CAPITOLO VII
SPAZI OMOGENEI E COPPIE DI GELFAND

1. Azioni di gruppi e spazi omogenei

Siano G un gruppo e M un insieme. Si dice che G *agisce* su M se è definita una applicazione $\varphi : G \to M^M$ tale che:

(1) $\varphi(e) = i_M$;
(2) $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ per ogni $g, h \in G$.

Questo implica in particolare che $\varphi(g)$ è biiettiva per ogni g e $\varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1})$.

In modo equivalente, si può dire che un'azione di G su M è un'applicazione $\psi : G \times M \to M$ tale che

(1') $\psi(e, x) = x$ per ogni $x \in M$;
(2') $\psi\big(g, \psi(h, m)\big) = \psi(gh, m)$ per ogni $g, h \in G$ e $x \in M$.

Esempi.

(1.a) Sia $G = \mathfrak{S}_n$ il gruppo delle permutazioni di n elementi, e sia $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Ponendo $\psi(\sigma, k) = \sigma(k)$, si ha un'azione di G su M.

(1.b) Sia $G = GL(n, \mathbb{R})$ il gruppo delle matrici invertibili reali $n \times n$, e sia $M = \mathbb{R}^n$. Allora $\psi(g, x) = gx$ è un'azione. Più in generale, una rappresentazione di un gruppo G su uno spazio di Banach X individua un'azione di G su X. Si dice in questo caso che l'azione è lineare.

(1.c) Sia $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sfera di Riemann. Il gruppo $GL(2, \mathbb{C})$ agisce su S^2 come segue: se $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, si pone

$$\psi(g, z) = \frac{az + b}{cz + d} \ .$$

Useremo spesso la notazione $g \cdot x$ in luogo di $\psi(g, x)$. Le condizioni (1') e (2') si scrivono

(1") $e \cdot x = x$;
(2") $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

Se G è un gruppo localmente compatto e M è uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto, si dice che un'azione di G su M è topologica se la corrispondente applicazione $\psi : G \times M \to M$ è continua. Nel seguito considereremo solo azioni topologiche, anche senza menzionare esplicitamente la continuità di ψ.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Definizione. *Dato* $x \in M$*, si chiama* orbita *di* x *il sottoinsieme* $O_x = \{g \cdot x : g \in G\}$ *di* M*.*

Si chiama stabilizzatore *di* $x \in M$ *il sottogruppo* $G_x = \{g : g \cdot x = x\}$ *di* G*.*

Un'azione di G *su* M *si dice* effettiva *se dall'ipotesi* $g \cdot x = x$ *per ogni* $x \in M$ *segue che* $g = e$*.*

Un'azione si dice transitiva *se, dati* $x, y \in M$*, esiste* $g \in G$ *tale che* $g \cdot x = y$*.*

Un'azione si dice semplicemente transitiva *se, dati* $x, y \in M$*, esiste uno e un solo* $g \in G$ *tale che* $g \cdot x = y$*.*

Un'azione non effettiva diventa tale se si sostituisce a G il suo quoziente modulo il sottogruppo $H = \{h \in G : h \cdot x = x \ \forall\, x \in M\}$. H è chiuso e normale di G e l'azione di G induce in modo naturale un'azione di quoziente G/H su M ponendo $(gH) \cdot x = g \cdot x$. Questa nuova azione è effettiva.

Risulta evidente dalle definizioni quanto segue.

Lemma 1.1.

(1) *Per ogni* $g \in G$*, l'applicazione* $x \mapsto g \cdot x$ *è un omeomorfismo di* M *in sé;*
(2) *la relazione su* X *data da* $x \sim y$ *se esiste* $g \in G$ *tale che* $y = g \cdot x$ *è di equivalenza, e le sue classi di equivalenza sono le orbite dell'azione;*
(3) *l'azione è transitiva se e solo se* M *consiste di un'unica orbita;*
(4) *lo stabilizzatore di un punto* $x \in M$ *è un sottogruppo chiuso di* G*;*
(5) *se* $x, y \in M$ *appartengono alla stessa orbita, i loro stabilizzatori sono sottogruppi coniugati tra loro; precisamente se* $y = g \cdot x$*, allora* $G_y = gG_xg^{-1}$*.*

Definizione. *Si chiama* spazio omogeneo *di un gruppo localmente compatto* G *una coppia* (M, ψ)*, dove* M *è uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e* ψ *è un'azione transitiva di* G *su* M*.*

Dati due spazi omogenei (M, ψ) *e* (M', ψ') *di uno stesso gruppo* G*, un'applicazione continua* $F : M \to M'$ *si dice* G-equivariante *se* $\psi'\big(g, F(x)\big) = F\big(\psi(g, x)\big)$ *per ogni* $g \in G$ *e* $x \in M$*.*

I due spazi omogenei si dicono equivalenti se esiste un omeomorfismo G*-equivariante* F *di* M *su* M'*.*

Teorema 1.2. *Sia* H *un sottogruppo chiuso (non necessariamente normale) di* G*. Allora lo spazio quoziente* G/H *è di Hausdorff localmente compatto. L'azione di* G *su* G/H *data da* $g \cdot (g'H) = gg'H$ *rende* G/H *uno spazio omogeneo.*

Viceversa, sia M *uno spazio omogeneo di* G*. Fissato* $x_0 \in M$*, l'applicazione di* G *su* M *che associa a un elemento* $g \in G$ *il punto* $g \cdot x_0 \in M$ *passa al quoziente modulo lo stabilizzatore* G_{x_0} *di* x_0 *e induce un'applicazione continua* G*-equivariante* F_{x_0} *di* G/G_{x_0} *su* M*.*

Dimostrazione. Per il Corollario 1.3 (4) del Cap. II, G/H è di Hausdorff. Poiché le proiezioni canoniche su spazi quoziente sono aperte, se U è un intorno compatto si $g \in G$, la sua proiezione sul quoziente è un intorno compatto di gH.

Poiché il prodotto è continuo da $G \times G$ in G, lo è anche la sua composizione con la proiezione canonica del codominio G su G/H. Questa applicazione passa al quoziente modulo H sul secondo fattore in $G \times G$, per cui induce un'applicazione continua da $G \times (G/H)$ su G/H, che è proprio l'azione indicata. Questa azione è transitiva, perché $(g'g^{-1}) \cdot gH = g'H$ per ogni $g, g' \in G$.

Sia ora (M, ψ) uno spazio omogeneo di G, e sia $x_0 \in M$. L'applicazione φ_{x_0} da G in M data da $\varphi_{x_0}(g) = g \cdot x_0$ è continua e suriettiva. Sia $x = g \cdot x_0$ un generico elemento di M. Allora $g' \in \varphi_{x_0}^{-1}\big(\{x\}\big)$ se e solo se $({g'}^{-1}g)\cdot x_0 = {g'}^{-1}\cdot x = x_0$, ossia se e solo se $g' \in gG_{x_0}$. Quindi φ_{x_0} passa al quoziente modulo G_{x_0}, e induce un'applicazione continua e biiettiva F_{x_0} di G/G_{x_0} su M. Tale applicazione è chiaramente G-equivariante. $\square$

In generale F_{x_0} non è un omeomorfismo. Consideriamo per esempio $G = \mathbb{R}_d$, la retta reale con la topologia discreta, $M = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea, e l'azione $\psi(g,x) = g+x$. Allora M è omogeneo; scegliendo $x_0 = 0$, si ha $G_0 = \{0\}$, e $F_0 = \varphi_0$ è l'applicazione identica da $\mathbb{R}_d$ in $\mathbb{R}$.

Imponendo un'ipotesi topologica su G, precisamente che abbia una base numerabile, si può concludere che F_{x_0} è un omeomorfismo. La dimostrazione è basata sul seguente teorema di categoria.

Lemma 1.3. *Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto, e sia $\{C_n\}_{n\geq 1}$ un ricoprimento chiuso numerabile di X. Allora almeno uno dei C_n ha parte interna non vuota.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che ogni C_n abbia interno vuoto.

Sia $U_0 \subset X$ un aperto relativamente compatto. Poiché C_1 non contiene U, esiste $x_1 \in U_0 \setminus C_1$. Sia U_1 un intorno aperto e relativamente compatto di x_1 tale che $\overline{U_1} \subset U_0$ e $\overline{U_1} \cap C_1 = \emptyset$.

Procedendo induttivamente, si costruiscono una successione di punti x_n e di intorni U_n di x_n, aperti e relativamente compatti, tali che $x_n \in U_{n-1} \setminus C_n$, $\overline{U_n} \subset U_{n-1}$ e $\overline{U_n} \cap C_n = \emptyset$.

Esiste allora $\bar{x} \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{U_n}$. Ma allora $\bar{x} \notin C_n$ per ogni n, il che è assurdo. $\square$

Corollario 1.4. *Se G ha una base numerabile e M è un suo spazio omogeneo, allora, dato $x_0 \in M$, l'applicazione F_{x_0} è un omeomorfismo di G/H su M.*

In particolare, se in aggiunta l'azione di G su M è semplicemente transitiva, allora F_{x_0} è un omeomorfismo di G su M.

Dimostrazione. Per dimostrare che F_{x_0} è un omeomorfismo, basta far vedere che φ_{x_0} è aperta.

Sia $\{A_n\}$ una base numerabile di G. Dato U, intorno compatto di e, sia V intorno simmetrico di e tale che $V^2 \subset U$. Per ogni n, sia poi g_n tale che $g_nU \cap A_n \neq \emptyset$. Allora $\bigcup_n g_nV$ è denso in G. Dato $h \in G$, sia n tale che $hV \cap g_nV \neq \emptyset$. Allora $h \in g_nU$, e dunque $\{g_nU\}$ è un ricoprimento di G.

Poniamo allora $C_n = (g_nU)\cdot x_0 = \varphi_{x_0}(g_nU) \subset M$. Poiché ogni C_n è compatto, per il Lemma 1.3, esiste n tale che C_n ha un punto interno $x = g\cdot x_0$.

Sia ora A un aperto di G. Dato $h \in A$, sia U intorno relativamente compatto di e tale che $hU \subset A$. Se i C_n sono gli insiemi costruiti ora a partire da U' simmetrico take che ${U'}^2 \subset U$, esistono n e x interno a $C_n = (g_nU')\cdot x_0$.

Sia $x = (g_nu)\cdot x_0$, con $u \in U'$. Allora $h\cdot x_0 = (hu^{-1}g_n^{-1})\cdot\big((g_nu)\cdot x_0\big)$ è interno a

$$(hu^{-1}g_n^{-1})\cdot C_n = (hu^{-1}U')\cdot x_0 \subset (hU)\cdot x_0 \subset \varphi_{x_0}(A)\ .$$

Quindi $\varphi_{x_0}(A)$ è aperto. $\square$

Esempi.

(1.d) Sia $G = U(n)$ e $M = S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, con l'azione naturale data da $g\cdot z = gz$. Per verificare che M è uno spazio omogeneo, basta ripetere le osservazioni svolte nell'Esempio 1.a del Cap. IV.

Fissiamo il punto $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ di S^{2n-1}. Il suo stabilizzatore consiste delle matrici $g \in U(n)$ tali che $ge_1 = 1$. Quindi deve essere

$$g = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} .$$

Dall'identità $g^* g = I_n$ si deduce che gli elementi sulla prima riga sono nulli tranne il primo, per cui G si rappresenta a blocchi come

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} ,$$

con h matrice unitaria di dimensione $(n-1) \times (n-1)$. Quindi lo stabilizzatore di e_1 è un sottogruppo di $U(n)$ isomorfo a $U(n-1)$. Con abuso di linguaggio, si scrive $S^{2n-1} \sim U(n)/U(n-1)$. Questa identificazione è un omeomorfismo, perché $U(n)$, con la topologia indotta da C^{n^2}, ha sicuramente base numerabile.

L'azione su S^{2n-1} rimane transitiva se ci si restringe al sottogruppo $SU(n)$ con $U(n)$. In tal caso $S^{2n-1} \sim SU(n)/SU(n-1)$.

Risultati analoghi valgono per la sfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, con $G = O(n)$, oppure $G = SO(n)$.

(1.e) Sia M il semipiano superiore $\{z = x + iy : y > 0\} \subset \mathbb{C}$. Sia $G = SL(2, \mathbb{R})$ il gruppo delle matrici 2×2 reali con detrminante uguale a 1. G agisce su M per trasformazioni lineari fratte: se $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$g \cdot z = \frac{az + b}{cz + d} .$$

Bisogna osservare in proposito che, se $z = x + iy \in M$, allora

$$\Im\mathrm{m}(g \cdot z) = \Im\mathrm{m}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{\Im\mathrm{m}\big((az + b)\overline{(cz + d)}\big)}{|cz + d|^2} = \frac{(ad - bc)y}{|cz + d|^2} > 0 ,$$

per cui anche $g \cdot z \in M$. L'azione non è effettiva, in quanto $g = -I$ lascia fisso ogni punto di M.

Fissato il punto $i \in M$, il suo stabilizzatore è costituito dalle matrici

$$g = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ,$$

ossia il gruppo $SO(2)$ delle matrici ortogonali 2×2 con determinante uguale a 1. Quindi $M \sim SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$.

(1.f) In geometria differenziale, una varietà Riemanniana M si dice *omogenea* se per ogni coppia di punti $x, y \in M$ esiste una isometria di M in sé che applichi x in y.

Le isometrie di una varietà omogenea[1] formano un gruppo per composizione. Tale gruppo G ha una naturale struttura di gruppo localmente compatto (più precisamente di gruppo di Lie). Si ha un'azione di G su M ponendo $g \cdot x = g(x)$, e M risulta quindi uno spazio omogeneo.

Lo stabilizzatore di un generico punto di M è compatto. Questo è dovuto a una serie di fatti, cui accenniamo brevemente. Ogni isometria $g : M \to M$ è un'applicazione C^∞ tra varietà. Come tale, è ben definita la nozione di *differenziale* dg_x come applicazione lineare tra lo spazio tangente T_xM a M in x nello spazio tangente $T_{g(x)}M$ in $g(x)$. Vale inoltre la regola di composizione $d(gh)_x = dg_{h(x)}dh_x$.

Se un'isometria g lascia fisso il punto $x_0 \in M$, il suo differenziale dg_{x_0} nel punto x_0 applica $T_{x_0}M$ in sé. Per al regola di composizione dei differenziali, l'insieme $\{dg_{x_0} : g \in G_{x_0}\}$ è un sottogruppo di $GL(T_{x_0}M)$, il gruppo delle trasformazioni lineari invertibili di $T_{x_0}M$ in sé. Inoltre l'applicazione $g \mapsto dg_{x_0}$ è iniettiva.

La struttura di varietà Riemanniana presuppone poi che ogni spazio tangente T_xM sia dotato di un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle_x$, che consente di definire una "lunghezza", $\|v\|_x$, per i vettori tangenti in x. Le isometrie di M hanno la proprietà che i loro differenziali conservano la norma dei vattori tangenti: $\|dg_xv\|_{g(x)} = \|v\|_x$ (o equivalentemente conservano il prodotto scalare tra vettori tangenti).

In particolare, se $g \in G_{x_0}$, dg_{x_0} è una trasformazione ortogonale di $T_{x_0}M$ in sé. Quindi G_{x_0} è isomorfo a un sottogruppo del gruppo ortogonale $O(T_{x_0}M)$, che si dimostra essere chiuso. Poiché i gruppi ortogonali sono compatti, si conclude che G_{x_0} è compatto.

(1.g) L'Esempio 1.e si ricollega direttamente alla situazione generale descritta ora. La *metrica di Poincaré* sul semipiano superiore M, per cui la lunghezza di un vettore $u + iv \in \mathbb{C}$ applicato nel punto $z = x + iy \in M$ è data da

$$\|u + iv\|_z^2 = \frac{u^2 + v^2}{y^2}\ ,$$

o, come si scrive abitualmente, $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$, è tale che le trasformazioni lineari fratte $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ sono isometrie.

Queste trasformazioni descrivono tutte le isometrie di M di tipo olomorfo. Vi sono poi isometrie antiolomorfe, ottenute componendo quelle olomorfe con l'applicazione $z \mapsto -\bar{z}$, che pure è un'isometria di M.

Da un punto di vista topologico, il gruppo G delle isometrie di M è costituito da due componenti connesse, quella delle isometrie olomorfe e quella delle isometrie antiolomorfe.

2. Misure e operatori G-invarianti

Sia M uno spazio omogeneo di G. Da questo momento supporremo che

(1) lo stabilizzatore G_x di un generico elemento $x \in M$ è compatto;
(2) posto $K = G_{x_0}$, con $x_0 \in M$ arbitrariamente scelto, M è omeomorfo a G/K.

[1] Per tutto quanto non definito o dimostrato in questo esempio si rinvia a S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces.*

Lemma 2.1. *Sia $M = G/K$ con K sottogruppo compatto di G, e sia Λ la proiezione canonica di G su G/K. L'applicazione Λ^* che a $f \in C_c(G/K)$ associa la funzione $\Lambda^* f = f \circ \Lambda$ su G è un isomorfismo tra $C_c(G/K)$ e lo spazio $C_c(G;K)$ delle funzioni in $C_c(G)$ invarianti per traslazioni destre per elementi di K (ossia tali che $R_k f = f$ per ogni $k \in K$).*

Se dk è la misura di Haar normalizzata su K, l'applicazione che a $f \in C_c(G)$ associa la funzione

$$f^\sharp(g) = \int_K f(gk)\, dk \tag{2.1}$$

ha come immagine $C_c(G;K)$ e $(f^\sharp)^\sharp = f^\sharp$.

Dimostrazione. Chiaramente se f è una funzione definita su G/K,

$$f \circ \Lambda(gk) = f \circ \Lambda(g) \ ,$$

in quanto $\Lambda(gk) = \Lambda(g)$. Viceversa se F è una funzione definita su G e $F(gk) = F(g)$ per ogni $g \in G$ e ogni $k \in K$, allora F passa al quoziente modulo K, dando luogo a una funzione $\tilde F$ su G/K tale che $F = \tilde F \circ \Lambda$. Inoltre F è continua se e solo se lo è $\tilde F$.

Meno evidente è che se f ha supporto compatto su G/K, allora $f \circ \Lambda$ ha supporto compatto in G. Mostriamo quindi che se C è compatto in G/K, allora $\Lambda^{-1}(C)$ è compatto in G.

Sia $\mathcal{A} = \{A_i\}$ un ricoprimento aperto di $\Lambda^{-1}(C)$. Fissato $x_0 = g_0 K \in C$, $\Lambda^{-1}(x_0) = g_0 K \subset G$ è compatto, essendo un traslato di K. Esistono dunque $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ che ricoprono $g_0 K$. Vogliamo vedere che gli stessi aperti ricoprono gK se g è in un opportuno intorno di g_0.

Consideriamo l'applicazione prodotto da $G \times K$ in G. Dato $k \in K$ esistono un intorno U_k di g_0 in G e un intorno V_k di k in K tali che $U_k V_k \subset A_1 \cup \dots \cup A_n$. Siano $k_1, \dots, k_m \in K$ tali che $V_{k_1} \cup \dots \cup V_{k_m} = K$, e sia $U = U_{k_1} \cap \dots \cap U_{k_m}$. Allora $UK \subset A_1 \cup \dots \cup A_n$. Poiché UK è aperto, $W(x_0) = \Lambda(UK)$ è un intorno aperto di x_0.

Questo vale per ogni $x_0 \in C$. Esistono allora un numero finito di tali intorni $W(x_j)$ di punti $x_1, \dots, x_p \in C$ che ricoprono C. Per costruzione, $\Lambda^{-1}(W_j)$ è ricopribile con un numero finito di elementi di $\mathcal{A}$. Essendo $\Lambda^{-1}(C)$ contenuto nell'unione dei $\Lambda^{-1}(W_j)$, esso ammette un sottoricoprimento finito.

L'ultima affermazione segue facilmente dalle proprietà della misura di Haar su K. $\square$

Una misura di Borel regolare μ su uno spazio omogeneo M si dice G-invariante se $\mu(g \cdot B) = \mu(B)$ per ogni Boreliano B in M e ogni $g \in G$. La G-invarianza equivale alla condizione

$$\int_M f(g \cdot x)\, d\mu(x) = \int_M f(x)\, d\mu(x)$$

per ogni $f \in C_c(M)$ e ogni $g \in G$.

