CAPITOLO VIII
GRUPPI DI LIE E VARIETÀ OMOGENEE

1. Gruppi di Lie: nozioni fondamentali

Un *gruppo di Lie*[1] è un gruppo dotato di una struttura di varietà differenziabile[2] reale tale che le operazioni di gruppo (prodotto e inverso) siano differenziabili.

Se $\mathbb{K}$ indica $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, sono gruppi di Lie:

(1) $\mathbb{K}^n$ in modo naturale;
(2) i *gruppi lineari* $GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in M^{n\times n}(\mathbb{K}) : \det A \neq 0\}$ con la struttura indotta dalla loro immersione come aperti densi in $\mathbb{K}^{n^2}$;
(3) i gruppi classici di matrici sono naturalmente immersi come sottovarietà chiuse di un $GL(n, \mathbb{K})$, in particolare:
   (i) i *gruppi lineari speciali* $SL(n, \mathbb{K})$, delle matrici tali che $\det A = 1$;
   (ii) i *gruppi ortogonali* $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$, delle matrici tali che $A\,{}^tA = I$, e $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$;
   (iii) i *gruppi unitari* $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$, delle matrici tali che $AA^* = I$, e $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$;
   (iv) i *gruppi pseudo-ortogonali* $O(p, q) \subset GL(p + q, \mathbb{R})$, delle matrici tali che $AI_{p,q}\,{}^tA = I_{p,q}$, dove
$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} ,$$
   e le loro varianti $SO(p, q), U(p, q), SU(p, q)$;
   (v) i gruppi di matrici triangolari superiori $T_n(\mathbb{K}) \subset GL(n, \mathbb{K})$, delle matrici tali che $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

Tra quelli indicati, i gruppi $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $T_n(\mathbb{C})$ (e nessuno degli altri) hanno una struttura di *gruppo complesso*, in quanto sono varietà complesse.

Altri gruppi di Lie non hanno immersioni altrettanto naturali in spazi euclidei, per esempio:

(1) $\mathrm{Spin}(n)$, $n \geq 7$, il rivestimento universale[3] di $SO(n)$ (a due fogli);
(2) il rivestimento universale di $SL(2, \mathbb{R})$ (a infiniti fogli);
(3) i *gruppi proiettivi* $PGL(n, \mathbb{K}) = GL(n, \mathbb{K})/\mathbb{K}^*$.

---

[1] Per tutto quanto non dimostrato, si rinvia a S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces.*

[2] Con *differenziabile* si intende C^∞.

[3] In dimensioni basse ($n \leq 6$) i gruppi Spin sono isomorfi a gruppi di matrici, e dunque immergibili in modo naturale: $\mathrm{Spin}(3) \cong SU(2)$, $\mathrm{Spin}(4) \cong SU(2) \times SU(2)$, $\mathrm{Spin}(5) \cong \mathrm{Sp}(2)$, $\mathrm{Spin}(6) \cong SU(4)$. Per $n = 2$, il rivestimento universale di $SO(2) \cong \mathbb{T}$ è isomorfo a $\mathbb{R}$, con infiniti fogli.

I gruppi di Lie sono gruppi topologici localmente compatti, e possiedono dunque misure di Haar destre e misure di Haar sinistre.

Sia G un gruppo di Lie. Indichiamo con T_gG lo spazio tangente a G nell'elemento g. Per $h \in G$, le traslazioni sinistre ℓ_h e destre r_h sono differenziabili e i loro differenziali $(d\ell_h)_g : T_gG \to T_{hg}G$, $(dr_h)_g : T_gG \to T_{gh^{-1}}G$ in h sono invertibili per ogni $h \in G$.

Un campo vettoriale X su G si dice invariante a sinistra[4] se per ogni $g, h \in G$,

$$(d\ell_h)_g X_h = X_{hg} \ .$$

Un campo vettoriale X su G induce un operatore differenziale su G. Data f di classe C^1 su G, poniamo

$$Xf(g) = (df)_g(X_g) \ . \tag{1.1}$$

Il campo X è invariante a sinistra se e solo se

$$X(f \circ \ell_h) = (Xf) \circ \ell_h \ , \qquad \forall\, h \in G \ . \tag{1.2}$$

I campi vettoriali invarianti a sinistra formano un'algebra di Lie rispetto alle operazioni di somma, prodotto per scalari e al commutatore

$$[X, Y] = XY - YX \ .$$

Tale algebra di Lie si chiama *l'algebra di Lie di G*, indicata con $\mathrm{Lie}(G)$ o con $\mathfrak{g}$.

Un campo vettoriale X è in $\mathfrak{g}$ se e solo se, per ogni $g \in G$,

$$X_g = d\ell_g(X_e) \ .$$

Quindi ogni campo vettoriale invariante a sinistra è univocamente determinato dal suo valore nell'identità. Ne consegue che $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.

Diamo senza dimostrazione alcuni risultati di carattere generale.

Teorema 1.1. *Data un'algebra di Lie astratta $\mathfrak{g}$ di dimensione finita, esiste uno e un solo gruppo di Lie G, connesso e semplicemente connesso, tale che* $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$. *Ogni altro gruppo di Lie connesso, la cui algebra di Lie sia isomorfa a $\mathfrak{g}$, è isomorfo al quoziente di G modulo un sottogruppo discreto centrale.*

Dato un campo vettoriale $X \in \mathfrak{g}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot\gamma(t) = X_{\gamma(t)} \\ \gamma(0) = e \ , \end{cases} \tag{1.3}$$

dove e è l'identità di G, ammette una e una sola soluzione $\gamma_X : \mathbb{R} \to G$. Dato $t_0 \in \mathbb{R}$, anche $\gamma_X(t_0)^{-1}\gamma_X(t + t_0)$ risolve (1.3). Da ciò si deduce la proprietà moltiplicativa di γ:

$$\gamma_X(t + t') = \gamma_X(t)\gamma_X(t') \ . \tag{1.4}$$

[4]Considerazioni analoghe valgono per i campi vettoriali invarianti a destra.

L'immagine di γ in G è dunque un sottogruppo di G, non necessariamente chiuso[5].

Una funzione C^∞ γ da $\mathbb{R}$ a G soddisfacente la (1.4) si chiama *gruppo a un parametro*. La corrispondenza $X \mapsto \gamma_X$ è una corrispondenza biunivoca tra elementi di $\mathfrak{g}$ e gruppi a un parametro.

L'*applicazione esponenziale* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ data da

$$\exp X = \gamma_X(1)$$

è un diffeomorfismo locale, il cui differenziale nell'origine $(d\exp)_0 : \mathfrak{g} \to T_eG$ è

$$(d\exp)_0(X) = X_e \ .$$

Inoltre, per $X \in \mathfrak{g}$, $\gamma_X(t) = \exp(tX)$ e la funzione Xf nella (1.1) è data da

$$Xf(g) = \frac{d}{dt}_{|t=0} f\big(g\exp(tX)\big) \ . \tag{1.5}$$

In generale, exp non è né iniettiva né suriettiva.

Dato $g \in G$, l'applicazione $X \mapsto g\exp X$ è localmente invertibile nell'origine, e la sua inversa definisce una carta locale φ_g in g.

Teorema 1.2. *L'atlante $\{\varphi_g\}$ definisce una struttura analitica su G. Le operazioni di gruppo e l'applicazione esponenziale sono analitiche. Lo stesso vale per le inverse delle funzioni $X \mapsto (\exp X)g$.*

Concludiamo questo paragrafo con alcune proprietà dei campi vettoriali invarianti a sinistra. Supponiamo sempre che G sia unimodulare.

