) *M è debolmente simmetrica;*
(2) *per ogni geodetica γ e ogni punto $x \in \gamma$, esiste un'isometria che fissa x e applica γ in sé invertendone l'orientamento;*
(3) *per ogni $x \in M$ e ogni $v \in T_xM$, esiste una isometria g tale che $g \cdot x = x$ e $(dg)_x v = -v$;*
(4) *M è omogenea e $g^{-1} \in KgK$ per ogni $g \in G$.*

Dimostrazione. La (2) e la (3) sono chiaramente equivalenti.

L'implicazione (2) $\Rightarrow$ (1) si dimostra come per la Proposizione 4.1, sostituendo l'inversione geodetica con l'isometria che fissa z e ribalta la geodetica. Mostriamo ora che (1) $\Rightarrow$ (2). Dati $x \in M$ e una geodetica γ con $x = \gamma(0)$, sia U un intorno di x, sufficientemente piccolo perché ogni coppia di punti di U sia congiungibile con un unico arco geodetico contenuto in U. Sia $\delta > 0$ tale che l'arco $\gamma\big([-\delta, \delta]\big)$ sia interamente contenuto in U e siano $y = \gamma(\delta/2)$, $y' = \gamma(-\delta/2)$. Allora γ è l'unico arco geodetico di lunghezza minima congiungente y a y'. Pertanto, se l'isometria g scambia y con y', essa applica γ in sé invertendone l'orientamento.

Mostriamo ora che (1) $\Rightarrow$ (4). Sia M debolmente simmetrico e sia $g \in G$. Posto $y = g \cdot x_0$, sia $h \in G$ tale che $h \cdot x_0 = y$ e $h \cdot y = x_0$. Allora $g^{-1}h = k \in K$ e $hg = k' \in K$. Pertanto

$$g^{-1} = kh^{-1} = kgk'^{-1} \in KgK \ .$$

Per l'implicazione (4) $\Rightarrow$ (1), supponiamo che M sia omogenea e che $g^{-1} \in KgK$ per ogni $g \in G$. Indicando sempre con x_0 il punto fissato di cui K è lo stabilizzatore, fissiamo due punti in M, che possiamo supporre essere x_0 e $x = g \cdot x_0$. Se $g^{-1} = kgk'$, poniamo $h = gk'$. Si ha allora

$$h \cdot x_0 = g \cdot x_0 = x \ , \qquad h \cdot x = (gk') \cdot x = (k^{-1}g^{-1}) \cdot x = x_0 \ . \qquad \square$$

Confrontando la (4) con la Proposizione 4.2 del Capitolo VII, si ottiene il seguente risultato.

Teorema 4.3 (di Selberg). *Uno spazio debolmente simmetrico è commutativo.*

5. Il piano iperbolico reale: il gruppo conforme del semipiano e $SL(2,\mathbb{R})$

vediamo ora in dettaglio come si sviluppa l'analisi sferica nel caso più semplice (ma non compatto né euclideo) tra quelli considerati sopra[6].

Sia M il semipiano superiore nel piano complesso,

$$M = \{z = x + iy : y > 0\} \ .$$

Su M costruiamo una metrica invariante per trasformazioni conformi. Iniziamo con la descrizione del gruppo conforme di M. Per definizione, una mappa conforme tra due aperti connessi di $\mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo il cui differenziale in ogni punto è un multiplo scalare non nullo di una trasformazione ortogonale (equivalentemente, un diffeomorfismo che conserva gli angoli). In due variabili, le mappe conformi sono necessariamente olomorfe, oppure antiolomorfe.

Lemma 5.1. *Le trasformazioni biolomorfe di M in sé sono tutte e sole le trasformazioni lineari fratte*

$$F(z) = \frac{az+b}{cz+d} \ , \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R} \ , \quad ad - bc > 0 \ . \tag{5.1}$$

Di conseguenza, le mappe conformi di M in sé sono quelle descritte sopra e le loro composizioni con la coniugazione $\sigma(z) = -\bar{z}$.

Prima di dare la dimostrazione, osserviamo che la famiglia di trasformazioni (5.1) è chiusa per composizione e che, associando a F la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la composizione corrisponde al prodotto di matrici. In particolare, alla matrice identica corrisponde l'apllicazione identica di M in sé.

Dimostrazione. Se $z = x + iy \in M$ e F è data dalla (5.1), $cz + d \neq 0$ e

$$\Im\mathrm{m} F(z) = \Im\mathrm{m}\Big(\frac{(az+b)(cz+d)}{|cz+d|^2}\Big) = \frac{\Im\mathrm{m}\big((az+b)(c\bar{z}+d)\big)}{|cz+d|^2} = \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2} > 0 \ .$$

Dunque F applica M in sé. Siccome F^{-1} è rappresentato dalla matrice inversa, si conclude che F è un biolomorfismo di M in sé.

Dato ora un biolomorfismo F di M in sé, vogliamo ora vedere che F è rappresentabile nella forma (5.1).

Sia $F(i) = s + it$, e poniamo $H(z) = tz + s$. Si vede facilmente che anche h ha la forma (5.1) e che $H(i) = F(i)$. Basta dunque vedere che ogni biolomorfismo di M che lasci fisso il punto i ha la forma (5.1).

Consideriamo la *mappa di Cayley*

$$u(z) = \frac{z-i}{z+i} \ .$$

Siccome

$$1 - |u(z)|^2 = \frac{|z+i|^2 - |z-i|^2}{|z+i|^2} = \frac{4\Im\mathrm{m} z}{|z+i|^2} \ ,$$

---

[6] Per una trattazione approfondita dell'analisi sferica sul piano iperbolico, si veda il libro di S. Lang dal titolo "$SL_2(\mathbb{R})$".

si ha che $z \in M$ se e solo se $u(z) \in D$, il disco unitario. Dunque u è un biolomorfismo di M su D.

Siccome $u(i) = 0$, F è un'applicazione biolomorfa di M in sé che fissa il punto i se e solo se

$$\tilde{F} = u \circ F \circ u^{-1}$$

è un'applicazione biolomorfa di D in sé che fissa l'origine.

Dunque $\tilde{F}(0) = 0$. Inoltre, per $r < 1$,

$$|\tilde{F}'(0)| = \Big| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r} \frac{\tilde{F}(w)}{w^2}\, dw \Big| \leq \frac{1}{r} \ ,$$

da cui segue, per l'arbitrarietà di r, che $|\tilde{F}'(0)| \leq 1$. Poiché la stessa conclusione vale per $\tilde{F}^{-1}$, si ha $|\tilde{F}'(0)| = 1$.