Proposizione 2.2. *Sia $M = G/K$ con K sottogruppo compatto di G. Esiste su M una misura di Borel regolare e positiva G-invariante, unica a meno di moltiplicazione per costanti positive.*

Dimostrazione. Sia dg una misura di Haar sinistra su G. Consideriamo il funzionale λ definito su $C(G/K)$ dato da $\lambda(f) = \int_G (\Lambda^* f)(g)\, dg$. Esso è ben definito perché $\Lambda^* f \in C_c(G)$ e positivo. Per il Teorema di rappresentazione di Riesz, esiste una e una sola misura di Borel regolare e positiva μ su G/K, tale che

$$\int_{G/K} f(x)\, d\mu(x) = \int_G \Lambda^* f(g)\, dg \ .$$

Se $h \in G$, poniamo $\tau_h f(x) = f(h^{-1} \cdot x)$. Allora $\Lambda^* \tau_h = L_h \Lambda^*$, per cui

$$\begin{aligned}
\int_{G/K} f(h^{-1} \cdot x)\, d\mu(x) &= \int_{G/K} \tau_h f(x)\, d\mu(x) \\
&= \int_G \Lambda^* \tau_h f(g)\, dg \\
&= \int_G L_h \Lambda^* f(g)\, dg \\
&= \int_G \Lambda^* f(g)\, dg \\
&= \int_{G/K} f(x)\, d\mu(x) \ .
\end{aligned}$$

Dunque μ è G-invariante. Viceversa, sia ν una misura di Borel regolare, positiva e G-invariante su G/K. Data $f \in C_c(G)$, sia $f^\sharp \in C_c(G;K)$ definita dalla (2.1). Per il Lemma 2.1, $f^\sharp = \psi \circ \Lambda$, con $\psi \in C_c(G/K)$ univocamente determinata. Poniamo allora

$$\lambda(f) = \int_{G/K} \psi(x)\, d\nu(x) = \int_{G/K} \Big(\int_K f(gk)\, dk \Big)\, d\nu(gK) \ .$$

Se $x = gK$ e $h \in G$,

$$\psi(h^{-1} \cdot x) = \psi(h^{-1} gK) = \varphi(h^{-1} g) = \int_K L_h f(gk)\, dk \ .$$

Quindi

$$\lambda(L_h f) = \int_{G/K} \Big(\int_K f(h^{-1} gk)\, dk \Big)\, d\nu(gK) = \int_{G/K} \psi\big(h^{-1}(gK)\big)\, d\nu(gK) = \lambda(f) \ .$$

La misura positiva m su G corrispondente al funzionale positivo λ per il Teorema di rappresentazione di Riesz è dunque una misura di Haar. Esiste quindi una costante $c > 0$ tale che $\lambda(f) = c \int_G f(g)\, dg$. Ma allora, data $F \in C_c(G/K)$, sia $f = F \circ \Lambda$. Poiché f è K-invariante a destra, $f^\sharp = f$ e

$$\int_{G/K} F(x)\, d\nu(x) = \lambda(f) = c \int_G f(g)\, dg = c \int_{G/K} F(x)\, d\mu(x) \ .$$

Quindi $\nu = c\mu$. $\square$

In $L^p(G)$ (rispetto a una misura di Haar sinistra) abbiamo dunque i sottospazi: $L^p(K;G)$, $L^p(G;K)$, $L^p(K;G;K)$ delle funzioni, rispettivamente, K-invarianti a sinistra, K-invarianti a destra, bi-K-invarianti. Ciascuno di essi è chiuso e gli operatori

$$f \longmapsto \int_K f(kg)\,dk \ , \qquad f \longmapsto \int_K f(gk)\,dk \ , \qquad f \longmapsto \int_{K\times K} f(k_1 g k_2)\,dk_1\,dk_2$$

sono proiettori di norma 1 di $L^p(G)$ su ciascuno di tali sottospazi rispettivamente[2]. Per $p = 2$, essi sono i corrispondenti proiettori ortogonali.

Rispetto alla convoluzione, valgono le seguenti inclusioni (che scriviamo con $p = 1$ per semplictà):

$$L^1(K;G) * L^1(G) \subset L^1(K;G) \ , \qquad L^1(G) * L^1(G;K) \subset L^1(G;K) \ . \tag{2.2}$$

Da queste seguono altre ovvie conseguenze, per es. $L^1(K;G) * L^1(G;K) \subset L^1(K;G;K)$, ecc.

Esempi.

(2.a) La misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale su $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ è invariante rispetto all'azione di $O(n)$. Questo segue facilmente dal fatto che la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ è pure $O(n)$-invariante. Analogamente, la misura di Hausdorff $(2n-1)$-dimensionale su $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ è invariante rispetto all'azione di $U(n)$. Un modo semplice per rendersi conto di ciò consiste nell'osservare che $U(n)$ è il gruppo delle trasformazioni $\mathbb{C}$-lineari che, viste come applicazioni di $\mathbb{R}^{2n}$ in sé, sono ortogonali. Con abuso di linguaggio si dice che $U(n) \subset O(2n)$.

(2.b) Si verifica facilmente che la misura $d\mu(x+iy) = \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$ è invariante per l'azione di $SL(2,\mathbb{R})$ sul semipiano superiore.

Nel corso della dimostrazione precedente abbiamo introdotto la notazione

$$\tau_g f(x) = f(g^{-1} \cdot x) \ . \tag{2.3}$$

Fissata una misura di Borel positiva G-invariante dx su M, indichiamo con $L^p(M)$ gli spazi di Lebesgue relativi a tale misura. Si vede facilmente che

$$\|\tau_g f\|_p = \|f\|_p$$

per ogni $p \in [1,\infty]$. Inoltre, adattando la dimostrazione del Lemma 4.5 del Cap.II, si vede pure facilmente che l'applicazione $g \mapsto \tau_g f$ è continua da G in $L^p(M)$ per ogni $f \in L^p(M)$ se $p < \infty$ e per ogni $f \in C_0(M)$ se $p = \infty$. In particolare τ definisce una rappresentazione unitaria di G su $L^2(M)$.

Poiché

$$\Lambda^*(\tau_g f) = L_g(\Lambda^* f) \ ,$$

[2] Per una verifica, bisogna tener conto che la funzione modulare di G è identicamente uguale a 1 su K per compattezza.

τ è equivalente alla sottorappresentazione della rappresentazione regolare L di G sul sottospazio $L^2(G;K)$ delle funzioni K-invarianti a destra.

Consideriamo ora un operatore integrale su M, definito su $C_c(M)$,

$$Tf(x) = \int_M \Phi(x,y)f(y)\,dy \ , \tag{2.4}$$

con Φ continua su $M \times M$.

Diciamo che T è G-invariante se

$$T(\tau_g f) = \tau_g(Tf)$$

per ogni funzione f e ogni $g \in G$.

Teorema 2.3. *Sia x_0 un punto fissato in M, e sia $K = G_{x_0}$. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) *T è G-invariante;*
(2) *$\Phi(g \cdot x, g \cdot y) = \Phi(x,y)$ per ogni $g \in G$ e ogni $x, y \in M$;*
(3) *esiste una funzione φ continua su M e K-invariante (soddisfacente cioè l'identità $\varphi(k \cdot x) = \varphi(x)$), tale che $\Phi(x, g \cdot x_0) = \varphi(g^{-1} \cdot x)$;*
(4) *esiste una funzione ψ continua su G e bi-K-invariante (soddisfacente cioè l'identità $\psi(k_1 g k_2) = \psi(g)$), tale che*

$$\Phi(g \cdot x_0, h \cdot x_0) = \psi(h^{-1}g) \ . \tag{2.5}$$

Inoltre, se Φ e ψ son legate dalla (2.5)*, e $\Lambda(g) = g \cdot x_0$, allora*

$$\Lambda^*(Tf) = (\Lambda^* f) * \psi \ .$$

Dimostrazione. Se T è G-invariante,

$$\begin{aligned}
\int_M \Phi(g^{-1} \cdot x, y) f(y)\,dy &= \tau_g(Tf)(x) \\
&= T(\tau_g f)(x) \\
&= \int_M \Phi(x,y) f(g^{-1}y)\,dy \\
&= \int_M \Phi(x, g \cdot y) f(y)\,dy \ .
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di f e di x segue l'identità $\Phi(g^{-1} \cdot x, y) = \Phi(x, g \cdot y)$. Procedendo a ritroso, si conclude che (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Supponiamo ora che valga la (2). Posto $\varphi(x) = \Phi(x, x_0)$, si ha per $k \in K$

$$\varphi(k \cdot x) = \Phi(k \cdot x, x_0) = \Phi(x, k^{-1} \cdot x_0) = \Phi(x, x_0) = \varphi(x) \ .$$

Inoltre

$$\Phi(x, g \cdot x_0) = \Phi(g^{-1} \cdot x, x_0) = \varphi(g^{-1} \cdot x) \ ,$$

per cui (2) $\Rightarrow$ (3).

Per vedere che (3) $\Rightarrow$ (4), basta prendere $\psi = \varphi \circ \Lambda$.

Vediamo ora che (4) $\Rightarrow$ (2). Se ψ è continua e bi-K-invariante su G, sia Φ data dalla (2.5). Se $x = h_1 \cdot x_0$ e $y = h_2 \cdot x_0$,

$$\begin{aligned}\Phi(g \cdot x, g \cdot y) &= \Phi\big((gh_1) \cdot x_0, (gh_2) \cdot x_0\big) \\ &= \psi\big((gh_2)^{-1} gh_1\big) = \psi(h_2^{-1} h_1) \\ &= \Phi(x, y) \ . \qquad \square\end{aligned}$$

Si noti che una funzione K-invariante su M, come in (3), è una funzione costante sulle orbite dell'azione di K. Le equivalenze stabilite nel Teorema 2.3 valgono anche per nuclei Φ che siano semplicemente localmente integrabili.

Esempi.

(2.c) Sia $G = O(n)$, $M = S^{n-1}$ la sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$. Lo stabilizzatore di $x_0 = e_1$ è il sottogruppo K, isomorfo a $O(n-1)$, costituito dalle matrici

$$\tilde{k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \ ,$$

con $k \in O(n-1)$ (in questo c'è completa analogia con l'Esempio 1.d). L'elemento $\tilde{k} \in K$ applica il punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^{n-1}$ nel punto

$$\tilde{k} \cdot x = \big(x_1, k(x_2, \dots, x_n)\big) \ .$$

Poiché $O(n-1)$ agisce in modo transitivo sulla sfera S^{n-2}, l'orbita di x sotto l'azione di K è il "parallelo" (con polo e_1) costituito dai punti di S^{n-1} aventi la stessa coordinata x_1.

Una funzione K-invariante su S^{n-1} è dunque una funzione dipendente solo dalla coordinata x_1 (dalla "latitudine"). Una tale funzione si dice *zonale*.

Il gruppo $O(n)$ può essere sostituito dal gruppo $SO(n)$ delle matrici ortogonali di determinante 1 (si noti che una matrice ortogonale ha determinante ± 1). Le conclusioni sono le stesse.

(2.d) Sia G il *gruppo dei moti Euclidei su* $\mathbb{R}^n$, uguale al prodotto semidiretto di $\mathbb{R}^n$ (sottogruppo delle traslazioni) con $O(n)$ (sottogruppo delle rotazioni). Il prodotto di $(k, v) \in O(n) \times \mathbb{R}^n$ per (k', v') è dato da $(kk', kv' + v)$ (v. Esempio 3.c del Cap.II).

G agisce in modo naturale su $\mathbb{R}^n$:

$$(k, v) \cdot x = kx + v \ ,$$

e l'azione è transitiva. Lo stabilizzatore del punto 0 è il sottogruppo $K = O(n)$ delle rotazioni. Una funzione K-invariante su $\mathbb{R}^n$ è una funzione costante su tutte le sfere centrate nell'origine, ossia una funzione *radiale*.

(2.e) Sia H un gruppo compatto. Si prenda G uguale al prodotto diretto $H \times H$, e si consideri la sua azione su $M = H$ data da

$$(h, h') \cdot x = hxh'^{-1} \ .$$

L'azione è transitiva e lo stabilizzatore dell'elemento neutro $e \in H$ è il sottogruppo "diagonale" $K = \{(h,h) : h \in H\}$, isomorfo a H. Una funzione f su $H = M$ è K-invariante se e solo se

$$f\big((h,h)\cdot x\big) = f(hxh^{-1}) = f(x)$$

per ogni $h, x \in H$. Essa è dunque una funzione centrale.

Il Teorema 2.3 assume in questo caso la seguente formulazione: un operatore integrale $Tf(x) = \int_H \Phi(x,y) f(y)\,dy$ commuta con le traslazioni sia destre che sinistre su H se e solo se $\Phi(x,y) = \varphi(y^{-1}x)$ con φ centrale, e di conseguenza $Tf = \varphi * f$.

3. Spazi omogenei compatti e armoniche sferiche

Sia G un gruppo compatto, K un suo sottogruppo chiuso, e $M = G/K$ il corrispondente spazio omogeneo. Vogliamo utilizzare i risultati del Cap.V per ottenere la decomposizione di $L^2(M)$ sotto l'azione di G, ossia le componenti irriducibili della rappresentazione τ del paragrafo precedente.

Usando la corrispondenza tra funzioni su G/K e funzioni K-invarianti a destra su G, stabilita nel Lemma 2.1, possiamo ricondurre il problema a quello di decomporre, rispetto all'azione della rappresentazione L, il sottospazio $L^2(G;K)$ delle funzioni $f \in L^2(G)$ tali che $R_k f = f$ per ogni $k \in K$.

Per il Corollario 3.3 del Cap.V,

$$L^2(G;K) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}} L^2(G;K) \cap M^\pi \ .$$

Si tratta dunque di individuare le funzioni K-invarianti a destra in M^π.

Definizione. *Una rappresentazione π di G si dice* di classe 1 rispetto a K *se esistono vettori v non nulli in H_π tali che $\pi(k)v = v$ per ogni $k \in K$.*

Indichiamo con H_π^K il sottospazio di H_π costituito dai vettori K-invarianti.

Lemma 3.1. *L'intersezione $L^2(G;K) \cap M^\pi$ è non banale se e solo se π è di classe 1 rispetto a K. Esso è generato dai coefficienti $\varphi^\pi_{v,w}$ con $v \in H_\pi$ e $w \in H_\pi^K$.*

Dimostrazione. Chiaramente $L^2(G;K) \cap M^\pi$ è un sottospazio L-invariante di M^π. Per il Lemma 2.3 (5), esso è la somma diretta di sottospazi di M^π della forma ${}_vM^\pi$. Se un tale sottospazio è costituito da funzioni K-invarianti a destra, vuol dire in particolare che, per ogni $w \in H_\pi$ e ogni $k \in K$,

$$\langle \pi(k)v, w\rangle = \varphi_{w,v}(k) = \varphi_{w,v}(e) = \langle v, w\rangle \ .$$

Quindi $v \in H_\pi^K$. Viceversa, è facile vedere che, se $v \in H_\pi^K$, allora ${}_vM^\pi \subset L^2(G;K)$. $\square$

Dal Teorema di Peter-Weyl si ricava a questo punto la seguente decomposizione di $L^2(M)$. Le notazioni sono quelle del Cap.V.

Teorema 3.2. *Sia $\mathcal{P}_K$ il sottoinsieme di $\mathcal{P}$ costituito dalle rappresentazioni di classe 1 rispetto a K. Per ogni $\pi \in \mathcal{P}_K$ si fissi una base $\{e_i^\pi, \dots, e_{d_\pi}^\pi\}$ di H_π, tale che $\{e_1, \dots, e_{m_\pi}^\pi\}$, con $m_\pi \le d_\pi$, sia una base di H_π^K. Allora il sistema*

$$\big\{\sqrt{d_\pi}\varphi_{j,k}^\pi\big\}_{\pi\in\mathcal{P}_K\,,\,j\le d_\pi\,,\,k\le m_\pi}$$

forma una base ortonormale di $L^2(G;K)$. Queste funzioni passano al quoziente modulo K, dando luogo a una base ortonormale di $L^2(G/K)$.

In modo analogo si ricava la seguente descrizione dello spazio $L^2(K;G;K)$ delle funzioni bi-K-invarianti su G, isomorfo allo spazio delle funzioni K-invarianti in $L^2(M)$.

Teorema 3.3. *Siano $\mathcal{P}_K$, $\varphi_{j,k}^\pi$ come sopra. Il sistema*

$$\big\{\sqrt{d_\pi}\varphi_{j,k}^\pi\big\}_{\pi\in\mathcal{P}_K\,,\,j,k\le m_\pi}$$

forma una base ortonormale di $L^2(K;G;K)$.

Nel resto di questo paragrafo analizziamo in dettaglio un caso particolare: $G = SO(n)$ e $M = S^{n-1}$.

Per il Teorema di Stone-Weierstrass, lo spazio $\mathbb{P}$ dei polimoni in n variabili è uniformemente denso in $C(S^{n-1})$, e dunque denso in $L^2(S^{n-1})$. Indichiamo con $\mathbb{P}_k$ il sottospazio dei polinomi omogenei di grado k,

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha \ .$$

Chiaramente

$$\mathbb{P} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_k \ ,$$

e se $g \in SO(n)$ e $p \in \mathbb{P}_k$, anche $\tau_g p = p \circ g^{-1}$ è in $\mathbb{P}_k$. Quindi

$$V_k = \{p_{|_{S^{n-1}}} : p \in \mathbb{P}_k\}$$

è un sottospazio invariante di dimensione finita di $L^2(S^{n-1})$ e la somma dei V_k è densa in $L^2(S^{n-1})$. Tuttavia, l'operatore di restrizione alla sfera non è iniettivo, per cui i V_k non sono a due a due disgiunti. Per esempio, $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ sulla sfera. Occorre quindi trovare una descrizione più precisa di tali spazi e delle loro componenti $SO(n)$-invarianti.

Introduciamo su $\mathbb{P}_k$ il prodotto scalare *di Riesz-Fischer*

$$\langle\langle p, q\rangle\rangle = p(\partial_x)\bar{q} \ , \tag{3.1}$$

dove $p(\partial_x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \partial_x^\alpha$. Poiché p e q sono costituiti da monomi dello stesso grado, il secondo membro della (3.1) è una costante. Precisamente, se $|\alpha| = |\beta| = k$,

$$\partial_x^\alpha(x^\beta) = \partial_{x_1}^{\alpha_1}(x_1^{\beta_1})\,\partial_{x_2}^{\alpha_2}(x_2^{\beta_2})\,\cdots\,\partial_{x_n}^{\alpha_n}(x_n^{\beta_n}) = \delta_{\alpha,\beta}\alpha! \ ,$$

con $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$. Da questa formula seguono facilmente le proprietà di prodotto scalare.

Indichiamo inoltre con $\mathbb{P}_k^0 \subset \mathbb{P}_k$ lo spazio dei polinomi omogenei di grado k e *armonici*, aventi cioè Laplaciano nullo.

Lemma 3.4. *$\mathbb{P}_k$ si decompone come somma diretta*

$$\mathbb{P}_k = |x|^2\mathbb{P}_{k-2} \oplus \mathbb{P}_k^0 \ ,$$

dove i due addendi sono ortogonali rispetto al prodotto scalare di Riesz-Fischer.

Dimostrazione. Consideriamo l'operatore $T : \mathbb{P}_{k-2} \to \mathbb{P}_k$ dato dalla moltiplicazione per $|x|^2$. Allora $\mathbb{P}_k = \operatorname{im} T \oplus \ker T^*$ come somma ortogonale. Dati $p \in \mathbb{P}_k$, $q \in \mathbb{P}_{k-2}$, si ha allora

$$\begin{aligned}\langle\!\langle q, T^*p\rangle\!\rangle &= \langle\!\langle Tq, p\rangle\!\rangle \\ &= q(\partial_x)\Delta\bar{p} \\ &= \langle\!\langle q, \Delta p\rangle\!\rangle \ ,\end{aligned}$$

in quanto, se $r(x) = |x|^2$, $r(\partial_x) = \Delta$. Quindi $\ker T^* = \mathbb{P}_0^k$. $\square$

Quindi ogni polinomio omogeneo di grado k si decompone in modo unico come somma $q(x) + |x|^2 r(x)$, dove q è armonico e r ha grado $k-2$.

Teorema 3.5. *Un polinomio omogeneo $p \in \mathbb{P}_k$ si decompone in uno e un solo modo come*

$$p(x) = p_k(x) + |x|^2 p_{k-2}(x) + |x|^4 p_{k-4}(x) + \cdots \tag{3.2}$$

con ogni p_j armonico e omogeneo di grado j.

La restrizione a S^{n-1} di ogni polinomio coincide con la restrizione di uno e un solo polinomio armonico. Posto

$$\mathcal{H}_k = \{p_{|_{S^{n-1}}} : p \in \mathbb{P}_k^0\} \ ,$$

gli spazi H_k sono a due a due ortogonali in $L^2(S^{n-1})$, $SO(n)$-invarianti, e la loro somma è densa in $L^2(S^{n-1})$.

Se $n \geq 3$, la restrizione τ_k di τ a ogni H_k è irriducibile, e $\tau_k \sim \tau_{k'}$ se e solo se $k = k'$.

Gli elementi di $\mathcal{H}_k$ si chiamano *armoniche sferiche di grado k*.

Prima di dare la dimostrazione, enunciamo due lemmi.

Lemma 3.6. *Sia A una matrice $n \times n$. Allora*

$$\Delta(f \circ A)(x) = \sum_{j,k=1}^{n} b_{j,k}\partial_j\partial_k f(Ax) \ ,$$

dove $(b_{j,k}) = A\,{}^tA$. In particolare, se A è ortogonale, $\Delta(f \circ A)(x) = \Delta f(Ax)$.

Dimostrazione. Sia $A = (a_{j,k})$. Allora

$$\partial_i(f \circ A)(x) = \sum_j a_{j,i}\partial_j f(Ax) \ ,$$

e

$$\partial_i^2(f \circ A)(x) = \sum_{j,k} a_{j,i}a_{k,i}\partial_j\partial_k f(Ax) \ .$$

Quindi

$$\begin{aligned}\Delta(f\circ A)(x) &= \sum_i \partial_i^2(f\circ A)(x)\\ &= \sum_{i,j,k} a_{j,i}a_{k,i}\partial_j\partial_k f(Ax)\\ &= \sum_{j,k}\Big(\sum_i a_{j,i}a_{k,i}\Big)\partial_j\partial_k f(Ax)\ .\end{aligned}$$

L'ultima affermazione è evidente. □

Lemma 3.7. *Sia V un sottospazio τ-invariante di $L^2(S^{n-1})$ contenente, a meno di moltiplicazione per scalari, una sola funzione K-invariante, dove $K = SO(n-1)$ è lo stabilizzatore di $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Allora la restrizione di τ a V è irriducibile.*

Dimostrazione. Il sottospazio $\pi^*V \subset L^2(G;K) \subset L^2(G)$ è L-invariante. Per il Corollario 3.3 e il Lemma 2.3 del Cap.V, π^*V è la somma diretta di sottospazi irriducibili ${}_{v_j}M^\pi$, con $\{v_j\}$ sistema ortonormale in H_π. Per il Lemma 3.1, deve essere $v_j \in H_\pi^K$. Per ognuno di tali sottospazi irriducibili, la funzione $\varphi^\pi_{v_j,v_j}$ è in π^*V ed è bi-K-invariante. Riportando tali funzioni su $G/K = S^{n-1}$, si ottengono altrettante funzioni K-invarianti e linearmente indipendenti. Di conseguenza solo uno di tali spazi può essere presente in π^*V, che è pertanto irriducibile. Allora anche V è irriducibile rispetto a τ. □

Dimostrazione del Teorema 3.5. Si decomponga $p \in \mathbb{P}_k$ come $p(x) = p_k(x) + |x|^2 r(x)$, con $q \in \mathbb{P}_k^0$ e $r \in \mathbb{P}_{k-2}$. Si applichi quindi la stessa decomposizione a r e così via. Si giunge in tal modo alla (3.2). L'unicità della decomposizione è conseguenza del Lemma 3.4.