Lemma 1.3. *Siano $\varphi, \psi \in C_c^\infty(G)$, e sia $X \in \mathfrak{g}$. Allora*

$$X(\varphi * \psi) = \varphi * (X\psi) \ , \tag{1.6}$$

$$\int_G X\varphi(g)\overline{\psi(g)}\, dg = -\int_G \varphi(g)\overline{X\psi(g)}\, dg \ . \tag{1.7}$$

Dimostrazione. La (1.6) si ottiene derivando per $t = 0$ l'identità

$$\varphi * \psi\big(g\exp(tX)\big) = \int_G \varphi(h)\psi\big(h^{-1}g\exp(tX)\big)\, dh \ .$$

Passando alla (1.7), per l'invarianza della misura di Haar per traslazioni destre si ha

$$\int_G \varphi\big((g\exp(tX)\big)\overline{\psi\big((g\exp(tX)\big)}\, dg = \int_G \varphi(g)\overline{\psi(g)}\, dg \ .$$

Derivando in t per $t = 0$, si ottiene la conclusione. $\square$

[5]Si consideri per esempio la proiezione di una retta con coefficiente angolare irrazionale su $\mathbb{R}^2/Z^2 = \mathbb{T}^2$.

2. Omomorfismi e sottogruppi di Lie

Continuiamo a presentare senza dimostrazione proprietà generali dei gruppi di Lie.

Teorema 2.1. *Sia ψ un omomorfismo di un gruppo di Lie G in un gruppo di Lie G'. Il suo differenziale*[6] *$d\psi$ applica campi vettoriali invarianti a sinistra su G in campi vettoriali invarianti a sinistra su G', inducendo così un omomorfismo di algebre di Lie da $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}'$.*

Viceversa, siano $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ due algebre di Lie e siano G il gruppo connesso e semplicemente connesso con $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$, G' un qualunque gruppo di Lie con $\mathrm{Lie}(G') = \mathfrak{g}'$. Ogni omomorfismo di $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{g}'$ è allora il differenziale di un unico omomorfismo di G in G'.

Gli omomorfismi di gruppi di Lie sono analitici.

Sia G un gruppo di Lie con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Sia poi $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{g}$, e indichiamo con H_0 il gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie $\mathfrak{h}$. Indichiamo inoltre con $\exp_G$ e $\exp_{H_0}$ le applicazioni esponenziali dei due gruppi.

Proposizione 2.2. *L'applicazione $\psi : \exp_{H_0} X \mapsto \exp_G X$, inizialmente definita su un intorno sufficientemente piccolo di e_{H_0}, si prolunga analiticamente a un omomorfismo regolare*[7] *di H_0 in G.*

L'immagine $H = \psi(H_0)$ in G è dunque un sottogruppo di G, algebricamente isomorfo a H_0/D, dove D è un sottogruppo discreto centrale di H_0. Inoltre H eredita, attraverso la ψ, una struttura di sottovarietà di G.

Si chiama *sottogruppo di Lie* di G un sottogruppo la cui componente connessa dell'identità sia descrivibile come sopra[8]. Se H è un sottogruppo di Lie di G, il suo spazio tangente nell'identità è dunque una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{g}$ e $\exp_G(X) \in H$ per ogni $X \in \mathfrak{h}$.

Teorema 2.3. *L'applicazione $H \mapsto \mathrm{Lie}(H)$ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i sottogruppi di Lie connessi di G e le sottoalgebre di Lie di $\mathfrak{g}$. Se H è un sottogruppo di Lie connesso, H è normale se e solo se $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$ è un ideale*[9] *in $\mathfrak{g}$.*

C'e' un semplice punto di incontro tra la nozione di sottogruppo di Lie e quella, puramente topologica, di sottogruppo chiuso.

Teorema 2.4. *Ogni sottogruppo chiuso di G è una sottovarietà immersa, e dunque un sottogruppo di Lie. Se H è un sottogruppo chiuso di G e G/H è lo spazio quoziente con la struttura di varietà indotta, l'applicazione $(g, g'H) \mapsto gg'H$ da $G \times G/H$ a G/H è analitica.*

In particolare, se H è normale e chiuso, G/H è un gruppo di Lie e la sua algebra di Lie è isomorfa a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

---

[6] Nella categoria dei gruppi di Lie gli omomorfismi sono differenziabili per ipotesi.

[7] Come applicazione differenziabile.

[8] Si confronti la definizione di sottogruppo di Lie con quella di gruppo a un parametro. I sottogruppi di Lie connessi di dimensione 1 sono le immagini in G dei sottogruppi a un parametro, o anche, le classi di equivalenza dei gruppi a un parametro modulo cambiamenti lineari della variabile.

[9] Un ideale in un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è un sottospazio $\mathfrak{h}$ tale che $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

3. Spazi omogenei di gruppi di Lie, operatori differenziali invarianti e struttura analitica

La nozione di operatore differenziale lineare su una varietà M può essere data in due modi. Usando carte locali, si può dire che un tale operatore è un operatore lineare $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ che, in una qualunque sistema di coordinate locali, si esprima come operatore differenziale con coefficienti C^∞. In modo equivalente, si può anche dire che un operatore differenziale è un operatore lineare $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ che conserva i supporti, cioè

$$\operatorname{supp}(Df) \subset \operatorname{supp} f\ , \qquad \forall\, f \in C^\infty(M)\ .$$

Gli operatori differenziali[10] su M formano un'algebra associativa per composizione.

Consideriamo ora un'azione differenziabile $\psi : G \times M \to M$ di G su una varietà differenziabile M. Dicendo che M è uno spazio omogeneo di un gruppo di Lie G, intenderemo sempre che M è una varietà e che l'azione di G su M è differenziabile.

Siccome lo stabilizzatore $H = G_{x_0}$ di un dato punto $x_0 \in M$ è chiuso, esso è un sottogruppo di Lie, G/H è una varietà differenziabile e l'applicazione $gH \mapsto g{\cdot}x_0$ da G/H a M è differenziabile e biiettiva. Ciò implica che essa è un diffeomorfismo. A sua volta, ciò implica che M ha una struttura analitica che rende l'azione analitica. Inoltre

$$\dim M = \dim G - \dim H\ .$$

Diremo che un operatore differenziale D su M è G-invariante se $D\tau_g f = \tau_g Df$ per ogni $f \in C^\infty(M)$ e ogni $g \in G$, dove $\tau_g f(x) = f(g^{-1}\cdot x)$. Indichiamo con $\mathbb{D}(M)$ l'algebra di tali operatori.

Supporremo d'ora in poi che H sia compatto, e lo denoteremo con K. Supporremo anche che $M = G/K$, senza perdere con questo in generalità. Per funzioni definite su G/K,

$$\tau_g f(hK) = f(g^{-1}hK)\ .$$

Lemma 3.1. *Un operatore differenziale $D \in \mathbb{D}(G/K)$ applica funzioni analitiche in funzioni analitiche.*

Dimostrazione. Dato $\bar x \in G/K$, sia $\varphi : U \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ una carta locale analitica in $\bar x$ con $\varphi(\bar x) = 0$. Esistono allora coefficienti $a_\alpha(t)$ su Ω tali che

$$(Df)\circ\varphi^{-1}(t) = \sum_\alpha a_\alpha(t)\partial^\alpha(f\circ\varphi^{-1})(t)\ .$$

Sia $\sigma : U \to S$ un sollevamento analitico di U in G. Per la (3.1), posto $g = \sigma(x)$,

$$Df(x) = \sum_\alpha a_\alpha(0)\partial^\alpha\big((\tau_{g^{-1}}f)\circ\varphi^{-1}\big)(0)\ .$$

Se f è analitica, $\tau_{g^{-1}}f$ dipende analiticamente da g e dunque da x. $\square$

Questo risultato vale in particolare nel caso $K = \{e\}$, cioè per operatori differenziali su G invarianti a sinistra. Consideriamo una base $\{X_1, \dots, X_n\}$ dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G e poniamo

$$\Delta = \sum_{j=1}^n X_j^2\ .$$

[10] D'ora in poi è sottinteso che gli operatori differenziali si intendono lineari.

Lemma 3.2. *L'operatore Δ è invariante per traslazioni sinistre ed ellittico. Posto* $\mathrm{dom}\,(\Delta) = C_c^\infty(G)$*, la chiusura è autoaggiunta e negativa.*

Dimostrazione. L'invarianza di Δ è ovvia.