La funzione $\varphi(w) = \tilde{F}(w)/w$ è olomorfa in D e $\varphi(0) = \tilde{F}'(0) = e^{i\theta}$ con θ reale. Per il principio del massimo,

$$\sup_{|w|<1} |\varphi(w)| = \sup_{1-\delta<|w|<1} |\varphi(w)| = \sup_{1-\delta<|w|<1} \frac{|\tilde{F}(w)|}{|w|} \leq \frac{1}{1-\delta} \ .$$

Per l'arbitrarietà di δ, $|\varphi(w)| \leq 1$ per ogni $w \in D$. Segue allora dal principio del massimo forte che φ è costante, e pertanto $\tilde{F}(w) = e^{i\theta} w$.

Coniugando $\tilde{F}$ con u si ottiene che

$$F(z) = u^{-1} \circ \tilde{F}\big(u(z)\big) = u^{-1}\Big(e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i}\Big) \ .$$

Ma $u^{-1}(w) = i\frac{1+w}{1-w}$, per cui

$$F(z) = i\frac{z+i+e^{i\theta}(z-i)}{z+i-e^{i\theta}(z-i)} = \frac{\cos(\theta/2)z + \sin(\theta/2)}{-\sin(\theta/2)z + \cos(\theta/2)} \ . \tag{5.2}$$

In conclusione, F ha la forma (5.1), come da dimostrarsi. □

Indichiamo con $GL_+(2, \mathbb{R})$ il gruppo delle matrici reali 2×2 con determinante positivo. Per la prima parte del Lemma 5.1, abbiamo dunque definito un'azione di $GL_+(2, \mathbb{R})$ su M. Se $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_+(2, \mathbb{R})$, indicheremo con $g \cdot z$ il valore $F(z)$ nella (5.1).

L'azione non è fedele, in quanto due matrici g e cg, con $c \neq 0$, danno la stessa funzione lineare fratta. E' dunque sufficiente restringersi a $SL(2, \mathbb{R})$, il gruppo delle matrici reali con determinante uguale a 1. L'azione ristretta a G continua a non essere fedele, in quanto g e $-g$ hanno la stessa azione. Tuttavia si ha meno ridondanza ed è preferibile lavorare con un gruppo di matrici, come $SL(2, \mathbb{R})$, che con il suo quoziente $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$.

Nel corso della dimostrazione del Lemma 5.1 abbiamo individuato due importanti sottogruppi del gruppo dei biolomorfismi di M:

(1) il *sottogruppo affine*, costituito dalle trasformazioni $z \mapsto tz + s$, con $s \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, che agisce in modo semplicemente transitivo su M;
(2) lo stabilizzatore di i, costituito dalle trasformazioni (5.2).

La dimostrazione del Lemma mostra che *ogni biolomorfismo F di M si scompone in modo unico come composizione $F = F_1 \circ F_2$, con F_1 affine e F_2 nello stabilizzatore di i.*

A sua volta, il sottogruppo affine si può scomporre in

(1a) il gruppo delle traslazioni orizzontali, $z \mapsto z + s$, on $s \in \mathbb{R}$;
(1b) il gruppo delle dilatazioni, $z \mapsto tz$, con $t > 0$.

Risulta evidente che *ogni trasformazione affine di M si scompone in modo unico come composizione di una traslazione, seguita da una dilatazione, oppure di una dilatazione, seguita da una traslazione.*

I corrispondenti sottogruppi di $SL(2, \mathbb{R})$ sono:

(1a) il gruppo N delle matrici $n_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
(1b) il gruppo A delle matrici[7] $a_t = \begin{pmatrix} t^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & t^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$;
(2) il gruppo K delle matrici $k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Si noti che A *normalizza* N, in quanto, come si verifica facilmente,

$$a_t n_s a_t^{-1} = n_{ts} \ . \tag{5.3}$$

Questo implica che $AN = NA$ è un sottogruppo (il sottogruppo affine). Da quanto detto si ottiene facilmente il seguente enunciato.

Proposizione 5.2 (Decomposizione di Iwasawa). *$SL(2, \mathbb{R}) = ANK$, nel senso che ogni elemento g di $SL(2, \mathbb{R})$ si decompone in modo unico come prodotto*

$$g = a_t n_s k_\theta \ , \tag{5.4}$$

e l'applicazione $(a_t, n_s, k_\theta) \mapsto a_t n_s k_\theta$ è un diffeomorfismo di $A \times N \times K$ su $SL(2, \mathbb{R})$.

Per la (5.3), vale anche la decomposizione NAK. Scomponendo g^{-1} e invertendo i fattori, si ottengono poi le decomposizioni KAN e KNA.

Ciascun sottogruppo N, A, K ha dimensione 1, e dunque è abeliano. Precisamente

(1) $N \cong (\mathbb{R}, +)$; usando $s \in \mathbb{R}$ come parametro per $n \in N$, $dn = ds$ è ovviamente una misura di Haar;
(2) $A \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$; in termini del parametro $t > 0$, $da = \frac{dt}{t}$ è una misura di Haar[8];
(3) $K \cong \mathbb{T}$; $dk = \frac{1}{2\pi} d\theta$ è la misura di Haar normalizzata.

Teorema 5.3. *Il gruppo $G = SL(2, \mathbb{R})$ è unimodulare. Rispetto alla decomposizone $g = ank$, la misura*

$$dg = da\, dn\, dk$$

è una misura di Haar.

[7] Si noti la distribuzione delle potenze di t tra il coefficiente a numeratore e quello a denominatore, necessaria per avere una matrice con determinante 1.

[8] Ovviamente, cambiando parametro $t = e^\tau$, si ottiene che $A \cong (\mathbb{R}, +)$ e $da = d\tau$.

Dimostrazione. Mostriamo che dg è invariante a sinistra. Basta vederlo separatamente per elementi di A, N, K rispettivamente. Questo equivale a mostrare che il funzionale

$$f \longmapsto \int_{A\times N\times K} f(ank)\,da\,dn\,dk$$

rimane invariato se a f si sostituiscono rispettivamente $L_{a'}f$, $L_{n'}f$, $L_{k'}f$.

La cosa è ovvia per $L_{a'}f$. Passando a n', si ha

$$L_{n'}f(ank) = f(n'^{-1}ank) = f\big(a(a^{-1}n'a)^{-1}nk\big)\ .$$

Siccome $(a^{-1}n'a)^{-1} \in N$ per la (5.3), integrando prima in dn si elimina questo fattore e si ottiene la conclusione.

L'invarianza rispetto a K richiede un argomento indiretto.

Consideriamo lo spazio omogeneo G/K. Per l'unicità nella decomposizone di Iwasawa, ogni elemento di G/K è rappresentabile in modo unico come classe laterale anK, il che consente di identificare, come varietà, G/K con AN. In questo senso, la restrizione ad AN dell'azione di G corrisponde alla moltiplicazione a sinistra sul gruppo AN.