Preso un generico polinomio $p \in \mathbb{P}$, si decomponga prima p nella somma delle sue componenti omogenee, e si applichi poi a ciascuna di esse la (3.2). Vale allora per p la (3.2), con la differenza che i polinomi p_j non sono più omogenei, pur restando armonici. La restrizione di p a S^{n-1} coincide allora con quella di

$$\tilde p(x) = p_k(x) + p_{k-2}(x) + p_{k-4}(x) + \cdots\ ,$$

che è armonico.

Per vedere che $\tilde p$ è l'unico polinomio armonico tale che $\tilde p_{|_{S^{n-1}}} = p_{|_{S^{n-1}}}$, sia q un altro polinomio con la stessa proprietà. Allora $q - \tilde p$ è armonico e nullo su tutta la sfera. Per il principio del massimo, esso è nullo sulla palla unitaria B_n, da cui $q = \tilde p$.

Siano ora $p \in \mathbb{P}_k^0$ e $q \in \mathbb{P}_j^0$. Per la loro omogeneità,

$$\frac{\partial}{\partial r}p(rx) = \frac{\partial}{\partial r}r^k p(x) = kr^{k-1}p(x)\ ,$$

e analogamente $\frac{\partial}{\partial r}q(rx) = kr^{j-1}q(x)$. In particolare, se $\omega \in S^{n-1}$ e $\frac{\partial}{\partial n}$ è la derivata lungo la normale uscente dalla sfera,

$$\frac{\partial p}{\partial n}(\omega) = kp(\omega)\ ,\qquad \frac{\partial q}{\partial n}(\omega) = jq(\omega)\ .$$

Per il Teorema di Gauss-Green,

$$\begin{aligned}(j-k)\int_{S^{n-1}} p(\omega)\bar q(\omega)\,d\omega &= \int_{S^{n-1}} \Big(p(\omega)\frac{\partial \bar q}{\partial n}(\omega) - \bar q(\omega)\frac{\partial p}{\partial n}(\omega)\Big)\,d\omega \\ &= \int_{B_n} \big(p(\omega)\Delta\bar q(\omega) - \bar q(\omega)\Delta p(\omega)\big)\,d\omega \\ &= 0\ .\end{aligned}$$

Quindi, se $j \neq k$, $\mathcal{H}_j$ e $\mathcal{H}_k$ sono ortogonali in $L^2(S^{n-1})$. Per il Lemma 3.6, $\mathcal{H}_k$ è τ-invariante.

Per vedere che τ_k è irriducibile, basta far vedere, per il Lemma 3.7, che $\mathcal{H}_k$ contiene, a meno di scalari, un'unica funzione K-invariante.

Sia allora $p \in \mathbb{P}_k^0$ un polinomio armonico omogeneo di grado k e K-invariante. Indichiamo un punto $x \in \mathbb{R}^n$ come (x_1, x'), con $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x' = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Per ogni x_1 fissato, $p(x_1, \cdot)$ è una funzione su $\mathbb{R}^{n-1}$ invariante rispetto all'azione di $SO(n-1)$. Per l'Esempio (2.d), essa dipende solo da $|x'|$. Quindi

$$p(x_1, x') = c_0 x_1^k + c_1 x_1^{k-2}|x'|^2 + \cdots + x_1^{k-2j}|x'|^{2j} + \cdots\ .$$

Imponiamo a tale funzione di essere armonica. Semplici calcoli danno

$$\begin{aligned}\partial^2_{x_1}\big(x_1^{k-2j}|x'|^{2j}\big) &= (k-2j)(k-2j-1)x_1^{k-2j-2}|x'|^{2j} \\ \partial^2_{x_\ell}\big(x_1^{k-2j}|x'|^{2j}\big) &= 2j(2j-2)x_1^{k-2j}x_e ll^2|x'|^{2j-4} + 2jx_1^{k-2j}|x'|^{2j-2}\ ,\end{aligned}$$

se $\ell \geq 2$. Sommando si ottiene

$$\Delta\big(x_1^{k-2j}|x'|^{2j}\big) = (k-2j)(k-2j-1)x_1^{k-2j-2}|x'|^{2j} + 2j(2j-2+n-1)x_1^{k-2j}|x'|^{2j-2}\ .$$

Quindi

$$\begin{aligned}\Delta p(x_1, x') = \big(k(k-1)c_0 + 2(n-1)c_1\big)&x_1^{k-2} \\ &+ \big((k-2)(k-3)c_1 + 4(n+1)c_2\big)x_1^{n-4}|x'|^2 + \cdots\end{aligned}$$

Perché p sia armonico, occorre che i singoli addendi siano nulli. Assegnato un valore non nullo a c_0, si determinano ricorsivamente i valori degli altri coefficienti in modo univoco.

La non equivalenza delle τ_k segue dal fatto che le dimensioni degli spazi $\mathcal{H}_k$ sono tutte diverse. Per il Lemma 3.4,

$$\dim \mathcal{H}_k = \dim \mathbb{P}_k^0 = \dim \mathbb{P}_k - \dim \mathbb{P}_{k-2}\ .$$

La dimensione di $\mathbb{P}_k$ è uguale al numero di monomi x^α di grado k. Dato $t \in \mathbb{R}$, si consideri la serie

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} t^{|\alpha|}x^\alpha &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} (tx)^\alpha \\ &= \Big(\sum_{\alpha_1=0}^\infty (tx_1)^{\alpha_1}\Big)\cdots\Big(\sum_{\alpha_n=0}^\infty (tx_n)^{\alpha_n}\Big) \\ &= \frac{1}{(1-tx_1)\cdots(1-tx_n)}\ ,\end{aligned}$$

in cui si ha convergenza se $|tx_j| < 1$ per ogni j. Posto $x_j = 1$ per ogni j, si ottiene, per $|t| < 1$, l'identità

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} t^{|\alpha|} = \frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} t^k \ .$$

Ma il coefficiente di t^k a primo membro è uguale al numero di multiindici α con $|\alpha| = k$. Quindi $\dim \mathbb{P}_k = \binom{n+k-1}{n-1}$ e infine

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{H}_k &= \binom{n+k-1}{n-1} - \binom{n+k-3}{n-1} \\ &= (n+2k-2)\frac{(n+k-3)(n+k-4)\cdots(k+1)}{(n-2)!} \ ,\end{aligned}$$

quantità che è strettamente crescente in k. $\square$

In dimensione $n = 2$, La decomposizione in armoniche sferiche si comprende facilmente se si usa la variabile complessa $z = x + iy$ in luogo delle due coordinate reali. Un generico polinomio omogeneo di grado k ha la forma

$$p(z) = c_0 z^k + c_1 z^{k-1}\bar{z} + \cdot + c_j z^{k-j}\bar{z}^j + \cdot + c_k \bar{z}^k \ .$$

Il primo addendo è olomorfo, dunque armonico; l'ultimo è pure armonico perché antiolomorfo. In ciascuno dei termini intermedi si può mettere in evidenza un fattore $z\bar{z} = |z|^2$ ottenendo $p(z) = q(z) + |z|^2 r(z)$, con

$$q(z) = c_0 z^k + c_k \bar{z}^k \ , \qquad r(x) = \sum_{j=1}^{k-1} c_j z^{k-j-1}\bar{z}^{j-1} \ .$$

Ripetendo questa decomposizione su r e così via, si giunge a scrivere

$$p(z) = c_0 z^k + c_k \bar{z}^k + |z|^2(c_1 z^{k-2} + c_{k-1}\bar{z}^{k-2}) + |z|^4(c_2 z^{k-4} + c_{k-2}\bar{z}^{k-4}) + \cdots \ .$$

Quindi i polinomi omogenei armonici di grado k sono le combinazioni lineari di z^k e $\bar{z}^k$. Le loro restrizioni a $S^1 = \mathbb{T}$ sono i caratteri $e^{\pm ikt}$. La decomposizione in armoniche sferiche coincide dunque con lo sviluppo di Fourier sul toro. Si noti che in questo caso gli spazi $\mathcal{H}_k$ hanno dimensione 2 (se $k \geq 1$) e non sono irriducibili[3].

Corollario 3.8. *Le rappresentazioni τ_k di $G = SO(n)$ sono, a meno di equivalenza, tutte e sole quelle di classe 1 rispetto a $K = SO(n-1)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, il sottospazio $\mathcal{H}_k^K$ ha dimensione 1.*

Le funzioni in $\mathcal{H}_k^K$ si chiamano *armoniche zonali* di grado k.

[3]Diventano però irriducibili sotto l'azione di $O(2)$.

4. Coppie di Gelfand

La discussione svolta nel paragrafo 2 mostra il ruolo svolto dalle funzioni K-invarianti a destra su G, ottenute "sollevando" tramite la proiezione canonica Λ le funzioni su $M = G/K$, e quello svolto dalle funzioni bi-K-invarianti, che corrispondono, nel senso del Teorema 2.3, agli operatori integrali su M che commutano con l'azione di G.

Nel paragrafo 3 abbiamo descritto, nel caso compatto, le funzioni K- e bi-K-invarianti in $L^2(G)$ in relazione alla decomposizione di $L^2(G)$ data dal Teorema di Peter-Weyl.

Rimuoviamo ora la condizione di compattezza su M, o equivalentemente su G.

Per la (2.2), $L^1(K;G;K)$ è una sottoalgebra di Banach di $L^1(G)$ rispetto alla convoluzione, chiusa per involuzione.

Definizione. *Si dice che* (G,K) *è una* coppia di Gelfand *se* $L^1(K;G;K)$ *è commutativa.*

La rilevanza di questa condizione è legata al fatto che la famiglia di operatori discussi nel §2 (v. Teorema 2.3) è commutativa.

Lemma 4.1. *Se* (G,K) *è una coppia di Gelfand,* G *è unimodulare.*

Dimostrazione. Siano $\varphi,\psi \in L^1(K;G;K)$. Indicando con dh una misura di Haar sinistra su G,

$$\varphi * \psi(e) = \int_G \varphi(h)\psi(h^{-1})\,dh = \psi * \varphi(e) = \int_G \psi(h)\varphi(h^{-1})\,dh\ .$$

Se Δ è la funzione modulare su G, per il Teorema 3.1 del Capitolo II si ha

$$\int_G \varphi(h)\psi(h^{-1})\,dh = \int_G \varphi(h)\psi(h^{-1})\Delta(h)^{-1}\,dh\ .$$

Se G non fosse unimodulare, esisterebbe h_0 tale che $\Delta(h_0) > 1$. Per la compattezza di K, $\Delta = 1$ su K, e dunque Δ, essendo un omomorfismo di gruppi, è bi-K-invariante. Per la continuità di Δ, esisterebbe un aperto A di G bi-K-invariante su cui $\Delta > m > 1$. Prendendo $\varphi = \check{\psi} = \chi_A$, si otterrebbe una contraddizione. $\square$

Indichiamo due criteri per determinare se una coppia (G,K) è di Gelfand. Il primo è una condizione solo sufficiente, ma piuttosto elementare.

Proposizione 4.2. *Supponiamo che esista un automorfismo* θ *di* G *tale che, per ogni* $g \in G$, $g^{-1} \in K(\theta g)K$. *Allora* (G,K) *è una coppia di Gelfand.*

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che la funzione modulare di G soddisfa la condizione $\Delta(\theta g) = \Delta(g)$ per ogni automorfismo θ. Infatti, detta m_ℓ una misura di Haar sinistra, la funzione modulare è tale che $m_\ell(Ag) = \Delta(g)m_\ell(A)$ per ogni Boreliano A. Si ha allora

$$m_\ell\big(\theta(Ag)\big) = m_\ell(\theta A\theta g) = \Delta(\theta g)m_\ell(\theta A)\ .$$

Siccome $m_\ell^\theta(A) = m_\ell(\theta A)$ è pure una misura di Haar sinistra, esiste una costante $c_\theta > 0$ tale che $m_\ell(\theta A) = c_\theta m_\ell(A)$. Allora si ha anche

$$m_\ell\big(\theta(Ag)\big) = c_\theta m_\ell(Ag) = c_\theta\Delta(g)m_\ell(A) = \Delta(g)m_\ell(\theta A)\ ,$$

da cui segue l'asserto.

Essendo Δ bi-K-invariante, l'ipotesi implica che $\Delta(g^{-1}) = \Delta(g)$ per ogni g, da cui $\Delta = 1$ e G è dunque unimodulare.

Siano $\check{f}(g) = f(g^{-1})$ e $f^\theta(g) = f(\theta g)$. L'ipotesi implica che, per ogni $f \in L^1(K;G;K)$, allora $\check{f} = f^\theta$.

Se $f, f' \in L^1(K;G;K)$, si ha $\check{f} * \check{f}' = (f' * f)\check{}$, mentre

$$\begin{aligned} f^\theta * f'^\theta(g) &= \int_G f(\theta h) f'\big(\theta(h^{-1}g)\big)\, dh \\ &= c_\theta^{-1} \int_G f(h) f'(h^{-1}\theta g)\, dh \\ &= c_\theta^{-1} (f * f')^\theta(g)\ . \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$(f * f')^\theta = c_\theta f^\theta * f'^\theta = c_\theta \check{f} * \check{f}' = c_\theta (f' * f)\check{} = c_\theta (f' * f)^\theta\ ,$$

cioè $f * f' = c_\theta f' * f$. Iterando la stessa identità, si conclude che $c_\theta^2 = 1$, ossia $c_\theta = 1$. $\square$

Il secondo criterio riguarda le rappresentazioni unitarie irriducibili di G.

Se π è una rappresentazione unitaria di G, indichiamo ancora con H_π^K il sottospazio chiuso di H_π costituito dai vettori v tali che $\pi(k)v = v$ per ogni $k \in K$. Si dice che π è *di classe 1 rispetto a* K se H_π^K è non banale.

Lemma 4.3. *L'operatore*

$$P_\pi^K = \int_K \pi(k)\, dk$$

è il proiettore ortogonale di H_π su H_π^K. Una funzione $f \in L^1(G)$ è

(i) *K-invariante a destra se e solo se, per ogni rappresentazione unitaria irriducibile π di G, $\pi(f) = \pi(f) P_\pi^K$;*
(ii) *K-invariante a sinistra se e solo se, per ogni rappresentazione unitaria irriducibile π di G, $\pi(f) = P_\pi^K \pi(f)$;*
(iii) *bi-K-invariante se e solo se, per ogni rappresentazione unitaria irriducibile π di G, $\pi(f) = P_\pi^K \pi(f) P_\pi^K$.*

Dimostrazione. Verifichiamo innanzitutto che P_π^K è il proiettore indicato. Dati $v \in H_\pi$ e $k \in K$, si vede facilmente che

$$\pi(k) P_\pi^K v = P_\pi^K \pi(k) v = P_\pi^K v\ .$$

Quindi l'immagine di P_π^K è contenuta in H_π^K. Viceversa, se $v \in H_\pi^K$, $P_\pi^K v = v$. Quindi $(P_\pi^K)^2 = P_\pi^K$ e $\operatorname{im} P_\pi^K = H_\pi^K$. Infine

$$(P_\pi^K)^* = \int_K \pi(k)^*\, dk = \int_K \pi(k^{-1})\, dk = P_\pi^K\ .$$

Se ora $f \in L^1(G;K)$, si ha

$$\begin{aligned}\pi(f)P_\pi^K &= \int_G f(g)\pi(g)\int_K \pi(k)\,dk\,dg \\ &= \int_K\int_G f(g)\pi(gk)\,dg\,dk \\ &= \int_K \pi(f)\,dk \\ &= \pi(f)\ .\end{aligned}$$

Viceversa, se $\pi(f) = \pi(f)P_\pi^K$ per ogni π unitaria irriducibile, per ogni $k \in K$ si ha

$$\pi(R_k f) = \int_G f(gk)\pi(g)\,dg = \pi(f)\pi(k) = \pi(f)P_\pi^K\pi(k) = \pi(f)P_\pi^K = \pi(f)\ .$$

Per il Teorema di unicità (Corollario 4.3 del Cap.IV), $R_k f = f$, e dunque f è K-invariante a destra.

Il caso bi-K-invariante si tratta in modo analogo. □

Premettiamo la seguente versione del Lemma di Schur per *-rappresentazioni di algebre di Banach.

Lemma 4.4. *Sia π una *-rappresentazione irriducibile di un'algebra con involuzione A su uno spazio di Hilbert H. Se $T \in \mathcal{L}(H)$ commuta con ogni operatore $\pi(a)$, con $a \in A$, allora T è un multiplo scalare dell'identità. In particolare, una *-rappresentazione irriducibile di un'algebra commutativa con involuzione ha dimensione uno.*

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 1.5 del Cap.IV.

Teorema 4.5. *La coppia (G,K) è di Gelfand se e solo se per ogni rappresentazione unitaria irriducibile π di G, di classe 1 rispetto a K, H_π^K ha dimensione uno.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\dim H_\pi^K \leq 1$ per ogni rappresentazione unitaria irriducibile π di G. Per il Lemma 4.3, se $f \in L^1(K;G;K)$, si ha $\pi(f) = 0$, se π non è di classe 1, oppure $\pi(f) = c(\pi)P_\pi^K$, perché P_π^K è un proiettore di rango 1. In ogni caso, date $f, g \in L^1(K;G;K)$, $\pi(f)$ e $\pi(g)$ commutano fra loro, e dunque $\pi(f * g) = \pi(g * f)$. Per il Teorema di unicità, $f * g = g * f$.

Viceversa, supponiamo che (G,K) sia una coppia di Gelfand, e sia π una rappresentazione unitaria irriducibile di G, di classe 1 rispetto a K. Allora anche la corrispondente *-rappresentazione di $L^1(G)$, che pure indichiamo con π, è irriducibile (si lascia per esercizio la dimostrazione - si usino identità approssimate).

Per ogni $f \in L^1(K;G;K)$, l'operatore $\pi(f)$ lascia invariato il sottospazio H_π^K, per cui è ben definita la *-rappresentazione

$$\tilde\pi(f) = \pi(f)_{|_{H_\pi^K}}$$

di $L^1(K;G;K)$ su H_π^K. Mostriamo che essa è irriducibile.

Sia $H_\pi^K = X_1 \oplus X_2$, con X_1, X_2 ortogonali e $\tilde\pi$-invarianti. Supponendo X_1 non banale, sia $H_1 = \operatorname{span}\{\pi(f)v : f \in L^1(G)\,,\ v \in X_1\} \subset H_\pi$. Poiché H_1 è invariante rispetto alla rappresentazione di $L^1(G)$. Quindi H_1 è denso in H_π.

D'altra parte, H_1 è ortogonale a X_2. Infatti, dati $v \in X_1$, $w \in X_2$ e $f \in L^1(G)$, si ha

$$\begin{aligned}
\langle \pi(f)v, w\rangle &= \int_G f(g)\langle \pi(g)v, w\rangle \, dg \\
&= \int_{K\times K}\int_G f(g)\langle \pi(g)\pi(k_1)v, \pi(k_2)w\rangle \, dg \, dk_1, dk_2 \\
&= \int_G \left(\int_{K\times K} f(k_2^{-1}gk_1)\, dk_1\, dk_2 \right) \langle \pi(g)v, w\rangle \, dg \\
&= \langle \tilde\pi(\tilde f)v, w\rangle \\
&= 0 \ ,
\end{aligned}$$

dove $\tilde f(g) = \int_{K\times K} f(k_2^{-1}gk_1)\, dk_1\, dk_2 \in L^1(K;G;K)$.

Quindi $X_2 = \{0\}$ e $\tilde\pi$ è irriducibile. Per il Lemma 4.4, $\dim H_\pi^K = 1$. $\square$

Esempi.

(4.a) I risultati del paragrafo precedente mostrano che $\big(SO(n), SO(n-1)\big)$ è una coppia di Gelfand, perché ogni spazio $\mathcal{H}_k$ contiene, a meno di scalari, un'unica armonica zonale, in accordo con il Teorema 4.5.

D'altra parte, anche il primo criterio dà la stessa conclusione. La condizione della Proposizione 4.2, con θ uguale all'applicazione identica, si traduce nel fatto che, posto $e_1 = (1,0,\dots,0)$, per ogni $g \in SO(n)$ esista $k \in SO(n-1)$ tale che $g^{-1}e_1 = kge_1$. Ma questo equivale a dire che la prima coordinata di $g^{-1}e_1$ coincida con quella di ge_1.

Se $g = (a_{j,k})$, la prima coordinata di ge_1 è $a_{1,1}$, e quella di $g^{-1}e_1 = {}^t g e_1$ è ancora $a_{1,1}$.

(4.b) Un argomento simile, ma un po' più elaborato, porta a concludere che la coppia $\big(SU(n), SU(n-1)\big)$ è pure di Gelfand.

Due punti $z, w \in S^{2n-1}$ appartengono alla stessa orbita di $K = SU(n-1)$ se e solo se $z_1 = w_1$. Inoltre, dato $g = (a_{j,k}) \in SU(n) = G$, la prima componente di ge_1 è $a_{1,1}$, mentre quella di $g^{-1}e_1 = g^*e_1$ è $\overline{a_{1,1}}$. Come nel caso reale, si può applicare la Proposizione 4.2, solo con $\theta g = \bar g$.

(4.c) Consideriamo la coppia $\big(SL(2,\mathbb{R}), SO(2)\big)$, il cui spazio omogeneo è il semipiano superiore. Ad essa si può applicare il criterio della Proposizione 4.2: data $g \in SL(2,\mathbb{R})$, esistono $k_1, k_2 \in SO(2)$ tali che $g^{-1} = k_1gk_2$. Questo segue dal seguente teorema di decomposizione per matrici quadrate invertibili: data una matrice $n\times n$ A invertibile, esistono una matrice diagonale D e due matrici ortogonali U, V, tali che $A = UDV$.

