ANALISI ARMONICA NON COMMUTATIVA

prof. Fulvio Ricci

A.A. 2001-2002

CAPITOLO I
ALGEBRE DI BANACH

1. Algebre di Banach

Definizione. *Un'algebra di Banach è uno spazio di Banach A dotato di un prodotto $\cdot : A \times A \longrightarrow A$ tale che*

(1) *A è un'algebra rispetto alle operazioni di somma, prodotto e moltiplicazione per scalari;*
(2) *$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ per ogni $x, y \in A$;*
(3) *se A ha un'unità e, allora $\|e\| = 1$.*

Nel seguito considereremo sempre (salvo menzione esplicita) algebre su $\mathbb{C}$.

Esempi. Sono algebre di Banach i seguenti spazi con le loro norme naturali.

(1.a) $C(K)$, dove K è uno spazio topologico compatto, con il prodotto puntuale.

(1.b) $C_0(X)$, dove X è uno spazio topologico localmente compatto, con il prodotto puntuale;

(1.c) $L^1(\mathbb{T})$ o $L^1(\mathbb{R}^n)$, con il prodotto di convoluzione;

(1.d) $\mathcal{L}(V)$, l'algebra degli operatori lineari limitati su uno spazio di Banach V, con il prodotto di composizione.

Negli esempi (1.a) e (1.d) l'algebra possiede un'unità. L'algebra è commutativa negli esempi (1.a), (1.b) e (1.c), mentre non è commutativa nell'esempio (1.d), purché sia $\dim V > 1$.

Ogni algebra di Banach A senza unità può essere immersa in modo isometrico in un'algebra di Banach con unità. Basta porre $\tilde{A} = A \times \mathbb{C}$, con il prodotto

$$(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu) \tag{1.1}$$

e la norma $\|(x, \lambda)\| = \|x\| + |\lambda|$. La sottoalgebra $A \times \{0\}$ di $\tilde{A}$ è isomorfa ad A. L'unità di $\tilde{A}$ è $(0, 1)$.

Si osservi che $A \times \{0\}$ è più precisamente un ideale di $\tilde{A}$. Si osservi anche che se si effettua questa operazione su un'algebra A già dotata di unità, le unità di A e di $\tilde{A}$ sono diverse.

Le condizioni (2) e (3) nella definizione possono essere formulate in modo più debole, a meno di una sostituzione della norma su A con una equivalente.

Proposizione 1.1. *Sia A uno spazio di Banach dotato di una struttura di algebra tale che il prodotto sia continuo da $A \times A$ in A. Esiste allora una norma equivalente su A tale che valga la (2) e, in caso A abbia un'unità, anche la (3).*

Dimostrazione. Se A non ha unità, si costruisca l'algebra estesa $\tilde{A}$ con il prodotto (1.1). Possiamo quindi supporre che A abbia unità. La continuità del prodotto implica che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|xy\| \leq C\|x\|\|y\| \ . \tag{1.2}$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Consideriamo l'applicazione lineare Φ di A in $\mathcal{L}(A)$ definita da $\Phi(x)y = xy$. Poiché $\Phi(xx') = \Phi(x)\Phi(x')$ e $\Phi(e) = I$, l'immagine $\Phi(A)$ è una sottoalgebra di $\mathcal{L}(A)$.

Poniamo

$$\|x\|' = \|\Phi(x)\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|xy\|}{\|y\|} \ .$$

Per la (1.2), $\|x\|' \leq C\|x\|$. D'altra parte,

$$\|x\|' \geq \frac{\|\Phi(x)e\|}{\|e\|} = \frac{\|x\|}{\|e\|} \ ,$$

per cui le norme $\| \ \|$ e $\| \ \|'$ sono equivalenti. Chiaramente $\|e\|' = 1$ e

$$\|xy\|' = \|\Phi(xy)\| \leq \|\Phi(x)\|\|\Phi(y)\| = \|x\|'\|y\|' \ . \qquad \square$$

Finora la completezza di A non è mai stata usata e quanto detto sopra vale per generiche algebre normate. La dimostrazione che segue fa invece uso della completezza.

Teorema 1.2. *Sia A un'algebra di Banach con unità. L'insieme A^{-1} degli elementi invertibili di A è un'aperto. Inoltre l'applicazione $x \longmapsto x^{-1}$ di A^{-1} in sé è continua.*

Dimostrazione. Mostriamo per prima cosa che e è interno a A^{-1}. Se $\|x - e\| < 1$, posto $y = e - x$, la *serie di Neumann*

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n \tag{1.3}$$

è convergente; infatti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|y^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|y\|^n < +\infty \ ,$$

da cui si deduce che le ridotte della serie di Neumann formano una successione di Cauchy. Sia s la somma della serie (1.3) e s_n la sua ridotta n-esima. Si ha

$$xs_n = (e - y)s_n = e - y^{n+1} = s_n x \ ,$$

dove $\lim_{n\to\infty} \|y^{n+1}\| = 0$. Quindi

$$xs = \lim_{n\to\infty} xs_n = e = sx \ ,$$

ossia $s = x^{-1}$.

Sia ora $x_0 \in A^{-1}$. Dato $h \in A$, se $\|h\| < \|x_0^{-1}\|^{-1}$, $x_0 + h = x_0(e + x_0^{-1}h)$ è invertibile in quanto lo sono entrambi i fattori, essendo $\|x_0^{-1}h\| < 1$. Quindi la palla $B(x_0, \|x_0^{-1}\|^{-1})$ è contenuta in A^{-1}. Questo dimostra che A^{-1} è aperto.

Inoltre

$$\begin{aligned}\|(x_0 + h)^{-1}\| &\leq \|x_0^{-1}\|\|(e + x_0^{-1}h)^{-1}\| \\ &\leq \|x_0^{-1}\| \sum_{n=0}^{\infty} \big(\|x_0^{-1}\|\|h\|\big)^n \\ &= \frac{\|x_0^{-1}\|}{1 - \|x_0^{-1}\|\|h\|} ,\end{aligned}$$

per cui $\|x^{-1}\|$ è limitata sulla palla $B(x_0, (2\|x_0^{-1}\|)^{-1})$.

Se $x_0, x \in A^{-1}$, si ha $x^{-1} - x_0^{-1} = x_0^{-1}(x_0 - x)x^{-1}$, per cui

$$\|x^{-1} - x_0^{-1}\| \leq \|x_0^{-1}\|\|x_0 - x\|\|x^{-1}\| ,$$

e da ciò segue la continuità della funzione $x \mapsto x^{-1}$ in x_0. □

Definizione. *Sia A un'algebra di Banach con unità. Dato $x \in A$, si chiama* insieme risolvente *di A l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $x - \lambda e \in A^{-1}$. Il complementare in $\mathbb{C}$, $\sigma(x)$, dell'insieme risolvente si chiama lo* spettro *di x. La funzione $R(x, \lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$ da $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ in A^{-1} si chiama la* funzione risolvente *di x.*

Proposizione 1.3. *Lo spettro $\sigma(x)$ di un elemento $x \in A$ è non vuoto e compatto. La funzione risolvente è olomorfa*[1] *su $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ e $\lim_{\lambda\to\infty} R(x, \lambda) = 0$.*

Dimostrazione. La funzione $f(\lambda) = \lambda e - x$ è continua da $\mathbb{C}$ in A, e $\sigma(x) = f^{-1}\big(A \setminus A^{-1}\big)$. Quindi $\sigma(x)$ è chiuso. Se $|\lambda| > \|x\|$, $\lambda e - x = \lambda(e - \lambda^{-1}x)$ è in A^{-1}. Quindi $\sigma(x) \subseteq B\big(0, \|x\|\big)$. Inoltre, se $|\lambda| > 2\|x\|$,

$$\|(e - \lambda^{-1}x)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|x\|}{|\lambda|}\right)^n < 2 ,$$

per cui

$$\|(\lambda e - x)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|}\|(e - \lambda^{-1}x)^{-1}\| < \frac{2}{|\lambda|} ,$$

e quindi $\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda e - x)^{-1} = 0$. Se $\lambda_0 \notin \sigma(x)$,

$$\begin{aligned}R(x, \lambda) &= (\lambda e - x)^{-1} \\ &= \big(\lambda_0 e - x + (\lambda - \lambda_0)e\big)^{-1} \\ &= (\lambda_0 e - x)^{-1}\big(e + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 e - x)^{-1}\big)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda - \lambda_0)^n(\lambda_0 e - x)^{-n-1} ,\end{aligned}$$

[1]Una funzione $f(\lambda)$ di variabile complessa a valori in A è olomorfa se per ogni punto λ_0 del dominio esiste un intorno su cui f è la somma di una serie di potenze centrata in λ_0.

per $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 e - x)^{-1}\|^{-1}$; quindi la funzione risolvente è olomorfa.

Se $\sigma(x)$ fosse vuoto, dato un funzionale lineare continuo $\xi \in A^*$, la funzione $f(\lambda) = \xi\big((\lambda e - x)^{-1}\big)$ sarebbe intera e tenderebbe a 0 all'infinito. Per il Teorema di Liouville, essa sarebbe identicamente nulla. Avremmo quindi $(\lambda e - x)^{-1} = 0$ identicamente, il che è assurdo. $\square$

Definizione. *Si chiama* raggio spettrale *di $x \in A$ il numero*

$$\rho(x) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} .$$

Abbiamo visto che $\rho(x) \leq \|x\|$. Più precisamente si ha la formula seguente.

Proposizione 1.4. *Vale l'identità*

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{1/n} .$$

Dimostrazione. Dato $\xi \in A^*$, la funzione $f_\xi(\lambda) = \xi\big((\lambda e - x)^{-1}\big)$ è olomorfa per $|\lambda| > \rho(x)$ e nulla all'infinito e la sua serie di Laurent è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi(x^n)\lambda^{-n-1} .$$

Fissato λ con $|\lambda| > \rho(x)$, la serie converge in λ, per cui $|\xi(\lambda^{-n-1}x^n)| \leq C_\xi$ per ogni n. Per il Teorema di Banach-Steinhaus, esiste $C > 0$ tale che $\|\lambda^{-n-1}x^n\| \leq C$ per ogni n. Quindi $\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq |\lambda|$ e, per l'arbitrarietà di λ,

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \rho(x) .$$

La dimostrazione si conclude se dimostriamo che $\rho(x)^n \leq \|x^n\|$ per ogni n. Poiché

$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(e + x + \cdots + x^{n-1}) ,$$

se il termine a primo membro è invertibile, anche $\lambda e - x$ è invertibile, essendo

$$(\lambda e - x)^{-1} = (e + x + \cdots + x^{n-1})(\lambda^n e - x^n)^{-1} .$$

Quindi $\lambda \in \sigma(x)$ implica che $\lambda^n \in \sigma(x^n)$, e dunque $\rho(x)^n \leq \rho(x^n) \leq \|x^n\|$. $\square$

Esempi.

(1.e) Sia $A = C(K)$ con K compatto. Data $f \in A$, si vede facilmente che $\sigma(f) = f(K)$. In questo caso $\rho(f) = \|f\|$.

(1.f) Sia $A = \mathcal{L}(V)$, con V spazio normato di dimensione finita. Data un'applicazione lineare T di V in sé, $\sigma(T)$ è l'insieme dei suoi autovalori.

(1.g) Se V è un generico spazio di Banach, lo spettro di $T \in \mathcal{L}(V)$ è costituito dai $\lambda \in \mathbb{C}$ per cui $\lambda I - T$ non ha un inverso *continuo*. Per il Teorema dell'applicazione aperta, ciò equivale a dire che $\lambda I - T$ non è biiettiva.

È importante notare che se A è un'algebra di Banach con unità e B è una sua sottoalgebra di Banach con la stessa unità, gli spettri $\sigma_A(x)$ e $\sigma_B(x)$ di un elemento $x \in B$ nelle due algebre possono essere diversi, in quanto $\lambda e - x$ può avere inverso in A ma non in B. Naturalmente vale sempre l'inclusione $\sigma_A(x) \subseteq \sigma_B(x)$.

Meno evidente è l'inclusione seguente.

Proposizione 1.5. *La frontiera di $\sigma_B(x)$ è contenuta in $\sigma_A(x)$.*

Dimostrazione. Sia $\{\lambda_n\}$ una successione convergente a $\lambda \in \sigma_B(x)$, e tale che $\lambda_n e - x$ abbia inverso in B per ogni n. Se $\lambda e - x$ avesse inverso in A, sarebbe

$$(\lambda e - x)^{-1} = \lim_{n\to\infty} (\lambda_n e - x)^{-1}$$

per la continuità dell'inverso su A^{-1}. Poiché B è chiusa, sarebbe allora $(\lambda e - x)^{-1} \in B$, in contrasto con l'ipotesi. $\square$

Corollario 1.6. *Siano $\{U_j\}_{j\in J}$ le componenti connesse limitate di $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$. Allora $\sigma_B(x) = \sigma_A(x) \cup \left(\bigcup_{j\in J'} U_j\right)$ per qualche sottoinsieme J' di J.*

In particolare, se $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$ è connesso, allora $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Caratterizziamo ora le algebre di Banach complesse con divisione. Un'algebra con divisione è un'algebra con unità tale che ogni elemento diverso da 0 è invertibile.

Teorema 1.7 (di Gelfand-Mazur). *Sia A un'algebra di Banach su $\mathbb{C}$ con divisione. Allora $A = \mathbb{C}e$.*

Dimostrazione. Dato $x \in A$, il suo spettro non è vuoto. Se $\lambda \in \sigma(x)$, allora $\lambda e - x$ non è invertibile, e dunque nullo. Quindi $x = \lambda e$. $\square$

2. Teoria di Gelfand

In questo paragrafo A è un'algebra di Banach *commutativa con unità.* Analizziamo la struttura degli ideali di A e dei funzionali lineari moltiplicativi.

Diremo che un ideale di A è *massimale* se è massimale tra gli ideali propri.

Lemma 2.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *un elemento di A è contenuto in un ideale proprio se e solo se non è invertibile;*
2. *la chiusura di un ideale proprio è un ideale proprio;*
3. *ogni ideale massimale è chiuso;*
4. *ogni ideale proprio è contenuto in un ideale massimale;*
5. *ogni ideale massimale ha codimensione 1 in A.*

Dimostrazione. (1) Se un ideale I contiene un elemento invertibile, allora contiene l'unità, e dunque coincide con A. Se $x \in A$ non è invertibile, xA è un ideale che non contiene e.

(2) Se I è un ideale proprio, la sua chiusura $\bar{I}$ è chiaramente un ideale. Poiché I è contenuto in $A \setminus A^{-1}$, che è chiuso, anche $\bar{I}$ vi è contenuto. Quindi $\bar{I}$ è proprio. (3) e (4) sono conseguenze immediate.

(5) Sia I un ideale massimale. Allora A/I ha in modo naturale una struttura di algebra di Banach con unità. Ogni elemento non nullo di A/I è invertibile: se così non fosse, A/I avrebbe un ideale proprio non banale, e la sua controimmagine in A secondo la propiezione canonica sarebbe un ideale proprio di A contenente propriamente I. Per il Teorema di Gelfand-Mazur, A/I è ridotta ai multipli scalari dell'unità. $\square$

Corollario 2.2. *Sia I un ideale massimale di A. Ogni classe laterale in A/I è della forma $\lambda e + I$ per un unico $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Definizione. *Un funzionale lineare φ su A si dice* moltiplicativo*, o anche un* carattere *di A, se non è identicamente nullo e se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ per ogni $x, y \in A$.*

Si osservi che un funzionale lineare φ che soddisfi l'identità $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ è non identicamente nullo se e solo se $\varphi(e) = 1$.

Proposizione 2.3. *Ogni funzionale lineare moltiplicativo su A è continuo. Inoltre l'applicazione $\varphi \longmapsto \ker \varphi$ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra funzionali lineari moltiplicativi e ideali massimali.*

Dimostrazione. Un funzionale lineare è continuo se e solo se il suo nucleo è chiuso. Se φ è un carattere di A, il suo nucleo è un ideale proprio di A. Poiché ha codimensione 1, è massimale, e dunque chiuso.