Per la Proposizione 2.2 del Capitolo VII, G/K ammette una misura G-invariante, unica a meno di costanti moltiplicative. Poiché tale misura deve essere in particolare AN-invariante, essa non può essere altro che $d(anK) = da\,dn$, per quanto visto sopra[9].

Data $f \in C_c(G)$, poniamo $f^\flat(gK) = \int_K f(gk)\,dk \in C_c(G/K)$. Allora, indicando con τ l'azione di G sulle funzioni definite su G/K,

$$(L_{k'}f)^\flat = \tau_{k'}(f^\flat)\ ,$$

e dunque

$$\begin{aligned}\int_G L_{k'}f(ank)\,da\,dn\,dk &= \int_{A\times N} (L_{k'}f)^\flat(anK)\,da\,dn\\ &= \int_{G/K} \tau_{k'}(f^\flat)(anK)\,d(anK)\\ &= \int_{G/K} f^\flat(anK)\,d(anK)\\ &= \int_G f(ank)\,da\,dn\,dk\ .\end{aligned}$$

Per mostrare l'unimodularità, supponiamo per assurdo che G abbia una funzione modulare $\Delta : G \to \mathbb{R}^+$ non banale. Allora $\ker\Delta$ sarebbe un sottogruppo normale proprio e non banale. Di conseguenza, l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ ammetterebbe un ideale proprio non banale. Mostriamo che ciò è falso[10].

L'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di $SL(2,\mathbb{R})$ consiste delle matrici reali di traccia nulla, cioè le matrici della forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a\end{pmatrix}$. Fissiamo la base

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\ ,\qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\ ,\qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\ .$$

---

[9] Con opportune modifiche formali, perchè si sta integrando su G/K e non su G.

[10] In altri termini, mostriamo che $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie *semplice*.

Le regole di commutazione sono

$$[H,X]=2X\ ,\qquad [H,Y]=-2Y\ ,\qquad [X,Y]=H\ .$$

Sia $\mathfrak{h}$ un ideale non banale di $\mathfrak{g}$. Esso contiene allora un elemento $V=aH+bX+cY\neq 0$. Supponiamo $a\neq 0$. Allora $\mathfrak{h}$ contiene anche $[X,V]=-2aX+cH$, e dunque anche $[H,-2aX+cH]=-4aX$. Quindi $X\in\mathfrak{h}$, e per le regole di commutazione, anche $Y,H\in\mathfrak{h}$. Dunque $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$. In modo analogo si procede se $a=0$ ma $b\neq 0$, ecc. $\square$

Il gruppo affine AN agisce in modo semplicemente transitivo su M, e ogni punto $z=x+iy$ si rappresenta in modo unico come $a_tn_s\cdot i$, con

$$z=a_tn_s\cdot i\ ,\qquad t=y\ ,\ s=\frac{x}{y}\ . \tag{5.5}$$

Data una funzione f su M, definiamo $\tilde f$ su AN come $\tilde f(an)=f(an\cdot i)$. Per la funzione $\Lambda^*f(g)=f(g\cdot i)$ su $SL(2,\mathbb{R})$ si ha allora l'identità

$$\Lambda^*f(ank)=\tilde f(an)\ . \tag{5.6}$$

Il gruppo AN *non è unimodulare*. La misura $da\,dn$ è invariante a sinistra ma non a destra. Infatti, fissato $a_\tau n_\sigma\in AN$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty g(a_\tau n_\sigma a_t n_s)\,\frac{dt}{t}\,ds&=\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty g(a_\tau a_t n_{t^{-1}\sigma}n_s)\,\frac{dt}{t}\,ds\\&=\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty g(a_{\tau t}n_{t^{-1}\sigma+s})\,\frac{dt}{t}\,ds\\&=\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty g(a_t n_s)\,\frac{dt}{t}\,ds\ ,\end{aligned}$$

mentre[11]

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty g(a_t n_s a_\tau n_\sigma)\,\frac{dt}{t}\,ds&=\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty g(a_{t\tau}n_{\tau^{-1}s+\sigma})\,\frac{dt}{t}\,ds\\&=\tau\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty g(a_t n_s)\,\frac{dt}{t}\,ds\ .\end{aligned}$$

Corollario 5.4.

(1) *La misura su M*

$$dm(z)=\frac{dx\,dy}{y^2} \tag{5.7}$$

è G-invariante.

(2) *Date $f,g\in L^1(M,dm)$, con g K-invariante, si ha*

$$(\Lambda^*f)*_G(\Lambda^*g)(ank)=\tilde f*_{AN}\tilde g(an)=\int_{AN}f(a'n')g\big((a'n')^{-1}an\big)\,da'\,dn'\ .$$

[11] La misura $dt\,ds$ è invece invariante a destra.

Dimostrazione. Attraverso l'identificazione (5.5) di M con AN, una misura G-invariante su M deve corrispondere a una misura di Haar sinistra su AN. A meno di multipli scalari, nelle coordinate $z = ts + it$ si deve dunque avere

$$dm(z) = \frac{ds\,dt}{t} \ ,$$

da cui segue la (5.7). La (2) è ovvia.

6. Il piano iperbolico reale: la metrica invariante

Costruiamo su M una metrica riemanniana invariante rispetto a $SL(2,\mathbb{R})$, la parte olomorfa del gruppo conforme. Vedremo quindi che essa è invariante anche rispetto alla coniugazione, e dunque rispetto all'intero gruppo conforme.

Lemma 6.1. *Sia $M = G/K$ una varietà omogenea. Sia $\langle\ ,\ \rangle$ un prodotto scalare sullo spazio tangente $T_{x_0}M$ in $x_0 = eK$, che sia invariante rispetto all'azione di K data dai differenziali $(dk)_{x_0}$, con $k \in K$. Esiste allora un'unica metrica riemanniana g su M, G-invariante e tale che, $g_{x_0} = \langle\ ,\ \rangle$.*

Viceversa, se g è una metrica riemanniana G-invariante su M, g_{x_0} è K-invariante. ∎

Dimostrazione. Sia $\langle\ ,\ \rangle$ un prodotto scalare K-invariante su $T_{x_0}M$. Dato $x = g \cdot x_0 \in M$, $(dg)_{x_0}$ applica $T_{x_0}M$ biiettivamente su T_xM. Si definisca, per $v, v' \in T_{x_0}M$,

$$g_x\big((dg_{x_0})v, (dg_{x_0})v'\big) = \langle v, v'\rangle \ .$$

Per la K-invarianza del prodotto scalare iniziale, questa è una buona definizione, e fornisce l'unica metrica G-invariante coincidente con il prodotto scalare dato in x_0.