Questo enunciato si dimostra come segue: consideriamo ${}^tAA$, che è simmetrica definita positiva. Essa si diagonalizza su una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, per cui esistono D_0 diagonale, con coefficienti diagonali positivi, e $V \in O(n)$ tali che ${}^tAA = {}^tVD_0V$. Sia D la matrice diagonale i cui coefficienti diagonali sono le radici quadrate positive dei corrispondenti coefficienti di D_0. Allora ${}^tAA = {}^tVD^2V$. Sia $U = AV^{-1}D^{-1}$, in modo che $A = UDV$. Allora

$${}^tUU = D^{-1}V\,{}^tAA\,{}^tVD^{-1} = D^{-1}D^2D^{-1} = I \ ,$$

per cui $U \in O(n)$.

In particolare, data $g \in SL(2, \mathbb{R})$, si ha $g = h_1 d h_2$, con $h_1, h_2 \in O(2)$ e d diagonale con coefficenti diagonali positivi. Quindi $\det d > 0$. Poiché $\det h_j = \pm 1$, si ha anche $\det d = \pm 1$. In definitiva, $\det d = 1$, per cui

$$d = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} ,$$

con $a > 0$. Inoltre $\det h_1 \det h_2 = 1$, da cui $\det h_1 = \det h_2$. Se $\det h_j = -1$, posto $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, si ha

$$jdj^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = d^{-1} .$$

Quindi

$$g^{-1} = h_2^{-1} d^{-1} h_1^{-1} = (h_2^{-1} j) d (j^{-1} h_1^{-1}) = (h_2^{-1} j h_1^{-1}) g (h_2^{-1} j^{-1} h_1^{-1}) ,$$

dove i due termini in parentesi sono in $SO(2)$.

(4.d) Dato H gruppo compatto, siano $G = H \times H$ e $K = \{(h, h) : h \in H\}$. Sulla base dell'Esempio (2.e), l'applicazione Λ introdotta nel paragrafo 2 stabilisce una corrispondenza biunivoca tra funzioni bi-K-invarianti su G e funzioni centrali su H, in modo tale che la convoluzione su G delle prime corrisponda alla convoluzione su H delle seconde. Poiché le funzioni centrali in $L^1(H)$ formano un'algebra commutativa, segue che (G, K) è una coppia di Gelfand.

Per trovare la corrispondenza tra queste argomentazioni, basate sui risultati del Cap. V, e quanto affermato nel Teorema 4.5, occorre premettere alcuni fatti sulle rappresentazioni di $H \times H$, le cui dimostrazioni sono lasciate per esercizio:

(1) date due rappresentazioni unitarie π_1, π_2 di H, la rappresentazione di G su $H_{\pi_1} \otimes H_{\pi_2}$,

$$\pi(h_1, h_2) = (\pi_1 \otimes \pi_2)(h_1, h_2) = \pi_1(h_1) \otimes \pi_2(h_2) , \tag{4.1}$$

è unitaria;

(2) se π_1 e π_2 sono irriducibili, anche π è irriducibile (usare il Lemma di Schur: se $A \in \mathcal{I}(\pi, \pi)$, allora, per ogni $w \in H_{\pi_2}$, $A_{|H_{\pi_1} \otimes \{w\}} \in \mathcal{I}(\pi_1, \pi_1)$; quindi $A(v \otimes w) = \lambda(w) v \otimes w$, con $\lambda(w)$ scalare; scambiando i ruoli di v e w, si trova che λ è costante);

(3) le rappresentazioni (4.1) danno, al variare di $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}$, tutte e sole le rappresentazioni irriducibili di G, a meno di equivalenza (osservare che tra i coefficienti di tali rappresentazioni vi sono le funzioni della forma $\varphi_1(h_1)\varphi_2(h_2)$, con φ_1, φ_2 coefficienti di π_1, π_2 rispettivamente; per il Teorema 2.2 del Cap. V e il Teorema di Stone-Weierstrass, esse generano un sottospazio denso di $C(G)$);

(4) se $\pi_2 \sim \pi_1'$, la rappresentazione π in (4.1) è di classe 1 rispetto a K (si prenda $\xi \in H_{\pi_1} \otimes H_{\pi_2}$, $\xi = \sum_{j=1}^d e_j \otimes f_j$, con $\{e_j\}$ base ortonormale di H_{π_1} e $\{f_j\}$ la sua base duale; il coefficiente diagonale $\langle \pi(h_1, h_2)\xi, \xi \rangle$ è uguale a $\chi_\pi(h_2^{-1} h_1)$, che è bi-K-invariante);

(5) al variare di $\pi \in \mathcal{P}$, queste funzioni generano un sottospazio denso di $C(K; G; K) \sim C_c(H)$.

5. Funzioni sferiche

Sia (G, K) una coppia di Gelfand. Vogliamo determinare i caratteri dell'algebra commutativa $L^1(K; G; K)$. Cominciamo con la caratterizzazione del duale di tale spazio.

Lemma 5.1. *I funzionali lineari continui su $L^1(K; G; K)$ sono tutti e soli quelli della forma*

$$\lambda(f) = \int_G f(g)\varphi(g)\, dg \ ,$$

con $\varphi \in L^\infty(K; G; K)$. Inoltre $\|\lambda\| = \|\varphi\|_\infty$.

Dimostrazione. Sia λ un funzionale continuo su $L^1(K; G; K)$. Per il Teorema di Hahn-Banach, esso si estende a $L^1(G)$, per cui esiste $\psi \in L^\infty(G)$ tale che $\lambda(f) = \int_G f\psi\, dg$ e $\|\psi\|_\infty = \|\lambda\|$. Poniamo

$$\varphi(g) = \iint_{K\times K} \psi(k_1 g k_2)\, dk_1\, dk_2 \in L^\infty(K; G; K) \ .$$

Se $f \in L^1(K; G; K)$,

$$\begin{aligned}
\int_G f(g)\varphi(g)\, dg &= \int_G f(g) \iint_{K\times K} \psi(k_1 g k_2)\, dk_1\, dk_2\, dg \\
&= \iint_{K\times K} \int_G f(k_1^{-1} g k_2^{-1})\psi(g)\, dg\, dk_1\, dk_2 \\
&= \lambda(f) \ .
\end{aligned}$$

Inoltre, $|\lambda(f)| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_1$. D'altra parte, dalla definizione di φ segue che $\|\varphi\|_\infty \leq \|\psi\|_\infty$, per cui $\|\varphi\|_\infty = \|\lambda\|$. $\square$

Teorema 5.2. *Una funzione $\varphi \in L^\infty(K; G; K)$ induce un carattere di $L^1(K; G; K)$ se e solo se essa coincide quasi ovunque con una funzione continua tale che*

$$\int_K \varphi(gkg')\, dk = \varphi(g)\varphi(g') \ . \tag{5.1}$$

Dimostrazione. Sia φ continua, limitata, bi-K-invariante e soddisfacente la (5.1). Allora, date $f, g \in L^1(K; G; K)$,

$$\begin{aligned}
\int_G f(x)\varphi(x)\, dx \int_G g(y)\varphi(y)\, dy &= \iint_{G\times G} \int_K f(x)g(y)\varphi(xky)\, dk\, dy\, dx \\
&= \iint_{G\times G} \int_K f(xk^{-1})\, dk\, g(y)\varphi(xy)\, dy\, dx \\
&= \iint_{G\times G} f(x)g(y)\varphi(xy)\, dy\, dx \\
&= \iint_{G\times G} f(xy^{-1})g(y)\varphi(x)\, dy\, dx \\
&= \int_G (f * g)(x)\varphi(x)\, dx \ .
\end{aligned}$$

Il funzionale definito da φ è dunque moltiplicativo.

Viceversa, sia $\lambda(f) = \int_G f\varphi\,dx$ moltiplicativo, con $\varphi \in L^\infty(K;G;K)$. Allora, per ogni $g \in L^1(G)$, si ponga

$$g^\sharp(x) = \iint_{K\times K} g(k_1 x k_2)\,dk_1\,dk_2\ .$$

Se $f \in L^1(K;G;K)$,

$$\begin{aligned}
\lambda(f * g^\sharp) &= \int_G (f * g^\sharp)(h)\varphi(h)\,dh \\
&= \iint_{G\times G} f(hh'^{-1}) \iint_{K\times K} g(kh'k')\,dk\,dk'\,\varphi(h)\,dh'\,dh \\
&= \iint_{G\times G} f(h) \iint_{K\times K} g(kh'k')\,dk\,dk'\,\varphi(hh')\,dh'\,dh \\
&= \iint_{G\times G} f(h)g(h') \int_K \varphi(hkh')\,dk\,dh'\,dh \\
&= \iint_{G\times G} f(h)g(h')\varphi(hh')\,dh'\,dh\ .
\end{aligned}$$

Questa espressione deve essere uguale a

$$\begin{aligned}
\lambda(f)\lambda(g^\sharp) &= \int_G f(h)\varphi(h)\,dh \int_G g^\sharp(h)\varphi(h)\,dh \\
&= \int_G f(h)\varphi(h)\,dh \int_G g(h)\varphi(h)\,dh \\
&= \iint_{G\times G} f(h)g(h')\varphi(h)\varphi(h')\,dh\,dh'\ .
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di g, si ha

$$\Big(\int_G f(h)\varphi(h)\,dh\Big)\varphi(h') = \int_G f(h)\varphi(hh')\,dh = (\check f * \varphi)(h') \tag{5.2}$$

per quasi ogni $h' \in G$. Il secondo membro è funzione continua di h', per cui, scegliendo f in modo che l'integrale in parentesi sia diverso da zero, si deduce che φ coincide quasi ovunque con una funzione continua.

Sia ora $u \in L^1(G)$. Ponendo $f = u^\sharp$ nella (5.2), si ottiene

$$\begin{aligned}
\varphi(h') \int_G u(h)\varphi(h)\,dh &= \int_G \iint_{K\times K} u(k_1 h k_2)\varphi(hh')\,dk_1\,dk_2\,dh \\
&= \int_G u(h) \int_K \varphi(hk_2^{-1}h')\,dk_2\,dh\ .
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di u, segue la (5.1). □

Definizione. *Si chiamano* funzioni sferiche *della coppia* (G,K) *le funzioni continue su* G *che soddisfano la* (5.1).

6. Trasformata di Fourier sferica

Teorema 6.1. *Lo spettro di Gelfand Δ dell'algebra $L^1(K;G;K)$ è lo spazio delle funzioni sferiche limitate con la topologia* compatto-aperto*, in cui un sistema fondamentale di intorni della funzione $\varphi_0 \in \Delta$ sono gli insiemi*

$$U_{\varphi_0}(\varepsilon, C) = \big\{\varphi \in \Delta : |\varphi(g) - \varphi_0(g)| < \varepsilon \ , \forall\, g \in C\big\} \ ,$$

al variare di $\varepsilon > 0$ e C compatto in G.

Dimostrazione. Per definizione, la topologia di Gelfand è la restrizione a Δ della topologia debole* sul duale dell'algebra, identificato con $L^\infty(K;G;K)$ dal Lemma 5.1.

Sia

$$V_{\varphi_0}(\varepsilon, f_1, \dots, f_n) = \Big\{\varphi \in \Delta : \Big| \int_G f_j \varphi - \int_G f_j \varphi_0 \Big| < \varepsilon \ \forall\, j = 1, \dots, n\Big\} \ ,$$

un intorno di φ_0 nella topologia di Gelfand. Possiamo supporre che $\|f_j\|_1 = 1$ per ogni j.

Sia C compatto in G tale che $\int_{G\setminus C} |f_j| < \varepsilon/3$ per ogni j. Se $\varphi \in U_{\varphi_0}(\varepsilon/3, C)$,

$$\begin{aligned}\Big| \int_G f_j(g)\varphi(g)\, dg - \int_G f_j(g)\varphi_0(g)\, dg \Big| &\le 2 \int_{G\setminus C} |f_j(g)|\, dg \\ &\quad + \int_G |f_j(g)| \big|\varphi(g) - \varphi_0(g)\big|\, dg \\ &< \varepsilon \ .\end{aligned}$$

Dunque $U_{\varphi_0}(\varepsilon/3, C) \subset V_{\varphi_0}(\varepsilon, f_1, \dots, f_n)$.

Per dimostrare che ogni intorno di φ_0 nella topologia compatto-aperto contiene un intorno nella topologia debole*, adattiamo la dimostrazione della Proposizione 1.3 del Capitolo III.

Osserviamo innanzitutto che, se $f \in L^1(K;G;K)$ e $\varphi \in \Delta$, allora

$$\begin{aligned}\varphi(g) \int_G f(h)\varphi(h)\, dh &= \int_G \int_K f(h)\varphi(gkh)\, dk\, dh = \int_G \int_K f(k^{-1}h)\varphi(gh)\, dk\, dh \\ &= \int_G f(h)\varphi(gh)\, dh \\ &= \int_G L_g f(h)\varphi(h)\, dh \ .\end{aligned}$$

Mostriamo quindi che la funzione $(g, \varphi) \mapsto \varphi(g)$ è continua su $G \times \Delta$, con Δ dotato della topologia di Gelfand. Presa $f \in L^1(K;G;K)$ tale che $\int_G f\varphi_0 = 1$, si ha

$$\begin{aligned}\varphi(g) - \varphi_0(g_0) &= \varphi(g) \int_G f(h)\varphi_0(h)\, dh - \int_G L_{g_0} f(h)\varphi_0(h)\, dh \\ &= \varphi(g) \Big(\int_G f(h)\varphi_0(h)\, dh - \int_G f(h)\varphi(h)\, dh \Big) \\ &\quad + \int_G \big(L_g f(h) - L_{g_0} f(h)\big)\varphi(h)\, dh \\ &\quad + \int_G L_{g_0} f(h)\big(\varphi(h) - \varphi_0(h)\big)\, dh \ .\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\big|\varphi(g)-\varphi_0(g_0)\big| \le \left|\int_G f(h)\big(\varphi_0(h)-\varphi(h)\big)\,dh\right| \\ + \big\|L_g f - L_{g_0} f\big\|_1 + \left|\int_G L_{g_0} f(h)\big(\varphi_0(h)-\varphi(h)\big)\,dh\right| ,\end{aligned}$$

da cui si deduce facilmente la conclusione.

Prendiamo dunque un intorno $U_{\varphi_0}(\varepsilon, C)$ di φ_0 nella topologia compatto-aperto. Per ogni $h \in C$ esistono un intorno $V(h)$ di φ_0 nella topologia di Gelfand e $B(h)$ di h in G tali che $|\varphi(g) - \varphi_0(h)| < \varepsilon/2$ per ogni $\varphi \in V(h)$ e $g \in B(h)$. Scelti $h_1, \dots, h_n \in C$ tali che $\{B(h_j)\}_{1\le j\le n}$ sia un ricoprimento di C, e posto $V = \bigcap_{j=1}^n V(h_j)$, si ottiene, per $\varphi \in V$ e $g \in B(h_j)$,

$$|\varphi(g) - \varphi_0(g)| \le |\varphi(g) - \varphi_0(h_j)| + |\varphi_0(h_j) - \varphi_0(g)| < \varepsilon \ .$$

Quindi $V \subset U_{\varphi_0}(\varepsilon, C)$. $\square$

Sia (G, K) una coppia di Gelfand. Si chiama *trasformata di Fourier sferica* la trasformata di Gelfand relativa all'algebra $L^1(K; G; K)$.

Precisamente, se $f \in L^1(K; G; K)$, la sua trasformata è la funzione definita su Δ

$$\hat{f}(\varphi) = \int_G f(g)\varphi(g^{-1})\,dg \ .$$

Essa soddisfa le seguenti proprietà:

(1) è lineare;
(2) $\hat{f} \in C_0(\Delta)$ e $\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$;
(3) $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$;
(4) $f * \varphi = \hat{f}(\varphi)\varphi$ per ogni $f \in L^1(K; G; K)$ e $\varphi \in \Delta$.

Dimostreremo più avanti che $L^1(K; G; K)$ è semisemplice, ossia che la trasformata di Fourier sferica è iniettiva.

Se φ è sferica, anche $\varphi^*(g) = \overline{\varphi(g^{-1})}$ è sferica. Vale l'identità

$$\widehat{f^*}(\varphi) = \overline{\hat{f}(\varphi^*)} \tag{6.1}$$

per ogni $f \in L^1(K; G; K)$. Per la Proposizione 4.3 del Capitolo I, $L^1(K; G; K)$ è simmetrica se e solo se $\varphi^* = \varphi$ per ogni $\varphi \in \Delta$. Questo non è sempre vero, come vedremo più avanti.

7. Funzioni sferiche di tipo positivo

Le funzioni di tipo positivo su un gruppo G localmente compatto unimodulare sono state descritte nel Capitolo IV, paragrafi 3 e 4. Esse sono definite attraverso una qualunque delle seguenti condizioni equivalenti:

(1) le funzioni φ continue tali che

$$\sum_{j,k=1}^n \varphi(g_k^{-1} g_j)\zeta_j\bar{\zeta}_k \ge 0$$

per ogni scelta di n e di $g_1, \dots, g_n \in G$, $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C}$;

(2) le funzioni $\varphi \in L^\infty(G)$ tali che

$$\int_{G\times G} \varphi(h^{-1}g) f(g) \overline{f(h)}\, dg\, dh \geq 0$$

per ogni $f \in L^1(G)$;

(3) le funzioni $\varphi(g) = \langle v, \pi(g)v\rangle$ dove π è una rappresentazione unitaria di G su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\pi$ e $v \in \mathcal{H}_\pi$ è un vettore ciclico[4]; in tal caso φ determina π e v in modo unico a meno di operatori di intrallacciamento tra rappresentazioni unitariamente equivalenti che applichino l'assegnato vettore ciclico dell'una in quello dell'altra.

Indichiamo ora con $\mathcal{P}^K$ e $\mathcal{P}_0^K$ rispettivamente il cono delle funzioni di tipo positivo bi-K-invarianti e la sua intersezione con $\mathcal{P}_0$. Si ha la seguente caratterizzazione.

Lemma 7.1. *Sia $\varphi(g) = \langle v, \pi(g)v\rangle$, con π e v come in* (3)*.*

(i) *φ è bi-K-invariante se e solo se $\pi(k)v = v$ per ogni $k \in K$.*

(ii) *Se (G, K) è una coppia di Gelfand, φ è sferica se e solo se, in aggiunta, π è irriducibile.*

Dimostrazione. Se v è lasciato fisso da K,

$$\varphi(kgk') = \langle \pi(k^{-1})v, \pi(g)\pi(k')v\rangle = \varphi(g) \ ,$$

per ogni $k, k' \in K$.

Viceversa, se φ è bi-K-invariante e $k \in K$, si ha

$$\langle \pi(k)v, \pi(g)v\rangle = \langle v, \pi(g)v\rangle$$

per ogni $g \in G$. Poiché v è ciclico, segue che $\langle \pi(k)v, w\rangle = \langle v, w\rangle$ per ogni $w \in H_\pi$, da cui $\pi(k)v = v$.

Supponiamo ora che (G, K) sia una coppia di Gelfand e che π sia irriducibile e di classe 1 rispetto a K. Per il Teorema 4.5, lo spazio $\mathcal{H}_\pi^K$ ha dimensione 1. Sia v un suo elemento unitario.

Per il Lemma 4.3, se $f \in L^1(K; G; K)$, $\pi(f)$ è un multiplo scalare del proiettore ortogonale su $\mathbb{C}v$. Dunque

$$\pi(f)w = \lambda(f)\langle w, v\rangle v \ ,$$

dove

$$\lambda(f) = \langle \pi(f)v, v\rangle = \int_G f(g)\varphi(g^{-1})\, dg \ .$$

Dall'identità $\pi(f_1 * f_2) = \pi(f_1)\pi(f_2)$ segue che $\lambda(f_1 * f_2) = \lambda(f_1)\lambda(f_2)$, per cui φ è sferica.

[4]Nel cap. IV la condizione appare nella forma $\varphi(g) = \langle \pi(g)v, v\rangle$. L'equivalenza tra le due condizioni dipende dal fatto che se φ è di tipo positivo, anche $\bar\varphi$ lo è, o anche dal fatto che il coniugato di un coefficiente della rappresentazione π è un coefficiente della sua controgradiente.

Supponiamo viceversa che φ sia sferica. Per ogni $g \in G$ e $f \in L^1(K;G;K)$,

$$\begin{aligned}\langle \pi(f)v, \pi(g)v\rangle &= \int_G f(h)\langle \pi(h)v, \pi(g)v\rangle\, dh \\ &= \int_G f(h)\varphi(h^{-1}g)\, dh \\ &= \int_G \int_K f(h)\varphi(h^{-1}kg)\, dk\, dh \\ &= \varphi(g)\int_G f(h)\varphi(h^{-1})\, dh \\ &= \hat{f}(\varphi)\langle v, \pi(g)v\rangle \ .\end{aligned}$$

Poiché v è ciclico, segue che $\pi(f)v = \hat{f}(\varphi)v$.

Se ora $f \in L^1(G)$, poniamo $f^\sharp(g) = \int_{K\times K} f(kgk')\, dk\, dk' \in L^1(K;G;K)$. Allora

$$\pi(f^\sharp) = P_\pi^K \pi(f) P_\pi^K \ ,$$

e dunque

$$P_\pi^K \pi(f)v = \pi(f^\sharp)v = \widehat{f^\sharp}(\varphi)v \ . \tag{7.1}$$

Sia $X \subset \mathcal{H}_\pi$ il sottospazio dei vettori $\pi(f)v$ con $f \in L^1(G)$. Prendendo $f = R_g\psi_j$, con $\{\psi_j\}$ un'identità approssimata, si ottiene che la chiusura di X in $\mathcal{H}_\pi$ contiene i vettori $\pi(g)v$ al variare di g in G. Siccome v è ciclico, $\bar{X} = \mathcal{H}_\pi$. Per la (7.1), $P_\pi^K X = \mathbb{C}v$, e dunque $\mathcal{H}_\pi^K = \mathbb{C}v$.