Usando $\exp^{-1} : U_e \to \mathfrak{g}$ come carta locale definita in un intorno dell'identità, e introdotte coordinate lineari $(t_1, \dots, t_n)$ su $\mathfrak{g}$ adattate alla base $\{X_1, \dots, X_n\}$, si ha, per definizione

$$(X_j f) \circ \exp(0) = \frac{\partial (f \circ \exp)}{\partial t_j}(0) \ .$$

Quindi

$$(X_j f) \circ \exp(t) = \frac{\partial (f \circ \exp)}{\partial t_j}(t) + \sum_{k=1}^n a_{jk}(t) \frac{\partial (f \circ \exp)}{\partial t_k}(t) \ , \tag{3.1}$$

con $a_{jk}(0) = 0$ per ogni j, k, per cui

$$(\Delta f) \circ \exp(0) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 (f \circ \exp)}{\partial t_j^2}(0) + \text{termini di ordine inferiore} \ .$$

Questo dimostra l'ellitticità di Δ in e, e negli altri punti segue per invarianza.

Per la (1.7), ogni X_j è antisimmetrico, e quindi Δ è simmetrico. Inoltre

$$\langle \Delta f, f \rangle = \sum_{j=1}^n \langle X_j^2 f, f \rangle = -\sum_{j=1}^n \|X_j f\|_2^2 \leq 0 \ ,$$

per cui Δ è negativo.

Un criterio per verificare che la chiusura di Δ è autoaggiunta consiste nel verificare che $\Delta - I$ ha immagine densa[11]. Sia dunque $f \in L^2(G)$ ortogonale all'immagine di $\Delta - I$. Questo implica che $\Delta f = f$ nel senso delle distribuzioni. Per l'ellitticità di Δ, questo implica a sua volta che f è C^2 (addirittura analitica) e l'uguaglianza vale puntualmente. Se $\varphi \in C_c^2(G)$, $u = \varphi * f$ è di classe C^2 e $\Delta(\varphi * f) = \varphi * \Delta f = \varphi * f$.

Approssimando opportunamente f^* con funzioni di classe C^2 a supporto compatto (per es. applicando a f^* troncamenti C^2 su compatti che invadono G) si conclude che $\Delta(f^* * f) = f^* * f$. Ma $f^* * f$ è di tipo positivo, e dunque $\max \Re\mathrm{e}(f^* * f) = f^* * f(e) = \|f\|_2^2$. Questo è compatibile con la condizione $\Delta\big(\Re\mathrm{e}(f^* * f)\big)(e) = \|f\|_2^2 \geq 0$ solo se $f = 0$. $\square$

Sia $\{e^{t\Delta}\}_{t>0}$ il semigruppo di contrazioni su $L^2(G)$ generato da Δ. Diamo a questo punto senza dimostrazione il seguente teorema[12].

Teorema 3.3 (E. Nelson). *Per $t > 0$, $e^{t\Delta} f = f * p_t$, con $p_t \in L^1(G)$, positiva e analitica. Inoltre $\{p_t\}$ è un'identità approssimata per $t \to 0$.*

Dimostriamo invece come da questa proprietà segue che le funzioni analitiche sono dense negli spazi funzionali che ci interessano maggiormente.

[11] Vedi M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional Analysis*, p. 313.

[12] Vedi E. Nelson, *Analytic vectors*, Ann. Math. 70 (1959), pp. 572-615, sez. 8.

Corollario 3.4. *Le funzioni analitiche sono dense in ciascuno dei seguenti spazi:*

$$\begin{aligned} L^p(G) \quad &(1 \le p < \infty) \;, \qquad C_0(G) \;, \\ L^p(G;K) \quad &(1 \le p < \infty) \;, \qquad C_0(G;K) \;, \\ L^p(K;G;K) \quad &(1 \le p < \infty) \;, \qquad C_0(K;G;K) \;. \end{aligned}$$

Dimostrazione. E' sufficiente dimostrare che se $f \in C_c(G)$, allora $f * p_t$ e $p_t * f$ sono analitiche per ogni $t > 0$. Questo infatti dimostra direttamente la densità delle funzioni analitiche in $L^p(G)$, $C_0(G)$, $L^p(G;K)$, $C_0(G;K)$.

Se $f \in L^p(K;G;K)$ o $C_0(K;G;K)$, le funzioni

$$(f * p_t)^\sharp(g) = \int_K f * p_t(gk)\, dk$$

sono pure analitiche e convergono a f. Inoltre esse sono bi-K-invarianti.

Sia U un intorno dell'origine in $\mathfrak{g}$ tale che exp sia un diffeomorfismo su U. Sia poi $U_0 \subset U$ un intorno simmetrico dell'origine tale che $\big(\exp(U)\big)^2 \subset U$.

Esiste allora una funzione analitica $\eta : U_0 \times U_0 \to U$ tale che

$$\exp X \exp Y = \exp\big(\eta(X,Y)\big)$$

per $X, Y \in U_0$.

Fissiamo $t > 0$ e $g_0 \in G$. Sia $V \subset U_0$ tale che $p_t\big(\exp(\eta(-Y,X))g_0\big)$ sia sviluppabile in serie di potenze in X e Y convergente su $V \times V$. Allora, indicando con X^α i monomi in X in un dato sistema di coordinate lineari su $\mathfrak{g}$,

$$p_t\big(\exp(\eta(-Y,X))g_0\big) = \sum_\alpha a_\alpha(Y) X^\alpha \;,$$

dove le funzioni a_α sono analitiche, e la serie converge uniformemente sui compatti di $V \times V$.

Supponiamo inizialmente che $\operatorname{supp} f \subset \exp(V)$. Fissato $g_0 \in G$,

$$\begin{aligned} f * p_t(\exp X\, g_0) &= \int_V f(\exp Y) p_t\big(\exp(-Y)\exp X\, g_0\big)\, d(\exp Y) \\ &= \int_V f(\exp Y) p_t\big(\exp(\eta(-Y,X))g_0\big)\, d(\exp Y) \\ &= \sum_\alpha X^\alpha \int_V a_\alpha(Y) f(\exp Y)\, d(\exp Y) \;. \end{aligned}$$

Per f con supporto compatto arbitrario, per ogni $h \in \operatorname{supp} f$ fissiamo un intorno dell'identità $V_h \subset U_0$ tale che $p_t\big(\exp(\eta(-Y,X))\, h^{-1} g_0\big)$ sia sviluppabile in serie di potenze in X e Y convergente su $V_h \times V_h$.

Siano $h_1, \ldots, h_m$ tali che $\{h_j \exp(V_{h_j})\}_{j \le m}$ sia un ricoprimento di $\operatorname{supp} f$. Tramite una partizione continua dell'unità, si può scomporre f come

$$f(h) = \sum_{j=1}^m f_j(h) \;,$$

con $\operatorname{supp} f_j \subset h_j \exp(V_{h_j})$. Allora

$$f_j * p_t(\exp X\, g_0) = \int_{V_{h_j}} f_j(h_j \exp Y) p_t\big(\exp(-Y)\exp X\, h_j^{-1} g_0\big)\, d(\exp Y) \;,$$

e si procede come sopra. $\square$

4. Struttura dell'algebra $\mathbb{D}(G/K)$

Consideriamo un automorfismo interno $g \mapsto hgh^{-1}$ di G. Per il Teorema 2.1, esso induce un automorfismo di $\mathfrak{g}$, indicato con $\mathrm{Ad}(h)$. Si usa anche la notazione abbreviata $\mathrm{Ad}(h)X = X^h$. Concretamente, il gruppo a un parametro generato da $\mathrm{Ad}(h)X$ è il coniugato, attraverso l'automorfismo interno, del gruppo a un parametro generato da X, cioè

$$\exp\big(s\mathrm{Ad}(h)X\big) = h\exp(sX)h^{-1} \ .$$

Per la (1.5),

$$\mathrm{Ad}(h)Xf(g) = \frac{d}{ds}_{|s=0} f(gh\exp(sX)h^{-1}) = X(R_{h^{-1}}f)(gh) = R_hX(R_{h^{-1}}f)(g) \ .$$