L'ultima parte dell'enunciato è ovvia. □

Sia dunque T_iM il piano tangente a M nel punto i. Identifichiamo in modo naturale T_iM con $\mathbb{C}$. Il differenziale $(dk_\theta)_i$ è la moltiplicazione per la derivata complessa in i della funzione $z \mapsto k_\theta \cdot z$, cioè

$$\frac{d}{dz}_{|z=i} \frac{\cos\theta z + \sin\theta}{-\sin\theta z + \cos\theta} = e^{2i\theta} \ . \tag{6.1}$$

A meno di fattori costanti, l'unica scelta è dunque il prodotto scalare euclideo

$$\langle \zeta, \zeta' \rangle_i = \Re\mathrm{e}(\zeta\bar{\zeta}') \ .$$

Esso è anche invariante rispetto al differenziale della coniugazione σ.

Usiamo ora l'azione del gruppo affine (ossia di AN) per portare questo prodotto scalare negli altri punti di M. Identifichiamo ancora con $\mathbb{C}$ il piano tangente $T_{z_0}M$ in un generico punto z_0.

Se $z_0 = s + it$, poniamo $F_{z_0}(z) = tz + s$. Una metrica invariante deve necessariamente soddisfare, per $\zeta, \zeta' \in \mathbb{C}$,

$$\big\langle F'_{z_0}(i)\zeta, F'_{z_0}(i)\zeta' \big\rangle_{z_0} = \langle \zeta, \zeta' \rangle_i \ .$$

Si ottiene quindi

$$\langle \zeta, \zeta' \rangle_{z_0} = t^{-2}\Re\mathrm{e}(\zeta\bar{\zeta}') = (\Im\mathrm{m} z_0)^{-2}\Re\mathrm{e}(\zeta\bar{\zeta}') \ . \tag{6.2}$$

Lemma 6.2. *La metrica (6.2) su M è invariante rispetto all'azione del gruppo conforme, ed è l'unica con tale proprietà a meno di costanti moltiplicative. Le trasformazioni conformi sono tutte e sole le isometrie di M rispetto a tale metrica.*

Dimostrazione. L'invarianza rispetto a G e lunicità seguono dal Lemma 6.1.

Sia ora F una isometria di M. Se g è la trasformazione affine che manda i in $F(i)$, scomponiamo F come $F = F_1 \circ g$, con $F_1(i) = i$. Quindi $(dF_1)_i$ è una trasformazione ortogonale di $T_iM \cong \mathbb{C}$. Essa può essere di due tipi: $(dF_1)_i\zeta = e^{i\theta}\zeta$, oppure $(dF_1)_i\zeta = e^{i\theta}\bar{\zeta}$ (secondo che il determinante reale della trasformazione sia ± 1).

Nel secondo caso, $\sigma \circ F_1$ rientra nel primo caso.

Nel primo caso, esiste $k \in K$ tale che $(dk)_i = (dF_1)_i$. Per il Lemma 1.1, $F_1 = k$, e dunque $F \in SL(2,\mathbb{R})$. Nel secondo caso, $F \in \sigma SL(2,\mathbb{R})$. □

Corollario 6.3. *M è doppiamente omogeneo. Le orbite di K in M sono i cerchi geodetici di centro i.*

Il cerchio geodetico di centro i e raggio r è la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 2y \cosh r + 1 = 0 \ .$$

Dimostrazione. Segue dalla (6.1) che l'azione di K su T_iM è transitiva sul cerchio unitario. A maggior ragione, ciò vale per lo stabilizzatore di i nel gruppo conforme, che contiene K. Siccome M è omogenea, lo stesso vale in ogni punto di M per l'azione del suo stabilizzatore. Possiamo dunque applicare il Teorema 3.2 per concludere che M è doppiamente omogeneo.

Dalla transitività dell'azione di K sul cerchio unitario nel piano tangente in i segue la transitività sulle geodetiche uscenti da i. Questo implica che K agisce transitivamente sulle sfere geodetiche di centro i.

Se u indica la mappa di Cayley $u(z) = (z - i)/(z + i)$ introdotta nella dimostrazione del Lemma 5.1, le considerazioni svolte per giungere alla (5.2) mostrano che

$$k_\theta(z) = u^{-1}\big(e^{2i\theta}u(z)\big) \ .$$

Poiché il gruppo di trasformazioni del disco unitario $w \mapsto e^{2i\theta}w$ hanno come orbite i cerchi di centro l'origine, segue immediatamente che le orbite di K in M sono le immagini inverse, secondo u, di tali cerchi, ovvero gli insiemi C_s descritti dalle equazioni

$$C_s \ : \quad \frac{|z - i|}{|z + i|} = s \ , \qquad (s < 1) \ , \tag{6.3}$$

che sono dunque i cerchi geodetici di centro i.

Per determinare il raggio in funzione di s, osserviamo che, per motivi di simmetria rispetto alla coniugazione σ, il semiasse immaginario è la geodetica uscente da i con vettore tangente puramente immaginario. Usando la (6.2), si verifica facilmente che la parametrizzazione $\gamma(r) = ie^r$ è isometrica. Basta dunque imporre che $ie^r \in C_s$ per ottenere il raggio di C_s. Dalla (6.3) si ricava

$$s = \frac{e^r - 1}{e^r + 1} = \tanh \frac{r}{2} \ .$$

Riscrivendo poi la (6.3) in coordinate reali, si ottiene l'equazione

$$0 = x^2 + y^2 - 2\frac{1+s^2}{1-s^2}y + 1 = x^2 + y^2 - 2y\cosh r + 1 \ . \qquad \square$$

Abbiamo dunque due modi di realizzare M come spazio omogeneo, come $M \cong SL(2,\mathbb{R})/K$, oppure come $M \cong \mathrm{Iso}(M)/(K \cup \sigma K)$. Nel primo caso, si prende in considerazione solo la componente connessa dell'identità nel gruppo delle isometrie. Tuttavia, segue dal Corollario 6.3 che l'analisi sferica su M è indipendente da tale scelta, perché le funzioni K-invarianti su M coincidono con quelle invarianti per $K \cup \sigma K$.

D'ora in poi, terremo conto della sola azione di $G = SL(2,\mathbb{R})$.

Le funzioni K-invarianti su M dipendono dunque solo dalla distanza del punto da i. Abbiamo dunque la seguente proprietà.

Lemma 6.4. *Una funzione K-invariante f su M è univocamente determinata dalla sua restrizione al semiasse immaginario e tale restrizione soddisfa la condizione $f(it) = f\left(\frac{i}{t}\right)$.*

Si ha anche la "decomposizione polare" di $SL(2,\mathbb{R})$.