Per concludere la dimostrazione, dimostriamo che se $\dim \mathcal{H}_\pi^K = 1$, allora π è irriducibile. Sia Y un sottospazio chiuso π-invariante di $\mathcal{H}_\pi$ e sia P_Y il corrispondente proiettore ortogonale. Poiché P_Y commuta con π, il vettore $P_Y v$ è K-fisso, dunque $P_Y v = \lambda v$. Se $\lambda \neq 0$, $v \in Y$ e dunque $Y = \mathcal{H}_\pi$ essendo v ciclico. Se $\lambda = 0$, allora $v \in Y^\perp$, e per lo stesso motivo Y è banale. $\square$

Le funzioni di tipo positivo formano un cono convesso $\mathcal{P}$. Posto $\mathcal{P}_0 = \{\varphi \in \mathcal{P} : \varphi(e) \leq 1\}$, esso è compatto nella topologia debole* di $L^\infty(G)$ e i suoi punti estremali sono la funzione nulla e le funzioni $\langle \pi(g)v, v\rangle$, con π irriducibile e $\|v\| = 1$.

Teorema 7.2. *Se (G,K) è una coppia di Gelfand, i punti estremali di $\mathcal{P}_0^K$ sono la funzione nulla e le funzioni sferiche di tipo positivo.*

Dimostrazione. Dimostriamo che se $\varphi \neq 0$ è estremale in $\mathcal{P}_0^K$, essa è estremale anche in $\mathcal{P}_0$. Se così non fosse, avremmo $\varphi = \theta\varphi_1 + (1-\theta)\varphi_2$, con $0 < \theta < 1$ e $\varphi_1, \varphi_2 \neq \varphi$ e in $\mathcal{P}_0$.

Sia $\varphi_j(g) = \langle \pi_j(g)v_j, v_j\rangle$, con $\|v_j\| = 1$. Posto

$$\tilde{\varphi}_j(g) = \int_{K\times K} \varphi_j(kgk')\, dk\, dk' \ ,$$

si vede facilmente che $\tilde{\varphi}_j(g) = \langle \pi_j(g)P_{\pi_j}^K v_j, P_{\pi_j}^K v_j\rangle$, dove $P_{\pi_j}^K$ è il proiettore ortogonale sullo spazio dei vettori K-fissi in $\mathcal{H}_j$ introdotto nel Lemma 4.3. Ma $\varphi_1(e) = \varphi_2(e) = 1$, e dunque lo stesso vale per $\tilde{\varphi}_1$ e $\tilde{\varphi}_2$. Ne segue che $\|P_{\pi_j}^K v_j\| = 1$

e quindi $P^K_{\pi_j} v_j = v_j$. In conclusione φ_1 e φ_2 sono in $\mathcal{P}^K_0$, in contraddizione con l'ipotesi.

Si ha allora che i punti estremali di $\mathcal{P}^K_0$ sono gli elementi estremali di $\mathcal{P}_0$ che sono bi-K-invarianti. Essi sono dunque caratterizzati come le funzioni

$$\varphi(g) = \langle \pi(g)v, v \rangle \ ,$$

dove π è unitaria irriducibile e v è un vettore unitario e K-fisso in $\mathcal{H}_\pi$. Per il Lemma 7.1 esse sono le funzioni sferiche di tipo positivo. $\square$

8. I Teoremi fondamentali della trasformata di Fourier sferica

Da questo momento supponiamo che (G, K) sia una coppia di Gelfand.

Indichiamo con Δ^+ il sottoinsieme di Δ costituito dalle funzioni sferiche di tipo positivo. Usando la caratterizzazione (1) delle funzioni di tipo positivo, si vede facilmente che Δ^+ è chiuso in Δ. Per il Lemma 7.1, gli elementi di Δ^+ sono in corrispondenza biunivoca con le classi di equivalenza delle rappresentazioni unitarie irriducibili di G, di classe 1 rispetto a K.

Se π è di classe 1 rispetto a K e v è un vettore unitario K-fisso, indichiamo con

$$\varphi_\pi(g) = \langle v, \pi(g)v \rangle$$

la corrispondente funzione sferica[5]. Poiché $\varphi_\pi = \varphi_\pi^*$, vale l'uguaglianza

$$\widehat{f^*(\varphi_\pi)} = \overline{\hat{f}(\varphi_\pi)} \ , \tag{8.1}$$

per $f \in L^1(K; G; K)$.

Lemma 8.1. *Lo spazio $\{\hat{f}_{|\Delta^+} : f \in L^1(K; G; K)\}$ è denso in $C_0(\Delta^+)$ nella norma uniforme.*

Dimostrazione. Segue dalla (8.1) per il Teorema di Stone-Weierstrass. $\square$

Stabiliamo ora la corrispondenza tra la trasformata sferica di una funzione integrabile bi-K-invariante e la sua trasformata di Fourier operatoriale (v. §5 del Cap. IV).

Lemma 8.2. *Siano $f \in L^1(K; G; K)$ e π una rappresentazione unitaria irriducibile di G. Se π non è di classe 1 rispetto a K, allora $\pi(f) = 0$. Se π è di classe 1 rispetto a K, allora $\pi(f) = \hat{f}(\varphi_\pi) P^K_\pi$.*

Dimostrazione. Segue facilmente dal Lemma 4.3. $\square$

Teorema 8.3 (di unicità della trasformata di Fourier sferica). *Sia $f \in L^1(K; G; K)$ tale che $\hat{f} = 0$ su Δ^+. Allora $f = 0$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 8.2, l'ipotesi implica che $\pi(f) = 0$ per ogni rappresentazione unitaria irriducibile di G. La conclusione sgeue dal Corollario 4.3 del Cap. IV. $\square$

Il prossimo risultato è l'estensione del Teorema di Bochner per gruppi abeliani (Teorema 3.2 del Capitolo III).

[5] E' ovvio che, essendo $\dim \mathcal{H}^K_\pi = 1$, φ_π non dipende dalla scelta di v.

Teorema 8.4 (di Bochner-Godement). *Sia ψ una funzione di tipo positivo bi-K-invariante su G. Esiste una e una sola misura positiva μ_ψ su Δ^+ tale che*

$$\psi(g) = \int_{\Delta^+} \varphi(g)\, d\mu_\psi(\varphi) \ . \tag{8.2}$$

Dimostrazione. Siano $M(\Delta^+)$ lo spazio delle misure di Borel finite e regolari su Δ^+, con la topologia debole* indotta dalla dualità con $C_0(\Delta^+)$, $\mathcal{M}$ il cono delle misure positive, e $\mathcal{M}_0$ il sottoinsieme delle misure positive μ tali che $\int_{\Delta^+} d\mu \leq 1$. $\mathcal{M}_0$ è convesso e compatto nella topologia debole* e i suoi punti estremali sono la misura nulla e le delta di Dirac dei punti di Δ^+.

Consideriamo l'applicazione $T : M(\Delta^+) \to L^\infty(K;G;K)$ definita da

$$T\mu(g) = \int_{\Delta^+} \varphi(g)\, d\mu(\varphi) \ .$$

Essa è lineare e continua per le due topologie debole*. Basta osservare che, se $f \in L^1(K;G;K)$,

$$\int_G f(g) T\mu(g)\, dg = \int_{\Delta^+} \hat{f}(\varphi)\, d\mu(\varphi)$$

e che $\hat{f} \in C_0(\Delta^+)$.

Chiaramente T applica $\mathcal{M}_0$ in $\mathcal{P}_0^K$ e $T\delta_\varphi = \varphi$. Ma allora $T(\mathcal{M}_0)$ contiene tutti i punti estremali di $\mathcal{P}_0^K$, e dunque il loro inviluppo convesso chiuso. Per il Teorema di Krein-Milman, questo è tutto $\mathcal{P}_0^K$.

Questo dimostra, per $\psi \in \mathcal{P}_0^K$ l'esistenza di una misura positiva μ per cui valga la (8.2).

Supponiamo ora che μ_1 e μ_2 soddisfino entrambe la (8.2) con la stessa ψ. Se $f \in L^1(K;G;K)$,

$$\int_G f(g)\psi(g)\, dg = \int_{\Delta^+} \hat{f}(\varphi)\, d\mu_1(\varphi) = \int_{\Delta^+} \hat{f}(\varphi)\, d\mu_2(\varphi) \ .$$

Per il Lemma 8.1, $\mu_1 = \mu_2$. $\square$

Passiamo ora alla costruzione della *misura di Plancherel* su Δ^+. Ci restringiamo inizialmente a una classe particolare di funzioni di tipo positivo, quelle esprimibili come somma finita

$$f = \sum_{j=1}^n u_j * u_j^* \ ,$$

dove ogni u_j è in $C_c(K;G;K)$. Indichiamo con $\mathcal{Q}^+$ tale classe. Per la (8.1), $\hat{f} \geq 0$ su Δ^+ per ogni $f \in \mathcal{Q}^+$.

Lemma 8.5. *Esiste una unica misura di Borel regolare e positiva σ su Δ^+ tale che, se $f \in \mathcal{Q}^+$, allora $\hat{f} \in L^1(\Delta^+, \sigma)$, $\mu_f = \hat{f}\sigma$ e vale la* formula di inversione

$$f(g) = \int_{\Delta^+} \hat{f}(\varphi)\varphi(g)\, d\sigma(\varphi) \ . \tag{8.3}$$

Dimostrazione. Siano $f_1, f_2 \in \mathcal{Q}^+$. Allora anche $f_3 = f_1 * f_2 \in \mathcal{Q}^+$

Per il Teorema di Bochner-Godement esistono tre misure $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathcal{M}$ tali che $f_j = \int_{\Delta^+} \varphi \, d\mu_j(\varphi)$. Per la (4) del §6,

$$f_1 * f_2(g) = \int_{\Delta^+} f_1 * \varphi(g) \, d\mu_2(\varphi) = \int_{\Delta^+} \hat{f}_1(\varphi)\varphi(g) \, d\mu_2(\varphi) \ .$$

Analogamente,

$$f_1 * f_2(g) = \int_{\Delta^+} \hat{f}_2(\varphi)\varphi(g) \, d\mu_1(\varphi) \ .$$

Per il Lemma 8.1, segue che

$$\mu_3 = \hat{f}_1 \mu_2 = \hat{f}_2 \mu_1 \ .$$

Sia $A_j = \{\varphi : \hat{f}_j(\varphi) \neq 0\} \subset \Delta^+$. Su $A_3 = A_1 \cap A_2$ vale l'uguaglianza

$$\frac{1}{\hat{f}_1} \mu_1 = \frac{1}{\hat{f}_2} \mu_2 \ .$$

Osserviamo ora che per ogni $\varphi_0 \in \Delta^+$ esiste $f = u * u^* \in \mathcal{Q}^+$ tale che $\hat{f}(\varphi_0) \neq 0$. Basta infatti prendere u continua a supporto compatto e bi-K-invariante tale che $\int_G u(g)\varphi_0(g^{-1}) \, dg \neq 0$.

Dato dunque un boreliano B relativamente compatto in Δ^+, si può costruire una funzione $f_B \in \mathcal{Q}^+$ tale che $\hat{f}_B > 0$ su $\bar{B}$. Poniamo

$$\sigma(B) = \int_B \frac{1}{\hat{f}_B(\varphi)} \, d\mu_{f_B}(\varphi)$$

(la definizione non dipende dalla scelta di f_B). Chiaramente σ è una misura regolare positiva. L'identità $\mu_f = \hat{f}\sigma$ è evidente, e da essa seguono la formula di inversione. L'unicità di della misura μ_f garantita dal Teorema di Bochner-Godement assicura l'unicità della misura σ soddisfacente la (8.3). $\square$

Teorema 8.6 (di Plancherel-Godement). *Se $u \in C_c(K;G;K)$, allora $\hat{u} \in L^2(\Delta^+, \sigma)$ e*

$$\int_G |u(g)|^2 \, dg = \int_{\Delta^+} |\hat{u}(\varphi)|^2 \, d\sigma(\varphi) \ . \tag{8.4}$$

La trasformata di Fourier sferica si estende per continuità a un operatore unitario da $L^2(K;G;K)$ su $L^2(\Delta^+, \sigma)$. La misura di Plancherel σ è l'unica misura su Δ^+ per cui valga la (8.4) *per ogni $u \in C_c(K;G;K)$.*

Dimostrazione. Per la prima affermazione, basta applicare la (8.3) a $f = u * u^*$, in quanto $\hat{f} = |\hat{u}|^2$ su Δ^+ e $u * u^*(e) = \|u\|_2^2$. Da questo segue anche l'unicità della misura che soddisfi la (8.4).

Per densità, la (8.4) vale per ogni $f \in L^1 \cap L^2(K;G;K)$ e la trasformata $f \mapsto \hat{f}$ si estende per continuità a un operatore isometrico da $L^2(K;G;K)$ a $L^2(\Delta^+, \sigma)$. Rimane da dimostrare che tale operatore è suriettivo. Poiché ha immagine chiusa, basta dimostrare che l'immagine è densa. Più precisamente, dimostriamo che ogni funzione in $C_c(\Delta^+)$ è approssimabile in norma L^2 con trasformate di funzioni in $L^1 \cap L^2(K;G;K)$.

Data $\eta \in C_c(\Delta^+)$, esiste $f \in \mathcal{Q}^+$ tale che $\hat{f} > 0$ sul supporto di η. Esiste dunque $\eta' \in C_c(\Delta^+)$ tale che $\eta = \eta' \hat{f}$ su Δ^+.

Per il Lemma 8.1, esiste $h \in C_c(K;G;K)$ tale che $\|\eta' - \hat{h}\|_\infty < \varepsilon$. Allora $f * h \in C_c(K;G;K)$ e

$$\big|\widehat{f * h}(\varphi) - \eta(\varphi)\big| = |\hat{f}(\varphi)|\big|\hat{h}(\varphi) - \eta'(\varphi)\big| < \varepsilon|\hat{f}(\varphi)| \ .$$

Dunque

$$\int_{\Delta^+} \big|\widehat{f * h}(\varphi) - \eta(\varphi)\big|^2 \, d\sigma(\varphi) < \varepsilon^2 \|\hat{f}\|_2^2 = \varepsilon^2 \|f\|_2^2 \ . \qquad \square$$

Indicheremo con $\hat{f} \in L^2(\Delta^+, \sigma)$ l'immagine, secondo il prolungamento per continuità della trasformata di Fourier sferica, di una generica funzione f in $L^2(K;G;K)$. A differenza della trasformata di una funzione L^1, si noti che $\hat{f}$ è definita solo σ-q.o. In generale, entrambe le inclusioni $\operatorname{supp}\sigma \subset \Delta^+ \subset \Delta$ possono essere proprie.

Il Teorema di unicità 8.3 ammette il seguente raffinamento.

Corollario 8.7. *Se $f \in L^1(K;G;K)$ e $\hat{f} = 0$ su $\operatorname{supp}\sigma$, allora $f = 0$.*

Dimostrazione. L'ipotesi implica che $f * u = 0$ per ogni $u \in L^1 \cap L^2(K;G;K)$ e per continuità per ogni $u \in L^1(K;G;K)$. Per il Lemma 8.1, $\hat{f} = 0$ su Δ^+ e dunque $f = 0$. $\square$

Osserviamo infine che dalla (8.4) si ricava per polarizzazione l'identità

$$\int_G f(g)\overline{u(g)}\, dg = \int_{\Delta^+} \hat{f}(\varphi)\overline{\hat{u}(\varphi)}\, d\sigma(\varphi) \ , \tag{8.5}$$

per $f, u \in L^2(K;G;K)$.

9. Formula di inversione e altre conseguenze

D'ora in poi scriveremo semplicemente $L^p(\Delta^+)$ sottintendendo la misura di Plancherel σ. Indichiamo con $^\sharp$ l'operatore

$$f^\sharp(g) = \int_{K \times K} f(kgk')\, dk\, dk' \ .$$

Lemma 9.1. *Sia $\{\eta_i\}$ un'identità approssimata in $L^1(G)$. Per ogni $f \in L^p(G;K)$, $1 \le p < \infty$, o $f \in C_0(G;K)$ per $p = \infty$,*

$$\lim_i \|f * \eta_i^\sharp - f\|_p = 0 \ .$$

Inoltre $\widehat{\eta_i^\sharp} \to 1$ uniformemente sui compatti di Δ.

Dimostrazione. Per ogni scelta di k_1, k_2, sia $\eta_i^{k_1,k_2}(g) = \eta_i(k_1 g k_2)$. Allora

$$\begin{aligned}\lim_i f * \eta_i^{k_1,k_2}(g) &= \lim_i \int_G f(gk_2^{-1}h^{-1}k_1^{-1})\eta_i(h)\,dh \\ &= \lim_i \int_G f(gk_2^{-1}h^{-1})\eta_i(h)\,dh \\ &= f(gk_2^{-1}) = f(g)\ ,\end{aligned}$$

in norma L^p. Quindi

$$\lim_i \|f * \eta_i^\sharp - f\|_p \le \lim_i \int_{K\times K} \|f * \eta_i^{k_1,k_2} - f\|_p\,dk_1\,dk_2 = 0\ .$$

In particolare, se $f \in L^1(K;G;K)$,

$$\lim_i \hat f \widehat{\eta_i^\sharp} = \hat f$$

uniformemente su Δ. Data $\varphi_0 \in \Delta$, esiste f tale che $\hat f(\varphi_0) = 1$. Se U è un intorno di φ_0 su cui $|\hat f| > 1/2$, si ha allora che $\widehat{\eta_i^\sharp}(\varphi) \to 1$ uniformemente su U. L'estensione a ogni compatto è ovvia. $\square$

Si noti che proprietà come la continuità, il supporto compatto, la hermitianità[6] si trasferiscono dalle η_i alle $\eta_i^\sharp$.

Lemma 9.2. *Sia $f \in C_c(K;G;K)$ e supponiamo che $\hat f \in L^1(\Delta^+)$. Allora*

$$f(g) = \int_{\Delta^+} \hat f(\varphi)\varphi(g)\,d\sigma(\varphi)\ . \tag{9.1}$$

Dimostrazione. Si prenda una famiglia $\{\eta_i^\sharp\}$ come nel Lemma 9.1, hermitiana, continua e a supporto compatto. Posto $u = \eta_i^\sharp$ nella (8.5), il primo membro è uguale a $\eta_i^\sharp * f(e)$. Per convergenza dominata,

$$f(e) = \lim_i \int_{\Delta^+} \hat f(\varphi)\overline{\widehat{\eta_i^\sharp}(\varphi)}\,d\sigma(\varphi) = \int_{\Delta^+} \hat f(\varphi)\,d\sigma(\varphi)\ .$$

Per un generico $g \in G$ abbiamo poi

$$\eta_i^\sharp * f(g) = \int_G \eta_i^\sharp(h) f(h^{-1}g)\,dh = \int_G \overline{\eta_i^\sharp(h)} f(hg)\,dh = \langle R_g f, \eta_i^\sharp\rangle = \langle (R_g f)^\sharp, \eta_i^\sharp\rangle\ .$$

Si ha

$$\begin{aligned}\widehat{(R_g f)^\sharp}(\varphi) &= \int_G (R_g f)^\sharp(h)\varphi(h)\,dh = \int_G R_g f(h)\varphi(h)\,dh \\ &= \int_G f(h)\varphi(hg^{-1})\,dh = \int_G\int_K f(hk)\varphi(hg^{-1})\,dk\,dh \\ &= \int_G\int_K f(h)\varphi(hk^{-1}g^{-1})\,dk\,dh \\ &= \int_G f(h)\varphi(h)\varphi(g^{-1})\,dh \\ &= \hat f(\varphi)\varphi(g^{-1})\ .\end{aligned}$$

[6] Cioè la condizione $\eta_i^* = \eta_i$.

Dunque, per la (8.5)

$$\eta_i^\sharp * f(g) = \int_{\Delta^+} \hat{f}(\varphi)\varphi(g^{-1})\overline{\widehat{\eta_i^\sharp}(\varphi)}\, d\sigma(\varphi) \ ,$$

e passando al limite si ottiene la (9.1). □

La (9.1) costituisce la *formula di inversione* della trasformata di Fourier sferica, e con opportune cautele dovute a questioni di convergenza degli integrali coinvolti, vale sotto ipotesi più ampie di quelle indicate. Per esempio, valgono i seguenti enunciati.

Proposizione 9.3.

(i) *Se* $f_1, f_2 \in L^2(K;G;K)$,

$$f_1 * f_2(g) = \int_{\Delta^+} \hat{f}_1(\varphi)\hat{f}_2(\varphi)\varphi(g)\, d\sigma(\varphi) \ .$$

(ii) *Se* $\eta \in L^1(\Delta^+)$, *la funzione*

$$f(g) = \int_{\Delta^+} \eta(\varphi)\varphi(g)\, d\sigma(\varphi)$$

è in $C_0(K;G;K)$ *ed esistono* $f_1, f_2 \in L^2(K;G;K)$ *tali che* $f = f_1 * f_2$ *e* $\eta = \hat{f}_1\hat{f}_2$.

(iii) *Data* $f \in L^2(K;G;K)$, *sia* $\{\Sigma_n\}$ *una successione di compatti di* Δ^+ *tali che* $\hat{f} = 0$ *quali ovunque fuori dalla loro unione. Nella norma di* $L^2(G)$,

$$f = \lim_{n\to\infty} \int_{\Sigma_n} \hat{f}(\varphi)\varphi\, d\sigma(\varphi) \ .$$

Dimostrazione. Per la (i), si approssimino f_1 e f_2 in L^2 con funzioni in $C_c(K;G;K)$ e si applichi il Lemma 9.2.