Abbiamo dunque l'identità

$$\mathrm{Ad}(h)X = R_hXR_h^{-1} \ . \tag{4.1}$$

Analogamente, per $D \in \mathbb{D}(G)$, poniamo $\mathrm{Ad}(h)D = R_hDR_h^{-1}$, notando che

$$\mathrm{Ad}(h)(D_1D_2) = \mathrm{Ad}(h)D_1\mathrm{Ad}(h)D_2 \ .$$

Indichiamo con $\mathbb{D}_K(G)$ la sottoalgebra di $\mathbb{D}(G)$

$$\mathbb{D}_K(G) = \{D : \mathrm{Ad}(k)D = D \ , \ \forall\, k \in K\} \ .$$

Lemma 4.1. *Un operatore $D \in \mathbb{D}_K(G)$ applica $C^\infty(G;K)$ in sé e induce dunque un operatore $\tilde{D} \in \mathbb{D}(G/K)$ dato da*

$$\Lambda^*(\tilde{D}f) = D(\Lambda^*f) \ . \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Se $f \in C^\infty(G;K)$,

$$Df(gk) = R_k(Df)(g) = D(R_kf)(g) = Df(g) \ .$$

Il resto è ovvio. □

Vogliamo ora discutere iniettività e suriettività dell'applicazione $D \mapsto \tilde{D}$ da $\mathbb{D}_K(G)$ a $\mathbb{D}(G/K)$.

Per far questo consideriamo l'azione Ad di K su $\mathfrak{g}$. Questa è una rappresentazione[13] di K, in quanto $\mathrm{Ad}(kk') = \mathrm{Ad}(k)\mathrm{Ad}(k')$.

La dimostrazione del Teorema 1.1 del Capitolo V si adatta facilmente a dimostrare l'esistenza su $\mathfrak{g}$ di un prodotto scalare $\mathrm{Ad}(K)$-invariante. Indichiamo con $\mathfrak{p}$ il complemento ortogonale di $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{g}$ rispetto a un tale prodotto scalare fissato[14]. Abbiamo dunque la decomposizione ortogonale

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \ .$$

[13] Su uno spazio vettoriale reale. L'azione Ad di tutto G su $\mathfrak{g}$ si chiama *rappresentazione aggiunta* di G.

[14] Il sottospazio $\mathfrak{p}$ dipende dalla scelta del prodotto scalare $\mathrm{Ad}(K)$-invariante, che in generale non è unico.

Siccome $\mathfrak{k}$ è un sottospazio $\mathrm{Ad}(K)$-invariante, anche $\mathfrak{p}$ lo è. In generale, $\mathfrak{p}$ non è una sottoalgebra.

Risulta del tutto naturale, una volta fissato il prodotto scalare su $\mathfrak{g}$, identificare $\mathfrak{p}$ con lo spazio tangente a G/K nel punto $x_0 = eK$. Si noti infatti che l'applicazione

$$X \longmapsto (\exp X) \cdot x_0 \ , \qquad X \in \mathfrak{p} \tag{4.3}$$

è un diffeomorfismo di un intorno dell'origine in $\mathfrak{p}$ su un intorno di x_0 e dunque la sua inversa ψ_{x_0} è una carta locale in x_0. Si noti anche che, posto $\psi_{x_0}(x) = X$,

$$\begin{aligned} \psi_{x_0}(k \cdot x) &= \psi_{x_0}\big(k(\exp X) \cdot x_0\big) \\ &= \psi_{x_0}\big(\exp\big(\mathrm{Ad}(k)X\big)k \cdot x_0\big) \\ &= \mathrm{Ad}(k)\big(\psi_{x_0}(x)\big) \ , \end{aligned} \tag{4.4}$$

per ogni $k \in K$. Cioè $\mathrm{Ad}(k)$ descrive in queste coordinate locali l'azione di k su un intorno di x_0. Allo stesso modo si vede facilmente che, rispetto all'identificazione di $\mathfrak{p}$ con $T_{x_0}(G/K)$, $\mathrm{Ad}(k)$ corrisponde al differenziale in x_0 dell'azione di k su G/K.

Considerazioni analoghe valgono, in un generico punto $x' = g \cdot x_0 \in G/K$, per l'inversa $\psi_{x'}$ dell'applicazione

$$X \longmapsto g(\exp X) \cdot x_0 \ , \qquad X \in \mathfrak{p} \ .$$

In questo caso, per ogni $k \in K$, in luogo della (4.4) si ha

$$\psi_{x'}(gkg^{-1} \cdot x) = \mathrm{Ad}(k)\big(\psi_{x'}(x)\big) \ .$$

Si prenda ora $D \in \mathbb{D}(G/K)$. Per la sua invarianza, D è univocamente determinato dal funzionale lineare $\lambda_D(f) = Df(x_0)$. Infatti, se $x = g^{-1} \cdot x_0$,

$$Df(x) = \tau_g(Df)(x_0) = D(\tau_g f)(x_0) = \lambda_D(\tau_g f) \ .$$

Nelle coordinate locali $(t_1, \dots t_s)$ indotte dall'applicazione (4.3), riferite a una fissata base ortonormale di $\mathfrak{p}$,

$$\lambda_D(f) = P_D(\partial_t)(f \circ \psi_{x_0}^{-1})(0) \ ,$$

per un opportuno polinomio P_D.

Teorema 4.2. *La corrispondenza che associa all'operatore $D \in \mathbb{D}(G/K)$ il polinomio P_D su $\mathfrak{p}$ è lineare e biiettiva a valori nello spazio dei polinomi* $\mathrm{Ad}(K)$-*invarianti su $\mathfrak{p}$. Inoltre*

$$P_{D_1D_2} = P_{D_1}P_{D_2} + \text{polinomi di grado inferiore a } \deg D_1 + \deg D_2 \ .$$

Dimostrazione. Sia $\{X_1, \dots, X_s\}$ la base ortonormale fissata di $\mathfrak{p}$. Per semplicità di notazioni, indichiamo con X la colonna ${}^t(X_1, \dots, X_s)$, in modo che, se t indica la riga $(t_1, \dots, t_s)$, allora $tX = t_1X_1 + \dots + t_sX_s$. Sia A_k la matrice ortogonale tale che $\mathrm{Ad}(k)X \overset{\mathrm{def}}{=} {}^t(\mathrm{Ad}(k)X_1, \ldots, \mathrm{Ad}(k)X_s)$ sia uguale ad $A_k X$. Quindi $\mathrm{Ad}(k)(tX) = (tA_k)X$. In queste notazioni,

$$\lambda_D(f) = P_D(\partial_t)\big(f(\exp(tX)\cdot x_0)\big)_{|t=0} \ .$$

Poiché $D(\tau_k f)(x_0) = Df(x_0)$ per ogni $k \in K$, si ha

$$\begin{aligned}\lambda_D(f) &= P_D(\partial_t)\big(f(k^{-1}\exp(tX)\cdot x_0)\big)_{|t=0}\\ &= P_D(\partial_t)\big(f\big(\exp(\mathrm{Ad}(k)^{-1}(tX))\cdot x_0\big)\big)_{|t=0}\\ &= P_D(\partial_t)\big(f\big(\exp((tA_k^{-1})X)\cdot x_0\big)\big)_{|t=0} \ .\end{aligned}$$

Il cambiamento di variabile $t' = tA_k^{-1}$ induce la trasformazione $\partial_t = \partial_{t'}\,{}^tA_k^{-1} = \partial_{t'}A_k$. Quindi si ha anche

$$\lambda_D(f) = P_D(\partial_{t'}A_k)\big(f\big(\exp(t'X)\cdot x_0\big)\big)_{|t'=0} \ .$$

Per l'arbitrarietà di f, $P_D(\partial_t) = P_D(\partial_t A_k)$. Riportandosi alla variabile $tX \in \mathfrak{p}$,

$$P_D(tX) = P_D(tA_kX) = P_D\big(\mathrm{Ad}(k)(tX)\big) \ ,$$

cioè P_D è $\mathrm{Ad}(K)$-invariante.