Proposizione 6.5 (Decomposizione di Cartan). *Indichiamo con A^+ il semigruppo delle matrici a_t con $t \geq 1$. Ogni elemento $g \in SL(2,\mathbb{R})$ si scompone nel prodotto*

$$g = k_1 a k_2 \ , \tag{6.4}$$

con $k_1, k_2 \in K$ e $a \in A^+$. Se $g \notin K$, tale scomposizione è unica a meno di moltiplicazione simultanea di k_1, k_2 per $-I$.

Dimostrazione. Sia $z = g \cdot i$, e sia $\tau = d(z,i)$. Esiste $k_1 \in K$ tale che $k_1 \cdot (ie^\tau) = z$. Dunque $(k_1 a_{e^\tau}) \cdot i = z$, e allora $(k_1 a_{e^\tau})^{-1} g \in K$. Questo fornisce la scomposizione (6.4) per g generico.

Naturalmente, se $g \in K$, si ha $\tau = 0$ e dunque k_1, k_2 sono indeterminati. Se $\tau \neq 0$, segue dalla (6.1) che l'argomento θ di k_1 è determinato a meno di π, e dunque k_1 è unico a meno di $\pm I$. $\square$

Per il Teorema 3.3, gli operatori differenziali G-invarianti su M sono tutti e soli i polinomi nell'operatore di Laplace-Beltrami Δ.

Lemma 6.6. *Nelle coordinate $z = x + iy$ su M, l'operatore di Laplace Beltrami è*

$$\Delta = -y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2) \ .$$

Dimostrazione. Con formule standard di geometria differenziale, l'espressione si calcola facilmente usando la (6.2). E' anche possibile utilizzare il procedimento indicato nel §4 del Capitolo VIII, in particolare la formula (4.5). Non sviluppiamo i calcoli, che possono comunque costituire un utile esercizio. $\square$

7. Il piano iperbolico reale: le funzioni sferiche limitate

La forma particolarmente semplice di Δ consente di trovarne facilmente delle autofunzioni per ogni autovalore complesso. Per $\gamma \in \mathbb{C}$, poniamo $u_\gamma(x+iy) = y^\gamma$. Allora

$$\Delta u_\gamma = \gamma(1-\gamma)u_\gamma \ .$$

Si noti che ogni numero complesso si scompone come $\gamma(1-\gamma)$ per qualche γ, e che u_γ e $u_{1-\gamma}$ danno lo stesso autovalore. Integrando su K, si ottengono autofunzioni K-invarianti.

Lemma 7.1. *Le funzioni*

$$\varphi_\gamma(z) = \int_K u_\gamma(k \cdot z)\, dk \tag{7.1}$$

sono funzioni sferiche di autovalore $\gamma(1-\gamma)$ rispetto a Δ. Esse sono tutte le funzioni sferiche (limitate e non). Inoltre

(1) $\varphi_\gamma = \varphi_{1-\gamma}$;
(2) *la funzione sferica su G, $\Phi_\gamma(g) = \varphi_\gamma(g \cdot i)$, soddisfa l'identità $\Phi_\gamma(g) = \Phi_\gamma(g^{-1})$.*

Dimostrazione. Per la K-invarianza di Δ, $\Delta(\tau_k u_\gamma) = \gamma(1-\gamma)\tau_k u_\gamma$. Quindi

$$\Delta\varphi_\gamma = \int_K \Delta(\tau_k u_\gamma)\, dk = \gamma(1-\gamma)\varphi_\gamma \ .$$

Inoltre $\varphi_\gamma(i) = 1$. Dunque le φ_γ sono sferiche. Dal Lemma 6.1 del Capitolo VIII segue che esse sono tutte e che vale la (1).

Infine, la (2) segue dal fatto che M è debolmente simmetrico. □

Vogliamo ora individuare quali di tali funzioni sono limitate e quali sono autoaggiunte. Per rispondere a entrambe le domande è utile la seguente formula asintotica.

Lemma 7.2. *Se* $\Re\mathrm{e}\gamma > \frac{1}{2}$,

$$\lim_{y\to+\infty} y^{-(\gamma-1)}\varphi_\gamma(iy) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(\gamma-1/2)}{\pi\Gamma(\gamma)} \neq 0 \ .$$

Dimostrazione. Per la (2) del Lemma 7.1, possiamo supporre $y \geq 1$.

Per $k = k_\theta$, si ha

$$\begin{aligned} k_\theta \cdot (iy) &= \frac{iy\cos\theta + \sin\theta}{-iy\sin\theta + \cos\theta} \\ &= \frac{(iy\cos\theta + \sin\theta)(iy\sin\theta + \cos\theta)}{\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta} \\ &= \frac{(1-y^2)\sin\theta\cos\theta + iy}{\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta} \ . \end{aligned}$$

Quindi

$$u_\gamma\big(k_\theta \cdot (iy)\big) = \frac{y^\gamma}{(\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta)^\gamma} \ ,$$

e

$$\varphi_\gamma(iy) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{y^\gamma}{(\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta)^\gamma}\,d\theta = \frac{y^\gamma}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta)^\gamma}\,d\theta \ ,$$

essendo l'integrando periodico di periodo π. Con il cambio di variabile $\tan\theta = t$, si ottiene

$$\varphi_\gamma(iy) = \frac{y^\gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+t^2)^{\gamma-1}}{(1+y^2t^2)^\gamma}\,dt = \frac{2y^\gamma}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{(1+t^2)^{\gamma-1}}{(1+y^2t^2)^\gamma}\,dt \ .$$

Cambiando ancora variabile, $yt = s$, si ottiene

$$\varphi_\gamma(iy) = \frac{2y^{\gamma-1}}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{(1+s^2/y^2)^{\gamma-1}}{(1+s^2)^\gamma}\,ds \ . \tag{7.2}$$

Per poter passare al limite, osserviamo che, se $\Re\mathrm{e}\gamma \geq 1$,

$$\Big|\frac{(1+s^2/y^2)^{\gamma-1}}{(1+s^2)^\gamma}\Big| = \frac{(1+s^2/y^2)^{\Re\mathrm{e}\gamma-1}}{(1+s^2)^{\Re\mathrm{e}\gamma}} \leq \frac{1}{1+s^2} \in L^1(\mathbb{R}^+) \ ,$$

mentre, se $\frac{1}{2} < \Re\mathrm{e}_\gamma \leq 1$.

$$\Big|\frac{(1+s^2/y^2)^{\gamma-1}}{(1+s^2)^\gamma}\Big| = \frac{1}{(1+s^2/y^2)^{1-\Re\mathrm{e}\gamma}(1+s^2)^{\Re\mathrm{e}\gamma}} \leq \frac{1}{(1+s^2)^{\Re\mathrm{e}\gamma}} \in L^1(\mathbb{R}^+) \ .$$