Sia φ un carattere, e sia $I = \ker \varphi$. Se $x \in A$, per il Corollario 2.2 esiste uno e un solo $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $x \in \lambda e + I$. Quindi $\varphi(x) = \varphi(\lambda e) = \lambda$. Ciò dimostra che l'applicazione $\varphi \mapsto \ker \varphi$ è iniettiva.

Se I è un ideale massimale, si ponga $\varphi(x) = \lambda$, se $x \in \lambda e + I$. Allora φ è un carattere e $\ker \varphi = I$. Questo dimostra che l'applicazione è anche suriettiva. □

Esempi.

(2.a) Sia $A = C(K)$, con K compatto. Dato $x_0 \in K$,

$$I_{x_0} = \{f \in C(K) : f(x_0) = 0\}$$

è un ideale massimale. Il corrispondente carattere è dato da

$$\varphi_{x_0}(f) = f(x_0) .$$

Ogni ideale massimale (e quindi ogni carattere) è di questo tipo. La verifica si riduce a dimostrare la seguente affermazione: *se I è un ideale di $C(K)$ tale che per ogni $x \in K$ esiste $f_x \in I$ con $f_x(x) \neq 0$, allora $I = C(K)$.* La dimostrazione è lasciata per esercizio.

(2.b) Sia V uno spazio normato di dimensione finita e sia $T \in \mathcal{L}(V)$. Sia

$$A = \{p(T) : p \in \mathbb{C}[z]\} \subset \mathcal{L}(V)$$

la sottoalgebra con unità generata da T. A è chiaramente un'algebra di Banach commutativa (di dimensione finita).

Se $v \in V$ è un autovettore di T con autovalore λ, allora $p(T)v = p(\lambda)v$. Quindi il funzionale φ che associa a un elemento $T' \in A$ lo scalare $\varphi(T')$ tale che $T'v = \varphi(T')v$ è ben definito ed è un carattere di A.

Sia ora φ un carattere di A, e sia $\lambda = \varphi(T)$. Allora $\varphi\big(p(T)\big) = p(\lambda)$ per ogni polinomio p. Sia p il polinomio caratteristico di T. Per il Teorema di Cayley-Hamilton, $p(T) = 0$, per cui deve essere $p(\lambda) = \varphi(0) = 0$, ossia λ è un autovalore di T.

Poiché A è generata da T, un carattere φ di A è univocamente determinato dal valore $\varphi(T)$. Quindi c'è una corrispondenza biunivoca tra i caratteri di A e gli autovalori distinti di T.

Definizione. *Si chiama* spettro di Gelfand *di A (o semplicemente spettro di A) l'insieme $\Delta(A) \subset A^*$ dei caratteri di A, dotato della topologia indotta dalla topologia debole-$*$ di A^*.*

Teorema 2.4. *Lo spettro $\Delta(A)$ è contenuto nella sfera unitaria di A^* ed è compatto.*

Dimostrazione. Se $\varphi \in \Delta(A)$ e $x \in A$, $\varphi(x)e - x \in \ker\varphi$, per cui $\varphi(x) \in \sigma(x)$. Quindi $|\varphi(x)| \leq \|x\|$, da cui $\|\varphi\| \leq 1$. D'altra parte, $\varphi(e) = 1 = \|e\|$, per cui $\|\varphi\| = 1$.

Dimostriamo ora che $\Delta(A)$ è chiuso in A^* rispetto alla topologia debole-$*$. Sia $\varphi_0 \in \overline{\Delta(A)}$. Fissati $x, y \in A$ e $\varepsilon > 0$, esiste $\varphi \in \Delta(A)$, tale che $\big|\varphi(x) - \varphi_0(x)\big| < \varepsilon$, $\big|\varphi(y) - \varphi_0(y)\big| < \varepsilon$, $\big|\varphi(xy) - \varphi_0(xy)\big| < \varepsilon$, e inoltre $\big|\varphi(e) - \varphi_0(e)\big| < \varepsilon$.

Per l'arbitrarietà di ε si ottiene che $\varphi_0(e) = 1$ e che $\varphi_0(xy) = \varphi_0(x)\varphi_0(y)$.

Per il Teorema di Banach-Alaoglu, $\Delta(A)$ è compatto. $\square$

Definizione. *Dato $x \in A$, si chiama* trasformata di Gelfand *di x la funzione $\hat{x} : \Delta(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ data da $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$.*

Teorema 2.5. *Per ogni $x \in A$, $\hat{x}$ è una funzione continua e $\hat{x}\big(\Delta(A)\big) = \sigma(x)$. In particolare $\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leq \|x\|$. L'applicazione $\mathcal{G} : A \longrightarrow C\big(\Delta(A)\big)$ data da $\mathcal{G}(x) = \hat{x}$ è un omomorfismo continuo di algebre.*

Dimostrazione. La funzione $\hat{x}$ è la restrizione a $\Delta(A)$ del funzionale lineare $\varphi \mapsto \varphi(x)$ su A^*. Quindi è continua per la definizione di topologia debole-$*$. Un numero $\lambda \in \mathbb{C}$ è nell'immagine di $\hat{x}$ se e solo se $\lambda e - x$ è contenuto in un ideale massimale, dunque se e solo se $\lambda \in \sigma(x)$. Infine le identità

$$\widehat{x+y}(\varphi) = \hat{x}(\varphi) + \hat{y}(\varphi)\ , \quad \widehat{\lambda x}(\varphi) = \lambda\hat{x}(\varphi)\ , \quad \widehat{xy}(\varphi) = \hat{x}(\varphi)\hat{y}(\varphi)$$

sono evidenti. $\square$

Corollario 2.6. *Per ogni polinomio p, $\sigma\big(p(x)\big) = p\big(\sigma(x)\big)$.*

Si noti che l'applicazione $\mathcal{G}$ potrebbe non essere iniettiva; questo succede se e solo se esiste $x \neq 0$ in A tale che $\sigma(x) = \{0\}$.

Se, per esempio, A contiene un elemento nilpotente, cioè un $x \neq 0$ tale che $x^m = 0$ per qualche m, allora $\sigma(x) = \{0\}$ per il Corollario 2.6.

Definizione. *Un elemento $x \in A$, $x \neq 0$, si dice* nilpotente generalizzato *se vale una delle seguenti proprietà equivalenti:*

(1) $\sigma(x) = \{0\}$;
(2) *x è contenuto in ogni ideale massimale di A;*
(3) $\hat{x} = 0$;
(4) $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = 0$.

L'algebra A si dice semisemplice *se non contiene elementi nilpotenti generalizzati.*

In generale $\mathcal{G}$ non è un'isometria. Si ha in proposito la seguente caratterizzazione.

Teorema 2.7. *La trasformata di Gelfand $\mathcal{G}$ è un'isometria se e solo se $\|x^2\| = \|x\|^2$ per ogni $x \in A$.*

Dimostrazione. Poiché in $C\big(\Delta(A)\big)$ vale l'identità $\|f^2\| = \|f\|^2$, la condizione è necessaria.

Viceversa, se vale la condizione data, si ha $\|x^{2^k}\| = \|x\|^{2^k}$ per ogni k, per cui $\rho(x) = \|x\|$. Quindi $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$. $\square$

Esempi.

(2.c) Sia $A = C(K)$, con K compatto. Abbiamo visto che $\Delta(A) = K$ come insieme. Si verifichi per esercizio che questa identificazione è anche topologica.

(2.d) Sia A un'algebra di Banach con unità generata da un unico elemento a, nel senso che le potenze a^n, con $n \geq 0$, generano un sottospazio denso di A. Allora $\Delta(A)$ è omeomorfo a $\sigma(a)$.

Consideriamo infatti l'applicazione $\hat{a} : \Delta(A) \longrightarrow \sigma(a)$. Essa è iniettiva, perché se due caratteri coincidono su a, coincidono su un sottospazio denso. Per il Teorema 2.5 essa è suriettiva e continua. Poiché sia $\Delta(A)$ che $\sigma(a)$ sono compatti, $\hat{a}$ è un omeomorfismo.

(2.e) Sia $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ il toro, e sia A la sottoalgebra di Banach con unità di $C(\mathbb{T})$ generata da $e_1(t) = e^{it}$. Si verifichi per esercizio che A è costituita dalle funzioni $f \in C(\mathbb{T})$ tali che $\hat{f}(n) = 0$ per $n < 0$.

Per l'esempio (2.d), lo spettro di Gelfand di A è dunque omeomorfo allo spettro $\sigma_A(e_1)$ di e_1 in A.

Per il Corollario 1.6, $\sigma_A(e_1)$ coincide o con $\sigma_{C(\mathbb{T})}(e_1)$, che è il cerchio unitario, oppure con il disco unitario chiuso $\bar{D}$.

Basta allora controllare se $0 \in \sigma_A(e_1)$. Ma l'inverso in $C(\mathbb{T})$ di e_1 è $e_{-1}(t) = e^{-it}$, che ha un coefficiente di Fourier negativo non nullo. Quindi $\sigma_A(e_1) = \bar{D}$.

Le trasformate di Gelfand degli elementi di A sono dunque funzioni continue su $\bar{D}$. In particolare $\widehat{e_1}(z) = z$. Se p è un polinomio, $p(e_1)$ è il polinomio trigonometrico

$$p(e^{it}) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikt} \ ,$$

se i c_k sono i coefficienti di p. Quindi

$$\widehat{p(e_1)}(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k = p(z) \ .$$

Data una generica $f \in A$, con serie di Fourier $\sum_{n=0}^{\infty} c_k e^{ikt}$, si ha dunque

$$\hat{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \ .$$

In conclusione l'immagine di A secondo $\mathcal{G}$ in $C(\bar{D})$ è costituita dalle funzioni continue su $\bar{D}$ e olomorfe in D. In questo caso $\mathcal{G}$ è un'isometria. L'algebra $\mathcal{G}(A)$ si chiama anche *algebra del disco (disk algebra).*

(2.f) Con piccole modifiche a quanto visto nell'esempio (2.d), si dimostra che se A è generata da a e a^{-1}, con $a \in A$ invertibile, allora $\Delta(A)$ è pure omeomorfo a $\sigma(a)$.

(2.g) Questo esempio generalizza (2.e). Sia $x \in A$, e sia B la sottoalgebra chiusa di A con unità generata da x. Vogliamo mostrare che $\sigma_B(x) \sim \Delta(B)$ è l'unione E di $\sigma_A(x)$ e di tutte le componenti connesse limitate del suo complementare.

Sia $\mathcal{P}$ l'algebra dei polinomi in una variabile, e sia $h : \mathcal{P} \to B$ data da $h(p) = p(x)$. Se esiste $p \neq 0$ tale che $p(x) = 0$, allora $p \circ \hat{x} = 0$. Dunque $\sigma_A(x) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0\}$ è finito e non c'è niente da dire.

Possiamo quindi supporre che h sia iniettiva. Se $\lambda \in E$, per il principio del massimo

$$|p(\lambda)| \leq \max_{\sigma_A(x)} |p| = \|\widehat{p(x)}\|_\infty ,$$

dove la trasformata di Gelfand $\widehat{p(x)}$ è riferita ad A. Se $y \in B$ è uguale a $p(x)$ per qualche $p \in \mathcal{P}$, allora $|p(\lambda)| \leq \|p(x)\|$. Per densità il funzionale $p(x) \mapsto p(\lambda)$ si estende a un funzionale lineare continuo su B, che risulta essere moltiplicativo.

Questo dimostra che $\lambda \in \sigma_B(x)$, e dunque $E \subseteq \sigma_B(x)$. L'inclusione opposta segue dal Corollario 1.6.

(2.h) Sia V uno spazio normato di dimensione finita, sia $T \in \mathcal{L}(V)$ e sia A la sottoalgebra con unità di $\mathcal{L}(V)$ generata da T. Allora A à semisemplice se e solo se T è diagonalizzabile.

Segue infatti dalla riduzione a forma canonica di Jordan che esiste una base di V in cui T si rappresenta con una matrice triangolare superiore M, che può essere decomposta come $M = D + N$, dove D è diagonale e N ha termini non nulli solo strettamente al di sopra della diagonale. In particolare $N^m = 0$ se m è la dimensione. D'altra parte, sia D che N sono esprimibili come polinomi in M, per cui essi appartengono all'algebra generata da M.

Ne segue che se $N \neq 0$, cioè se T non è diagonalizzabile, l'algebra A contiene un elemento nilpotente, e dunque non è semisemplice.

Se invece M è diagonale, con autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, basta considerare i caratteri φ_j di A tali che $\varphi_j(T) = \lambda_j$ per concludere che A è semisemplice.

3. Algebre commutative senza unità

La teoria di Gelfand può essere adattata ad algebre di Banach commutative senza unità, utilizzando il metodo di "aggiunta dell'unità" secondo la formula (1.1).

Definiamo, come per algebre con unità, *carattere* di A un funzionale lineare moltiplicativo non identicamente nullo su A. Il seguente risultato stabilisce la corrispondenza tra i caratteri di A e quelli di $\tilde{A}$.

Lemma 3.1. *Ogni carattere di A si estende in modo unico a un carattere di $\tilde{A}$. In questo modo si ottengono tutti i caratteri di $\tilde{A}$, tranne il carattere $\varphi_0(x, \lambda) = \lambda$, che è identicamente nullo su A.*

Dimostrazione. Un carattere di $\tilde{A}$ deve valere 1 nell'unità. Quindi se φ è un carattere di A, l'unico modo per estenderlo ad $\tilde{A}$ consiste nel porre $\varphi(x, \lambda) = \varphi(x) + \lambda$. Si verifica facilmente che questa definizione dà effettivamente un carattere di $\tilde{A}$.

Viceversa, se $\varphi \in \Delta(\tilde{A})$ e $\varphi \neq \varphi_0$, allora $\ker\varphi$ è un ideale massimale distinto da A. Poiché entrambi questi ideali hanno codimensione 1, φ non è identicamente nullo su A. $\square$

Lo *spettro di Gelfand* di A è l'insieme dei caratteri di A, indicato con $\Delta(A)$.

Corollario 3.2. *Ogni carattere φ di A è continuo e $\|\varphi\| \leq 1$. Dotato della topologia indotta dalla topologia debole-* di A^*, $\Delta(A)$ è omeomorfo a $\Delta(\tilde{A}) \setminus \{\varphi_0\}$; in particolare esso è localmente compatto e $\Delta(\tilde{A})$ ne è la compattificazione di Alexandroff.*

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione $i : \Delta(A) \to \Delta(\tilde{A})$ che associa a un carattere φ di A la sua unica estensione $\tilde{\varphi}$ ad $\tilde{A}$. Chiaramente $\|\varphi\| \leq \|\tilde{\varphi}\| = 1$.

Dato $\varphi \in \Delta(A)$, si ottiene un suo sistema fondamentale di intorni fissando $\varepsilon > 0$, un numero finito di elementi $x_1, \ldots, x_n \in A$ e ponendo

$$U_{\varepsilon,x_1,\ldots,x_n} = \{\psi \in \Delta(A) : |\psi(x_j) - \varphi(x_j)| < \varepsilon\,,\ j = 1, \ldots, n\}\ .$$

Descrivendo in modo analogo un sistema fondamentale di intorni di $i(\varphi)$ in $\Delta(\tilde{A})$, si ottiene la conclusione. $\square$

Dato $x \in A$, si chiama ancora *trasformata di Gelfand* di x la funzione $\hat{x} : \Delta(A) \to \mathbb{C}$ data da $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$.

Teorema 3.3. *Si ha $\|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\|$ e la trasformata di Gelfand $\mathcal{G}(x) = \hat{x}$ è un omomorfismo continuo di A in $C_0\big(\Delta(A)\big)$.*

Esempi.

(3.a) Si dimostri per esercizio che se X è uno spazio topologico localmente compatto, lo spettro di $C_0(X)$ è omeomorfo a X e che la trasformata di Gelfand $\mathcal{G}$ è l'operatore di composizione con tale omeomorfismo.

(3.b) Con riferimento all'esempio (2.e), si consideri il sottospazio chiuso A' di $C(\mathbb{T})$ linearmente generato dalle funzioni $e_n(t) = e^{int}$ con $n \geq 1$. Allora A' è una sottoalgebra senza unità di $C(T)$. Si vede facilmente che $\widetilde{A'}$ si identifica con l'algebra A dell'esempio (2.e) in modo naturale.