Viceversa, dato un polinomio $\mathrm{Ad}(K)$-invariante P su $\mathfrak{p}$, si definisca D come

$$Df(g\cdot x_0) = P(\partial_t)\big(f\big(g\exp(tX)\cdot x_0\big)\big)_{|t=0} \ . \tag{4.5}$$

Per verificare che questa è una buona definizione, supponiamo che $g\cdot x_0 = g'\cdot x_0$, cioè $g' = gk$ con $k \in K$.

Sostituendo dunque g con gk a secondo membro della (4.5), si ha

$$\begin{aligned}P(\partial_t)\big(f\big(gk\exp(tX)\cdot x_0\big)\big)_{|t=0} &= P(\partial_t)\big(f\big(g\exp\big(\mathrm{Ad}(k)(tX)\big)\cdot x_0\big)\big)_{|t=0}\\ &= P(\partial_t)\big(f\big(g\exp((tA_k)X)\big)\cdot x_0\big)\big)_{|t=0}\\ &= P(\partial_{t'}A_k^{-1})\big(f\big(g\exp(t'X)\big)\cdot x_0\big)\big)_{|t'=0}\\ &= P(\partial_{t'})\big(f\big(g\exp(t'X)\big)\cdot x_0\big)\big)_{|t'=0}\end{aligned}$$

A questo punto D è chiaramente G-invariante e $P_D = P$.

Si osservi poi che, posto $m_j = \deg P_{D_j}$,

$$D_2 f\big(\exp(tX)\cdot x_0\big) = P_{D_2}(\partial_t)\big(f(\exp(tX)\cdot x_0)\big) + \sum_{|\alpha|<m_2} a_\alpha(t)\partial_t^\alpha\big(f(\exp(tX)\cdot x_0)\big) \ ,$$

dove i coefficienti a_α si annullano per $t=0$. Quindi

$$\begin{aligned}D_1D_2f(x_0) &= P_{D_1}(\partial_t)P_{D_2}(\partial_t)\big(f(\exp(tX)\cdot x_0)\big)_{|t=0}\\ &\quad + \sum_{|\alpha|<m_2} P_{D_1}(\partial_t)\Big(a_\alpha(t)\partial_t^\alpha\big(f(\exp(tX)\cdot x_0)\big)\Big)_{|t=0} \ . \qquad \square\end{aligned}$$

Corollario 4.3. *L'algebra $\mathbb{D}(G/K)$ è finitamente generata.*

Dimostrazione. Mostriamo per prima cosa che l'algebra $\mathbb{P}_K$ dei polinomi $\mathrm{Ad}(K)$-invarianti su $\mathfrak{p}$.

Nell'algebra $\mathbb{P}$ di tutti i polinomi su $\mathfrak{p}$ si consideri l'ideale I generato dalla sottoalgebra $\mathbb{P}_K^0$ dei polinomi in $\mathbb{P}_K$ privi di termine di grado 0. Per il Teorema della base di Hilbert, I è finitamente generato. Inoltre esso ammette un sistema finito di generatori omogenei e in $\mathbb{P}_K^0$. Infatti, se $Q_1, \dots, Q_s \in I$ generano I, basta rappresentare ciascun Q_j nella forma $Q_j = \sum_\ell P_{j\ell} R_{j\ell}$ con $P_{j\ell} \in \mathbb{P}$ e $R_{j\ell} \in \mathcal{P}_K^)$. L'insieme delle componenti omogenee degli $R_{j\ell}$ così ottenuti genera I.

Sia dunque $\{B_1, \dots, B_m\} \subset \mathbb{P}_K^)$ un tale sistema di generatori, con B_i omogeneo di grado $d_i > 0$. Mostriamo allora che ogni $P \in \mathbb{P}_K$ è un polinomio nei B_i. Possiamo limitarci a polinomi P omogenei di grado $d > 0$. Essendo $P \in I$, $P = \sum_{i=1}^m S_i B_i$ per opportuni polinomi $S_i \in \mathbb{P}$. Per motivi di omogeneità, la stessa identità continua a valere se di S_i si considera solo la componente omogenea di grado $d - d_i$.

Per la $\mathrm{Ad}(K)$-invarianza di P e dei B_i,

$$P = \sum_{i=1}^m \big(S_i \circ \mathrm{Ad}(k)\big) B_i = \sum_{i=1}^m \Big(\int_K \big(S_i \circ \mathrm{Ad}(k)\, dk\big)\Big) B_i = \sum_{i=1}^m S_i^\sharp B_i \ ,$$

dove ora $S_i^\sharp$ è in $\mathbb{P}_K$ e omogeneo di grado $d - d_i < d$. La conclusione segue per induzione.

Passando a $\mathbb{D}(G/K)$, sia D_i tale che $P_{D_i} = B_i$. E' sufficiente procedere per induzione sull'ordine dell'operatore $D \in \mathbb{D}(G/K)$.

Per operatori di ordine 0 non c'è nulla da dire. Preso un operatore D di ordine $d > 0$, si esprima il corrispondente polinomio P_D come $P_D = \sum_\alpha c_\alpha B_1^{\alpha_1} \cdots B_m^{\alpha_m}$. Posto $D_0 = \sum_\alpha c_\alpha D_1^{\alpha_1} \cdots D_m^{\alpha_m}$,

$$P_{D_0} = P_D + \text{polinomi di grado inferiore a } d \ ,$$

per il Teorema 4.2. Quindi $D - D_0$ ha ordine minore di d e ad esso si può applicare l'ipotesi induttiva. □

Sulla base del Teorema 4.2, si può formulare lo sviluppo di Taylor in x_0 di una funzione K-invariante su G/K in termini di operatori G-invarianti.

Sia f una funzione analitica su un intorno di x_0 in G/K, e sia $F = f \circ \psi_{x_0}^{-1}$. Allora F è analitica e $\mathrm{Ad}(K)$-invariante su un intorno di 0 in $\mathfrak{g}$. Nelle coordinate t introdotte nella dimostrazione del Teorema 4.2, abbiamo lo sviluppo di Taylor

$$F(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha F(0) t^\alpha = \sum_{j=0}^\infty P_j(t) \ ,$$

con $P_j(t) = \sum_{|\alpha| = j} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha F(0) t^\alpha$ polinomio omogeneo di grado j. Se $k \in K$,

$$F(t) = F\big(\mathrm{Ad}(k)t\big) = \sum_{j=0}^\infty P_j\big(\mathrm{Ad}(k)t\big) \ .$$

Per l'unicità dello sviluppo di Taylor, $P_j\big(\mathrm{Ad}(k)t\big) = P_j(t)$, per cui ogni P_j è $\mathrm{Ad}(K)$-invariante.

Sullo spazio dei polinomi a valori complessi su $\mathfrak{p}$ introduciamo il *prodotto scalare di Fischer*

$$\langle P, Q\rangle = \bar{Q}(\partial)P(0) \ .$$

I sottospazi $\mathbb{P}^j$ dei polinomi omogenei di grado j sono a due a due ortogonali. Per ogni j si prenda una base ortonormale $\{Q_1^j, \dots, Q_{d_j}^j\}$ del sottospazio di $\mathbb{P}^j$ costituito dai polinomi $\mathrm{Ad}(K)$-invarianti. Ogni termine P_j dello sviluppo di Taylor di F si sviluppa nella data base come

$$P_j = \sum_{\ell=1}^{d_j} a_\ell^j Q_\ell^j \ ,$$

con

$$a_\ell^j = \langle P_j, Q_\ell^j\rangle = \bar{Q}_\ell^j(\partial)P_j(0) = \bar{Q}_\ell^j(\partial)F(0) \ .$$

Quindi

$$F(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{d_j} \bar{Q}_\ell^j(\partial)F(0)Q_\ell^j(t) \ .$$

In termini di f, si ha allora il seguente enunciato.