Otteniamo dunque per convergenza dominata che

$$\begin{aligned}\lim_{y\to\infty} y^{-(\gamma-1)}\varphi_\gamma(iy) &= \lim_{y\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{(1+s^2/y^2)^{\gamma-1}}{(1+s^2)^\gamma}\,ds \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+s^2)^\gamma}\,ds \ .\end{aligned}$$

Con il cambio di variabile $s = \sqrt{u}$, si ottiene una delle forme dell'integrale Beta,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+s^2)^\gamma}\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}(1+u)^\gamma}\,du = \frac{1}{2}B\Big(\frac{1}{2}, \gamma - \frac{1}{2}\Big) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(\gamma-1/2)}{2\Gamma(\gamma)} \ ,$$

e questa espressione è diversa da 0. $\square$

Teorema 7.3. *La funzione* Φ_γ *è*

1. *limitata se e solo se* $0 \leq \Re\mathrm{e}\gamma \leq 1$*;*
2. *autoaggiunta se e solo se* $\gamma \in \mathbb{R} \cup \big(\frac{1}{2} + i\mathbb{R}\big)$.

Dimostrazione. Essendo $\varphi_\gamma = \varphi_{1-\gamma}$, basta considerare il caso $\Re\mathrm{e}\gamma \geq \frac{1}{2}$. Se $\Re\mathrm{e}\gamma > \frac{1}{2}$, la conclusione segue dal Lemma 7.2.

Se $\Re\mathrm{e}\gamma = \frac{1}{2}$, $|u_\gamma|^2 = u_1$, e per la (7.1),

$$|\varphi_\gamma(z)| \leq \Big(\int_K |u_\gamma(k\cdot z)|^2\,dk\Big)^{\frac{1}{2}} = \varphi_1(z)^{\frac{1}{2}} = \varphi_0(z)^{\frac{1}{2}} = 1 \ .$$

Per la (2) del Lemma 7.1, Φ_γ è autoaggiunta se e solo se è reale. Possiamo dunque verificare ciò su φ_γ. Essendo $\overline{\varphi_\gamma} = \varphi_{\bar\gamma}$, φ_γ è reale se e solo se $\bar\gamma$ è uguale a γ o a $1-\gamma$. $\square$

Con riferimento al Teorema 6.2 del Capitolo VIII, consideriamo l'immersione Σ_Δ in $\mathbb{C}$ dello spettro di Gelfand dell'algebra $L^1(K;G;K)$, corrispondente alla scelta di Δ come unico generatore di $\mathbb{D}(G/K)$.

Corollario 7.4. *Lo spettro di Gelfand dell'algebra* $L^1(K;G;K)$*, immerso in* $\mathbb{C}$ *come* Σ_Δ*, è*

$$\Sigma_\Delta = \{\gamma(1-\gamma) : 0 \le \Re\mathrm{e}\gamma \le 1\} = \{u + iv : u \ge v^2\} \ .$$

Inoltre $\Sigma^+_\Delta \subset \Sigma_\Delta \cap \mathbb{R}$*.*

La seconda parte dell'enunciato dipende dal fatto che le funzioni sferiche di tipo positivo sono al tempo stesso limitate e autoaggiunte.

8. Il piano iperbolico reale: la trasformata di Fourier sferica

Continuiamo a indicare con φ_γ la funzione sferica (7.1), ricordando tuttavia che $\varphi_\gamma = \varphi_{1-\gamma}$. La trasformata di Fourier sferica di $f \in L^1_K(M)$, lo spazio delle funzioni K-invarianti in $L^1(M)$, sarà indicata con[12]

$$\hat{f}(\gamma) = \int_M f(z)\varphi_\gamma(z)\, dm(z) \ .$$

Dalla (7.1) si ha

$$\hat{f}(\gamma) = \int_M f(z)u_\gamma(z)\, dm(z) = \int_0^\infty y^{\gamma-2} \int_{-\infty}^\infty f(x+iy)\, dx\, dy \ .$$

Ponendo $y = e^t$, si ha

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^\infty e^{(\gamma-1)t} \int_{-\infty}^\infty f(x+ie^t)\, dx\, dt \ . \tag{8.1}$$

Questa formula prevede la composizione di due operazioni. La prima è l'integrazione di f sulle rette orizzontali. Consideriamo dunque l'operatore che associa ad f la funzione

$$t \longmapsto \int_{-\infty}^\infty f(x+ie^t)\, dx \ .$$

Per motivi che vedremo tra breve, risulta conveniente formalizzare questa operazione introducendo l'operatore

$$Af(t) = e^{-\frac{t}{2}} \int_{-\infty}^\infty f(x+ie^t)\, dx \ , \tag{8.2}$$

[12] A livello di gruppo, questo equivale alla posizione generale,

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(g\cdot i)\Phi_\gamma(g^{-1})\, dg \ ,$$

per la (2) del Lemma 7.1.

detto la *trasformata di Abel*[13] di f.

Una funzione K-invariante su M è una funzione che, per il Corollario 6.3, dipende solo da

$$\cosh r = \frac{x^2+y^2+1}{2y} = \frac{x^2}{2y} + \frac{y+y^{-1}}{2} \geq 1 \ .$$

Possiamo dunque esprimere ogni funzione K-invariante f come

$$f(x+iy) = f_0\Big(\frac{x^2}{2y} + \frac{y+y^{-1}}{2}\Big) \ , \tag{8.3}$$

per cui

$$Af(t) = e^{-\frac{t}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f_0\Big(\frac{x^2}{2e^t} + \cosh t\Big)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_0\Big(\frac{s^2}{2} + \cosh t\Big)\,ds \ . \tag{8.4}$$

Lemma 8.1. *Vale la seguente formula di inversione della trasformata di Abel di una funzione f di classe C^1, K-invariante e a supporto compatto:*

$$f(i) = f_0(1) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} (Af)'(t)\frac{1}{\sinh\frac{t}{2}}\,dt \ .$$

Dimostrazione. Data $g \in C^1_c\big([0,\infty)\big)$, poniamo, per $u \geq 1$,

$$Tg(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g\Big(\frac{s^2}{2} + u\Big)\,ds \ .$$

Allora

$$\begin{aligned} T^2 g(u) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g\Big(\frac{s_1^2+s_2^2}{2} + u\Big)\,ds_1\,ds_2 \\ &= 2\pi\int_0^{\infty} g\Big(\frac{\sigma^2}{2} + u\Big)\sigma\,d\sigma \\ &= 2\pi\int_u^{\infty} g(v)\,dv \ , \end{aligned}$$