Il carattere di A identicamente nullo su A' è quello corrispondente al punto $0 \in \bar{D}$. Quindi $\Delta(A') \sim \bar{D} \setminus \{0\}$.

L'immagine $\mathcal{G}(A')$ di A' in $C_0\big(\bar{D} \setminus \{0\}\big)$ consiste delle restrizioni a $\bar{D} \setminus \{0\}$ delle funzioni continue su $\bar{D}$, olomorfe in D e nulle nell'origine.

Segue dal Lemma di Schwarz[2] che, per ogni $f \in A'$, $|\hat{f}(z)| \leq \|f\|_\infty |z|$. Quindi il carattere $\varphi_z(f) = \hat{f}(z)$ ha norma uguale a $|z|$. Si vede così che i caratteri di un'algebra senza unità possono avere norma strettamente minore di 1.

Se l'algebra non ha unità, la struttura dei suoi ideali diventa più complessa. Si osservi per esempio che possono esistere ideali propri densi. Un esempio è costituito da $C_c(\mathbb{R})$ (l'ideale delle funzioni a supporto compatto) in $C_0(\mathbb{R})$. Inoltre la

[2]Esso afferma che se F è olomorfa in D, minore o uguale a 1 in modulo e nulla nell'origine, allora $|F(z)| \leq |z|$. Per la dimostrazione, basta considerare $F(z)/z$ e applicare il principio del massimo.

mancanza di un' unità consente la presenza di situazioni patologiche (per es. su un qualunque spazio di Banach si ponga $xy = 0$ identicamente).

Ai fini delle connessioni con la teoria di Gelfand, è opportuno introdurre la classe più ristretta degli *ideali regolari*.

Definizione. *Un ideale proprio di A si dice* regolare *se esiste una* identità modulo *I, cioè un elemento $e_I \in A$ tale che $xe_I - x \in I$ per ogni $x \in A$.*

La regolarità di I è equivalente alla proprietà che l'algebra quoziente A/I ha un'unità (uguale alla classe laterale $e_I + I$).

Teorema 3.4. *Sia A un'algebra di Banach commutativa.*

(1) *Se $I \subset J$ sono ideali propri e I è regolare, anche J è regolare.*
(2) *Se I è regolare, $\bar{I}$ è un ideale proprio, e dunque regolare.*
(3) *Ogni ideale regolare è contenuto in un ideale massimale regolare*[3]*.*
(4) *Gli ideali massimali regolari sono tutti e soli i nuclei dei caratteri di A.*

Dimostrazione. La (1) è evidente. Per la (2), basta dimostrare che se $x \in A$ è tale che $\|x - e_I\| < 1$, allora $x \notin I$. Posto $y = e_I - x$, la serie $e_I + \sum_{n=1}^{\infty} y^n$ converge a un elemento $z \in A$ tale che

$$xz = (e_I - y)(e_I + y + y^2 + \cdots) = e_I^2 - y^2 + e_I y^2 - y^3 + e_I y^3 + \cdots \in e_I^2 + I = e_I + I\ .$$

Quindi se fosse $x \in I$, sarebbe anche $e_I \in I$, e quindi avremmo $I = A$, contro l'ipotesi.

(3) Sia I un ideale regolare. Allora $A/\bar{I}$ è un'algebra di Banach con unità. Se J è un ideale massimale di $A/\bar{I}$, la sua controimmagine in A per la proiezione canonica è un ideale massimale regolare.

(4) Se I è un'ideale massimale regolare, I è chiuso per la (2). Allora A/I è un'algebra di Banach con unità e priva di ideali propri non banali. Quindi $A/I \sim \mathbb{C}$ per il Teorema di Gelfand-Mazur. basta allora procedere come nella dimostrazione della Proposizione 2.3. □

4. C*-algebre commutative

Definizione. *Sia A un'algebra su $\mathbb{C}$. Una* involuzione *su A è un'applicazione * : $A \to A$ che soddisfi le seguenti proprietà per $x, y \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:*

(1) $(x+y)^* = x^* + y^*$;
(2) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$;
(3) $(xy)^* = y^* x^*$;
(4) $x^{**} = x$.

Un'algebra di Banach con involuzione si chiama anche una *-algebra*. Un elemento di A si dice* hermitiano*, o* autoaggiunto*, se $x^* = x$.*

[3]Il termine non è ambiguo, perché per la (1), "massimale tra gli ideali regolari" e "massimale tra tutti gli ideali propri, e in aggiunta regolare" sono proprietà equivalenti.

Proposizione 4.1. *Sia A un'algebra di Banach con involuzione.*

(1) *Dato $x \in A$, gli elementi $x + x^*, i(x - x^*), x^*x, xx^*$ sono hermitiani.*
(2) *Se A ha un'unità e, allora $e^* = e$.*
(3) *Se A ha unità e $x \in A^{-1}$, anche $x^* \in A^{-1}$ e $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.*
(4) *Se A ha unità, $\sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)}$ per ogni $x \in A$.*
(5) *Se A è commutativa, dato un carattere $\varphi \in \Delta(A)$, anche $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(x^*)}$ è un carattere, e $\widehat{x^*}(\varphi) = \overline{\hat{x}(\varphi^*)}$.*
(6) *Se A è commutativa e semisemplice, allora ogni involuzione su A è continua.*

Dimostrazione. Le dimostrazioni degli enunciati (1)-(5) sono lasciate per esercizio. Dimostriamo la (6). Osservando che l'involuzione è $\mathbb{R}$-lineare, per il Teorema del grafico chiuso, basta dimostrare che se $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} x_n^* = y$, allora $y = x^*$. Ma

$$\hat{y}(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \widehat{x_n^*}(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \overline{\widehat{x_n}(\varphi^*)} = \overline{\hat{x}(\varphi^*)} = \widehat{x^*}(\varphi) \ .$$

Poiché A è semisemplice, $y = x^*$. □

Definizione. *Sia A un'algebra di Banach con involuzione. Se A soddisfa l'ulteriore proprietà*

$$\|x^*x\| = \|x\|^2 \ , \tag{4.1}$$

si dice che A è una C*-algebra.

Proposizione 4.2. *Se A è una C*-algebra, allora $\|x^*\| = \|x\|$ per ogni $x \in A$.*

Dimostrazione. Si ha $\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\|$, da cui $\|x\| \leq \|x^*\|$. Sostituendo x^* al posto di x si ha la disuguaglianza opposta. □

Esempi.

(4.a) $C(K)$ con l'involuzione $f^*(x) = \overline{f(x)}$ è una C*-algebra.

(4.b) Sull'algebra A dell'Esempio (2.e) si ponga l'involuzione $f^*(t) = \overline{f(-t)}$. Le proprietà (1)-(4) sono soddisfatte. Tuttavia, ponendo $f(t) = e^{it} + i$, si ha $f(t)f^*(t) = e^{2it} + 1$, per cui $\|ff^*\|_\infty = 2 = \|f\|_\infty$. Quindi A non è una C*-algebra.

Si noti che l'involuzione corrispondente sull'algebra del disco è data da $F^*(z) = \overline{F(\bar{z})}$. Si discuta per esercizio la relazione con la (5) della Proposizone 4.1.

(4.c) Sia $(H, \langle \, , \, \rangle)$ uno spazio di Hilbert complesso. L'involuzione $T \mapsto T^*$, dove T^* è l'*aggiunto Hilbertiano* definito da $\langle T^*v, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$, rende $\mathcal{L}(H)$ una C*-algebra. Infatti segue dalla definizione che

$$\|T^*\| = \sup_{v,w\neq 0} \frac{|\langle T^*v, w\rangle|}{\|v\|\|x\|} = \sup_{v,w\neq 0} \frac{|\langle v, Tw\rangle|}{\|v\|\|x\|} = \|T\| \ ,$$

per cui basta dimostrare che $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. Ma

$$\|T\|^2 = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Tv\|^2}{\|v\|^2} = \sup_{v\neq 0} \frac{\langle T^*Tv, v\rangle}{\|v\|^2} \leq \|T^*T\| \ .$$

Definizione. *Sia A un'algebra di Banach commutativa con involuzione. A si dice* simmetrica *se ogni ideale massimale (regolare) I è autoaggiunto (cioè $I^* = I$).*

Proposizione 4.3. *Le seguenti proprietà sono equivalenti per un'algebra di Banach commutativa con involuzione A:*

(1) *A è simmetrica;*
(2) *per ogni carattere φ di A, il carattere $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(x^*)}$ coincide con φ;*
(3) *per ogni $x \in A$, $\widehat{x^*} = \overline{\hat{x}}$;*
(4) *se $x \in A$ è hermitiano, $\hat{x}$ è reale.*

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). Sia φ un carattere, e sia $I = \ker\varphi$. Allora $\varphi(x)e - x \in I$ per ogni $x \in A$. Poiché I è autoaggiunto, anche $\overline{\varphi(x)}e - x^* \in I$, da cui $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$.

Poiché $\ker(\varphi^*) = (\ker\varphi)^*$, anche (2) $\Rightarrow$ (1). Chiaramente (2) $\Leftrightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (4). Dato $x \in A$, ponendo

$$x_1 = \frac{x + x^*}{2} , \qquad x_2 = \frac{x - x^*}{2i} ,$$

x_1 e x_2 sono hermitiani, e $x = x_1 + ix_2$, $x^* = x_1 - ix_2$. Segue facilmente che (4) $\Rightarrow$ (3). $\square$

Corollario 4.4. *Se A è simmetrica con unità (risp. senza unità), la trasformata di Gelfand $\mathcal{G}$ ha per immagine una sottoalgebra densa di $C\big(\Delta(A)\big)$ (risp. di $C_0\big(\Delta(A)\big)$).*

Dimostrazione. Possiamo supporre che A abbia unità. L'immagine $\mathcal{G}(A)$ di A in $C\big(\Delta(A)\big)$ contiene le funzioni costanti ed è invariante per coniugazione. Inoltre separa i punti, perché, dati due caratteri diversi φ, ψ, esiste x tale che $\varphi(x) = \hat{x}(\varphi) \neq \psi(x) = \hat{x}(\psi)$. La tesi segue dal Teorema di Stone-Weierstrass. $\square$

Lemma 4.5. *Se A è una C^*-algebra commutativa con unità, allora A è simmetrica.*

Dimostrazione. Usando la (4) della Proposizione 4.3, mostriamo che se $x = x^*$ e $\varphi \in \Delta(A)$, allora $\varphi(x) \in \mathbb{R}$.

Sia $\varphi(x) = a + ib$. Posto $y = x + ite$, con $t \in \mathbb{R}$, si ha $\varphi(y) = a + i(b+t)$, $y^*y = x^2 + t^2 e$, da cui

$$a^2 + (b+t)^2 = |\varphi(y)|^2 \leq \|y\|^2 \leq \|y^*y\| \leq \|x^2\| + t^2 .$$

Quindi $a^2 + b^2 + 2bt \leq \|x^2\|$ per ogni t, da cui $b = 0$. $\square$

Teorema 4.6 (di Gelfand-Naimark). *Se A è una C^*-algebra commutativa con unità, allora la trasformata di Gelfand $\mathcal{G}$ è un isomorfismo isometrico di C^*-algebre da A a $C\big(\Delta(A)\big)$.*

Dimostrazione. Se $x = x^*$, allora $\|x^2\| = \|x^*x\| = \|x\|^2$, da cui $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$ per il Teorema 2.7.

Dato un generico $x \in A$, x^*x è hermitiano, e per la simmetria di A,

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|\widehat{x^*x}\|_\infty = \big\||\hat{x}|^2\big\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2 .$$

Quindi $\mathcal{G}$ è un'isometria, e la sua immagine in $C\big(\Delta(A)\big)$ è chiusa. Per il Corollario 4.4, essa è anche densa e si ha la tesi. $\square$

Esempi.

(4.d) Sia (X, μ) uno spazio di misura. Si vede facilmente che $L^\infty(X, \mu)$ è una C*-algebra commutativa con unità rispetto al prodotto puntuale q.o. e con l'involuzione $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Per il Teorema di Gelfand-Naimark, esiste uno spazio topologico compatto K con la proprietà che $L^\infty(X, \mu)$ è isometricamente isomorfo a $C(K)$[4].

(4.e) Sia A una *-algebra simmetrica con unità. Dato $a \in A$, consideriamo la sottoalgebra di Banach B di A con unità generata da a e a^*. Allora B è pure una *-algebra. Essa è commutativa se e solo se a è *normale*, cioè $aa^* = a^*a$.

Mostriamo che in tal caso B è simmetrica. Per la Proposizione 4.3 (4), basta far vedere che se $x = x^* \in B$, allora $\sigma_B(x) \subset \mathbb{R}$. Ma $\sigma_A(x)$ è propriamente contenuto in $\mathbb{R}$, per cui non sconnette $\mathbb{C}$. Quindi $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$ e dunque B è simmetrica.

In realtà l'uguaglianza dei due spettri vale per ogni elemento di B. Infatti, supponiamo che un elemento $y \in B$ sia invertibile in A. Allora anche y^*y lo è, per cui $0 \notin \sigma_A(y^*y) = \sigma_B(y^*y)$. Ma allora $(y^*y)^{-1} = y^{-1}y^{*-1} \in B$, per cui $y^{-1} \in B$.

Adattando l'argomento esposto nell'esempio (2.d), si vede che $\Delta(B) = \sigma_B(a) = \sigma_A(a)$. Se A è una C*-algebra, anche B lo è, e allora, per il Teorema di Gelfand-Naimark, B è isomorfa a $C\big(\sigma_A(a)\big)$.

Consideriamo ora una C*-algebra A commutativa, ma senza unità. L'algebra estesa $\tilde{A}$ ha un'involuzione naturale[5], $(x, \lambda)^* = (x^*, \bar{\lambda})$, ma la norma $\|(x, \lambda)\| = \|x\| + |\lambda|$ non soddisfa necessariamente la (4.1). È possibile tuttavia sostituire tale norma con una equivalente in modo che $\tilde{A}$ diventi una C*-algebra.

Lemma 4.7. *Si ponga* $\|(x, \lambda)\|' = \sup_{y \in A\,,\, \|y\| \le 1} \|xy + \lambda y\|$. *Allora* $\|(x, \lambda)\|' \sim \|x\| + |\lambda|$ *e* $\|(x, \lambda)^*(x, \lambda)\|' = \|(x, \lambda)\|'^2$. *Inoltre* $\|(x, 0)\|' = \|x\|$.

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione Φ di $\tilde{A}$ in $\mathcal{L}(A)$ data da $\Phi(x, \lambda) = M_x + \lambda I$, dove M_x è l'operatore di moltiplicazione per x. Mostriamo che Φ è iniettiva. Se $\Phi(x, \lambda) = 0$, vuol dire che $xy + \lambda y = 0$ per ogni $y \in A$. Se per assurdo fosse $\lambda \neq 0$, si avrebbe $-\lambda^{-1}xy = y$ per ogni y, e dunque A avrebbe un'unità, contro l'ipotesi. Allora $\lambda = 0$, da cui $xx^* = 0$, e quindi $x = 0$.

Si vede allora facilmente che Φ è un isomorfismo di algebre con la sua immagine.

La norma $\|(x, \lambda)\|'$ su $\tilde{A}$ coincide con la norma $\|M_x + \lambda I\|$ in $\mathcal{L}(A)$, per cui le proprietà della norma in un'algebra di Banach sono sicuramente verificate. Inoltre $\|(x, \lambda)^*\|' = \|(x, \lambda)\|'$, come si verifica facilmente. Per ottenere la (4.1) basta allora dimostrare che $\|(x, \lambda)\|'^2 \le \|(x, \lambda)^*(x, \lambda)\|'$. Ma

$$(x, \lambda)^*(x, \lambda) = \big(x^*x + \bar{\lambda}x + \lambda x^*, |\lambda|^2\big) \ ,$$

e, se $y \in A$,

$$\begin{aligned}
\|xy + \lambda y\|^2 &= \big\|(x^*y^* + \bar{\lambda}y^*)(xy + \lambda y)\big\| \\
&= \big\|(x^*xy + \bar{\lambda}xy + \lambda x^*y + |\lambda|^2 y)y^*\big\| \\
&\le \|M_{x^*x + \bar{\lambda}x + \lambda x^*}y + |\lambda|^2 y\|\|y\| \\
&\le \big\|(x^*x + \bar{\lambda}x + \lambda x^*, |\lambda|^2)\big\|'\|y\|^2 \ ,
\end{aligned}$$

[4]Per una presentazione delle proprietà di K si veda W. Rudin, Functional Analysis, sez. 11.13.