Corollario 4.4. *Sia $D_\ell^j \in \mathbb{D}(G/K)$ l'operatore tale che $P_{D_\ell^j} = \bar{Q}_\ell^j$. Se f è analitica in x_0 e K-invariante, allora*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{d_j} D_\ell^j f(x_0) Q_\ell^j\big(\psi_{x_0}(x)\big) \ . \tag{4.6}$$

5. Coppie di Gelfand

Data una funzione f integrabile su uno spazio omogeneo M del gruppo G, e una funzione $u \in L^1(G)$, definiamo la funzione $u \star f$ su M come

$$u \star f(x) = \int_G u(h) f(h^{-1}\cdot x)\, dh \ . \tag{5.1}$$

Si verifica facilmente che

$$\Lambda^*(u \star f) = u * (\Lambda^* f) \ . \tag{5.2}$$

Molte proprietà della convoluzione su G si trasferiscono in altrettante proprietà di $\star$, tra cui

$$(u * v) \star f = u \star (v \star f) \ , \qquad \|u \star f\|_p \le \|u\|_1 \|f\|_p \ , \qquad \text{ecc.}$$

Se $D \in \mathbb{D}(M)$ e $f \in C_c^\infty(M)$,

$$D(u \star f)(x) = D\int_G u(h)\tau_h f(x)\, dx = \int_G u(h)\tau_h Df(x)\, dx = u \star (Df)(x) \ . \tag{5.3}$$

Lemma 5.1. *Se (G, K) è una coppia di Gelfand, l'algebra $\mathbb{D}(G/K)$ è commutativa.*

Dimostrazione. Siano $f, g \in C_c^\infty(G/K)$ K-invarianti, di modo che $\Lambda^* f, \Lambda^* g \in C_c^\infty(K; G; K)$. Per la (5.2),

$$\begin{aligned} \Lambda^*\big((\Lambda^* f) \star g\big) &= (\Lambda^* f) * (\Lambda^* g) \\ &= (\Lambda^* g) * (\Lambda^* f) \\ &= \Lambda^*\big((\Lambda^* g) \star f\big) \ , \end{aligned}$$

per cui

$$(\Lambda^* f) \star g = (\Lambda^* g) \star f \ .$$

Se $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(G/K)$, anche $D_1 f, D_2 g$ sono K-invarianti e dunque

$$\begin{aligned} D_1 D_2\big((\Lambda^* f) \star g\big) &= D_1\big((\Lambda^* f) \star D_2 g\big) = D_1\big(\Lambda^*(D_2 g) \star f\big) \\ &= \Lambda^*(D_2 g) \star D_1 f = \Lambda^*(D_1 f) \star D_2 g \\ &= D_2\big(\Lambda^*(D_1 f) \star g\big) = D_2\big(\Lambda^*(D_1 f) \star g\big) \\ &= D_2\big((\Lambda^* g) \star D_1 f\big) = D_2 D_1\big((\Lambda^* g) \star f\big) \\ &= D_2 D_1\big((\Lambda^* f) \star g\big) \ . \end{aligned}$$

Data $u \in C_c^\infty(G)$, sia

$$u^\sharp(h) = \int_{K \times K} u(khk')\, dk\, dk' \ .$$

Allora, se g è come sopra,

$$\begin{aligned} D_1 D_2(u^\sharp \star g)(x_0) &= u^\sharp \star (D_1 D_2 g)(x_0) \\ &\int_G \int_{K \times K} u(khk')(D_1 D_2 g)(h^{-1} \cdot x_0)\, dk\, dk'\, dh \\ &\int_G \int_{K \times K} u(h)(D_1 D_2 g)(k' h^{-1} k \cdot x_0)\, dk\, dk'\, dh \\ &= u \star (D_1 D_2 g)(x_0) \ , \end{aligned}$$

e analogamente per il prodotto $D_2 D_1$. Quindi

$$u \star (D_1 D_2 g)(x_0) = u \star (D_2 D_1 g)(x_0) \ .$$

Mettendo un'identità approssimata C^∞ a supporto compatto al posto di u e passando al limite, si ottiene l'identità $D_1 D_2 g(x_0) = D_2 D_1 g(x_0)$.

Sia ora $g \in C_c^\infty(G/K)$. Se $\tilde{g}(x) = \int_K g(k^{-1} \cdot x)\, dk$,

$$D_1 D_2 \tilde{g}(x_0) = \int_K (D_1 D_2 \tau_k g)(x_0)\, dk = \int_K \tau_k(D_1 D_2 g)(x_0)\, dk = D_1 D_2 g(x_0) \ .$$

Quindi $D_1 D_2 g(x_0) = D_2 D_1 g(x_0)$ per ogni $g \in C_c^\infty(G/K)$. Sostituendo poi g con $\tau_h g$ e usando la G-invarianza di D_1 e D_2, si ottiene l'uguaglianza per ogni x. In conclusione $D_1 D_2 = D_2 D_1$. $\square$

Vediamo ora come le funzioni sferiche su G/K si caratterizzino come autofunzioni simultanee di tutti gli operatori in $\mathbb{D}(G/K)$.

Teorema 5.2. *Sia φ una funzione continua non identicamente nulla su G/K, e sia $\Phi = \Lambda^*\varphi$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) Φ *soddisfa l'equazione funzionale*

$$\int_K \Phi(gkg')\,dk = \Phi(g)\Phi(g')\ ; \tag{5.4}$$

(ii) φ *è* C^∞, K*-invariante,* $\varphi(x_0) = 1$ *e per ogni* $D \in \mathbb{D}(G/K)$ *esiste* $\lambda_D \in \mathbb{C}$ *tale che* $D\varphi = \lambda_D\varphi$.

Le funzioni sferiche sono analitiche.

Dimostrazione. Supponiamo che $\Phi = \Lambda^*\varphi$ soddisfi la (5.4). Da essa segue facilmente l'identità

$$\Phi(gk)\Phi(g') = \Phi(g)\Phi(kg') = \Phi(g)\Phi(g')\ ,$$

per $k \in K$. Siccome Φ non è identicamente nulla, esiste g_0 tale che $\Phi(g_0) \neq 0$. Ponendo prima $g = g_0$ e poi $g' = g_0$ si ottiene che $\Phi(gk) = \Phi(kg) = \Phi(g)$ per ogni $g \in G, k \in K$, e dunque Φ è bi-K-invariante. Ponendo $g = g_0$, $g' = e$ nella (5.4) si ottiene poi che $\Phi(e) = 1$.

Mostriamo ora che Φ è C^∞. Data $f \in C_c^\infty(G)$, sia $f^\sharp(g) = \int_K (gk)\,dk$. Allora anche $f^\sharp$ e $\Phi * f^\sharp$ sono C^∞. Ma

$$\begin{aligned}
\Phi(g)\int_G \Phi(h^{-1})f(h)\,dh &= \int_G\int_K \Phi(gkh^{-1})f(h)\,dk\,dh \\
&= \int_G\int_K \Phi(gh^{-1})f(hk)\,dk\,dh \\
&= \Phi * f^\sharp(g)\ .
\end{aligned}$$

Basta allora scegliere f tale che $\int_G \Phi(h^{-1})f(h)\,dh \neq 0$ per concludere che Φ è C^∞. Quindi φ è K-invariante su G/K e C^∞. Si noti che la (5.4) equivale alla condizione

$$\int_K \varphi(gk\cdot x)\,dk = \varphi(g\cdot x_0)\varphi(x)\ , \tag{5.5}$$

per $g \in G$ e $x \in G/K$. Applicando $D \in \mathbb{D}(G/K)$ al primo membro (nella variabile x), si ottiene

$$D\Big(\int_K \tau k^{-1}g^{-1}\varphi\,dk\Big)(x) = \int_K \tau k^{-1}g^{-1}D\varphi(x)\,dk = \int_K D\varphi(gk\cdot x)\,dk\ ,$$

mentre applicando D al secondo membro si ottiene $\varphi(g\cdot x_0)D\varphi(x)$. Ponendo allora $x = x_0$ e uguagliando le due espressioni, si ha

$$D\varphi(g\cdot x_0) = \varphi(g\cdot x_0)D\varphi(x_0)\ .$$

Posto $\lambda_D = D\varphi(x_0)$, si ha $D\varphi(x) = \lambda_D\varphi(x)$ in ogni $x \in G/K$.