Per la (ii), si scomponga η nel prodotto di due funzioni L^2, η_1, η_2, e si prenda f_j tale che $\hat{f}_j = \eta_j$. Si applichi quindi la (i). Per il Teorema 4.6 del Capitolo II, la convoluzione di due funzioni L^2 è in C_0.

La (iii) si ottiene per approssimazione. □

Vediamo ora altri tipi di conseguenze.

Se $1 < p < 2$ e $f \in L^p(K;G;K)$, si ponga $f_1(g) = f(g)$ se $|f(g)| > 1$, $f_1(g) = 0$ altrimenti, e si ponga $f_2(g) = f(g)$ se $|f(g)| \le 1$, $f_2(g) = 0$ altrimenti. Allora $f_1 \in L^1(K;G;K)$, $f_2 \in L^2(K;G;K)$, e $f = f_1 + f_2$. Definiamo $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$.

Teorema 9.4 (di Hausdorff-Young). *Se* $f \in L^p(K;G;K)$, *con* $1 \le p \le 2$, *allora* $\hat{f} \in L^{p'}(\Delta^+)$ *e* $\|\hat{f}\|_{p'} \le \|f\|_p$.

Dimostrazione. Segue dal Teorema di interpolazione di Riesz-Thorin, valendo per $p = 1$ e $p = 2$. □

10. Coppie di Gelfand compatte

Sia (G,K) una coppia di Gelfand con G compatto (diremo semplicemente una *coppia di Gelfand compatta*). Indichiamo con Π_K l'insieme delle (classi di equivalenza di) rappresentazioni di classe 1 rispetto a K). Se $\pi \in \Pi_K$, fissiamo un generatore unitario e^π dello spazio unidimensionale $\mathcal{H}_\pi^K$. Le funzioni $\varphi_\pi = \langle e^\pi, \pi(g)e^\pi \rangle$ sono le funzioni sferiche di tipo positivo. Per il Teorema 3.3, $\{\sqrt{d_\pi} e^\pi\}$ è una base ortonormale di $L^2(K;G;K)$.

Lemma 10.1. *Le φ_π sono tutte le funzioni sferiche di (G,K).*

Dimostrazione. Per la (4) del §6, per ogni $f \in L^1(K;G;K)$,

$$f * \varphi(g) = (f * \varphi)(e)\varphi(g) \ .$$

Ne segue che, se φ_1 e φ_2 sono due funzioni sferiche,

$$\varphi_1 * \varphi_2 = (\varphi_1 * \varphi_2)(e)\varphi_1 = (\varphi_1 * \varphi_2)(e)\varphi_2 \ .$$

Quindi, se $(\varphi_1 * \varphi_2)(e) \neq 0$, allora $\varphi_1 = \varphi_2$. Altrimenti $\varphi_1 * \varphi_2 = 0$. Se dunque avessimo una funzione sferica φ non di tipo positivo, avremmo

$$\langle \varphi, \varphi_\pi \rangle = \varphi * \varphi_{\pi'}(e) = 0 \ ,$$

dove $\pi' \in \Pi_K$ è la rappresentazione controgradiente di π. Ma allora avremmo l'assurdo che $\varphi = 0$. $\square$

Abbiamo dunque $\Delta^+ = \Delta$, che può essere identificato con Π_K. Per l'ortogonalità delle φ_π, la topologia di Δ è necessariamente discreta.

Se $f \in L^2(K;G;K)$,

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \sum_{\pi \in \Pi_K} d_\pi |\langle f, e^\pi \rangle|^2 \\ &= \sum_{\pi \in \Pi_K} d_\pi |\hat{f}(\pi')|^2 \\ &= \sum_{\pi \in \Pi_K} d_\pi |\hat{f}(\pi)|^2 \ , \end{aligned}$$

da cui si deduce che $\sigma(\{\pi\}) = d_\pi$.

11. Algebre commutative di funzioni invarianti per automorfismi

Sia H un gruppo localmente compatto unimodulare, e sia K un gruppo compatto di automorfismi di H (indicheremo con $k \cdot h$ l'azione dell'automorfismo k sull'elemento h). Indichiamo con $L^1_K(H)$ il sottospazio di $L^1(H)$ delle funzioni invarianti sotto l'azione di K, cioè tali che

$$f \circ k = f \ , \qquad \forall\, k \in K \ .$$

$L^1_K(H)$ è chiusa per convoluzione e dunque è un'algebra di Banach.

Supporremo che $L^1_K(H)$ sia commutativa. Questa situazione rientra nell'ambito delle coppie di Gelfand attraverso la costruzione seguente.

Si consideri il gruppo G di applicazioni di H in sé ottenuto componendo gli elementi di K con le traslazioni sinistre di H stesso.

Dati $k \in K, h \in H$, si consideri l'applicazione

$$\psi_{h,k}(h') = h(k \cdot h') \ .$$

Allora

$$\begin{aligned} \psi_{h_1,k_1} \circ \psi_{h_2,k_2}(h') &= h_1\Big(k_1 \cdot \big(h_2(k_2 \cdot h')\big)\Big) \\ &= h_1(k_1 \cdot h_2)\big((k_1k_2) \cdot h'\big) \\ &= \psi_{h_1(k_1 \cdot h_2),k_1k_2}(h') \ . \end{aligned}$$

Quindi G è il *prodotto semidiretto* $H \rtimes K$, identificabile con il prodotto cartesiano $H \times K$ dotato del prodotto

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = \big(h_1(k_1 \cdot h_2), k_1k_2\big) \ .$$

Si verifica facilmente che $dh\, dk$ è una misura di Haar, sia destra che sinistra, di G.

Il fattore H è normale, mentre K non lo è in generale. Lo spazio quoziente G/K è comunque identificabile con H come spazio topologico, in quanto le classi laterali destre modulo K sono gli insiemi

$$\{(h_0, k : k \in K\} = (h_0, e)K \ .$$

Seguendo le notazioni del paragrafo 2, poniamo dunque $\Lambda(h, k) = h$, e se f è una funzione definita su H, poniamo $\Lambda^*(f)(h, k) = f(h)$.

Lemma 11.1. *Una funzione f definita su H è K-invariante se e solo se $\Lambda^*(f)$ è bi-K-invariante su G. Se $f_1, f_2 \in L^1_K(H)$, si ha*

$$\Lambda^*(f_1 * f_2) = \Lambda^*(f_1) * \Lambda^*(f_2) \ .$$

Dimostrazione. $\Lambda^*(f)$ è certamente K-invariante a destra. La K-invarianza a sinistra equivale alla proprietà

$$\Lambda^*(f)(k' \cdot h, k'k) = \Lambda^*(f)(h, k)$$

per ogni $k' \in K$. Ma questo equivale alla K-invarianza di f.

Si ha poi

$$\begin{aligned} \Lambda^*(f_1) * \Lambda^*(f_2)(h, k) &= \int_{H \times K} \Lambda^*(f_1)(h', k')\Lambda^*(f_2)\big((h', k')^{-1}(h, k)\big)\, dh'\, dk' \\ &= \int_{H \times K} \Lambda^*(f_1)(h', k')\Lambda^*(f_2)\big(({k'}^{-1} \cdot {h'}^{-1}, {k'}^{-1})(h, k)\big)\, dh'\, dk' \\ &= \int_{H \times K} f_1(h')f_2\big(({k'}^{-1} \cdot {h'}^{-1})({k'}^{-1} \cdot h)\big)\, dh'\, dk' \\ &= \int_{H \times K} f_1(h')f_2\big({k'}^{-1} \cdot ({h'}^{-1}h)\big)\, dh'\, dk' \\ &= \int_{H \times K} f_1(h')f_2({h'}^{-1}h)\, dh'\, dk' \\ &= f_1 * f_2(h) \ . \qquad \square \end{aligned}$$

Teorema 11.2. *$L^1_K(H)$ è commutativa se e solo se (G,K) è una coppia di Gelfand. Per una funzione $\varphi \in L^\infty_K(H)$ le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) *φ definisce un funzionale moltiplicativo su $L^1_K(H)$;*
(ii) *$\Lambda^*(\varphi)$ è una funzione sferica di (G,K);*
(iii) *φ soddisfa l'identità*

$$\int_K \varphi\big(h(k\cdot h')\big)\,dk = \varphi(h)\varphi(h')\ . \tag{11.1}$$

La dimostrazione è semplice. Si tralascia la verifica che la (11.1) è equivalente alla (5.1) per $\Lambda^*(\varphi)$.

Per abuso di linguaggio, anche le funzioni soddisfacenti la (11.1) si chiamano funzioni sferiche.

Esempi.

(11.a) Prendiamo $H = \mathbb{R}^n$ e K un qualunque sottogruppo compatto di $GL(n,\mathbb{R})$. Essendo $L^1(\mathbb{R}^n)$ commutativa di per sé, lo è certamente anche $L^1_K(\mathbb{R}^n)$.

Sicuramente il funzionale

$$\lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle\xi,x\rangle}\,dx = \mathcal{F}f(\xi)\ ,$$

dove $\mathcal{F}$ indica la trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^n$, è moltiplicativo su $L^1_K(\mathbb{R}^n)$. Per rappresentarlo come integrazione contro una funzione K-invariante, basta mediare sull'azione di K:

$$\begin{aligned}\lambda(f) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(k^{-1}\cdot x)e^{-i\langle\xi,x\rangle}\,dx\\ &= \int_K\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle\xi,k\cdot x\rangle}\,dx\,dk\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\xi(x)\,dx\ ,\end{aligned}$$

dove

$$\varphi_\xi(x) = \int_K e^{-i\langle\xi,k\cdot x\rangle}\,dk = \int_K e^{-i\langle\,{}^tk\cdot\xi,x\rangle}\,dk\ .$$

Si noti che φ_ξ dipende solo dall'orbita di ξ sotto l'azione di ${}^tK = \{\,{}^tk : k \in K\}$.

Quelli così determinati sono tutti i funzionali moltiplicativi di $L^1_K(\mathbb{R}^n)$. Una dimostrazione di ciò è la seguente. Si considerino le due algebre di Banach con unità $A = L^1(\mathbb{R}^n) + \mathbb{C}\delta_0$ e $A_K = L^1_K(\mathbb{R}^n) + \mathbb{C}\delta_0$. Lo spettro di Gelfand di A è la compattificazione di Aleksandroff di $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, e la trasformata di Gelfand è $\widehat{f + c\delta_0}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) + c$, $\widehat{f + c\delta_0}(\infty) = c$.

Nello spettro di Gelfand di A_K troviamo i funzionali moltiplicativi $\lambda_\xi(f + c\delta_0) = \mathcal{F}f(\xi) + c$, associati alle orbite O_ξ di ${}^tK$, e il funzionale $\lambda_\infty(f + c\delta_0) = c$.

Supponiamo che λ sia un altro funzionale moltiplicativo, diverso da questi. Allora $\ker\lambda$ sarebbe un ideale massimale non contenuto in nessuno dei nuclei $\ker\lambda_\xi$, $\ker\lambda_\infty$. Quindi per ogni orbita O_ξ si troverebbe $\mu_\xi \in \ker\lambda$ tale che $\mathcal{F}\mu_\xi \neq 0$ su O_ξ, e analogamente ci sarebbe $\mu_\infty \in \ker\lambda$ tale che $\mathcal{F}\mu_\infty(\infty) \neq 0$.

Scelti opportuni intorni U_ξ, U_∞ delle varie orbite e di ∞, su cui la corrispondente trasformata sia diversa da 0, ed estratto da questi un sottoricoprimento finito di $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, $U_1, \dots, U_m$, avremmo che

$$\mu = \sum_{j=1}^{m} \mu_j * \mu_j^*$$

sarebbe in $\ker \lambda$ e avrebbe $\mathcal{F}\mu = \sum_j |\mathcal{F}\mu_j|^2$ strettamente positiva su $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, lo spettro di Gelfand di A. Ma allora μ ammetterebbe un inverso $\nu = g + c\delta_0$ in A e si avrebbe

$$\mathcal{F}\nu = \mathcal{F}g + c = \frac{1}{\mathcal{F}\mu} \ .$$

Ma la restrizione di $1/\mathcal{F}\mu$ a $\mathbb{R}^n$ è ${}^tK$-invariante, dunque anche $\mathcal{F}g$ lo sarebbe. In conclusione $\nu \in A_K$. Ma ciò contrasta con l'ipotesi che μ sia contenuta in un ideale proprio di A_K.

In conclusione, lo spettro di Gelfand Δ_K di $L^1_K(\mathbb{R}^n)$ si identifica con l'insieme delle orbite dell'azione di ${}^tK$ su $\mathbb{R}^n$. La topologia di Gelfand coincide con la topologia quoziente indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$.

In questo caso $\Delta_K = \Delta_K^+$. La misura di Plancherel σ su Δ_K è il *push-forward* della misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^n$ tramite la proiezione $P : \xi \mapsto O_\xi$: se B è un Boreliano in Δ_K, $\sigma(B) = |P^{-1}B|$.

(11.b) Sia H un gruppo compatto, e sia K il gruppo degli automorfismi interni di H. L'epimorfismo naturale di H su K, che all'elemento h associa l'automorfismo

$$\tau_h(g) = hgh^{-1} \ ,$$

passa al quoziente modulo il centro Z_H di H, per cui $K \sim H/Z_H$.

Le funzioni K-invarianti su H sono le *funzioni centrali* introdotte nel paragrafo 3 del Capitolo V.

La condizione (11.1) coincide con la (3.3) del Capitolo V, per cui le funzioni sferiche sono

$$\frac{1}{d_\pi}\chi_\pi \ ,$$

al variare di χ_π tra i caratteri delle rappresentazioni unitarie irriducibili di H.

La topologia di Gelfand è discreta (si noti che $H \rtimes K$ è compatto) e la misura di Plancherel associa a ogni $\pi \in \Pi$ la misura d_π^2.

Tornando al caso generale, prendiamo in esame le funzioni sferiche di tipo positivo.

Lemma 11.3. *Sia φ una funzione sferica su H. Allora φ è di tipo positivo se e solo se $\Lambda^*(\varphi)$ è di tipo positivo su G.*

Dimostrazione. Dalla caratterizzazione delle funzioni di tipo positivo nella (1) del paragrafo 7, segue immediatamente che, se $\Lambda^*(f)$ è di tipo positivo, lo è anche f.

Per l'implicazione inversa, siano $g_j = (h_j, k_j)$, $j = 1, \dots, n$, elementi di G. Essendo $(h_j, k_j) = (h_j, e)(e, k_j)$, si ha

$$\begin{aligned}
\Lambda^*(\varphi)(g_i^{-1}g_j) &= \Lambda^*(\varphi)\big((e, k_i^{-1})(h_i^{-1}, e)(h_j, e)(e, k_j)\big) \\
&= \Lambda^*(\varphi)(h_i^{-1}h_j, e) \\
&= \varphi(h_i^{-1}h_j) \ ,
\end{aligned}$$

da cui segue facilmente la conclusione. □

E' possibile discutere la commutatività di $L^1_K(H)$ e descrivere le funzioni sferiche di tipo positivo in termini di rappresentazioni, riferendosi alle rappresentazioni di H, senza ricorrere a quelle di G.

Per far questo, consideriamo l'azione di K sulle rappresentazioni di H. Sia π una rappresentazione unitaria irriducibile di H, e sia $k \in K$. Allora

$$\pi^k(h) = \pi(k^{-1} \cdot h)$$

definisce un'altra rappresentazione di H, sullo stesso spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\pi$, ma non necessariamente equivalente a π.

Lemma 11.4. *Una funzione $f \in L^1(H)$ è K-invariante se e solo se $\pi^k(f) = \pi(f)$ per ogni $k \in K$.*

Si verifica facilmente che $(k, \pi) \mapsto \pi^k$ è un'azione, e che, se $\pi_1 \sim \pi_2$, allora $\pi_1^k \sim \pi_2^k$.

Per passaggio al quoziente, K agisce sulle classi di equivalenza $[\pi]$, cioè sugli elementi dell' oggetto duale $\hat{H}$ di H.

Fissata una rappresentazione π unitaria irriducibile, sia K_π lo stabilizzatore di $[\pi]$. K_π è chiuso in K, dunque è compatto.

Per definizione, se $k \in K_\pi$, $\pi^k \sim \pi$. Esiste dunque U è un operatore unitario di intrallacciamento da π a π^k e,per il Lemma di Schur, tutti gli altri operatori di intrallacciamento sono i suoi multipli scalari. Quindi l'insieme degli operatori unitari di intrallacciamento è il "toro unidimensionale" $T^k = \mathbb{T}U = \{e^{i\theta}U : \theta \in \mathbb{T}\}$.

Se k' è un altro elemento di K_π, si verifica facilmente che

$$T^k T^{k'} = T^{kk'} \ ,$$

e che l'applicazione $T : k \mapsto T^k$ è fortemente continua nel senso che, dati $k_0 \in K_\pi$, $v \in \mathcal{H}_\pi$ e $\varepsilon > 0$, esiste un intorno V di k_0 tale che per ogni $k \in V$, $T^k v \subset \{w : d(w, T^{k_0}v) < \varepsilon\}$.

In altri termini, introducendo il gruppo unitario proiettivo

$$PU(\mathcal{H}_\pi) = U(\mathcal{H}_\pi)/\{e^{i\theta}I; \theta \in \mathbb{T}\} \ ,$$

T definisce un omomorfismo τ di K_π in $PU(\mathcal{H}_\pi)$ continuo rispetto alla topologia forte (passata al quoziente). Si dice che τ è una *rappresentazione unitaria proiettiva* di K_π su $\mathcal{H}_\pi$.

Vediamo ora che è possibile ampliare K_π in un sovragruppo $\tilde{K}_\pi$ in modo tale che τ sia sollevabile a una vera rappresentazione $\tilde{\tau}$ di $\tilde{K}_\pi$.

Sia $\tau^\sharp : K_\pi \to U(\mathcal{H}_\pi)$ un sollevamento continuo di τ, cioè una funzione continua la cui composizione con la proiezione canonica di $U(\mathcal{H}_\pi)$ su $PU(\mathcal{H}_\pi)$ sia τ. A meno di una moltiplicazione per un fattore costante, possiamo supporre che $\tau^\sharp(e)$ sia l'identità su $\mathcal{H}_\pi$.

Dati $k, k' \in K_\pi$, esiste uno scalare $\omega(k, k')$ di modulo 1 tale che

$$\tau^\sharp(k)\tau^\sharp(k') = \omega(k, k')\tau^\sharp(kk') \ .$$

La funzione ω è un *cociclo*, cioè soddisfa la proprietà

$$\omega(k, k'k'')\omega(k', k'') = \omega(k, k')\omega(kk', k'') \ , \tag{11.2}$$

semplice conseguenza della proprietà associativa in K_π. Inoltre ω è continua.

Lemma 11.5. *Sia $\tilde{K}_\pi = K_\pi \times \mathbb{T}$ con il prodotto*

$$(k, e^{i\theta})(k', e^{i\theta'}) = \big(kk', e^{i(\theta+\theta')}\omega(k, k')\big) \ .$$

Allora $\tilde{K}_\pi$ è un gruppo compatto e

$$\tilde{\tau}(k, e^{i\theta}) = e^{i\theta}\tau^\sharp(k)$$

è una rappresentazione unitaria su $\mathcal{H}_\pi$, tale che

$$\tilde{\tau}(k, e^{i\theta})\pi(h) = \pi(k^{-1} \cdot h)\tilde{\tau}(k, e^{i\theta}) \ . \tag{11.3}$$

Inoltre $\{e\} \times \mathbb{T}$ è un sottogruppo centrale di $\tilde{K}_\pi$ e $\tilde{K}_\pi/(\{e\} \times \mathbb{T}) \sim K_\pi$.

Dimostrazione. Ponendo nella (11.2) $k' = e$, si vede che $\omega(k, e) = \omega(e, k'')$ per ogni k, k''. Ne segue che $\omega(e, k) = \omega(k, e) = \omega(e, e) = 1$ per ogni k. Il resto sono semplici verifiche. $\square$

Coerentemente con la (11.3), si osservi che l'azione di K_π su H si estende in modo banale a $\tilde{K}_\pi$, ponendo $(k, e^{i\theta}) \cdot h = k \cdot h$.

Nella parte rimanente di questo paragrafo interverrà solo $\tilde{K}_\pi$, per cui useremo un unico simbolo, come k, k', u ecc., per denotare suoi elementi.

In generale, la rappresentazione $\tilde{\tau}$ è lungi dall'essere irriducibile. Utilizzando la compattezza di $\tilde{K}_\pi$, si può scomporre $\mathcal{H}_\pi$ come somma diretta componenti irriducibili.

Indichiamo con $\mathcal{P}_\pi$ l'oggetto duale $\widehat{\tilde{K}_\pi}$ di $\tilde{K}_\pi$. Se σ è un rappresentante di $[\sigma] \in \mathcal{P}_\pi$, indichiamo con d_σ la sua dimensione, con χ_σ il suo carattere e con P_π^σ l'operatore

$$P_\pi^\sigma = \int_{\tilde{K}_\pi} d_\sigma \chi_\sigma(k^{-1})\tilde{\tau}(k)\, dk \ . \tag{11.4}$$

Teorema 11.6. *P_π^σ è un proiettore ortogonale. La sua immagine $\mathcal{H}_\pi^\sigma$ è un sottospazio $\tilde{\tau}$-invariante di $\mathcal{H}_\pi$. Se non è banale, $\mathcal{H}_\pi^\sigma$ è decomponibile a sua volta nella somma diretta (finita o infinita) di sottospazi irriducibili su cui l'azione di $\tilde{K}_\pi$ è equivalente a σ.*

Se $f \in L^1_K(H)$, $\pi(f)$ commuta con $\tilde{\tau}(k)$ per ogni $k \in \tilde{K}_\pi$ e applica ciascun $\mathcal{H}_\pi^\sigma$ in sé. $L^1_K(H)$ è commutativa se e solo se, per ogni scelta di π e σ, $\mathcal{H}_\pi^\sigma$ è banale o irriducibile.