[5]Questa è l'unica involuzione che estenda quella su A.

da cui segue la disuguaglianza cercata.

Dimostriamo ora che la restrizione ad $A \times \{0\}$ della norma $\| \ \|'$ coincide con la norma originaria su A. La disuguaglianza $\|(x,0)\|' \leq \|x\|$ segue dalla definizione, e inoltre $\|(x,0)\|' \geq \|xx^*\|/\|x^*\| = \|x\|$. Quindi $\|(x,0)\|' = \|x\|$.

Rimane da dimostrare l'equivalenza tra le due norme su $\tilde{A}$. Poiché

$$\|xy + \lambda y\| \leq \big(\|x\| + |\lambda|\big)\|y\| \ ,$$

si ha la disuguaglianza $\|(x,\lambda)\|' \leq \|x\| + |\lambda|$. La disuguaglianza opposta segue dal Teorema dell'applicazione aperta, se dimostriamo che $\tilde{A}$ è completa per la norma $\| \ \|'$.

Ma $A \times \{0\}$ è completa per la norma $\| \ \|'$, dunque chiusa. Quindi il funzionale lineare $(x,\lambda) \mapsto \lambda$ è continuo su $\tilde{A}$. Se $\big\{(x_n,\lambda_n)\big\}$ è una successione di Cauchy, segue che $\{\lambda_n\}$ è una successione di Cauchy. Ma allora anche $\big\{(x_n,0)\big\}$ è di Cauchy. La conclusione segue facilmente. □

Corollario 4.8. *Se A è una C^*-algebra commutativa senza unità, allora la trasformata di Gelfand $\mathcal{G}$ è un isomorfismo isometrico di C^*-algebre da A a $C_0\big(\Delta(A)\big)$.*

5. Il teorema spettrale

Sia H uno spazio di Hilbert, e sia A una sottoalgebra chiusa di $\mathcal{L}(H)$, contenente l'identità, commutativa e chiusa per involuzione. Allora A è una C*-algebra con unità. Per il Teorema di Gelfand-Naimark, la trasformata di Gelfand $\mathcal{G}$ è un isomorfismo isometrico di C*-algebre da A su $C(\Delta)$, dove abbiamo posto $\Delta = \Delta(A)$.

Dati $f \in C(\Delta)$, $u, v \in H$, poniamo

$$T_f = \mathcal{G}^{-1} f \ , \qquad \varphi_{u,v}(f) = \langle T_f u, v \rangle \ . \tag{5.1}$$

Allora

$$\|\varphi_{u,v}(f)\| \leq \|u\| \|v\| \|f\|_\infty \ . \tag{5.2}$$

Per il Teorema di rappresentazione di Riesz, esiste una e una sola misura di Borel regolare $\mu_{u,v}$ tale che

$$\langle T_f u, v \rangle = \int_\Delta f \, d\mu_{u,v} \ . \tag{5.3}$$

Lemma 5.1. *L'applicazione $(u,v) \longmapsto \mu_{u,v}$ da $H \times H$ in $M(\Delta)$ è sesquilineare, continua, hermitiana e positiva; esplicitamente:*

(1) $\mu_{\alpha u + \beta u', v} = \alpha \mu_{u,v} + \beta \mu_{u',v}$;
(2) $\mu_{v,u} = \overline{\mu_{u,v}}$;
(3) $\mu_{u,u} \geq 0$ *per ogni* $u \in H$.

Dimostrazione. La continuità segue dalla (5.2) e le prime due proprietà sono evidenti. Per dimostrare la terza proprietà, data $f \geq 0$, sia $g = \sqrt{f}$. Allora

$$\int_\Delta f \, d\mu_{u,u} = \langle T_f u, u \rangle = \langle T_g^2 u, u \rangle = \|T_g u\|^2 \geq 0 \ . \qquad \square$$

Si osservi che il secondo membro della (5.3) è ben definito anche se f è solo Boreliana e limitata su Δ. Quindi per $f \in B(\Delta)$, *definiamo* T_f attraverso la (5.3). Poiché

$$|\langle T_f u, v\rangle| \leq \|f\|_\infty \|\mu_{u,v}\|_1 \leq \|f\|_\infty \|u\|\|v\| \ , \tag{5.4}$$

si ha che $T_f \in \mathcal{L}(H)$ e $\|T_f\| \leq \|f\|_\infty$.

Teorema 5.2. *L'applicazione $\Phi f = T_f$ è un omomorfismo continuo di *-algebre da $B(\Delta)$ in $\mathcal{L}(H)$. Inoltre, se $\{f_n\}$ è una successione equilimitata in $B(\Delta)$ convergente puntualmente a f, allora $\{T_{f_n}\}$ converge a T_f nella topologia forte.*

Dimostrazione. La linearità di Φ è evidente. L'identità $\Phi(\bar f) = (\Phi f)^*$, cioè $T_{\bar f} = T_f^*$, vale in quanto, per ogni $u, v \in H$,

$$\langle T_{\bar f} u, v\rangle = \int_\Delta \bar f \, d\mu_{u,v} = \overline{\int_\Delta f \, d\mu_{v,u}} = \overline{\langle T_f v, u\rangle} = \langle u, T_f v\rangle \ .$$

Per verificare che $T_{fg} = T_f T_g$ per $f, g \in B(\Delta)$, partiamo dal fatto che l'identità vale se f e g sono in $C(\Delta)$. Quindi

$$\int_\Delta g \, d\mu_{T_f u,v} = \langle T_g T_f u, v\rangle = \langle T_{fg} u, v\rangle = \int_\Delta fg \, d\mu_{u,v} \ , \tag{5.5}$$

da cui $\mu_{T_f u,v} = f\mu_{u,v}$. Allora il primo e l'ultimo membro della (5.5) rimangono uguali se $g \in B(\Delta)$. L'uguaglianza dei membri intermedi implica che $T_g T_f = T_{fg}$ quando $f \in C(\Delta)$ e $g \in B(\Delta)$. Nelle stesse ipotesi,

$$T_f T_g = (T_{\bar g} T_{\bar f})^* = T^*_{\overline{gf}} = T_{fg} \ .$$

Ma allora

$$\int_\Delta f \, d\mu_{T_g u,v} = \int_\Delta fg \, d\mu_{u,v} \ , \tag{5.6}$$

da cui $\mu_{T_g u,v} = g\mu_{u,v}$ e la (5.6) vale per $f \in B(\Delta)$, e questo dà la conclusione cercata.

Per la (5.4), se $f \in B(\Delta)$, $\|T_f\| \leq \|f\|_\infty$, dunque Φ è continuo.

Per provare l'ultima affermazione, sia $\{f_n\}$ una successione in $B(\Delta)$ tale che $|f_n| \leq C$ e $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ puntualmente. Allora, per ogni $u \in H$,

$$\|T_{f_n} u\|^2 = \langle T^*_{f_n} T_{f_n} u, u\rangle = \int_\Delta |f_n|^2 \, d\mu_{u,u} \ ,$$

che tende a 0 per convergenza dominata. □

Sia ora $\omega \subset \Delta$ un Boreliano, e sia $E(\omega) = T_{\chi_\omega}$. Poiché $\chi_\omega^2 = \overline{\chi_\omega} = \chi_\omega$, si ha

$$E(\omega)^2 = E(\omega)^* = E(\omega) \ .$$

Ciò equivale a dire che $E(\omega)$ è il proiettore ortogonale di H su un sottospazio chiuso V_ω.

Lemma 5.3. *Valgono le seguenti proprietà:*

(1) $E(\emptyset) = 0$ *e* $E(\Delta) = I$;

(2) $E(\omega \cap \omega') = E(\omega)E(\omega')$;

(3) *se* $\{\omega_j\}$ *è una famiglia finita o numerabile di Boreliani a due a due disgiunti, allora*

$$E\Big(\bigcup_j \omega_j\Big) = \sum_j E(\omega_j) \ ,$$

dove la serie converge nella topologia forte;

(4) *per ogni Boreliano* ω,

$$E(\omega) = \sup\big\{E(\omega') : \omega' \subset \omega \, , \, \omega' \text{ compatto}\big\} = \inf\big\{E(\omega'') : \omega'' \supset \omega \, , \, \omega'' \text{ aperto}\big\} \ ,$$

rispetto all'ordinamento parziale sullo spazio degli operatori autoaggiunti[6]*;*

(5) *se* ω *è aperto e non vuoto, allora* $E(\omega) \neq 0$.

Dimostrazione. La (1) è ovvia. Per la (2), basta osservare che $\chi_{\omega\cap\omega'} = \chi_\omega \chi_{\omega'}$.

La (3) è evidente se la famiglia $\{\omega_j\}$ è finita. Indicando con $\Omega_n = \bigcup_{j\le n} \omega_j$ e con $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \omega_j$, allora χ_{Ω_n} converge puntualmente a χ_Ω, per cui $E(\Omega_n) = \sum_{j\le n} E(\omega_j)$ converge fortemente a $E(\Omega)$.

Per dimostrare la prima uguaglianza nella (4), occorre far vedere che se $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$ è tale che $E(\omega') \le T \le E(\omega)$ per ogni compatto $\omega' \subset \omega$, allora $T = E(\omega)$. Se $u \in H$, si ha per ipotesi

$$\langle E(\omega')u, u\rangle \le \langle Tu, u\rangle \le \langle E(\omega)u, u\rangle \ ,$$

ossia

$$\mu_{u,u}(\omega') \le \langle Tu, u\rangle \le \mu_{u,u}(\omega) \ .$$

Essendo $\mu_{u,u}$ una misura regolare,

$$\sup_{\omega'\subset\omega} \mu_{u,u}(\omega') = \mu_{u,u}(\omega) \ ,$$

e quindi $\langle Tu, u\rangle = \langle E(\omega)u, u\rangle$. Per polarizzazione,

$$4\Re\mathrm{e}\langle Tu, v\rangle = \big\langle T(u+v), u+v\big\rangle - \big\langle T(u-v), u-v\big\rangle = 4\Re\mathrm{e}\langle E(\omega)u, v\rangle \ ,$$

e, sostituendo iv al posto di v, si conclude che $T = E(\omega)$.

L'altra uguaglianza si dimostra in modo analogo.

Infine, per dimostrare la (5), sia f una funzione continua con supporto in ω e tale che $|f| \le 1$. Allora, se $u \in H$,

$$\|T_f u\|^2 = \langle T_{f^2}u, u\rangle = \int_\Delta f^2 \, d\mu_{u,u} \le \int_\omega d\mu_{u,u} = \langle E(\omega)u, u\rangle \ .$$

Se f non è identicamente nulla, esiste $u \in H$ tale che $T_f u \neq 0$. Dunque $E(\omega) \neq 0$. $\square$

---

[6] $T \ge T'$ vuol dire che $T - T' \ge 0$, nel senso che $\langle (T-T')u, u\rangle \ge 0$ per ogni $u \in H$.

Definizione. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia Ω uno spazio topologico localmente compatto. Si chiama* risoluzione regolare dell'identità di H su Ω *una funzione E definita sulla σ-algebra dei Boreliani di Ω a valori nei proiettori ortogonali su H tale che valgano le proprietà (1)-(4) del Lemma 5.3.*

La (4) è equivalente alla seguente proprietà:

(4') Per ogni $u, v \in H$, la misura $\mu_{u,v}(\omega) = \langle E(\omega)u, v\rangle$ è regolare.

Se E è una risoluzione regolare dell'identità, data $f \in B(\Omega)$, si definisce

$$T_f = \int_\Omega f\, dE$$

l'operatore lineare su H tale che

$$\langle T_f u, v\rangle = \int_\Omega f\, d\mu_{u,v} \ , \tag{5.7}$$

per ogni $u, v \in H$.

Lemma 5.4. *Sia E una risoluzione regolare dell'identità di H su Ω.*

(1) *Per ogni $f \in B(\Omega)$, $T_f \in \mathcal{L}(H)$ e $\|T_f\| \le \|f\|_\infty$.*
(2) *Per ogni $f, g \in B(\Omega)$, $T_{fg} = T_f T_g$.*
(3) *Sia $K = \big\{ f \in B(\Omega) : T_f = 0 \big\}$. Una funzione f appartiene a K se e solo se, per ogni $u \in H$, f è quasi ovunque nulla rispetto a $\mu_{u,u}$. Inoltre K è un ideale chiuso, invariante per coniugazione.*

Dimostrazione. (1) Per ogni $u \in H$ e ogni Boreliano ω,

$$\mu_{u,u}(\omega) = \langle E(\omega)u, u\rangle = \|E(\omega)u\|^2 \ .$$

In particolare $\mu_{u,u} \ge 0$ e $\|\mu_{u,u}\|_1 = \mu_{u,u}(\Omega) = \|u\|^2$. Se v è un altro elemento di H,

$$\big|\mu_{u,v}(\omega)\big| = \big|\langle E(\omega)u, E(\omega)v\rangle\big| \le \|E(\omega)u\|\|E(\omega)v\| = \mu_{u,u}(\omega)^{\frac12}\mu_{v,v}(\omega)^{\frac12} \ . \tag{5.8}$$

Se $\{\omega_j\}$ è una famiglia numerabile di Boreliani a due a due disgiunti, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz,

$$\sum_j \big|\mu_{u,v}(\omega_j)\big| \le \sum_j \mu_{u,u}(\omega_j)^{\frac12}\mu_{v,v}(\omega_j)^{\frac12} \le \|u\|\|v\| \ .$$

Quindi $\|\mu_{u,v}\|_1 \le \|u\|\|v\|$. Segue allora dalla (5.7) che $T_f \in \mathcal{L}(H)$ e $\|T_f\| \le \|f\|_\infty$.

(2) L'identità $T_{fg} = T_f T_g$ si verifica facilmente per f, g funzioni semplici. Per la (1), l'applicazione $f \mapsto T_f$ è continua, per cui l'identità si estende a f, g continue. L'estensione a generiche $f, g \in L^\infty(\Omega, E)$ si ottiene come nella dimostrazione del Teorema 5.2.

(3) Dato $u \in H$, si ha

$$\int_\Delta |f|^2\, d\mu_{u,u} = \langle T_f^* T_f u, u\rangle = \|T_f u\|^2 \ ,$$

da cui segue la caratterizzazione di K.

Se $f \in K$ e $g \in B(\Omega)$, allora fg è quasi ovunque nulla rispetto a ogni $\mu_{u,u}$, per cui $fg \in K$. Analogamente si dimostra che $\bar{f} \in K$ se $f \in K$. Infine K è chiuso, in quanto è il nucleo dell'operatore continuo $f \mapsto T_f$. $\square$

Indichiamo con $L^\infty(\Delta, E)$ lo spazio quoziente $B(\Omega)/K$. Esso è una C*-algebra con la norma e la struttura algebrica quoziente. Chiaramente l'operatore $\Phi f = T_f$ si proietta a un omomorfismo iniettivo $\tilde{\Phi}$ da $L^\infty(\Delta, E)$ in $\mathcal{L}(H)$.

La norma quoziente di una classe $f + K$, che indichiamo con $\|f\|_{\infty,E}$, coincide con l'*estremo superiore essenziale* di $|f|$

$$\|f\|_{\infty,E} = \inf \Big\{ \lambda : E\big(\{\delta : |f(\delta)| > \lambda\}\big) = 0 \Big\} \ .$$

Teorema 5.5. *Sia E una risoluzione regolare dell'identità di H su uno spazio localmente compatto Ω. L'applicazione $\tilde{\Phi} f = T_f$ è un isomorfismo isometrico di C*-algebre tra $L^\infty(\Omega, E)$ e la sua immagine in $\mathcal{L}(H)$.*

Viceversa, data una C-algebra $A \subset \mathcal{L}(H)$ commutativa e con unità, esiste una e una sola risoluzione regolare E dell'identità di H su $\Delta = \Delta(A)$ tale che $E(\omega) \neq 0$ per ogni aperto $\omega \subset \Delta$ non vuoto, e $U = \int_\Delta \hat{U}\, dE$ per ogni $U \in A$.*

Inoltre le seguenti proprietà sono equivalenti per un operatore $S \in \mathcal{L}(H)$:

(1) *S commuta con ogni elemento di A;*
(2) *S commuta con $E(\omega)$ per ogni Boreliano ω;*
(3) *S commuta con ogni elemento di $\tilde{\Phi}\big(L^\infty(\Delta, E)\big)$.*

Dimostrazione. Per quanto riguarda la prima parte, occorre completare la dimostrazione del fatto che $\tilde{\Phi}$ è un'isometria, facendo vedere che vale la disuguaglianza $\|T_f\| \geq \|f\|_{\infty,E}$. Utilizzando l'identità $T_f^* T_f = T_{|f|^2}$, è sufficiente prendere $f \geq 0$.