Viceversa, supponiamo che φ soddisfi la (ii). Introdotte coordinate $(t_1,\dots,t_n)$ su $\mathfrak{p}$ come nel §4, si consideri l'operatore D_P, dove $P(t) = \sum_1^n t_j^2$ è in $\mathbb{P}_K$. D_P

è dunque ellittico e le sue autofunzioni sono analitiche. Essendo esso anche K-invariante, segue che φ è analitica.

Fissato $g \in G$, si consideri la funzione

$$\varphi_g(x) = \int_K \varphi(gk \cdot x)\, dk = \int_K \tau(gk)^{-1}\varphi(x)\, dk \ . \tag{5.6}$$

Essa è analitica e K-invariante. Per il Corollario 4.4, essa ammette lo sviluppo di Taylor

$$\varphi_g(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{d_j} D^j_\ell \varphi_g(0) Q^j_\ell\big(\psi_{x_0}(x)\big) \ ,$$

per x in un intorno di x_0. Se $D \in \mathbb{D}(G/K)$, $\lambda_D = D\varphi(x_0)$, per cui

$$D\varphi_g = D\Big(\int_K \tau(gk)^{-1}\varphi\, dk\Big) = \int_K \tau(gk)^{-1} D\varphi\, dk = \lambda_D \varphi_g = D\varphi(x_0)\varphi_g \ .$$

Ma $\varphi_g(x_0) = \varphi(g \cdot x_0)$, per cui

$$\varphi_g(x) = \varphi(g \cdot x_0) \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{d_j} D^j_\ell \varphi(x_0) Q^j_\ell\big(\psi_{x_0}(x)\big) = \varphi(g \cdot x_0)\varphi(x) \ .$$

Vale dunque la (5.5) per x in un intorno di x_0. Per l'unicità del prolungamento analitico, l'uguaglianza vale per ogni x. Infine, come si è già detto, la (5.5) è equivalente alla (5.4). $\square$

Sullo spazio $C^\infty(G/K) = \mathcal{E}(G/K)$ consideriamo la topologia in cui un sistema fondamentale di intorni dell'origine è dato dagli insiemi

$$U_0(C, n, \varepsilon) = \{f : \|f\|_{C^n(C)} < \varepsilon\} \ ,$$

al variare di C tra i compatti di G/K, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. La norma in $C^n(C)$ può essere definita, attraverso una opportuna partizione dell'unità, in termini di derivate in coordinate locali fino all'ordine n. Equivalentemente, si può rimontare su G e utilizzare campi vettoriali invarianti a sinistra e loro composizioni di grado minore o uguale a n.

Corollario 5.3. *Dato $D \in \mathbb{D}(G/K)$, sia $\lambda_D(\varphi) = D\varphi(x_0)$ l'autovalore di φ relativo a D. Allora la funzione λ_D è continua su Δ_K. La topologia di Gelfand su Δ_K coincide con la topologia indotta da $\mathcal{E}(G/K)$.*

Dimostrazione. Data $\Phi_0 = \Lambda^*\varphi_0 \in \Delta_K$, si fissi un intorno compatto V dell'identità in G tale che $\Re\mathrm{e}\,\Phi_0 > \frac{1}{2}$ su V. Dato $\varepsilon > 0$, l'insieme $U = \{\Phi \in \Delta_K : |\Phi(x) - \Phi_0(x)| < \varepsilon \ \forall x \in V\}$ è un intorno di Φ_0 nella topologia di Gelfand. Se $\varepsilon < \frac{1}{4}$, $\Re\mathrm{e}\,\Phi > \frac{1}{4}$ su V per ogni $\Phi \in U$.

Si fissi $f = \Lambda^*\psi \in C_c^\infty(K; G; K)$ una funzione non negativa, con integrale uguale a 1 e con supporto contenuto in un intorno simmetrico V' dell'identità tale che ${V'}^2 \subset V$. Per ogni $\Phi \in U$, $\Re\mathrm{e}(f * \Phi) > \frac{1}{4}$ su V'. Ma per la (4) del §6, Capitolo VII, $f * \Phi = (f * \Phi)(e)\Phi = c_\Phi \Phi$, con $|c_\Phi| > \frac{1}{4}$.

Riportandosi a G/K, dalla commutatività della convoluzione segue che, posto $\Phi = \Lambda^*\varphi$,

$$\varphi = c_\Phi^{-1} f \star \varphi = c_\Phi^{-1} \Phi \star \psi \ .$$

Allora, se $D \in \mathbb{D}(G/K)$,

$$D\varphi = c_\Phi^{-1} \Phi \star D\psi = c_\Phi^{-1} \Lambda^*(D\psi) \star \varphi \ ,$$

e pertanto

$$\big|\lambda_D(\varphi) - \lambda_D(\varphi_0)\big| < 4\|D\psi\|_1 \varepsilon \ .$$

Questo dimostra la prima affermazione.

Per quanto riguarda il confronto tra le due topologie, siccome la topologia di Gelfand coincide con la topologia compatto-aperto, essa è sicuramente meno fino della topologia indotta da $\mathcal{E}(G/K)$.

Si prenda allora un intorno $U_{\varphi_0}(C, n, \varepsilon) = \{\varphi \in \Delta_K : \|\varphi - \varphi_0\|_{C^n(C)} < \varepsilon\}$ nella topologia indotta da $\mathcal{E}(G/K)$.

Dia $D_P \in \mathbb{D}(G/K)$ l'operatore ellittico introdotto nella dimostrazione del Teorema 5.2. Se il compatto C è contenuto in un aperto coordinato A relativamente compatto di G/K, e A' è un altro aperto con $C \subset A' \subset\subset A$, possiamo passare a coordinate locali e utilizzare il Teorema di immersione di Sobolev e il Teorema di regolarità per operatori ellittici. Se $d = \dim G/K$ e $2m > n + \frac{d}{2}$, si ha il seguente controllo in termini di norme di Sobolev:

$$\|f\|_{C^n(C)} \le C_n \|f\|_{H^{2m}(A')} \le C_m \|D_P^m f\|_{L^2(A)} \ . \tag{5.7}$$

Introducendo partizioni dell'unità, questa disuguaglianza si estende a qualunque compatto C, con gli stessi esponenti, ma con costanti dipendenti da C. Quindi

$$\begin{aligned}
\|\varphi - \varphi_0\|_{C^n(C)} &\le C_m \|D_P^m \varphi - D_P^m \varphi_0\|_{L^2(A)} \\
&= C_m \big\|\lambda_{D_P}(\varphi)^m \varphi - \lambda_{D_P}(\varphi_0)^m \varphi_0\big\|_{L^2(A)} \\
&\le C_m \Big(\big|\lambda_{D_P}(\varphi_0)\big|^m \|\varphi - \varphi_0\|_{L^2(A)} + \big|\lambda_{D_P}(\varphi)^m - \lambda_{D_P}(\varphi_0)^m\big| \|\varphi\|_{L^2(A)}\Big) \\
&\le C_m |A|^{\frac{1}{2}} \Big(\big|\lambda_{D_P}(\varphi_0)\big|^m \|\varphi - \varphi_0\|_{C(\bar{A})} + \big|\lambda_{D_P}(\varphi)^m - \lambda_{D_P}(\varphi_0)^m\big|\Big) \ .
\end{aligned}$$

Utilizzando la prima parte della dimostrazione, si conclude allora che $\{\varphi : \|\varphi - \varphi_0\|_{C(\bar{A})} < \delta\} \subset U_{\varphi_0}(C, n, \varepsilon)$ se δ è sufficientemente piccolo. $\square$

Usando la densità delle funzioni analitiche, mostriamo che il Lemma 5.1 ammette un inverso, quando G è connesso.