Il numero m_π^σ (con $0 \le m_\pi^\sigma \le \infty$) si chiama la *molteplicità* di σ in $\tilde{\tau}$.

Dimostrazione. Poiché $\overline{\chi_\sigma(k)} = \chi_\sigma(k^{-1})$,

$$(P_\pi^\sigma)^* = \int_{\tilde{K}_\pi} d_\sigma \chi_\sigma(k)\tilde{\tau}(k)^*\, dk = \int_{\tilde{K}_\pi} d_\sigma \chi_\sigma(k)\tilde{\tau}(k^{-1})\, dk = P_\pi^\sigma \ .$$

Inoltre, per la (3.1) del Capitolo V, $(d_\sigma\chi_\sigma) * (d_\sigma\chi_\sigma) = (d_\sigma\chi_\sigma)$, per cui

$$\begin{aligned}(P_\pi^\sigma)^2 &= \int_{\tilde{K}_\pi}\int_{\tilde{K}_\pi} d_\sigma^2 \chi_\sigma(k^{-1})\chi_\sigma(k'^{-1})\tilde{\tau}(kk')\, dk\, dk' \\ &= \int_{\tilde{K}_\pi}\int_{\tilde{K}_\pi} d_\sigma^2 \chi_\sigma(k'k^{-1})\chi_\sigma(k'^{-1})\tilde{\tau}(k)\, dk\, dk' \\ &= P_\pi^\sigma \ .\end{aligned}$$

Quindi P_π^σ è un proiettore ortogonale. Operando il cambiamento di variabile $u = kk'k^{-1}$,

$$\begin{aligned}\tilde\tau(k)P_\pi^\sigma &= \int_{\tilde K_\pi} d_\sigma\chi_\sigma({k'}^{-1})\tilde\tau(kk')\,dk'\\ &= \int_{\tilde K_\pi} d_\sigma\chi_\sigma(k^{-1}u^{-1}k)\tilde\tau(uk)\,du\\ &= \int_{\tilde K_\pi} d_\sigma\chi_\sigma(u^{-1})\tilde\tau(uk)\,du\\ &= P_\pi^\sigma\tilde\tau(k)\ .\end{aligned}$$

Da ciò segue che $\mathcal{H}_\pi^\sigma$ è $\tilde\tau$-invariante. Se $\rho \in \mathcal{P}_\pi$ è contenuta in $\tilde\tau_{|\mathcal{H}_\pi^\sigma}$, esistono $v, w \in \mathcal{H}_\pi^\sigma$ non nulli tali che $\varphi_{w,v}(k) = \langle\tilde\tau(k)v, w\rangle$ sia uguale a $\varphi_{w,v} * (d_\rho\chi_\rho)$. Ma

$$\begin{aligned}\varphi_{w,v}(k) &= \langle\tilde\tau(k)P_\pi^\sigma v, w\rangle\\ &= \int_{\tilde K_\pi} d_\sigma\chi_\sigma({k'}^{-1})\langle\tilde\tau(kk')v, w\rangle\,dk\\ &= \varphi_{w,v} * (d_\sigma\chi_\sigma)(k)\ .\end{aligned}$$

Siccome $\chi_\rho * \chi_\sigma = 0$ se $\rho \not\sim \sigma$ per il Teorema 3.1 del Capitolo V, può solo essere $\rho \sim \sigma$. Per il Corollario 1.5 del Capitolo V, $\mathcal{H}_\pi^\sigma$ si decompone nella somma diretta di m_π^σ (con $0 \le m_\pi^\sigma \le \infty$) sottospazi irriducibili, su ciascuno dei quali l'azione di $\tilde K_\pi$ è equivalente a σ.

Per il Lemma 11.4,

$$\tilde\tau(k)\pi(f) = \pi(f)\tilde\tau(k) \tag{11.5}$$

per ogni $f \in L^1_K(H)$ e $k \in \tilde K_\pi$.

Per la (11.4), segue facilmente che $P_\pi^\sigma\pi(f) = \pi(f)P_\pi^\sigma$, per cui $\pi(f)$ applica $\mathcal{H}_\pi^\sigma$ in sé.

Supponiamo che $\mathcal{H}_\pi^\sigma$ sia irriducibile per ogni π e σ. Segue dal Lemma di Schur che, per $f \in L^1_K(H)$, $\pi(f)$ agisce come un multiplo dell'identità su $\mathcal{H}_\pi^\sigma$. Quindi, se $f, g \in L^1_K(H)$, $\pi(f)\pi(g) = \pi(g)\pi(f)$ per ogni π. Per il Corollario 4.3 del Capitolo IV, $f * g = g * f$.

Viceversa, supponiamo che $L^1_K(H)$ sia commutativa. Gli operatori $\pi(f)_{|\mathcal{H}_\pi^\sigma}$, con $f \in L^1_K(H)$, formano una C^*-algebra, cui aggiungiamo l'identità, se necessario. Indichiamo con A la C^*-algebra con unità così ottenuta e sia E la risoluzione regolare dell'identità su $\Delta(A)$ ad essa associata, ai sensi del Teorema 5.5 del Capitolo I.

Se $\Delta(A)$ contenesse più di un punto, esisterebbe un proiettore spettrale $E(\omega) \neq 0, I$. Per la (11.5), $E(\omega)$ commuterebbe con la restrizione di $\tilde\tau$ a $\mathcal{H}_\pi^\sigma$ e i sottospazi $V = \ker E(\omega)$, $V^\perp = \operatorname{im} E(\omega)$ sarebbero $\tilde\tau$-invarianti e $\pi(f)$-invarianti, per $f \in L^1_K(H)$. Dati $v \in V$, $w \in V^\perp$ e $g \in L^1(H)$, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{\tilde K_\pi}\langle\tilde\tau(k^{-1})\pi(g)\tilde\tau(k)v, w\rangle\,dk &= \int_{\tilde K_\pi}\int_H g(h)\langle\tilde\tau(k^{-1})\pi(h)\tilde\tau(k)v, w\rangle\,dh\,dk\\ &= \int_{\tilde K_\pi}\int_H g(h)\langle\pi(k^{-1}\cdot h)v, w\rangle\,dh\,dk\\ &= \int_{\tilde K_\pi}\int_H g(k\cdot h)\langle\pi(h)v, w\rangle\,dh\,dk\\ &= \langle\pi(g_0)v, w\rangle\\ &= 0\ ,\end{aligned} \tag{11.6}$$

dove $g_0(h) = \int_{\tilde{K}_\pi} g(k \cdot h)\, dk \in L^1_K(H)$. Quindi l'operatore

$$\int_{\tilde{K}_\pi} \tilde{\tau}(k^{-1})\pi(f)\tilde{\tau}(k)\, dk$$

applicherebbe V in sé per ogni $f \in L^1(H)$.

Ma $\{\pi(f) : f \in L^1(H)\}$ è fortemente denso in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ e dunque $\{\pi(f)_{|\mathcal{H}^\sigma_\pi} : f \in L^1(H)\}$ è fortemente denso in $\mathcal{L}(\mathcal{H}^\sigma_\pi)$. Quindi avremmo che per ogni $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^\sigma_\pi)$ l'operatore

$$\tilde{A} = \int_{\tilde{K}_\pi} \tilde{\tau}(k^{-1})A\tilde{\tau}(k)\, dk$$

applicherebbe V in sé. Siano allora $V_1 \subset V$ e $V_2 \subset V^\perp$ sottospazi $\tilde{\tau}$-invarianti irriducibili, e sia $A : V_1 \to V_2$ un operatore di intrallacciamento non nullo. Estendiamo A a tutto $\mathcal{H}^\sigma_\pi$ come l'operatore nullo su $V_1^\perp$. Allora $\tilde{A} = A$, da cui l'assurdo.

Se quindi $\Delta(A)$ consiste di un unico punto, vuol dire che gli operatori $\pi(f)$, con $f \in L^1_K(H)$, agiscono su $\mathcal{H}^\sigma_\pi$ come multipli scalari dell'identità. Supponiamo allora che $\mathcal{H}^\sigma_\pi$ non sia irriducibile rispetto a $\tilde{\tau}$. Esisterebbe allora un sottospazio V proprio, non banale e $\tilde{\tau}$-invariante. Lo stesso argomento di prima porterebbe all'assurdo. □

Corollario 11.7. *Se $L^1_K(H)$ è commutativa, e $m^\sigma_\pi = 1$, $\pi(f)_{|\mathcal{H}^\sigma_\pi}$ è un multiplo scalare $\lambda^\sigma_\pi(f)$ dell'identità. Il funzionale λ^σ_π è moltiplicativo e $\lambda^\sigma_{\pi^k} = \lambda^\sigma_\pi$ per ogni $k \in K$. La funzione sferica associata è*

$$\varphi^\sigma_\pi(h) = \frac{1}{d_\sigma} \int_K \mathrm{tr}\left(\pi^k(h)_{|\mathcal{H}^\sigma_\pi}\right) dk \ . \tag{11.7}$$

Dimostrazione. La prima affermazione segue dal Teorema 11.6 e dal Lemma di Schur. Ovviamente $\lambda^\sigma_\pi(f * g) = \lambda^\sigma_\pi(f)\lambda^\sigma_\pi(g)$.

Dato $k \in K$, sia $\pi' = \pi^k$. Siccome K agisce transitivamente su $\{[\pi^k] : k \in K\} \subset \hat{G}$ e lo stabilizzatore di $[\pi]$ è K_π, lo stabilizzatore di $[\pi']$ è $K_{\pi'} = kK_\pi k^{-1}$.

Per $u \in K_{\pi'}$, il toro T^u di operatori unitari di intrallacciamento da π' a ${\pi'}^u$ coincide con $T^{{k'}^{-1}uk'}$. Il sollevamento ${\tau'}^\sharp$ di $\tau' : u \mapsto T^u$ a $\mathcal{H}_\pi$ può dunque essere scelto come

$${\tau'}^\sharp(u) = \tau^\sharp({k'}^{-1}uk') \ ,$$

dando luogo al cociclo

$$\omega'(u, u') = \omega'({k'}^{-1}uk', {k'}^{-1}u'k') \ ,$$

da cui risulta che l'applicazione $(u, e^{i\theta}) \mapsto ({k'}^{-1}uk', e^{i\theta})$ è un isomorfismo di $\tilde{K}_{\pi'}$ su $\tilde{K}_\pi$. Ne consegue che

$$\tilde{\tau}'(u, e^{i\theta}) = \tilde{\tau}({k'}^{-1}uk', e^{i\theta}) \ .$$

Ma allora $\tilde{\tau}'$ e $\tilde{\tau}$ agiscono su $\mathcal{H}_\pi$ attraverso gli stessi operatori, per cui[7] $\mathcal{H}^\sigma_{\pi'} = \mathcal{H}^\sigma_\pi$ per ogni $k \in K$ e $\sigma \in \hat{K}_\pi$. Essendo poi $\pi'(f) = \pi(f)$ per $f \in L^1_K(H)$, concludiamo che $\lambda^\sigma_{\pi'} = \lambda^\sigma_\pi$.

[7] L'isomorfismo indicato sopra tra $\tilde{K}_{\pi'}$ e $\tilde{K}_\pi$ induce un isomorfismo tra $\hat{K}_{\pi'}$ e $\hat{K}_\pi$. Per questo motivo non distinguiamo tra rappresentazioni di K_π e rappresentazioni di $K_{\pi'}$.

Inoltre,

$$\lambda_\pi^\sigma(f) = \frac{1}{d_\sigma}\mathrm{tr}\left(\pi(f)_{|\mathcal{H}_\pi^\sigma}\right) = \frac{1}{d_\sigma}\int_H f(h)\mathrm{tr}\left(\pi(h)_{|\mathcal{H}_\pi^\sigma}\right) dh\ .$$

La funzione $(d_\sigma)^{-1}\mathrm{tr}\left(\pi(h)_{|\mathcal{H}_\pi^\sigma}\right)$ non è K-invariante in generale. Tuttavia

$$\lambda_\pi^\sigma(f) = \int_K \lambda_{\pi^k}^\sigma(f)\, dk = \int_H f(h)\frac{1}{d_\sigma}\int_K \mathrm{tr}\left(\pi^k(h)_{|\mathcal{H}_\pi^\sigma}\right) dk\, dh\ . \qquad \square$$

Corollario 11.8. *Sia $v \in \mathcal{H}_\pi^\sigma$. Allora*

$$\int_K \langle \pi(k^{-1}\cdot h)v, v\rangle\, dk = \|v\|^2\varphi_\pi^\sigma(h)\ .$$

Dimostrazione. L'operatore

$$B(h) = \int_K \pi(k^{-1}\cdot h)\, dk \tag{11.8}$$

commuta con $\tilde\tau$. Infatti, se $u \in \tilde K_\pi$,

$$\begin{aligned}\tilde\tau(u)B(h) &= \int_K \tilde\tau(u)\pi(k^{-1}\cdot h)\, dk\\ &= \int_K \pi\big((uk^{-1})\cdot h\big)\tilde\tau(u)\, dk\\ &= B(h)\tilde\tau(u)\ .\end{aligned}$$

Quindi $B(h)$ applica ciascun $\mathcal{H}_\pi^\sigma$ in sé, agendo su di esso come un multiplo scalare $b(h)$ dell'identità. Se $\{e_1, \dots, e_{d_\sigma}\}$ è una base ortonormale di $\mathcal{H}_\pi^\sigma$,

$$\begin{aligned}b(h) &= \frac{1}{d_\sigma}\sum_{j=1}^{d_\sigma}\langle B(h)e_j, e_j\rangle\\ &= \frac{1}{d_\sigma}\mathrm{tr}\left(B(h)\right)_{|\mathcal{H}_\pi^\sigma}\\ &= \varphi_\pi^\sigma(h)\ .\end{aligned}$$

Questo dimostra che

$$\int_K \langle \pi(k^{-1}\cdot h)v, v\rangle\, dk = \langle B(h)v, v\rangle = \|v\|^2\varphi_\pi^\sigma(h)\ . \qquad \square$$

Teorema 11.9. *Le funzioni in* (11.7) *sono tutte e sole le funzioni sferiche di tipo positivo. Inoltre* $\varphi_\pi^\sigma = \varphi_{\pi'}^{\sigma'}$ *se e solo se* $[\pi'] = [\pi^k]$ *per qualche* $k \in K$ *e* $[\sigma] = [\sigma']$.

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathcal{P}, \mathcal{P}_0$ rispettivamente il cono delle funzioni di tipo positivo su H e il suo "tronco unitario" delle funzioni $\varphi \in \mathcal{P}$ tali che $\varphi(e) \le 1$. Indichiamo poi con $\mathcal{P}^K, \mathcal{P}_0^K$ rispettivamente il sottocono delle funzioni K-invarianti di tipo positivo e la sua intersezione con $\mathcal{P}_0$. Per il Lemma 11.3, le funzioni sferiche (intese come funzioni K-invarianti su H) sono i punti estremali non nulli di $\mathcal{P}_0^K$. Il proiettore

$$Pf(h) = \int_K f(k^{-1} \cdot h)\, dk$$

da $L^\infty(H)$ a $L_K^\infty(H)$ applica $\mathcal{P}$ su $\mathcal{P}_K$ e $\mathcal{P}_0$ su $\mathcal{P}_0^K$. Quindi $\mathcal{P}_0^K$ è l'inviluppo convesso chiuso delle proiezioni dei punti estremali di $\mathcal{P}_0$. Pertanto ogni punto estremale di $\mathcal{P}_0^K$ è la proiezione di un punto estremale di $\mathcal{P}_0$.

Sia dunque ψ estremale in $\mathcal{P}_0$ e non nulla. Per il Teorema 4.1 del Capitolo IV, $\psi(h) = \langle \pi(h)v, v\rangle$, dove π è irriducibile e $v \in \mathcal{H}_\pi$ ha norma 1. Allora

$$P\psi(h) = \int_K \langle \pi(k^{-1} \cdot h)v, v\rangle\, dk\ .$$

Mantenendo le notazioni precedenti, sia Σ_π l'insieme delle rappresentazioni irriducibili di $\tilde{K}_\pi$ contenute in $\tilde{\tau}$. Allora $v = \sum_{\sigma\in\Sigma_\pi} t_\sigma v_\sigma$, con v_σ vettore unitario di $\mathcal{H}_\pi^\sigma$, $0 \le t_\sigma \le 1$ e $\sum_\sigma t_\sigma^2 = 1$.

Ma allora, se $B(h)$ è l'operatore nella (11.8),

$$\begin{aligned} P\psi(h) &= \langle B(h)v, v\rangle \\ &= \sum_{\sigma\in\Sigma_\pi} t_\sigma^2 \langle B(h)v_\sigma, v_\sigma\rangle \\ &= \sum_{\sigma\in\Sigma_\pi} t_\sigma^2 \varphi_\pi^\sigma(h)\ . \end{aligned}$$

Quindi $P\psi$ è estremale se e solo se esiste σ tale che $t_\sigma = 1$, cioè $v \in \mathcal{H}_\pi^\sigma$.

Supponiamo ora che $\varphi_\pi^\sigma = \varphi_{\pi'}^{\sigma'}$. Siano $\{e_1, \dots, e_{d_\sigma}\}$, $\{e'_1, \dots, e'_{d_{\sigma'}}\}$ basi ortonormali di $\mathcal{H}_\pi^\sigma$ e $\mathcal{H}_{\pi'}^{\sigma'}$ rispettivamente. Allora

$$d_\sigma \varphi_\pi^\sigma(h) = \sum_{j=1}^{d_\sigma} \langle \pi(h)e_j, e_j\rangle$$

è un coefficiente diagonale della rappresentazione $\pi^\sharp = \pi\otimes I$ di H su $\mathcal{H}_{\pi^\sharp} = \mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}_\pi^\sigma$, data da[8]

$$\pi^\sharp(h)(v\otimes w) = \big(\pi(v)\big)\otimes w\ .$$

Infatti, se $v^\sharp = \sum_j e_j \otimes e_j$,

$$\langle \pi^\sharp(h)v^\sharp, v^\sharp\rangle = \sum_{j=1}^{d_\sigma} \langle \pi^\sharp(h)(e_j\otimes e_j), e_j\otimes e_j\rangle = \sum_{j=1}^{d_\sigma}\langle \pi(h)e_j, e_j\rangle\ .$$

[8] Il secondo fattore $\mathcal{H}_\pi^\sigma$ nel prodotto tensoriale potrebbe essere un qualunque spazio di dimensione d_σ, in quanto su di esso non si effettua alcuna operazione non banale. La scelta di $\mathcal{H}_\pi^\sigma$ è solo per economia di notazioni.

Il vettore $v^\sharp$ è ciclico. Sia infatti $w^\sharp \in \mathcal{H}_{\pi^\sharp}$ ortogonale a $\pi^\sharp(f)v^\sharp$ per ogni $f \in L^1(H)$. Posto $w^\sharp = \sum_{j=1}^{d_\sigma} w_j \otimes e_j$, abbiamo

$$\begin{aligned}\langle \pi^\sharp(f)v^\sharp, w^\sharp\rangle &= \sum_{j,k=1}^{d_\sigma} \big\langle \big(\pi(f)e_j\big) \otimes e_j, w_k \otimes e_k\big\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{d_\sigma} \langle \pi(f)e_j, w_j\rangle \\ &= 0\ .\end{aligned}$$

Per la densità forte di $\{\pi(f)\}$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$,

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \langle Ae_j, w_j\rangle = 0$$

per ogni $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$. Si prenda A tale che $Ae_j = w_j$ per concludere che $w^\sharp = 0$.

Allo stesso modo, $\varphi_{\pi'}^{\sigma'}$ è il coefficiente diagonale della rappresentazione ${\pi'}^\sharp = \pi' \otimes I$ di H su $\mathcal{H}_{\pi'^\sharp} = \mathcal{H}_{\pi'} \otimes \mathcal{H}_{\pi'}^{\sigma'}$ associato al vettore ciclico ${v'}^\sharp = \sum_{j=1}^{d_{\sigma'}} e'_j \otimes e'_j$.

Per il Teorema 3.4 del Capitolo IV, $\pi^\sharp$ e ${\pi'}^\sharp$ sono equivalenti ed esiste un operatore di intrallacciamento unitario $U : \mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}_\pi^\sigma \to \mathcal{H}_{\pi'} \otimes \mathcal{H}_{\pi'}^{\sigma'}$ tale che $Uv^\sharp = {v'}^\sharp$.

Sotto l'azione di $\pi^\sharp$, $\mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}_\pi^\sigma$ si scompone nella somma di d_σ copie di π. Infatti, ogni sottospazio della forma $\mathcal{H}_\pi \otimes (\mathbb{C}u_0)$ è $\pi^\sharp$-invariante e dà luogo a una sottorappresentazione equivalente a π.

Più precisamente, questi sono i soli sottospazi $\pi^\sharp$-invarianti irriducibili. Supponiamo infatti che un sottospazio chiuso $\pi^\sharp$-invariante X contenga un elemento $x = \sum_{j=1}^k v_j \otimes u_j$, con $u_1, \dots, u_k$ linearmente indipendenti e $v_1, \dots, v_k$ altrettanto. Per la densità forte di $\{\pi(f) : f \in L^1(H)\}$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$, X contiene allora ogni elemento della forma $\sum_{j=1}^k Av_j \otimes u_j$, con $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$. Scegliendo A tale che $Av_j \neq 0$ solo per $j = 1$, si deduce che X contiene un elemento della forma $v' \otimes u_1 \neq 0$, e dunque tutto $\mathcal{H}_\pi \otimes (\mathbb{C}u_1)$.

Lo stesso vale naturalmente per i sottospazi ${\pi'}^\sharp$-invarianti di $\mathcal{H}_{\pi'}$. Possiamo allora dire che U applica il sottospazio irriducibile $\mathcal{H}_\pi \otimes (\mathbb{C}e_1)$ in un sottospazio ${\pi'}^\sharp$-invariante irriducibile, dunque della forma $\mathcal{H}_{\pi'} \otimes (\mathbb{C}u')$. Questo mostra che π e π' sono equivalenti.