Dato $\varepsilon > 0$, sia $\omega_\varepsilon = \{\delta : |f(\delta)| > \|f\|_{\infty,E} - \varepsilon\}$. Allora $E(\omega_\varepsilon) \neq 0$, per cui esiste $u \in H$, con $\|u\| = 1$, tale che $E(\omega_\varepsilon) u = u$. Allora $\mu_{u,u}(\omega_\varepsilon) = 1$ e

$$\langle T_f u, u\rangle = \int_\Delta f\, d\mu_{u,u} \geq \big(\|f\|_{\infty,E} - \varepsilon\big)\mu_{u,u}(\omega_\varepsilon) = \|f\|_{\infty,E} - \varepsilon \ .$$

Sia ora A una sotto-C*-algebra di $\mathcal{L}(H)$ commutativa e con unità. Per la (5.1), se $U \in A$,

$$U = T_{\hat{U}} = \int_\Delta \hat{U}\, dE \ ,$$

dove E è la risoluzione dell'identità introdotta dopo il Teorema 5.2.

Se E' è un'altra risoluzione regolare dell'identità tale che $U = \int_\Delta \hat{U}\, dE'$ per ogni $U \in A$, dati $u, v \in H$ poniamo $\mu'_{u,v}(\omega) = \langle E'(\omega)u, v\rangle$. Allora deve risultare

$$\int_\Delta \hat{U}\, d\mu'_{u,v} = \langle Uu, v\rangle = \int_\Delta \hat{U}\, d\mu_{u,v} \ ,$$

per ogni $U \in A$. Per il Teorema di Gelfand-Naimark e il Teorema di rappresentazione di Riesz, abbiamo allora $\mu'_{u,v} = \mu_{u,v}$ e dunque $E'(\omega) = E(\omega)$ per ogni Boreliano ω.

Vediamo ora che (1)$\Rightarrow$(3). L'ipotesi afferma che $ST_f = T_f S$ per ogni $f \in C(\Delta)$. Quindi

$$\int_\Delta f\, d\mu_{Su,v} = \langle T_f Su, v\rangle = \langle ST_f u, v\rangle = \int_\Delta f\, d\mu_{u,S^*v} \ ; \tag{5.9}$$

ma allora $\mu_{Su,v} = \mu_{u,S^*v}$ e la (5.9) vale per ogni $f \in B(\Delta)$.

L'implicazione (3)$\Rightarrow$(2) è ovvia. Infine, se vale la (2),

$$\mu_{Su,v}(\omega) = \langle E(\omega)Su, v\rangle = \langle E(\omega)u, S^*v\rangle = \mu_{u,S^*v}(\omega) \ ,$$

per ogni Boreliano ω. La (1) segue dalla (5.9). $\square$

Il Teorema 5.5 assume una forma particolarmente importante nel caso in cui A è la C*-algebra con unità generata da un singolo operatore normale $T \in \mathcal{L}(H)$ e dal suo aggiunto T^*. Per l'Esempio 4.e, $\Delta = \sigma(T) \subset \mathbb{C}$, e lo spettro di T in A coincide con quello in $\mathcal{L}(H)$.

La misura E su $\sigma(T)$ si chiama la *misura spettrale* di T.

Corollario 5.6 (Teorema spettrale). *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale, sia A la C^*-algebra con unità generata da T e da T^* e sia E la misura spettrale di T. Allora per ogni $U \in A$ esiste una e una sola $f \in C\big(\sigma(T)\big)$ tale che $U = f(T)$, nel senso che*

$$U = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, dE(\lambda) \ .$$

In particolare

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda\, dE(\lambda) \ , \qquad T^* = \int_{\sigma(T)} \bar\lambda\, dE(\lambda) \ , \qquad p(T,T^*) = \int_{\sigma(T)} p(\lambda,\bar\lambda)\, dE(\lambda) \ ,$$

per ogni polinomio p.

Inoltre ogni $S \in \mathcal{L}(H)$ che commuta con T e con T^* commuta con ogni proiettore $E(\omega)$ e con ogni operatore $f(T)$, con $f \in L^\infty\big(\sigma(T), E\big)$.

CAPITOLO II
GENERALITÀ SUI GRUPPI LOCALMENTE COMPATTI

1. Gruppi localmente compatti

Definizione. *Un* gruppo topologico *è un gruppo G dotato di una topologia tale che l'applicazione $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ da $G \times G$ in G sia continua.*

Lemma 1.1. *L'applicazione $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ da $G \times G$ in G è continua se solo se sono continue le funzioni $(xy) \mapsto xy$ da $G \times G$ in G e $x \mapsto x^{-1}$ da G in sé.*

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Introduciamo ora alcune notazioni. Se A, B sono sottoinsiemi di G, poniamo

$$AB = \{xy : x \in A, y \in B\} .$$

Scriviamo aB e Ba invece di $\{a\}B$ e $B\{a\}$ rispettivamente. Se $A = B$, scriviamo A^2 invece di AA. Poniamo inoltre

$$A^{-1} = \{x^{-1} : x \in A\} .$$

A si dice *simmetrico* se $A = A^{-1}$.

Dato $a \in G$, definiamo le applicazioni ℓ_a e r_a di G in sé, dette rispettivamente *traslazioni sinistra e destra per* a, come

$$\ell_a(x) = ax , \qquad r_a(x) = xa^{-1} .$$

Così definite, esse soddisfano le regole di composizione

$$\ell_{ab} = \ell_a \ell_b , \qquad r_{ab} = r_a r_b .$$

Lemma 1.2. *Sia G un gruppo topologico.*

(1) *Dato $a \in G$, le applicazioni ℓ_a e r_a sono omeomorfismi di G in sé.*
(2) *Se $\{U_\alpha\}$ è un sistema fondamentale di intorni dell'identità e di G, allora, per ogni $a \in G$, $\{aU_\alpha\}$, $\{U_\alpha a\}$, $\{aU_\alpha^{-1}\}$, $\{U_\alpha^{-1} a\}$, sono sistemi fondamentali di intorni di a.*
(3) *Dato un intorno U di e, esiste un intorno simmetrico V di e tale che $V^2 \subset U$.*

Dimostrazione. (1) ℓ_a è la restrizione dell'applicazione prodotto $(x, y) \mapsto xy$ ad $\{a\} \times G$, composta con l'immersione naturale di G in $\{a\} \times G$. Dunque ℓ_a è continua. Poiché $\ell_a^{-1} = \ell_{a^{-1}}$, ℓ_a è un omeomorfismo. Analogamente per r_a.

La (2) è conseguenza immediata della (1) e della continuità dell'inversione.

(3) Per la continuità dell'applicazione prodotto in (e, e), dato U intorno di e, esiste W intorno di e tale che $W^2 \subset U$. Se W non è simmetrico, si prenda $V = W \cap W^{-1}$, che pure è un intorno di e. □

Corollario 1.3. *Sia G un gruppo topologico.*

(1) *Se A è aperto, AB è aperto per ogni sottoinsieme B di G.*
(2) *Se A e B sono compatti, anche AB è compatto.*
(3) *Se H è un sottogruppo di G, anche $\bar{H}$ è un sottogruppo.*
(4) *Un sottogruppo H è chiuso se e solo se G/H, con la topologia quoziente, è uno spazio di Hausdorff.*
(5) *Se H è un sottogruppo normale, G/H è un gruppo topologico.*
(6) *G è di Hausdorff se e solo se $\{e\}$ è chiuso.*
(7) *Un sottogruppo aperto è anche chiuso.*

Dimostrazione. (1) Poiché

$$AB = \bigcup_{b \in B} Ab \ ,$$

AB è aperto.

La (2) segue dalla continuità dell'applicazione prodotto.

(3) Siano $x, y \in \bar{H}$, e sia U un intorno di xy^{-1}. Per la continuità del prodotto, esistono intorni V, W di x e y rispettivamente tali che $VW^{-1} \subset U$. Se $x' \in H \cap V$ e $y' \in H \cap W$, allora $x'y'^{-1} \in H \cap U$. Si conclude che $xy^{-1} \in \bar{H}$.

(4) Supponiamo che H sia chiuso, e sia π la proiezione canonica di G su G/H. Siano poi $x, y \in G$ tali che $\pi(x) \neq \pi(y)$. Allora $y \notin xH$, e dunque $e \notin xHy^{-1}$. Per il Lemma 1.2 (1), xHy^{-1} è chiuso. Usando il Lemma 1.2 (3), esiste un intorno simmetrico V di e tale che $V^2 \cap xHy^{-1} = \emptyset$.

Verifichiamo che $\pi(Vx)$ e $\pi(Vy)$ sono disgiunti. Se non lo fossero, esisterebbe $z \in VxH \cap VyH$, per cui avremmo $v_1xh = v_2y$ per qualche $v_1, v_2 \in V$ e $h \in H$. Ma allora sarebbe $xhy^{-1} = v_1^{-1}v_2 \in V^2 \cap xHy^{-1}$, il che è assurdo. Poiché $\pi(Vx)$ e $\pi(Vy)$ sono intorni di $\pi(x)$ e $\pi(y)$ rispettivamente, concludiamo che G/H è di Hausdorff.

Viceversa, se G/H è di Hausdorff, il singoletto $\{H\}$ è chiuso in G/H, per cui $H = \pi^{-1}\big(\{H\}\big)$ è chiuso in G.

(5) Siano $x, y \in G$ e sia U un intorno di $\pi(x)\pi(y)^{-1} = \pi(xy^{-1})$ in G/H. Allora $\pi^{-1}(U)$ è un intorno di xy^{-1} in G. Esistono dunque intorni V, W di x, y rispettivamente, tali che $VW^{-1} \subset \pi^{-1}(U)$. Allora $\pi(V)$ e $\pi(W)$ sono intorni di $\pi(x)$ e $\pi(y)$ rispettivamente, e si verifica facilmente che $\pi(V)\pi(W)^{-1} \subset U$.

La (6) discende direttamente dalla (4).

(7) Se H è un sottogruppo aperto, allora

$$^{c}H = \bigcup_{x \notin H} xH$$

è pure aperto, per cui H è chiuso. $\square$

Definizione. *Un* gruppo localmente compatto *è un gruppo topologico, di Hausdorff e localmente compatto.*

Poiché uno spazio localmente compatto di Hausdorff è anche completamente regolare, vale la seguente proprietà.

Lemma 1.4. *Sia G un gruppo localmente compatto. Dati un compatto K e un suo intorno U, esiste una funzione continua f su G a valori in $[0,1]$, tale che $f(x)=1$ per $x \in K$ e $f(x)=0$ per $x \notin U$.*

Data una funzione f su G, poniamo

$$L_a f(x) = f \circ \ell_{a^{-1}}(x) = f(a^{-1}x) \ , \qquad R_a f(x) = f \circ r_{a^{-1}}(x) = f(xa) \ .$$

Anche qui le definizioni sono date in modo che $L_{ab} = L_a L_b$ e $R_{ab} = R_a R_b$.

Definizione. *Una funzione f su G a valori complessi si dice* uniformemente continua a sinistra *(risp.* a destra*) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U di e tale che per ogni $x \in G$ e ogni $h \in U$ risulti $\big|f(hx) - f(x)\big| < \varepsilon$ (risp. $\big|f(xh) - f(x)\big| < \varepsilon$).*

Si osservi che f è uniformemente continua a sinistra se e solo se

$$\lim_{h \to e} \|L_h f - f\|_\infty = 0 \ ,$$

e analogamente per la continuità uniforme a destra.

Lemma 1.5. *Se $f \in C_0(G)$, allora f è uniformemente continua sia a sinistra che a destra.*

Questo è un corollario del Teorema di Heine-Cantor, e la dimostrazione è lasciata per esercizio.

2. Misure di Haar

Sia G un gruppo localmente compatto. Se $\mathcal{B}(G)$ indica la σ-algebra dei Boreliani di G, è evidente che Ax e xA sono in $\mathcal{B}(G)$ per ogni $A \in \mathcal{B}(G)$ e ogni $x \in G$.

Definizione. *Si chiama* misura di Haar sinistra *(risp.* destra*) una misura di Borel regolare positiva μ su G tale che $\mu(gA) = \mu(A)$ (risp. tale che $\mu(Ag) = \mu(A)$) per ogni $A \in \mathcal{B}(G)$ e ogni $g \in G$.*

La caratterizzazione che segue delle misure di Haar segue dal Teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali positivi sullo spazio delle funzioni continue a supporto compatto.

Proposizione 2.1. *Una misura di Borel regolare positiva μ su G è una misura di Haar sinistra (risp. destra) se e solo se*

$$\int_G f(gx)\, d\mu(x) = \int_G f(x)\, d\mu(x) \ , \qquad \Big(\mathit{risp.}\ \int_G f(xg)\, d\mu(x) = \int_G f(x)\, d\mu(x)\Big) \ ,$$

per ogni $f \in C_c(G)$ e ogni $g \in G$.

In altri termini, il cambiamento di variabile $x' = gx$ comporta che $d\mu(x') = d\mu(x)$ se μ è una misura di Haar sinistra, mentre se $x' = xg$ e μ è una misura di Haar destra, allora $d\mu(x') = d\mu(x)$.

Si dice anche che una misura di Haar (per es. sinistra) è *invariante per traslazioni sinistre*. Non è per nulla evidente che misure di Haar esistano su ogni gruppo localmente compatto.

Teorema 2.2. *Ogni gruppo localmente compatto ha una misura di Haar sinistra.*

Dimostrazione. Per il Teorema di rappresentazione di Riesz, l'asserto equivale alla esistenza di un funzionale lineare I su $C_c(G)$ positivo, non nullo e tale che $I(L_g f) = I(f)$ per ogni $f \in C_c(G)$ e ogni $g \in G$.

Indichiamo con $C_c^+(G)$ l'insieme delle funzioni non negative e non identicamente nulle in $C_c(G)$.

Fissata $\varphi \in C_c^+(G)$, poniamo, per $f \in C_c^+(G)$,

$$(f : \varphi) = \inf \Big\{ \sum_j c_j : f \leq \sum_j c_j L_{g_j} \varphi \Big\} ,$$

dove le somme si intendono finite. Si vede facilmente che l'insieme a secondo membro non è mai vuoto, per cui $(f : \varphi) < +\infty$. Valgono le seguenti proprietà, la cui verifica è lasciata per esercizio:

(1) $(f : \varphi) = (L_g f : \varphi)$ per ogni $g \in G$;
(2) $(f_1 + f_2 : \varphi) \leq (f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi)$;
(3) $(cf : g) = c(f : \varphi)$ per ogni $c > 0$;
(4) $(f_1 : \varphi) \leq (f_2 : \varphi)$ se $f_1 \leq f_2$;
(5) $(f : \varphi) \geq \|f\|_\infty / \|\varphi\|_\infty$;
(6) $(f : \varphi) \leq (f : \psi)(\psi : \varphi)$.

L'applicazione $f \mapsto (f : \varphi)$ è dunque invariante per traslazioni sinistre, monotona e sublineare. Queste stesse proprietà, cioè (1)–(4), continuano a essere soddisfatte dalle applicazioni "normalizzate"

$$I_{\varphi,\psi}(f) = \frac{(f : \varphi)}{(\psi : \varphi)} .$$

Per la (6), si ha inoltre

$$\frac{1}{(\psi : f)} \leq I_{\varphi,\psi}(f) \leq (f : \psi) . \tag{2.1}$$

La (2) non è in generale migliorabile, nel senso che non si ha additività nella prima componente. Vale tuttavia la seguente proprietà:

> date $f_1, f_2, \psi \in C_c^+(G)$ e dato $\varepsilon > 0$, esiste un intorno V di e tale che, se $\operatorname{supp} \varphi \subset V$, allora $I_{\varphi,\psi}(f_1 + f_2) \geq I_{\varphi,\psi}(f_1) + I_{\varphi,\psi}(f_2) - \varepsilon$.