[13] L'operatore A è (a parte il coefficiente $e^{-\frac{t}{2}}$) un analogo "iperbolico" della *trasformata di Radon* in $\mathbb{R}^2$, che consiste nell'associare a una funzione i suoi integrali lungo tutte le rette del piano. Dati un versore $\omega \in S^1$ e $u \in \mathbb{R}$, la trasformata di Radon di una funzione f è data dall'integrale unidimensionale di f sulla retta $\langle x,\omega\rangle = u$,

$$\mathcal{R}f(\omega,u) = \int_{\langle x,\omega\rangle = u} f \ ,$$

(naturalmente $\mathcal{R}(\omega,u) = \mathcal{R}(-\omega,-u)$). La proprietà fondamentale della trasformata di Radon è il principio di unicità: conoscendo $\mathcal{R}f$ si può ricostruire f.
A noi interessa applicare la trasformata di Abel a funzioni K-invarianti. L'analogo euclideo è la trasformata di Radon applicata a funzioni radiali. Ovviamente, se f è radiale, $\mathcal{R}f$ non dipende da ω e, per poter ricostruire f, è sufficiente avere a disposizione gli integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \mathcal{R}f(e_1,y) \ .$$

con un passaggio da coordinate cartesiane a polari nell'integrale doppio e successivi cambiamenti di variabile. Quindi

$$\frac{d}{du}T^2 g(u) = -2\pi g(u) \ ,$$

cioè $T^{-2} = -(1/2\pi)d/du$. Pertanto

$$T^{-1}g(u) = -\frac{1}{2\pi}Tg'(u) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g'\Big(\frac{s^2}{2}+u\Big)\,ds \ ,$$

e, posto $g = Tf_0$,

$$f_0(u) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(Tf_0)'\Big(\frac{s^2}{2}+u\Big)\,ds = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(Tf_0)'\Big(\frac{s^2}{2}+u\Big)\,ds \ . \tag{8.5}$$

Abbiamo ora la relazione $Af(t) = Tf_0(\cosh t)$, per cui

$$(Af)'(t) = \sinh t\,(Tf_0)'(\cosh t) \ .$$

Posto $u = 1$ nella (8.5), effettuiamo il cambiamento di variabile $\frac{s^2}{2}+1 = \cosh t = 2\sinh^2(t/2)+1$, da cui $s = 2\sinh(t/2)$ e $ds = \cosh(t/2)\,dt$. Quindi

$$\begin{aligned} f_0(i) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(Tf_0)'(\cosh t)\cosh\frac{t}{2}\,dt \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(Af)'(t)\frac{\cosh\frac{t}{2}}{\sinh t}\,dt \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}(Af)'(t)\frac{1}{\sinh\frac{t}{2}}\,dt \ . \qquad \square \end{aligned}$$

Dalla (8.1) si ricava che

$$\hat f\Big(\frac{1}{2}+i\xi\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t}Af(t)\,dt = \mathcal{F}Af(\xi) \ , \tag{8.6}$$

e questo ci consente di invertire la trasformata di Fourier sferica.

Teorema 8.2. *Per f K-invariante, di classe C^2 e a supporto compatto, valgono*

(1) *la formula di inversione*

$$f(i) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\hat f\Big(\frac{1}{2}+i\xi\Big)\xi\tanh\pi\xi\,d\xi \ ;$$

(2) *la formula di Plancherel*

$$\int_M |f(z)|^2\,dm(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\Big|\hat f\Big(\frac{1}{2}+i\xi\Big)\Big|^2\xi\tanh\pi\xi\,d\xi \ .$$

Dimostrazione. Supponiamo f (e dunque anche f_0) di classe C^2 e a supporto compatto. Per la (8.2), anche Af è C^2 a supporto compatto. Pertanto la sua trasformata di Fourier è integrabile[14]. Per la (8.6),

$$Af(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\Big(\frac{1}{2}+i\xi\Big)e^{i\xi t}\,d\xi\ ,$$

e dunque, per la parità di $\hat{f}(\frac{1}{2}+i\xi)$ in ξ,

$$\begin{aligned} f(i) &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \frac{d}{dt}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}\Big(\frac{1}{2}+i\xi\Big)e^{i\xi t}\,d\xi\Big)\frac{1}{\sinh\frac{t}{2}}\,dt \\ &= -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{d}{dt}\Big(\int_0^\infty \hat{f}\Big(\frac{1}{2}+i\xi\Big)\cos\xi t\,d\xi\Big)\frac{1}{\sinh\frac{t}{2}}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \xi\hat{f}\Big(\frac{1}{2}+i\xi\Big)\int_0^\infty \frac{\sin\xi t}{\sinh\frac{t}{2}}\,dt\,d\xi \end{aligned}$$

Ora,

$$\frac{\sin\xi t}{\sinh\frac{t}{2}} = \frac{2e^{-\frac{t}{2}}\sin\xi t}{1-e^{-t}} = 2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})t}\sin\xi t\ ,$$

con convergenza dominata in L^1 su $\mathbb{R}^+$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin\xi t}{\sinh\frac{t}{2}}\,dt &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty e^{-(n+\frac{1}{2})t}\sin\xi t\,dt \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\Im\mathrm{m}\int_0^\infty e^{-(n+\frac{1}{2}-i\xi)}\,dt \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\Im\mathrm{m}\frac{1}{n+\frac{1}{2}-i\xi} \\ &= 2\xi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2+\xi^2} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi}{(n+\frac{1}{2})^2+\xi^2}\ . \end{aligned}$$

---

[14] Se $g, g' \in L^2$, anche $\mathcal{F}g$ e $\mathcal{F}(g')(\xi) = i\xi\mathcal{F}g(\xi)$ sono in L^2 e dunque

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}g(\xi)|\,d\xi \le \Big(\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}g(\xi)|^2(1+\xi^2)\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}(1+\xi^2)^{-1}\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty\ .$$

Più avanti si utilizza il fatto che $\xi\mathcal{F}(g')(\xi)$ è pure integrabile se anche $g'' \in L^2$. la dimostrazione è analoga.