Possiamo allora supporre che $\pi' = \pi$. Sia $u_j \in \mathcal{H}_\pi^{\sigma'}$ di norma 1 tale che $U : \mathcal{H}_\pi \otimes (\mathbb{C}e_j) \to \mathcal{H}_\pi \otimes (\mathbb{C}u_j)$. Per il Lemma di Schur,

$$U(v \otimes e_j) = e^{i\theta_j} v \otimes u_j\ .$$

Allora

$${v'}^\sharp = Uv^\sharp = \sum_j e^{i\theta_j} e_j \otimes u_j \in \mathcal{H}_\pi^\sigma \otimes \mathcal{H}_\pi^{\sigma'}\ ,$$

mentre per definizione ${v'}^\sharp \in \mathcal{H}_\pi^{\sigma'} \otimes \mathcal{H}_\pi^{\sigma'}$. Dunque $\sigma = \sigma'$. $\square$

12. Analisi di Fourier di funzioni e operatori su G/K

Torniamo a una generica coppia di Gelfand (G, K). La formula di Plancherel-Godement (8.4) conduce a un'analoga formula per funzioni in $L^2(G; K)$, lo spazio delle funzioni K-invarianti a destra su G (quindi, componendo con Λ, per generiche funzioni in $L^2(G/K)$).

Se $f \in L^1(G; K)$, per il Lemma 4.3, $\pi(f) = \pi(f)P_\pi^K$ per ogni rappresentazione unitaria irriducibile π di G. Quindi

(1) $\pi(f) = 0$ se π non è di classe 1 rispetto a K;
(2) se π è di classe 1, sia v_π un vettore unitario K-fisso; se $w_\pi(f) = \pi(f)v_\pi$ allora $\pi(f)v = \langle v, v_\pi\rangle w_\pi(f)$;
(3) le funzioni in $L^1(G; K)$ sono caratterizzate, all'interno di $L^1(G)$ come quelle per cui $\ker \pi(f) \supset v_\pi^\perp$ se π è di classe 1, e $\pi(f) = 0$ altrimenti.

Il vettore $w_\pi(f)$ dipende dalla scelta di v_π, e in tal senso è definito a meno di coefficienti scalari di modulo 1. Tuttavia, quantità come $\langle w_\pi(f), v_\pi\rangle$, $\|w_\pi(f)\|$ ecc., sono indipendenti da tale scelta.

Valgono le seguenti proprietà:

(i) se $f \in L^1(K; G; K)$,
$$w_\pi(f) = \hat f(\pi)v_\pi \ ;$$
(ii) se $f \in L^1(K; G)$, allora $f^* \in L^1(G; K)$ e
$$\pi(f)v = \langle v, w_\pi(f^*)\rangle v_\pi \ ;$$
(iii) Se $f_1 \in L^1(K; G)$ e $f_2 \in L^1(G; K)$, allora $f_1 * f_2 \in L^1(K; G; K)$ e
$$\widehat{f_1 * f_2}(\pi) = \langle w_\pi(f_2), w_\pi(f_1^*)\rangle \ ;$$
(iv) se $f_1 \in L^1(G; K)$ e $f_2 \in L^1(K; G; K)$, allora
$$w_\pi(f_1 * f_2) = \hat f_2(\pi)w_\pi(f_1) \ , \qquad \widehat{f_2 * f_1} = \hat f_2(\pi)\langle w_\pi(f_1), v_\pi\rangle \ .$$

Dato $w \in \mathcal{H}_\pi$, indichiamo con ψ_w la funzione

$$\psi_w(g) = \langle w, \pi(g)v_\pi\rangle \ . \tag{12.1}$$

Si noti che

$$\psi_{w_\pi(f)}(g) = \int_G f(h)\langle \pi(h)v_\pi, \pi(g)v_\pi\rangle \, dh = (f * \varphi_\pi)(g) \ .$$

Identifichiamo Δ^+ con l'insieme delle (classi di equivalenza di) rappresentazioni unitarie di classe 1 rispetto a K, tramite la corrispondenza $\pi \leftrightarrow \varphi_\pi$.

Teorema 12.1. *Sia $\mathbb{L}^2$ il sottospazio di $\prod_{\pi\in\Delta^+} \mathcal{H}_\pi$, i cui elementi $\omega = (w_\pi)_{\pi\in\Delta^+}$ soddisfano le seguenti condizioni:*

(i) *le applicazioni $\pi \mapsto \|w_\pi\|$ e $\pi \mapsto \int_G s(g)\psi_{w_\pi}(g)\, dg$, con $s \in L^1(G; K)$, sono misurabili;*
(ii) *$\int_{\Delta^+} \|w_\pi\|^2 \, d\sigma(\pi) = \|\omega\|^2_{\mathbb{L}^2} < \infty$.*

Data $f \in L^1 \cap L^2(G;K)$, $\omega(f) = \big(w_\pi(f)\big) \in \mathbb{L}^2$ *e*

$$\|\omega(f)\|_{\mathbb{L}^2} = \|f\|_2 \ . \tag{12.2}$$

L'operatore $f \mapsto \omega(f)$ *si estende per continuità a una isometria di* $L^2(G;K)$ *su* $\mathbb{L}^2$.

Se $\pi \mapsto \|w_\pi(f)\| \in L^1(\Delta^+, \sigma)$, *vale la formula di inversione*

$$\begin{aligned} f(g) &= \int_{\Delta^+} \langle w_\pi(f), \pi(g)v_\pi\rangle \, d\sigma(\pi) = \int_{\Delta^+} \psi_{w_\pi(f)}(g)\, d\sigma(\pi) \\ &= \int_{\Delta^+} f * \varphi_\pi(g)\, d\sigma(\pi) \ . \end{aligned} \tag{12.3}$$

Dimostrazione. Se $f, s \in L^1(G;K)$,

$$\int_G s(g)\psi_{w_\pi(f)}(g)\, dg = \int_G s(g)(f * \varphi_\pi)(g)\, dg = \int_G (\check f * s)(g)\varphi_\pi(g)\, dg = \widehat{\check f * s}(\pi) \ ,$$

essendo $\check f * s \in L^1(K;G;K)$. La dipendenza da π è dunque continua, quindi misurabile.

Se $f \in L^1 \cap L^2(G;K)$, sia

$$u(g) = f^* * f(g) = \int_G \overline{f(hg^{-1})} f(h)\, dh \ .$$

Allora u è bi-K-invariante e in $L^1 \cap C_0$ per la disuguaglianza di Young. Inoltre, per $\pi \in \Delta^+$ e $v \in \mathcal{H}_\pi$,

$$\pi(u)v = \pi(f)^*\pi(f)v = \|w_\pi(f)\|^2 \langle v, v_\pi\rangle v_\pi \ .$$

Per il Lemma 8.2, la trasformata di Fourier sferica di u è $\hat u(\pi) = \|w_\pi(f)\|^2$, che dunque è funzione continua di π. Per concludere che $\big(w_\pi(f)\big) \in \mathbb{L}^2$, occorre dunque dimostrare che $\hat u$ è integrabile.

Prendiamo una identità approssimata $\{\eta_i\}$ hermitiana, e sia $\{\eta_i^\sharp\}$ come nel Lemma 9.1.

Per la (8.5), notando che $\widehat{\eta_i^\sharp}(\pi) \in \mathbb{R}$ su Δ^+,

$$u * \eta_i^\sharp(e) = \int_G u(g)\overline{\eta_i^\sharp(g)}\, dg = \int_{\Delta^+} \|w_\pi(f)\|^2 \widehat{\eta_i^\sharp}(\pi)\, d\sigma(\pi) \ . \tag{12.4}$$

Fissato un compatto $C \subset \Delta^+$, si puo scegliere una successione $\{\eta_{i_n}^\sharp\}$ tale che

(i) $|u(e) - u * \eta_{i_n}^\sharp(e)| < \frac{1}{n}$;

(ii) $|1 - \widehat{\eta_{i_n}^\sharp}(\pi)| < \frac{1}{n}$ su C.

In particolare,

$$\lim_{n\to\infty} u * \eta_{i_n}^\sharp(e) = u(e) = \|f\|_2^2 \ .$$

Per il Lemma di Fatou,

$$\begin{aligned}\int_C \|w_\pi(f)\|^2\,d\sigma(\pi) &\le \liminf_{n\to\infty}\int_C \|w_\pi(f)\|^2\widehat{\eta^\sharp_{i_n}(\pi)}\,d\sigma(\pi)\\ &= \lim_{n\to\infty} u*\eta^\sharp_{i_n}(e)\\ &= \|f\|_2^2\ .\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di C, $\omega(f)\in\mathbb{L}^2$ e $\|\omega(f)\|_{\mathbb{L}^2}\le\|f\|_2$.

Dato $\varepsilon>0$, sia ora C_ε un compatto tale che $\int_{\Delta^+\setminus C_\varepsilon}\|w_\pi(f)\|^2\,d\sigma(\pi)<\varepsilon$, e si scelgano indici i_n in modo che $\{\eta^\sharp_{i_n}\}$ soddisfi (i) e (ii) relativamente a C_ε. Se $\sup_i\|\eta_i\|_1\le M$,

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= u(e)\\ &\le \frac{1}{n}+|u*\eta^\sharp_{i_n}(e)|\\ &\le \frac{1}{n}+\int_{\Delta^+}\|w_\pi(f)\|^2|\widehat{\eta^\sharp_i}(\pi)|\,d\sigma(\pi)\\ &= \frac{1}{n}+\int_{\Delta^+\setminus C_\varepsilon}\|w_\pi(f)\|^2|\widehat{\eta^\sharp_i}(\pi)|\,d\sigma(\pi)+\int_{C_\varepsilon}\|w_\pi(f)\|^2|\widehat{\eta^\sharp_i}(\pi)|\,d\sigma(\pi)\\ &\le \frac{1}{n}+M\varepsilon+\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\|\omega(f)\|^2_{\mathbb{L}^2}\ .\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε e n, si ha $\|f\|_2\le\|\omega(f)\|^2_{\mathbb{L}^2}$.

Dalla (12.4), per convergenza dominata, segue che

$$u(e)=\int_G u(g)\overline{\eta^\sharp_i(g)}\,dg=\int_{\Delta^+}\|w_\pi(f)\|^2\,d\sigma(\pi)\ ,$$

che non è altro che la (12.2).

Segue che l'immagine di $L^2(G;K)$ è chiusa in $\mathbb{L}^2$. Mostriamo che è densa. Sia $\omega=(w_\pi)$ ortogonale a ogni $\omega(f)$, con $f\in L^1\cap L^2(G;K)$. Se $u\in L^1(K;G;K)$ si ha $\omega(u*f)=\hat u\omega(f)$, e dunque

$$\begin{aligned}\langle\omega(u*f),\omega\rangle &= \int_{\Delta^+}\hat u(\pi)\langle w_\pi(f),w_\pi\rangle\,d\sigma(\pi)\\ &= \int_{\Delta^+}\int_G f(g)\hat u(\pi)\langle\pi(g)v_\pi,w_\pi\rangle\,dg\,d\sigma(\pi)\\ &= 0\ ,\end{aligned}$$

per ogni f e ogni u come sopra. Per l'arbitrarietà di f,

$$\int_{\Delta^+}\hat u(\pi)\langle\pi(g)v_\pi,w_\pi\rangle\,d\sigma(\pi)=0$$

per ogni $g\in G$ e ogni u. Per la densità delle trasformate $\hat u$ in $C_0(\Delta^+)$, si ottiene che $\langle\pi(g)v_\pi,w_\pi\rangle=0$ per ogni g e quasi ogni π. Siccome v_π è ciclico, $w_\pi=0$ per quasi ogni π.

Infine, per dimostrare la (12.3), è sufficente prendere $g = e$, usando l'identità $f * \varphi_\pi(g) = (L_{g^{-1}} f) * \varphi(e)$. Per polarizzazione, dalla (12.2) si ottiene che, date $f_1, f_2 \in L^2(G;K)$, la funzione $\langle w_\pi(f_1), w_\pi(f_2)\rangle$ è integrabile su Δ^+ e

$$\int_G f_1(g)\overline{f_2(g)}\, dg = \int_{\Delta^+} \langle w_\pi(f_1), w_\pi(f_2)\rangle\, d\sigma(\pi) \ .$$

Posto $f_2 = \eta_i^\sharp$, $w_\pi(f_2) = \widehat{\eta_i^\sharp}(\pi) v_\pi$. Se $\|w_\pi(f)\| \in L^1$, presa $\psi = \eta_i^\sharp$ e con passaggio al limite, si ha la (12.3) per $g = e$. $\square$

Su uno spazio omogeneo M consideriamo l'algebra A degli operatori continui T su $L^2(M)$ e G-invarianti, tali cioè che $T\tau_g = \tau_g T$ per ogni $g \in G$, con τ_g definita dalla (2.2).

Fissato $x_0 \in M$, sia K lo stabilizzatore di x_0 in G e identifichiamo M con G/K. Grazie all'identificazione (unitaria) Λ^* di $L^2(M)$ con $L^2(G;K)$ che associa a $f \in L^2(M)$ la funzione

$$\Lambda^* f(g) = f(g \cdot x_0) \ ,$$

possiamo allora sostituire T con $T' = \Lambda^* T {\Lambda^*}^{-1}$ su $L^2(G;K)$. Ovviamente T' commuta con le traslazioni sinistre per elementi di G. Se $u \in L^1(G)$ e $f \in L^2(G;K)$, allora $u * f \in L^2(G;K)$ e

$$\begin{aligned} T(u*f) &= T\Big(\int_G u(h) L_h f\, dh\Big) \\ &= \int_G u(h) T L_h f\, dh = \int_G u(h) L_h T f\, dh \\ &= u * (Tf) \ . \end{aligned} \tag{12.5}$$

Inoltre T' applica $L^2(K;G;K)$ in sé.

Lemma 12.2. *Esiste una funzione $m \in L^\infty(\Delta^+)$ tale che $\widehat{T'f} = m\hat{f}$ per ogni $f \in L^2(K;G;K)$. Inoltre $\|m\|_\infty = \|T'\|_{\mathcal{L}\left(L^2(K;G;K)\right)}$.*

Dimostrazione. Coniugando T', ristretto a $L^2(K;G;K)$, con la trasformata di Fourier sferica, si ottiene un operatore $\hat{T}$ limitato su $L^2(\Delta^+)$, e la (12.5) corrisponde alla proprietà

$$\hat{T}(\hat{u}\eta) = \hat{u}\hat{T}\eta$$

per ogni $u \in L^1(K;G;K)$. Per densità, tale identità vale con una qualunque funzione in $C_0(\Delta^+)$ al posto di $\hat{u}$.

Dato un aperto relativamente compatto $A \subset \Delta^+$, si ponga $m_A(\pi) = \hat{T}\chi_A(\pi)$ per $\pi \in A$. Se $\eta \in C_0(\Delta^+)$ ha supporto contenuto in A, si ha

$$\hat{T}\eta = \hat{T}(\eta\chi_A) = \eta m_A \ .$$

Per continuità, questa identità vale per ogni $\eta \in L^2(A)$. Inoltre

$$\|m_A\|_{L^\infty(A)} = \sup_{\|\eta\|_2 \le 1} \|\eta m_A\|_2 \le \|\hat{T}\| \ .$$

Siano A, A' due aperti relativamente compatti. Su $A \cap A'$,

$$m_{A\cap A'} = \hat{T}(\chi_{A\cap A'}) = \chi_{A\cap A'} m_A = m_A \ ,$$

e analogamente $m_{A\cap A'} = m_{A'}$. Quindi $m_A = m_{A'}$ su $A \cap A'$. Le funzioni m_A si incollano dando dunque luogo a una funzione m definita su tutto Δ^+, con $\|m\|_\infty \leq \|\hat{T}\|$, e tale che

$$\hat{T}\eta = \eta m$$

per ogni η. La disuaglianza $\|\hat{T}\| \leq \|m\|_\infty$ è quindi ovvia. $\square$

La funzione m si chiama il *moltiplicatore di Fourier sferico* dell'operatore T.

Teorema 12.3. *Per una generica $f \in L^2(G;K)$, $T'f$ è la funzione tale che*

$$w_\pi(T'f) = m(\pi) w_\pi(f) \tag{12.6}$$

quasi ovunque su Δ^+. Viceversa, data $m \in L^\infty(\Delta^+)$, la (12.6) *definisce un operatore T' G-invariante a sinistra su $L^2(G;K)$, e dunque un operatore T G-invariante su $L^2(M)$.*

Dimostrazione. Sia $u \in L^1(K;G;K)$. Allora $T'(f * u) = f * T'u$, per cui

$$w_\pi\big(T'(f * u)\big) = m(\pi)\hat{u}(\pi) w_\pi(f) \ .$$

Ponendo $u = \eta_i^\sharp$, le funzioni introdotte nel Lemma 9.1, si ha

$$\begin{aligned} w_\pi(T'f) &= \lim_i w_\pi\big(T'(f * \eta_i^\sharp)\big) \\ &= \lim_i m(\pi)\widehat{\eta_i^\sharp}(\pi) w_\pi(f) \\ &= m(\pi) w_\pi(f) \ . \end{aligned}$$

L'ultima parte è ovvia. $\square$

Data una funzione m misurabile su Δ a valori in $\mathbb{C}^n$, chiamiamo *immagine essenziale* di m il complementare in $\mathbb{C}^n$ del più grande aperto Ω tale che $m^{-1}(\Omega)$ abbia misura nulla. Un elemento $\zeta \in C^n$ è nell'immagine essenziale di m se e solo se $m^{-1}(U)$ ha misura positiva per ogni intorno U di ζ.

Corollario 12.4. *L'algebra A degli operatori G-invarianti limitati su $L^2(M)$ è una C^*-algebra commutativa e isomorfa a $L^\infty(\Delta^+)$. Lo spettro di un operatore T in $\mathcal{L}\big(L^2(M)\big)$ coincide con il suo spettro in A ed è uguale all'immagine essenziale in $\mathbb{C}$ del suo moltiplicatore di Fourier sferico.*

Dimostrazione. La prima affermazione segue dal Teorema 12.3, osservando che se m_1, m_2 sono i moliplicatori di Fourier sferici di T_1, T_2 rispettivamente, allora il moltiplicatore di T_1T_2 è m_1m_2 e che, se $T \in A$,

$$T^*\tau_g = (\tau_{g^{-1}}T)^* = (T\tau_{g^{-1}})^* = \tau_g T^* \ ,$$

per cui $T^* \in A$. In modo analogo si verifica che, se $T \in A$ ammette un inverso T^{-1} in $\mathcal{L}\big(L^2(M)\big)$, allora $T^{-1} \in A$. Da questo segue l'uguaglianza degli spettri di T nelle due algebre.

Infine, per il Teorema 12.3, un numero complesso ζ è nello spettro di T in A se e solo se, detto m il moltiplicatore di Fourier sferico di T, esiste $m' \in L^\infty(\Delta^+)$ tale che $(\zeta - m)m' = 1$. Ma questo equivale all'esistenza di un $\delta > 0$ tale che $|m(\pi) - \zeta| > \delta$ quasi ovunque su Δ^+. $\square$

Più in generale, sia $\{T_1, \cdots T_n\}$ una famiglia finita di elementi di A. Si chiama *spettro congiunto*[9] di $\{T_1, \cdots T_n\}$ in A, risp. in $\mathcal{L}\big(L^2(M)\big)$, l'insieme delle n-uple $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ per cui non esistano elementi $U_1, \dots U_n \in A$, risp. in $\mathcal{L}\big(L^2(M)\big)$, tali che

$$\sum_{j=1}^{n} (\zeta_j - T_j) U_j = \sum_{j=1}^{n} U_j (\zeta_j - T_j) = I \ . \tag{12.7}$$

Corollario 12.5. *Sia m_j il moltiplicatore di Fourier sferico di T_j. Lo spettro congiunto di $T_1, \cdots T_n$, sia in A sia in $\mathcal{L}\big(L^2(M)\big)$, è l'immagine essenziale della funzione $m = (m_1, \dots, m_n)$.*

Dimostrazione. Sia ζ nell'immagine essenziale di m e supponiamo per assurdo che esistano $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{L}\big(L^2(M)\big)$ per cui valga la (12.7). Posto $C = \sum_j \|U_j\|^2$, esiste un compatto $B \subset \Delta^+$ di misura positiva tale che $\sum_j |\zeta_j - m_j(\pi)|^2 < (2C)^{-1}$ su B. Sia $f \in L^2(K;G;K)$ tale che $\hat{f} = \chi_B$. Allora

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_j U_j (\zeta_j - T_j) f \Big\|^2 &\le \Big(\sum_j \|U_j\| \|(\zeta_j - T_j) f\|_2 \Big)^2 \\
&\le C \sum_j \|(\zeta_j - T_j) f\|_2^2 \\
&= C \sum_j \|(\zeta_j - m_j) \chi_B\|_2^2 \\
&= C \big\| |\zeta_j - m_j| \chi_B \big\|_2^2 \\
&\le \frac{1}{2} \|f\|_2^2 \ ,
\end{aligned}$$

da cui l'assurdo.

Supponiamo viceversa che ζ non sia nell'immagine essenziale di m. Allora la funzione $\sum_j |\zeta_j - m_j(\pi)|^2$ è limitata dal basso da una costante positiva, per cui le funzioni

$$m'_j(\pi) = \frac{\bar{\zeta}_j - \overline{m_j(\pi)}}{\sum_j |\zeta_j - m_j(\pi)|^2}$$

sono limitate. Sia $U_j \in A$ l'operatore definito dal moltiplicatore di Fourier sferico m'_j. Siccome $\sum_j (\zeta_j - m_j) m'_j = 1$, vale la (12.7). $\square$

Risultati analoghi valgono per famiglie commutative di operatori illimitati chiusi e G-invarianti.

[9] La nozione ha senso per una famiglia finita di elementi di un'algebra di Banach con unità che commutino a due a due.