Sia infatti $\eta \in C_c^+(G)$ tale che $\eta = 1$ in un intorno di $(\operatorname{supp} f_1) \cup (\operatorname{supp} f_2)$, e sia $u = f_1 + f_2 + \delta\eta$, con $\delta > 0$ da determinarsi. Essendo

$$\tilde{f}_i = \frac{f_i}{u} \in C_c^+(G) , \qquad (i = 1, 2) ,$$

per il Lemma 1.5 esiste V un intorno di e tale che $|\tilde{f}_i(xh) - \tilde{f}_i(x)| < \delta$ per ogni $x \in G$ e $h \in V$.

Fissiamo φ con $\operatorname{supp} \varphi \subset V$. Se $u \leq \sum_j c_j L_{g_j} \varphi$, si ha

$$f_1(x) = \tilde{f}_1(x) u(x) \leq \sum_j c_j \varphi(g_j^{-1} x)\big(\tilde{f}_1(x) - \tilde{f}_1(g_j)\big) + \sum_j c_j \varphi(g_j^{-1} x) \tilde{f}_1(g_j) ,$$

e analogamente per $\tilde{f}_2$.

Se $\varphi(g_j^{-1}x) \neq 0$, allora $g_j^{-1}x \in V$ e dunque

$$\big|\tilde{f}_1(x) - \tilde{f}_1(g_j)\big| = \big|\tilde{f}_1(g_j g_j^{-1}x) - \tilde{f}_1(g_j)\big| < \delta \ .$$

Quindi

$$f_1(x) < \sum_j c_j \varphi(g_j^{-1}x)\big(\tilde{f}_1(g_j) + \delta\big) \ ,$$

da cui

$$(f_1 : \varphi) \leq \sum_j c_j \big(\tilde{f}_1(g_j) + \delta\big) \ .$$

Sommando con l'analoga disuguaglianza per f_2, si ottiene

$$(f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi) \leq (1 + 2\delta) \sum_j c_j \ .$$

Prendendo l'estremo inferiore al variare dei c_j, si ha

$$\begin{aligned}(f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi) &\leq (1 + 2\delta)(f_1 + f_2 + \delta\eta : \varphi) \\ &\leq (1 + 2\delta)(f_1 + f_2 : \varphi) + \delta(1 + 2\delta)(\eta : \varphi) \\ &= (f_1 + f_2 : \varphi) + \delta\big[2(f_1 + f_2 : \varphi) + (1 + 2\delta)(\eta : \varphi)\big] \ .\end{aligned}$$

Dividendo ora per $(\psi : \varphi)$, si ha

$$I_{\varphi,\psi}(f_1) + I_{\varphi,\psi}(f_2) \leq I_{\varphi,\psi}(f_1 + f_2) + \delta\big[2I_{\varphi,\psi}(f_1 + f_2) + (1 + 2\delta)I_{\varphi,\psi}(\eta)\big] \ .$$

L'espressione in parentesi quadra è limitata indipendentemente da φ per la (2.1), per cui, prendendo δ sufficientemente piccolo, l'ultimo termine può essere reso minore di ε.

Riprendiamo la dimostrazione del teorema. Fissata $\psi \in C_c^+(G)$, sia

$$X = \prod_{f \in C_c^+(G)} \big[(\psi : f)^{-1}, (f : \psi)\big] \ .$$

Con la topologia prodotto, X è compatto. Per ogni intorno V di e, si ponga

$$F_V = \overline{\Big\{ \Big(I_{\varphi,\psi}(f)\Big)_{f \in C_c^+(G)} : \operatorname{supp} \varphi \subset V \Big\}} \ .$$

I chiusi F_V hanno la proprietà dell'intersezione finita, in quanto

$$\bigcap_{j=1}^n F_{V_j} \supset F_{\cap V_j} \ .$$

Quindi esiste $I \in \bigcap_V F_V$. Si verifica facilmente che, per ogni $f, f_1, f_2 \in C_c^+(G)$,

(1) $I(L_g f) = I(f)$ per ogni $g \in G$;
(2) $I(cf) = cI(f)$ per ogni $c > 0$;
(3) $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$.

Passando a una generica funzione $f \in C_c(G)$ reale di segno arbitrario, si scomponga $f = h - k$, con $h, k \in C_c^+(G)$, e si ponga

$$I(f) = I(h) - I(k) \ .$$

Questa definizione non dipende dalla scomposizione di f, perché se $f = \tilde{h} - \tilde{k}$ è un'altra scomposizione dello stesso tipo, dall'uguaglianza $h + \tilde{k} = \tilde{h} + k$ segue che $I(h) - I(k) = I(\tilde{h}) - I(\tilde{k})$.

Allora I è lineare ed è il funzionale cercato. □

Se μ è una misura di Haar sinistra, allora

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(A^{-1})$$

è una misura di Haar destra. Quindi ogni gruppo localmente compatto ha anche una misura di Haar destra. In generale le misure di Haar destre e sinistre non coincidono. Vedremo tra poco vari esempi, ma prima dimostriamo che la misura di Haar (sinistra o destra) su un gruppo è essenzialmente unica.

Lemma 2.3. *Sia μ una misura di Haar sinistra (o destra). Per ogni aperto A non vuoto, $\mu(A) > 0$. Inoltre $\mu(G) < +\infty$ se e solo se G è compatto.*

Dimostrazione. Sia μ una misura di Haar sinistra, e sia A un aperto non vuoto con $\mu(A) = 0$. Allora $\mu(gA) = 0$ per ogni $g \in G$. Dato un compatto K, esiste un ricoprimento finito $\{g_j A\}$ di K. Allora $\mu(K) = 0$. Per la regolarità di μ, $\mu(B) = 0$ per ogni Boreliano B, il che è assurdo.

Se G è compatto, ovviamente $\mu(G) < +\infty$. Sia G non compatto, e sia V un intorno simmetrico compatto di e. Costruiamo induttivamente una successione infinita $\{g_j\}$ di elementi di G tali che i $g_j V$ siano a due a due disgiunti. Essendo $\mu(g_j V) = \mu(V) > 0$, questo implica che $\mu(G) = +\infty$.

Poniamo $g_0 = e$. Poiché V^2 è compatto, esiste $g_1 \notin V^2$. Allora $V \cap g_1 V = \emptyset$. Supponendo di aver trovato $g_1, \dots, g_n$ tali che $g_i V \cap g_j V = \emptyset$ per $0 \leq i, j \leq n$, basta prendere $g_{n+1} \notin V\Big(\bigcup_{i=0}^n g_i V\Big)$. □

Teorema 2.4. *Se μ e λ sono due misure di Haar sinistre, esiste $c > 0$ tale che $\mu = c\lambda$.*

Dimostrazione. Sia $f \in C_c(G)$. Per il Lemma 1.5, dato $\varepsilon > 0$, esiste un intorno simmetrico V di e tale che

$$|f(xy) - f(yx)| < \varepsilon$$

per ogni $y \in V$ e $x \in G$. Sia $\varphi \in C_c^+(G)$ con supporto in V, tale che $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)$. Allora

$$\begin{aligned}\left| \int_G f(xy)\varphi(y)\, d\lambda(y) - \int_G f(yx)\varphi(y)\, d\lambda(y) \right| &\leq \int_G |f(xy) - f(yx)|\varphi(y)\, d\lambda(y) \\ &< \varepsilon \int_G \varphi \, d\lambda \ .\end{aligned}$$

Consideriamo la funzione $u(x) = \int_G f(xy)\varphi(y)\, d\lambda(y)$. Per il Lemma 1.5, u è continua. Condizione necessaria affinché $u(x) \neq 0$ è che esista $y \in K_\varphi = \operatorname{supp} \varphi$ tale che $xy \in K_f = \operatorname{supp} f$. Deve quindi essere $x = xyy^{-1} \in K_f K_\varphi^{-1} = K_f K_\varphi$.

Poiché $K_f K_\varphi$ è compatto, $\operatorname{supp} u \subset K_f K_\varphi$, e $u \in C_c(G)$. In modo analogo, si vede che $v(x) = \int_G f(yx)\varphi(y)\,d\lambda(y) \in C_c(G)$ e $\operatorname{supp} v \subset K_\varphi K_f$.

Sia $K' = K_f K_\varphi \cup K_\varphi K_f$. Allora

$$\left| \int_G \big(u(x) - v(x)\big)\,d\mu(x) \right| = \left| \int_{K'} \big(u(x) - v(x)\big)\,d\mu(x) \right| < \mu(K')\varepsilon \int_G \varphi\,d\lambda \ .$$

Ma, sostituendo $y' = xy$, e usando la simmetria di φ,

$$\begin{aligned}
\int_G u\,d\mu &= \int_G \int_G f(xy)\varphi(y)\,d\lambda(y)\,d\mu(x) \\
&= \int_G \int_G f(y')\varphi({y'}^{-1}x)\,d\lambda(y)\,d\mu(x) \\
&= \int_G \left(\int_G \varphi({y'}^{-1}x)\,d\mu(x) \right) f(y')\,d\lambda(y') \\
&= \left(\int_G \varphi\,d\mu \right) \left(\int_G f\,d\lambda \right) .
\end{aligned}$$

In modo analogo, scambiando direttamente l'ordine di integrazione,

$$\int_G v\,d\mu = \int_G \int_G f(yx)\varphi(y)\,d\lambda(y)\,d\mu(x) = \left(\int_G f\,d\mu \right) \left(\int_G \varphi\,d\lambda \right) .$$

Per comodità di notazione, scriviamo $\mu(f)$ in luogo di $\int_G f\,d\mu$ ecc. Abbiamo dunque

$$\big|\mu(\varphi)\lambda(f) - \lambda(\varphi)\mu(f)\big| < \mu(K')\lambda(\varphi)\varepsilon \ .$$

Se g è un'altra funzione in $C_c(G)$, vale l'analoga disuguaglianza

$$\big|\mu(\varphi)\lambda(g) - \lambda(\varphi)\mu(g)\big| < \mu(K'')\lambda(\varphi)\varepsilon \ .$$

Moltiplicando la prima per $|\lambda(g)|$, la seconda per $|\lambda(f)|$ e sommando, si ottiene che

$$\lambda(\varphi)\big|\mu(f)\lambda(g) - \lambda(f)\mu(g)\big| < \big(\mu(K')|\lambda(g)| + \mu(K'')|\lambda(f)|\big)\lambda(\varphi)\varepsilon \ .$$

Poiché $\lambda(\varphi) > 0$, per l'arbitrarietà di ε segue che

$$\lambda(f)\mu(g) = \mu(f)\lambda(g) \ .$$

Per l'arbitrarietà di f e g, si ha la tesi. □

Quando G è compatto, è abituale normalizzare la misura di Haar ponendo $\mu(G) = 1$.

Esempi.

(2.a) La misura di Lebesgue è (a meno di fattori moltiplicativi) la misura di Haar su $\mathbb{R}^n$ e sul toro $\mathbb{T}$. Poiché sono gruppi abeliani, non c'è distinzione tra misura destra e sinistra.

(2.b) Sia G un gruppo con la topologia discreta. La *misura del conteggio* data da $\mu(A) = \operatorname{card}(A)$, è invariante sia per traslazioni sinistre che destre.

(2.c) Sia $G = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ come gruppo moltiplicativo. Con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ è localmente compatto. L'applicazione $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ è un omeomorfismo e un isomorfismo di gruppi. Allora la misura di Haar μ su $\mathbb{R}^+$ è il *push-forward* della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, che si calcola come segue:

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(e^t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^+} f(x)\, \frac{dx}{x} \ .$$

In modo analogo si dimostra che la misura di Haar su $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, come gruppo moltiplicativo con la topologia euclidea, è $d\mu(x) = \frac{dx}{|x|}$.

Si dimostri per esercizio che se $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ come gruppo moltiplicativo con la topologia euclidea, allora la misura di Haar è $d\mu(x + iy) = \frac{dx\, dy}{x^2+y^2}$.

(2.d) Se G è il prodotto diretto $G_1 \times G_2$ di due gruppi localmente compatti, si ottiene una misura di Haar sinistra di G prendendo il prodotto tensoriale di due misure di Haar sinistre sui due fattori.

(2.e) Sia G un gruppo localmente compatto con misura di Haar sinistra μ, e sia H un sottogruppo chiuso normale con misura di Haar sinistra ν. Anche il gruppo quoziente G/H ha una sua misura di Haar sinistra λ. Data $f \in C_c(G)$, sia

$$\tilde{f}(xH) = \int_H f(xh)\, d\nu(h) \ .$$

Si noti che, se $xH = x'H$, allora $x' = xh_0$ e, per l'invarianza di ν,

$$\int_H f(x'h)\, d\nu(h) = \int_H f(xh_0h)\, d\nu(h) = \int_H f(xh)\, d\nu(h) \ .$$

Quindi $\tilde{f}$ è ben definita su G/H, ed è chiaramente continua con supporto compatto. Poniamo allora

$$\Phi(f) = \int_{G/H} \tilde{f}(xH)\, d\eta(xH) \ .$$

Φ è un funzionale lineare su $C_c(G)$, positivo, e invariante per traslazioni sinistre. Infatti

$$\widetilde{L_g f}(xH) = \int_H L_g f(xh)\, d\nu(h) = \int_H f(g^{-1}xh)\, d\nu(h) = \tilde{f}(g^{-1}xH) \ ,$$

per cui

$$\Phi(L_g f) = \int_{G/H} \tilde{f}(g^{-1}xH)\, d\lambda(xH) = \int_{G/H} \tilde{f}\big((gH)^{-1}(xH)\big)\, d\lambda(xH) = \Phi(f) \ .$$

Esiste dunque una costante $c > 0$ tale che $\Phi(f) = c \int_G f\, d\mu$, ossia

$$\int_{G/H} \Big(\int_H f(xh)\, d\nu(h) \Big)\, d\lambda(xH) = c \int_G f(x)\, d\mu(x) \ . \tag{2.2}$$

In particolare, fissate misure di Haar sinistre su due dei tre gruppi, è possibile normaizzare la misura di Haar sinistra sul terzo, in modo che valga la (2.2) con $c = 1$.

(2.f) Sia $G = GL(n, \mathbb{R})$ il gruppo delle matrici reali $n \times n$ invertibili. Allora G è un aperto di $\mathbb{R}^{n^2}$ (essendo caratterizzato dalla condizione $\det A \neq 0$) e, con la topologia indotta dalla topologia euclidea, è un gruppo localmente compatto. Se $f \in C_c(G)$, consideriamo la traslata sinistra $L_B f(A) = f(B^{-1}A)$. L'applicazione $\ell_B(A) = BA$ di G in sé è la restrizione di un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^{n^2}$ in sé. Indicando con $A_1, \dots A_n$ le colonne di A, le colonne di BA sono $BA_1, \dots, BA_n$. Si vede allora facilmente che $\det(\ell_B) = (\det B)^n$.

Consideriamo la misura
$$d\mu(A) = \frac{dA}{|\det A|^n}$$
su G, e sia $f \in C_c(G)$. Operando il cambio di variabili $A = BA' = \ell_B(A')$,
$$\begin{aligned}\int_G L_B f(A)\, d\mu(A) &= \int_G f(B^{-1}A) \frac{dA}{|\det A|^n} \\ &= \int_G f(A') |\det B|^n \frac{dA'}{|\det(BA')|^n} \\ &= \int_G f(A)\, d\mu(A) \ .\end{aligned}$$

Quindi μ è una misura di Haar sinistra su G. Si dimostri per esercizio che essa è anche invariante per traslazioni destre.