Per $\xi > 0$ fissato,

$$\begin{aligned}
\frac{\xi}{(\tau+\frac{1}{2})^2+\xi^2} &= \Re\mathrm{e}\frac{1}{\xi+i(\tau+\frac{1}{2})} \\
&= \Re\mathrm{e}\int_0^\infty e^{-\xi t - i(\tau+\frac{1}{2})t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\xi t - i(\tau+\frac{1}{2})t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\xi t + i(\tau+\frac{1}{2})t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-\xi|t| - i(\tau+\frac{1}{2})t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{-\xi|t|-i\frac{t}{2}})\ .
\end{aligned}$$

Per la formula di sommazione di Poisson,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}g(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(2\pi n)\ ,$$

si ottiene l'identità

$$\begin{aligned}
\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{(n+\frac{1}{2})^2+\xi^2} &= \pi \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\xi|n|-in\pi} \\
&= \pi + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2\pi n\xi} \\
&= \pi - \frac{2e^{-2\pi\xi}}{1+e^{-2\pi\xi}} \\
&= \pi\frac{1-e^{-2\pi\xi}}{1+e^{-2\pi\xi}} \\
&= \pi\frac{e^{\pi\xi}-e^{-\pi\xi}}{e^{\pi\xi}+e^{-\pi\xi}} \\
&= \pi \tanh \pi\xi\ .
\end{aligned}$$

Abbiamo allora la formula di inversione (1). La (2) segue applicando la (1) a $(\Lambda^* f)^* \star f$. $\square$

Nelle formule (1) e (2) interviene solo la restrizione della trasformata di Fourier alla retta $\Re\mathrm{e}\gamma = \frac{1}{2}$ (corrispondente alla semiretta $\left[\frac{1}{4},\infty\right)$ in $\Sigma_\Delta \cap \mathbb{R}$). Per poter dire che la misura $(2\pi)^{-1}\xi \tanh \pi\xi\, d\xi$ è la misura di Plancherel, dovremmo verificare che effettivamente $\left[\frac{1}{4},\infty\right) \subset \Sigma_\Delta^+$, ossia che le funzioni sferiche $\Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}\,(=\Phi_{\frac{1}{2}-i\xi})$, con $\xi \geq 0$, sono di tipo positivo.

Per far questo, costruiamo una famiglia di rappresentazioni unitarie $\{\pi_\xi\}_{\xi\geq 0}$ di $SL(2,\mathbb{R})$, ciascuna dotata di un elemento v_ξ, K-invariante e tale che $\langle v_\xi, \pi(g)v_\xi\rangle = \Phi_\xi(g)$ per ogni $g \in SL(2,\mathbb{R})$.

Osserviamo dunque che $SL(2,\mathbb{R}) = G$ agisce sulla compattificazione di Aleksandroff $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ di $\mathbb{R}$ per mezzo delle trasformazioni lineari fratte $x \mapsto g\cdot x = \frac{ax+b}{cx+d}$, se $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (questo non è altro che il prolungamento al bordo dell'azione su M).

Indichiamo con $g'(x)$ la derivata della funzione $x \mapsto g \cdot x$, cioè

$$g'(x) = \frac{1}{(cx+d)^2} \ ,$$

e osserviamo che la formula di cambiamento di variabile

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(g\cdot t)g'(t)\,dt$$

è valida per ogni $f \in C_c(\mathbb{R})$ e $g \in G$. Se quindi poniamo

$$\pi_\xi(g)f(x) = (g^{-1})'(x)^{\frac{1}{2}+i\xi} f(g^{-1}\cdot x) \ ,$$

abbiamo che

$$\|\pi_\xi(g)f\|_2 = \|f\|_2$$

per $f \in C_c(\mathbb{R})$, e dunque $\pi_\xi(g)$ si estende per continuità a $L^2(\mathbb{R})$, dando luogo a una rappresentazione unitaria di G.

Mostriamo ora che π_ξ ammette un vettore K-invariante. Una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ è $\pi_\xi(K)$-invariante se

$$(x\sin\theta + \cos\theta)^{-1-2i\xi} f\Big(\frac{x\cos\theta - \sin\theta}{x\sin\theta+\cos\theta}\Big) = f(x)$$

per ogni $\theta \in \mathbb{T}$. Supponiamo che f sia C^1 e deriviamo in θ. Abbiamo

$$\begin{aligned} 0 = &-(1+2i\xi)\frac{x\cos\theta - \sin\theta}{(x\sin\theta+\cos\theta)^{2+2i\xi}} f\Big(\frac{x\cos\theta - \sin\theta}{x\sin\theta+\cos\theta}\Big) \\ &+ \frac{-(x\sin\theta+\cos\theta)^2 - (x\cos\theta-\sin\theta)^2}{(x\sin\theta+\cos\theta)^{3+2i\xi}} f'\Big(\frac{x\cos\theta - \sin\theta}{x\sin\theta+\cos\theta}\Big) \end{aligned}$$

E' sufficiente considerare questa equazione per $\theta = 0$, ottenendo

$$f'(x) = -(1+2i\xi)\frac{x}{x^2+1} f(x) \ ,$$

da cui

$$f(x) = \frac{c}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+i\xi}} \ .$$

Trascurando la normalizzazione in L^2, irrilevante a questo punto, poniamo per comodità $c = 1$ e chiamiamo $f_\xi(x) = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}-i\xi}$.

Sapendo che il coefficente $\psi(g) = \langle f_\xi, \pi_\xi(g)f_\xi\rangle$ è bi-K-invariante, possiamo limitarci a calcolare $\Psi(a_t)$. Abbiamo

$$\pi_\xi(a_t)f_\xi(x) = t^{-\frac{1}{2}-i\xi} f_\xi(t^{-1}x) = t^{-\frac{1}{2}-i\xi}(t^{-2}x^2+1)^{-\frac{1}{2}-i\xi} \ ,$$

per cui

$$\Psi(a_t) = t^{-\frac{1}{2}+i\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+i\xi}\big(\frac{x^2}{t^2}+1\big)^{\frac{1}{2}-i\xi}}\,dx \ .$$

Confrontando con la (7.2), si osserva che $\Psi = \frac{\pi}{2}\Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}$. Possiamo dunque concludere quanto segue.

Teorema 8.3. *Le funzioni sferiche $\Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}$ sono di tipo positivo. La misura di Plancherel per la coppia $\big(SL(2,\mathbb{R}), SO(2)\big)$ è la misura $(2\pi)^{-1}\xi \tanh \pi\xi \, d\xi$.*

Osservazione. Si dimostra che anche le funzioni sferiche Φ_γ con $\gamma \in [-1,1]$ sono di tipo positivo[15]. Tuttavia esse non rientrano nel supporto della misura di Plancherel.

Le rappresentazioni π_ξ che abbiamo costruito non sono irriducibili. Il sottospazio

$$L^2_+ = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} \mathcal{F}f \subset [0,\infty)\}$$

è invariante e la restrizione di π_ξ a L^2_+ è irriducibile. L'invarianza di H^2 rispetto a π_ξ si comprende in termini della caratterizzazione di L^2_+ come spazio dei valori al bordo delle funzioni olomorfe su M e appartenenti allo *spazio di Hardy* $H^2(M)$.

Le rappresentazioni π_ξ, ristrette a L^2_+, sono le rappresentazioni della cosiddetta *serie principale.* Quelle associate alle Φ_γ con $\gamma \in [-1,1]$, costituiscono la cosiddetta *serie complementare.*

[15] Questo è ovvio per $\Phi_0 = \Phi_1 = 1$.