Teorema 5.4. *Sia K un sottogruppo compatto di G, con G/K connesso. Se $\mathbb{D}(G/K)$ è commutativa, (G, K) è una coppia di Gelfand.*

La dimostrazione è basata sul seguente lemma. Indichiamo con D_r, Q_r una rinumerazione degli operatori, e rispettivi polinomi, nella (4.6).

Lemma 5.5. *Sia f una funzione analitica in un intorno di x_0 e K-invariante su G/K e, per $x = g \cdot x_0$, sia*

$$F(x, y) = \int_K f(gk \cdot y)\, dk \ .$$

Allora F è K-invariante in ciascuna variabile e, per x, y in un intorno di x_0,

$$F(x,y) = \sum_{r,s} D_r D_s f(x_0) Q_r\big(\psi_{x_0}(x)\big) Q_s\big(\psi_{x_0}(y)\big) \ .$$

Dimostrazione. La K-invarianza di F è evidente. Se U è un intorno di x_0 su cui f è analitica, sia V intorno bi-K-invariante di e in G tale che $V^2 x_0 \subset U$. Per $g \in V$, la funzione

$$F_g(y) = F(g \cdot x_0, y) = \int_K \tau_{(gk)^{-1}} f(y)\, dk$$

è analitica in $V \cdot x_0$ e K-invariante. Inoltre,

$$D_s F_g(x_0) = \int_K \tau_{(gk)^{-1}} (D_s f)(x_0)\, dk = D_s f(g \cdot x_0) \ ,$$

essendo $D_s f$ K-invariante. Pertanto, posto $x = g \cdot x_0 \in V \cdot x_0$,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= F_g(y) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} D_s f(x) Q_s\big(\psi_{x_0}(y)\big) \\ &= \sum_{r,s=0}^{\infty} D_r D_s f(x_0)\big) Q_r\big(\psi_{x_0}(x)\big) Q_s\big(\psi_{x_0}(y)\big) \ . \qquad \square \end{aligned}$$

Dimostrazione del Teorema 5.4. Data $f \in C_0(G/K)$ K-invariante e analitica, la funzione $F(x,y)$ è analitica su $G/K \times G/K$. Se $\mathbb{D}(G/K)$ è commutativa, dal Lemma 5.5 segue che $F(x,y) = F(y,x)$ per x, y in un intorno di x_0, e dunque dappertutto, essenso G/K connesso.

Siano ora $u = \Lambda^* \varphi, v = \Lambda^* \psi \in L^1(K;G;K)$. Allora

$$\begin{aligned} \int_G u * v(g) \Lambda^* f(g)\, dg &= \int_{G \times G} u(h) v(h^{-1} g) \Lambda^* f(g)\, dh \\ &= \int_{G \times G} \int_K u(h) v(k^{-1} h^{-1} g) \Lambda^* f(g)\, dk\, dh \\ &= \int_{G \times G} \int_K u(h) v(g) \Lambda^* f(hkg)\, dk\, dh \\ &= \int_{G/K \times G/K} \varphi(y) \psi(x) F(y,x)\, dy\, dx \ . \end{aligned}$$

Poiché questa espressione è simmetrica in φ e ψ, usando la densità delle funzioni analitiche in $C_0(K;G;K)$ (Corollario 3.4), si conclude che $\varphi * \psi = \psi * \varphi$. $\square$

6. Immersioni dello spettro di Gelfand in $\mathbb{R}^n$

Combinando i Corollari 4.3 e 4.4 con il Teorema 5.2 otteniamo il seguente enunciato.

Lemma 6.1. *Sia (G,K) una coppia di Gelfand e sia G/K connesso. Le funzioni sferiche su G/K sono univocamente determinate dai loro autovalori rispetto a un qualunque sistema finito di generatori di $\mathbb{D}(G/K)$.*

Indichiamo dunque con $D = \{D_1, \dots, D_r\}$ un sistema finito di generatori di $\mathbb{D}(G/K)$. Se G/K è connesso, l'applicazione

$$\rho_D : \varphi \longmapsto \big(\lambda_{D_1}(\varphi), \dots, \lambda_{D_r}(\varphi)\big)$$

dallo spettro di Gelfand Δ_K di $L^1(K;G;K)$ in $\mathbb{C}^r$ è iniettiva. Indichiamo con Σ_D l'immagine di ρ_D, con la topologia indotta da $\mathbb{C}^r$.

Teorema 6.2[15]**.** *Σ_D è chiuso in $\mathbb{C}^r$. Se G/K è connesso, l'applicazione ρ_D stabilisce un omeomorfismo tra Δ_K e Σ_D.*

Dimostrazione. Il Corollario 5.3 mostra che ρ_D è continua.

Per le altre parti dell'enunciato, dimostriamo preliminarmente che, se G/K è connesso, la topologia di Gelfand su Δ_K soddisfa il primo assioma di numerabilità.

Sia V un intorno aperto, simmetrico, connesso, relativamente compatto dell'identità in G. Allora $G_0 = \bigcup_{n\geq 1} V^n$ è un sottogruppo aperto e connesso di G. Quindi il complementare di G_0 in G è pure aperto, essendo l'unione delle altre classi laterali di G_0. Si conclude che G_0 è la componente connessa dell'identità in G.

Consideriamo allora l'azione di G_0 su G/K. Dato $x \in G/K$, l'applicazione $G_0 \ni g \mapsto g \cdot x$ è localmente suriettiva nell'intorno dell'identità, perché coincide localmente con l'azione di G. Quindi le orbite dell'azione di G_0 su G/K sono aperte. Siccome G/K è connesso, l'azione deve esssere transitiva.

Quindi

$$G/K = G_0 \cdot x_0 = \bigcup_{n\geq 1} V^n \cdot x_0 \ .$$

Quindi, per ogni funzione sferica φ_0, gli insiemi $U_n = \{\varphi : \|\varphi - \varphi_0\|_{C(V^n \cdot x_0)} < \frac{1}{n}\}$ costituiscono un sistema fondamentale di intorni di φ_0 nella topologia di Gelfand.

Dimostriamo dunque che, se $\{\zeta_n\}$ è una successione di punti di Σ_D convergente a $\zeta \in \mathbb{C}^r$, allora le funzioni sferiche $\varphi_n = \rho_D^{-1}(\zeta_n)$ convergono a una funzione sferica φ tale che $\rho_D(\varphi) = \zeta$. Così facendo dimostriamo contemporaneamente che ρ_D^{-1} è continua e che Σ_D è chiuso.

Sia D_P l'operatore ellittico già usato più volte. Esiste un polinomio Q tale che $D_p = Q(D_1, \dots, D_r)$. Per ogni n e m, $D_P^m(\varphi_n) = Q(\zeta_n)^m \varphi_n$. Siccome gli ζ_n sono limitati, segue dalla (5.7) che le norme C^1 delle φ_n sono equilimitate su ogni compatto.

Sia allora $\{\zeta_{n_k}\}$ una sottosuccessione di $\{\zeta_n\}$. Per il Teorema di Ascoli-Arzelà, esiste una ulteriore sottosuccessione $\{\zeta_{n_{k_j}}\}$ tale che $\{\varphi_{n_{k_j}}\}$ converge uniformemente sui compatti di G/K. Se φ è la funzione limite, $\Phi = \Lambda^* \varphi$ soddisfa la (5.4), è limitata e $\Phi(e) = 1$. Pertanto, φ è sferica e $\rho_D(\varphi) = \zeta$.

Per l'iniettività di ρ_D, la funzione limite non dipende dalla scelta della sottosuccessione $\{\zeta_{n_k}\}$, e dunque $\varphi = \lim_n \varphi_n$ uniformemente sui compatti. □

[15] Questo teorema è dovuto a F. Ferrari Ruffino, *The topology of the spectrum for Gelfand pairs on Lie groups*, Boll. UMI (2007), 569-580.