(2.g) Sia G il *gruppo affine della retta*, costituito dalle applicazioni di $\mathbb{R}$ in sé $\varphi_{a,b}(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, dotato del prodotto di composizione. G si chiama anche il gruppo "$ax + b$". Poiché
$$\varphi_{a,b} \circ \varphi_{a',b'}(x) = aa'x + ab' + b = \varphi_{aa',ab'+b}(x) \ ,$$
possiamo vedere G come $\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) \times \mathbb{R}$ con il prodotto
$$(a, b)(a', b') = (aa', ab' + b) \ .$$

L'elemento neutro è $(1, 0)$ e $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, -a^{-1}b)$. Si noti che G è isomorfo al gruppo delle matrici reali invertibili 2×2 della forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Procedendo come nell'Esempio precedente, osserviamo che
$$\ell_{(\alpha,\beta)}(a, b) = (\alpha, \beta)(a, b) = (\alpha a, \alpha b + \beta)$$
è la restrizione di una trasformazione affine di $\mathbb{R}^2$ in sé con determinante α^2. Introduciamo allora la misura
$$d\mu(a, b) = \frac{da\, db}{a^2}$$
su G. Si verifica facilmente che μ è una misura di Haar sinistra.

Per determinare una misura di Haar destra, osserviamo che
$$r_{(\alpha,\beta)^{-1}}(a, b) = (\alpha a, \beta a + b)$$

è la restrizione di una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^2$ in sè con determinante α. In modo analogo si deduce che

$$d\nu(a,b) = \frac{da\,db}{|a|}$$

è una misura di Haar destra. In questo caso, dunque, misure di Haar destre e sinistre non coincidono.

3. La funzione modulare

Indichiamo con m_ℓ una misura di Haar sinistra su un gruppo localmente compatto G. Dato $g \in G$, poniamo, per ogni Boreliano A,

$$\mu_g(A) = m_\ell(Ag) \ .$$

Allora μ_g è pure una misura di Haar sinistra, in quanto

$$\mu_g(hA) = m_\ell(hAg) = m_\ell(Ag) = \mu_g(A) \ ,$$

per ogni $h \in G$. Esiste dunque una costante $\Delta(g) > 0$ tale che $\mu_g = \Delta(g)m_\ell$. Chiaramente il valore di $\Delta(g)$ non dipende dalla scelta di m_ℓ.

Definizione. *La funzione $\Delta : G \to \mathbb{R}^+$ si chiama la* funzione modulare *di G. Se $\Delta(g) = 1$ per ogni $g \in G$, ossia se le misure di Haar sinistre sono anche destre, si dice che G è* unimodulare.

Teorema 3.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

(1) *per ogni $g \in G$ e $f \in C_c(G)$, $\int_G R_g f\, dm_\ell = \Delta(g^{-1}) \int_G f\, dm_\ell$;*
(2) *la funzione modulare è un omomorfismo continuo di G nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^+$;*
(3) *$dm_r(x) = \Delta(x)^{-1}\, dm_\ell(x)$ è una misura di Haar destra;*
(4) *per ogni $f \in C_c(G)$, $\int_G f(x^{-1})\, dm_\ell(x) = \int_G f(x)\Delta(x)^{-1}\, dm_\ell(x)$.*

Dimostrazione. (1) Se $f = \chi_A$, con A Boreliano, $R_g f = \chi_{Ag^{-1}}$, per cui

$$\int_G R_g f\, dm_\ell = m_\ell(Ag^{-1}) = \Delta(g^{-1}) \int_G f\, dm_\ell \ .$$

Per linearità, l'uguaglianza si estende a funzioni semplici e, per continuità, a funzioni continue a supporto compatto.

(2) Poiché $m_\ell(Agh) = \Delta(h)m_\ell(Ag) = \Delta(h)\Delta(g)m_\ell(A)$, si ha $\Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h)$ per ogni $g, h \in G$.

Sia ora $f \in C_c(G)$ tale che $\int_G f\, dm_\ell = 1$. Per il Lemma 1.5, l'applicazione $g \mapsto R_g f$ è continua da G in $C_c(G)$, e tale è quindi l'applicazione

$$g \longmapsto \int_G R_g f\, dm_\ell = \Delta(g)^{-1} \int_G f\, dm_\ell = \Delta(g)^{-1} \ .$$

(3) segue dai seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} \int_G R_g f(x)\Delta(x)^{-1}\, dm_\ell(x) &= \Delta(g) \int_G f(xg)\Delta(xg)^{-1}\, dm_\ell(x) \\ &= \Delta(g) \int_G R_g(f\Delta^{-1})(x)\, dm_\ell(x) \\ &= \int_G f(x)\Delta(x)^{-1}\, dm_\ell(x) \ . \end{aligned}$$

(4) Il funzionale $\varphi(f) = \int_G f(x^{-1})\, dm_\ell(x)$ è invariante per traslazioni destre. Per la (3), esiste dunque $c > 0$ tale che

$$\int_G f(x^{-1})\, dm_\ell(x) = c \int_G f(x)\Delta(x)^{-1}\, dm_\ell(x) \;,$$

per ogni $f \in C_c(G)$. Applicando questa identità a $f(x^{-1})$, si ha

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\, dm_\ell(x) &= c \int_G f(x^{-1})\Delta(x)^{-1}\, dm_\ell(x) \\ &= c^2 \int_G f(x)\Delta(x)\Delta(x)^{-1}\, dm_\ell(x) \;,\end{aligned}$$

da cui $c = 1$. □

Corollario 3.2. *Sono unimodulari le seguenti classi di gruppi localmente compatti:*

(1) *i gruppi abeliani;*
(2) *i gruppi compatti;*
(3) *i gruppi privi di sottogruppi chiusi normali non banali;*
(4) *i gruppi discreti.*

Dimostrazione. la (1) è ovvia.

(2) Si osservi che l'immagine $\Delta(G)$ in $\mathbb{R}^+$ è un sottogruppo compatto, per cui necessariemente $\Delta(x) = 1$ per ogni $x \in G$.

(3) Possiamo supporre che G non sia abeliano. Poiché $\ker\Delta$ è un sottogruppo chiuso normale di G e $G/\ker\Delta$ è abeliano, non può essere $\ker\Delta = \{e\}$. Allora $\ker\Delta = G$ e G è unimodulare.

(4) segue dall'Esempio 2.b. □

Esempi.

(3.a) La funzione modulare del gruppo "$ax + b$" è $\Delta(a, b) = |a|^{-1}$.

(3.b) Sia H un sottogruppo chiuso normale di G. Indichiamo con m_ℓ^G, m_ℓ^H, $m_\ell^{G/H}$ misure di Haar sinistre fissate sui rispettivi gruppi, tali che valga la (2.2) con $c = 1$. Se $f \in C_c(G)$, ponbiamo $\tilde{f}(gH) = \int_H f(gh)\, dm_\ell^H(h)$. Siano poi Δ_G, Δ_H ecc. le funzioni modulari sui rispettivi gruppi.

Dato $g \in G$,

$$\begin{aligned}\widetilde{R_g f}(xH) &= \int_H R_g f(xh)\, dm_\ell^H(h) \\ &= \int_H f(xhg)\, dm_\ell^H(h) \\ &= \int_H f\big((xg(g^{-1}hg)\big)\, dm_\ell^H(h) \;.\end{aligned}$$

Consideriamo la misura $\mu_g(A) = m_\ell^H(g^{-1}Ag)$ su H. Essa è invariante a sinistra, perché, essendo $g^{-1}hg \in H$ per ogni $h \in H$, si ha

$$\mu_g(hA) = m_\ell^H(g^{-1}hAg) = m_\ell^H\big((g^{-1}hg)g^{-1}Ag\big) = m_\ell^H(g^{-1}Ag) = \mu_g(A) \;.$$

Esiste dunque $\delta(g) > 0$ tale che $\mu_g = \delta(g) m_\ell^H$. La sostituzione $h' = g^{-1}hg$ fa sì che $dm_\ell^H(h') = \delta(g)\, dm_\ell^H(h)$, e dunque

$$\widetilde{R_g f}(xH) = \delta(g)^{-1} \int_H f(xgh')\, dm_\ell^H(h') = \delta(g)^{-1} \tilde{f}(xgH) = \delta(g)^{-1} R_{gH} \tilde{f}(xH) \ .$$

Di conseguenza,

$$\int_G R_g f\, dm_\ell^G = \delta(g)^{-1} \int_{G/H} R_{gH} \tilde{f}\, dm_\ell^{G/H} = \delta(g)^{-1} \Delta_{G/H}(gH)^{-1} \int_G f\, dm_\ell^G \ ,$$

da cui

$$\Delta(g) = \delta(g) \Delta_{G/H}(gH) \ .$$

Si noti che la funzione δ, definita su G, coincide con Δ_H se ristretta ad H. Infatti, se $h \in H$,

$$\delta(h) m_\ell^H(A) = m_\ell^H(h^{-1}Ah) = \Delta_H(h) m_\ell^H(A) \ ,$$

per ogni Boreliano A di H.

In Particolare, se G/H è unimodulare e $\delta(g) = 1$ per ogni $g \in G$, allora anche G è unimodulare.

(3.c) Un caso particolare della situazione descritta nell'Esempio precedente è costituita dai gruppi di trasformazioni affini di $\mathbb{R}^n$. Sia G_0 un sottogruppo chiuso di $GL(n, \mathbb{R})$, e si consideri il gruppo G delle applicazioni affini da $\mathbb{R}^n$ in sé

$$\varphi_{g,v}(x) = gx + v$$

con $g \in G_0$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Essendo $\varphi_{g,v} \circ \varphi_{g',v'} = \varphi_{gg', gv'+v}$, possiamo identificare G con $G_0 \times \mathbb{R}^n$ con il prodotto

$$(g, v)(g', v') = (gg', gv' + v) \ .$$

L'elemento neutro è $(e, 0)$, dove e è l'identità di G_0. Inoltre

$$(g, v)^{-1} = (g^{-1}, -g^{-1}v) \ .$$

Si verifica facilmente che $H = \{e\} \times \mathbb{R}^n$ è un sottogruppo normale.

La funzione modulare su G è allora $\Delta_G(g, v) = \delta(g, v)$, calcolata considerando l'applicazione

$$(e, x) \longmapsto (g, v)^{-1}(e, x)(g, v) = (g^{-1}, -g^{-1}v)(g, x + v) = (e, g^{-1}x) \ .$$

Poiché la misura di Haar su H non è altro che la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$,

$$\delta(g, v) = |\det g|^{-1} \ .$$

4. Convoluzione

Sia G un gruppo localmente compatto. Indichiamo con $M(G)$ lo spazio di Banach delle misure di Borel regolari su G, con la norma $\|\mu\|_1 = |\mu|(G)$.

Definizione. *Siano $\mu, \nu \in M(G)$. La* convoluzione $\mu * \nu$ *è la misura definita ponendo*

$$\int_G f\, d(\mu * \nu) = \iint_{G\times G} f(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \ , \tag{4.1}$$

per $f \in C_0(G)$.

Proposizione 4.1. *La convoluzione $\mu * \nu$ è ben definita in $M(G)$. Inoltre,*

(1) $\|\mu * \nu\|_1 \leq \|\mu\|_1 \|\nu\|_1$ *;*
(2) *la convoluzione rende $M(G)$ un'algebra di Banach;*
(3) *l'applicazione $\mu \mapsto \mu^*$, ove*

$$\int_G f\, d\mu^* = \overline{\int_G \bar{f}(x^{-1})\, d\mu(x)} \ ,$$

è un'involuzione su $M(G)$;
(4) *$M(G)$ è commutativa se e solo se G è commutativo.*

Dimostrazione. Sia $\varphi(f) = \iint_{G\times G} f(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$. Allora

$$\big|\varphi(f)\big| \leq \iint_{G\times G} |f(xy)|\, d|\mu|(x)\, d|\nu|(y) \leq \|f\|_\infty |\mu|(G)|\nu|(G) \ .$$

Per il Teorema di rappresentazione di Riesz esiste una e una sola misura di Borel finita σ tale che $\varphi(f) = \int_G f\, d\sigma$. Questo dimostra che $\mu * \nu$ è ben definita come elemento di $M(G)$. Inoltre

$$\|\mu * \nu\|_1 = \|\varphi\| \leq |\mu|(G)|\nu|(G) = \|\mu\|_1 \|\nu\|_1 \ .$$

(2) L'unica verifica non banale è quella dell'associatività. Ma

$$\begin{aligned}\int_G f\, d\big((\mu * \nu) * \sigma\big) &= \iint_{G\times G} f(xy)\, d(\mu * \nu)(x)\, d\sigma(y) \\ &= \iiint_{G\times G\times G} f(uvy)\, d\mu(u)\, d\nu(v)\, d\sigma(y) \ .\end{aligned}$$

Lo sviluppo di $\int_G f\, d\big(\mu * (\nu * \sigma)\big)$ porta allo stesso risultato.

(3) Chiaramente l'applicazione è antilineare e involutiva. Inoltre

$$\begin{aligned}\int_G f\, d(\mu * \nu)^* &= \overline{\iint_{G\times G} \bar{f}(x^{-1})\, d(\mu * \nu)(x)} \\ &= \overline{\iint_{G\times G} \bar{f}\big((uv)^{-1}\big)\, d\mu(u)\, d\nu(v)} \\ &= \overline{\iint_{G\times G} \bar{f}(v^{-1}u^{-1})\, d\mu(u)\, d\nu(v)} \\ &= \iint_{G\times G} f(vu)\, d\mu^*(u)\, d\nu^*(v) \\ &= \int_G f\, d(\nu^* * \mu^*) \ ,\end{aligned}$$

per cui $(\mu * \nu)^* = \nu^* * \mu^*$.

(4) Se G è commutativo,

$$\begin{aligned}\int_G f\, d(\mu * \nu) &= \iint_{G\times G} f(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \\ &= \iint_{G\times G} f(yx)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \\ &= \int_G f\, d(\nu * \mu)\ ,\end{aligned}$$

da cui $\mu * \nu = \nu * \mu$.

Per dimostrare l'altra implicazione, osserviamo che, se $g, h \in G$,

$$\int f\, d(\delta_g * \delta_h) = \iint_{G\times G} f(xy)\, d\delta_g(x)\, d\delta_h(y) = f(gh)\ ,$$

per cui $\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}$. Se $M(G)$ è commutativo, $\delta_{gh} = \delta_{hg}$, e quindi $gh = hg$ per ogni $g, h \in G$. $\square$

Data una misura di Borel μ su G, indichiamo con $L_g\mu$ e con $R_g\mu$ le misure tali che $L_g\mu(A) = \mu(g^{-1}A)$ e $R_g\mu(A) = \mu(Ag)$ rispettivamente, per ogni Boreliano A. Se $f \in C_c(G)$,

$$\int_G f\, d(L_g\mu) = \int_G L_{g^{-1}} f\, d\mu\ , \qquad \int_G f\, d(R_g\mu) = \int_G R_{g^{-1}} f\, d\mu\ .$$

Proposizione 4.2. *Se $\mu, \nu \in M(G)$,*

$$\operatorname{supp}(\mu * \nu) \subseteq \overline{(\operatorname{supp}\mu)(\operatorname{supp}\nu)}\ .$$

Inoltre, se $g \in G$, $\delta_g * \mu = L_g\mu$ e $\mu * \delta_g = R_{g^{-1}}\mu$. In particolare δ_e è l'unità di $M(G)$.

Dimostrazione. Sia $f \in C_0(G)$ con $(\operatorname{supp} f) \cap \overline{(\operatorname{supp}\mu)(\operatorname{supp}\nu)} = \emptyset$. In particolare $f(xy) = 0$ per ogni $x \in \operatorname{supp}\mu$ e $y \in \operatorname{supp}\nu$. Quindi $\int_G f\, d(\mu * \nu) = 0$.

Inoltre,

$$\int_G f\, d(\delta_g * \mu) = \int_G f(gy)\, d\mu(y) = \int_G Lg^{-1} f\, d\mu = \int_G f\, d(L_g\mu)\ ,$$

e analogamente per $\mu * \delta_g$. $\square$

Sia ora G un gruppo *unimodulare*[7]. Fissiamo una misura di Haar m su G e scriviamo dx in luogo di $dm(x)$.

Data una funzione $f \in L^1(G) = L^1(G, m)$, identifichiamo f con la misura $\mu_f = fm \in M(G)$.

[7]Ci limitiamo a gruppi unimodulari per semplicità. L'estensione di definizioni e risultati che seguono a gruppi non unimodulari richiede modifiche e precisazioni che preferiamo tralasciare.

Proposizione 4.3. *Siano $f \in L^1(G)$ e $\nu \in M(G)$. Per quasi ogni $x \in G$, la funzione $y \mapsto f(xy^{-1})$ è integrabile rispetto a $d|\nu|$, la funzione*

$$f * \nu(x) = \int_G f(xy^{-1})\, d\nu(y) \tag{4.2}$$

è in $L^1(G)$, $\|f * \nu\|_1 \le \|f\|_1 \|\nu\|_1$ e $\mu_f * \nu = \mu_{f*\nu}$. Analogamente, ponendo

$$\nu * f(x) = \int_G f(y^{-1}x)\, d\nu(y) \ , \tag{4.3}$$

si ha $\|\nu * f\|_1 \le \|f\|_1 \|\nu\|_1$ $\nu * \mu_f = \mu_{\nu * f}$.

Se poi $f, g \in L^1(G)$, l'integrale

$$f * g(x) = \int_G f(xy^{-1}) g(y)\, dy \tag{4.4}$$

è assolutamente convergente per quasi ogni x, $f * g \in L^1(G)$ e

$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1 \ . \tag{4.5}$$

Inoltre $\mu_f * \mu_g = \mu_{f*g}$.

Dimostrazione. Data $h \in C_c(G)$,

$$\int_G h(x)\, d(\mu_f * \nu)(x) = \iint_{G\times G} h(xy) f(x)\, dx\, d\nu(y) \ ,$$

e l'integrale a secondo membro è assolutamente convergente. Applicando il Teorema di Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_G h(x)\, d(\mu_f * \nu)(x) &= \int_G \left(\int_G h(xy) f(x)\, dx \right) d\nu(y) \\
&= \int_G \left(\int_G h(x) f(xy^{-1})\, dx \right) d\nu(y) \\
&= \int_G \left(\int_G f(xy^{-1})\, d\nu(y) \right) h(x)\, dx \\
&= \int_G h(x) f * \nu(x)\, dx \ .
\end{aligned}$$

Questo dimostra la prima parte. La seconda si dimostra in modo analogo e la terza ne è una semplice conseguenza. □

La funzione $f * g$ si chiama la *convoluzione* di f e g. La scelta della misura di Haar influisce nella definizione per un fattore moltiplicativo.

Corollario 4.4. *$L^1(G)$ è un ideale bilatero di $M(G)$. In particolare, è un'algebra di Banach con involuzione $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$. Essa ammette unità se e solo se G è discreto, nel qual caso $L^1(G) = M(G)$. Inoltre $L^1(G)$ è commutativa se e solo se G è commutativo.*

Dimostrazione. La prima parte è un'ovvia conseguenza delle Proposizione 4.1 e 4.3.

Sia ora $u \in L^1(G)$ tale che $f * u = f$ per ogni $f \in L^1(G)$. In particolare,

$$\int_G f(xy^{-1})u(y)\,dy = f(x)$$

per quasi ogni x. Se $f \in C_c(G)$, ambo i membri sono continui, e l'identità vale per ogni x. In particolare,

$$\int_G f(y)u(y^{-1})\,dy = f(e)\ .$$

Per continuità, l'uguaglianza si estende a ogni $f \in C_0(G)$. Per il Teorema di rappresentazione di Riesz, la misura fm coincide con δ_e. Questo implica che $\operatorname{supp} f = \{e\}$ e $m\big(\{e\}\big) = c > 0$. Per l'invarianza di m, $m\big(\{g\}\big) = c$ per ogni x. Poiché i compatti devono avere misura finita, gli unici compatti sono gli insiemi finiti. Ma allora ogni punto ha un intorno costituto da un numero finito di punti; essendo G di Hausdorff, la topologia deve essere quella discreta.

Se G è discreto, ogni misura di Borel finita ha la forma

$$\mu = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \delta_{g_j}\ ,$$

con g_j punti distinti di G e $\sum |c_j| < \infty$. Allora l'identificazione di $M(G)$ con $L^1(G) = \ell^1(G)$ è ovvia.

Se G è abeliano, $L^1(G)$ è ovviamente abeliana. Se G non è abeliano, siano $x, y \in G$ tali che $xy \neq yx$. Esistono allora intorni disgiunti U_{xy} e U_{yx} di xy e di yx rispettivamente. Per la continuità del prodotto, esistono intorni V_x e V_y di x e y rispettivamente, tali che $V_xV_y \subset U_{xy}$ e $V_yV_x \subset U_{yx}$.

Supponendo, come possiamo, che V_x e V_y siano compatti, poniamo $f = \chi_{V_x}$, $g = \chi_{V_y}$. Allora $f, g \in L^1(G)$ e $f * g$ e $g * f$ hanno supporti disgiunti. Basta allora far vedere che una di esse è diversa da 0.

Mostriamo dunque che $f * g(xz) > 0$ se $z \in V_y$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} f * g(xz) = \int_G \chi_{V_x}(u)\chi_{V_y}(u^{-1}xz)\,du \\ &= m\big(V_x \cap xzV_y^{-1}\big) \\ &= m\big(x^{-1}V_x \cap zV_y^{-1}\big)\ . \end{aligned}$$

Ma $x^{-1}V_x \cap zV_y^{-1}$ è un intorno di e. Per il Lemma 2.3, ha misura positiva e dunque $f * g(xz) > 0$. □

Ci sono altri modi di scrivere la convoluzione di due funzioni integrabili:

$$f * g(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\,dy = \int_G f(xy)g(y^{-1})\,dy = \cdots\ ,$$

come si verifica con semplici cambiamenti di variabile[8]. Occorre tuttavia un po' di cautela in modo da non confondere $f * g$ con $g * f$.

Vedremo ora che la convoluzione si estende ad altri spazi funzionali. Premettiamo un lemma di interesse indipendente.

[8] Se G non è unimodulare, alcune di queste espressioni vanno modificate introducendo la funzione modulare.

Lemma 4.5. *Sia $f \in L^p(G)$, con $1 \le p < \infty$. Le applicazioni $g \mapsto L_g f$ e $g \mapsto R_g f$ sono continue da G in $L^p(G)$. Lo stesso vale sostituendo $C_0(G)$ a $L^p(G)$.*

Dimostrazione. Che $L_g f$ e $R_g f$ siano in $L^p(G)$ è ovvio. Dato $\varepsilon > 0$, sia $h \in C_c(G)$ tale che $\|f - h\|_p < \varepsilon$. Sia $K = \operatorname{supp} h$. Per il Lemma 1.5, esiste un intorno simmetrico V di e tale che per ogni $g \in V$ e ogni $x \in G$,

$$\big|f(xg) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{m(K)^{1/p}} \,, \qquad \big|f(gx) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{m(K)^{1/p}} \,.$$

Allora, se $g \in V$,

$$\begin{aligned}
\|L_g f - f\|_p &\le \|L_g(f-h)\|_p + \|L_g h - h\|_p + \|h - f\|_p \\
&= 2\|f-h\|_p + \left(\int_G \big|f(g^{-1}x) - f(x)\big|^p \, dx \right)^{1/p} \\
&< 2\varepsilon + \left(\int_{K \cup gK} \frac{\varepsilon^p}{m(K)} \, dx \right)^{1/p} \\
&\le (2 + 2^{1/p})\varepsilon \,.
\end{aligned}$$

Questo dimostra la continuità della funzione $f \mapsto L_g f$ in e. Per la continuità in un punto g_0 generico, basta notare che

$$\|L_g f - L_{g_0} f\|_p = \big\|L_{g_0}(L_{g_0^{-1}g} f - f\big\|_p = \|L_{g_0^{-1}g} f - f\|_p \,.$$

La continuità dell'altra funzione e il caso $f \in C_0(G)$ si dimostrano in modo analogo. □

Teorema 4.6.

(1) *Se $f \in L^1(G)$ e $g \in L^\infty(G)$, allora $f * g$ e $g * f$ sono continue*[9] *e limitate, e*

$$\|f * g\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty \,, \qquad \|g * f\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty \,.$$

(2) *Se $f \in L^p(G)$, con $1 < p < \infty$ e $g \in L^{p'}(G)$, allora $f * g \in C_0(G)$ e*

$$\|f * g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_{p'} \,.$$

(3) *Se $f \in L^p(G)$ e $g \in L^q(G)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} > 1$, allora $f * g \in L^r(G)$ e vale la* disuguaglianza di Young

$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q \,.$$

La dimostrazione si svolge in modo del tutto analogo al caso classico in cui $G = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{T}$ (v. E.M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Cap. 5).

---

[9] Più precisamente, $f * g$ è uniformemente continua a destra e $g * f$ a sinistra.

5. Identità approssimate.

Abbiamo visto che, se G non è discreto, $L^1(G)$ non ha unità. Esiste sempre, tuttavia, una famiglia di funzioni che costituiscono una *unità approssimata* (o anche identità approssimata).

Definizione. *Sia A un'algebra di Banach. Una famiglia $\{y_i\}_{i\in I}$ di elementi di A, con I insieme parzialmente ordinato filtrante, si dice una unità approssimata se*

(1) *esiste $C > 0$ tale che $\|y_i\| \leq C$ per ogni $i \in I$;*
(2) *per ogni $x \in A$, $\lim_i xy_i = \lim_i y_i x = x$.*

Proposizione 5.1. *Sia G un gruppo localmente compatto e sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un sistema fondamentale di intorni di e, ordinato per inclusione. Per ogni $i \in I$, sia $\varphi_i \in L^1(G)$ tale che*

(1) $\operatorname{supp}\varphi_i \subset U_i$;
(2) *esiste una costante $C > 0$ tale che $\|\varphi_i\|_1 \leq C$ per ogni i;*
(3) $\int_G \varphi_i = 1$ *per ogni i.*

Allora $\{\varphi_i\}$ è un'identità approssimata.

Dimostrazione. Sia $f \in L^1(G)$. Osserviamo che, per la (3),

$$\varphi_i * f(x) - f(x) = \int_G \varphi_i(y)\big(f(y^{-1}x) - f(x)\big)\,dy\ .$$

Dato $\varepsilon > 0$, per il Lemma 4.5, esiste un intorno V di e tale che $\|L_y f - f\|_1 < \varepsilon$ per ogni $y \in V$. Se $U_i \subset V$, si ha

$$\begin{aligned}\|\varphi_i * f - f\|_1 &\leq \int_G \int_G |\varphi_i(y)|\big|f(y^{-1}x) - f(x)\big|\,dy\,dx\\ &= \int_{U_i} |\varphi_i(y)|\|L_y f - f\|_1\,dy\\ &< C\varepsilon\ .\end{aligned}$$

In modo analogo si dimostra che $\lim_i f * \varphi_i = f$. □

La dimostrazione del seguente enunciato è lasciata per esercizio.

Corollario 5.2. *Nell'enunciato della Proposizione 5.1, la* (1) *può essere sostituita da*

(1') *per ogni intorno V di e, $\lim_i \int_{G\setminus V} |\varphi_i| = 0$,*

e la (3) *da*

(3') $\lim_i \int_G \varphi_i = 1$.

Per una tale identità approssimata, se $p < \infty$ e $f \in L^p(G)$,

$$\lim_i \|f * \varphi_i - f\|_p = \lim_i \|\varphi_i * f - f\|_p = 0\ .$$

Se $f \in C_0(G)$,

$$\lim_i \|f * \varphi_i - f\|_\infty = \lim_i \|\varphi_i * f - f\|_\infty = 0\ .$$

Un esempio di identità approssimata è dato da

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{m(U_i)}\chi_{U_i}(x) \ ,$$

con $\{U_i\}$ un sistema fondamentale di intorni compatti di e. Inoltre le funzioni

$$\psi_i = \varphi_i * \varphi_i$$

pure formano un'identità approssimata e in più sono continue.

CAPITOLO III
ANALISI DI FOURIER SU GRUPPI ABELIANI LOCALMENTE COMPATTI

1. Il gruppo duale

In questo Capitolo studiamo i gruppi abeliani localmente compatti. L'operazione di gruppo sarà indicata in forma additiva, l'elemento neutro con 0, la misura di Haar (che supponiamo fissata) con dx, le traslazioni come $\tau_a f(x) = f(x-a)$.

L'algebra di Banach $L^1(G)$ è commutativa, e ci proponiamo in questo paragrafo di svilupparne la teoria di Gelfand.

Definizione. *Si chiama* carattere *di G un omomorfismo continuo di G nel toro $\mathbb{T} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$.*

Lemma 1.1. *Sia γ un carattere di G. Allora il funzionale*

$$\varphi(f) = \int_G f(x)\gamma(x)\,dx \tag{1.1}$$

è un carattere dell'algebra $L^1(G)$. Viceversa, dato un carattere φ di $L^1(G)$, esiste uno e un solo carattere γ di G tale che valga la (1.1).

Dimostrazione. Se γ è un carattere di G, il funzionale φ non è identicamente nullo. Verifichiamo che esso è moltiplicativo. Essendo $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$, si ha

$$\begin{aligned}
\varphi(f * g) &= \iint_{G\times G} f(x-y)g(y)\gamma(x)\,dy\,dx \\
&= \int_G g(y)\int_G f(x-y)\gamma(x)\,dx\,dy \\
&= \int_G g(y)\int_G f(x)\gamma(x+y)\,dx\,dy \\
&= \int_G f(x)\gamma(x)\,dx \int_G g(y)\gamma(y)\,dy \\
&= \varphi(f)\varphi(g)\ .
\end{aligned}$$

Viceversa, sia φ un carattere di $L^1(G)$. Esiste allora $\gamma \in L^\infty(G)$ tale che valga la (1.1). Occorre dimostrare che γ coincide quasi ovunque con una funzione continua di modulo 1 e tale che $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$ per ogni $x, y \in G$. Dall'identità

$\varphi(f)\varphi(g) = \varphi(f * g)$ si ricava che

$$\begin{aligned}\varphi(f)\int_G g(y)\gamma(y)\,dy &= \int_G g(y)\int_G f(x-y)\gamma(x)\,dx\,dy \\ &= \int_G g(y)\varphi(\tau_y f)\,dy\ ,\end{aligned}$$

per ogni $f, g \in L^1(G)$. Quindi, data $f \in L^1(G)$,

$$\varphi(\tau_y f) = \gamma(y)\varphi(f)\ , \tag{1.2}$$

per quasi ogni $y \in G$.

Il primo membro della (1.2) è funzione continua di y, per cui, fissando f tale che $\varphi(f) \neq 0$, si deduce che γ coincide quasi ovunque con una funzione continua e che la (1.2) vale per ogni y. Applicando ancora la (1.2), si ottiene che

$$\gamma(x+y)\varphi(f) = \varphi(\tau_{x+y}f) = \gamma(x)\varphi(\tau_y f) = \gamma(x)\gamma(y)\varphi(f)\ ,$$

da cui $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$ per ogni $x, y \in G$. Ne consegue che, se γ si annullasse in qualche punto, essa sarebbe identicamente nulla. Quindi $\gamma(x) \neq 0$ per ogni x e $\gamma(0) = 1$. Infine, se fosse $|\gamma(x)| \neq 1$ per qualche x, il modulo di $\gamma(nx) = \gamma(x)^n$ tenderebbe all'infinito o per $n \to +\infty$ o per $n \to -\infty$. $\square$

Indichiamo con $\hat{G}$ l'insieme dei caratteri di G, dotato della topologia indotta dalla topologia debole-* di $L^\infty(G)$ (*topologia di Gelfand*). Il Lemma 1.1 mostra che $\hat{G} = \Delta\big(L^1(G)\big)$. Segue dai risultati del Capitolo 1 che $\hat{G}$ è localmente compatto e che la sua chiusura debole-* in $L^\infty(G)$ è $\hat{G} \cup \{0\}$.

Vogliamo dare una descrizione diversa della topologia di Gelfand su $\hat{G}$.

Lemma 1.2. *L'applicazione $F : G \times \hat{G} \to \mathbb{T}$ data da $F(x,\gamma) = \gamma(x)$ è continua.*

Dimostrazione. Sia $f \in L^1(G)$ e siano $x_0 \in G$ e $\gamma_0 \in \hat{G}$. Mostriamo che l'applicazione che manda $(x,\gamma) \in G \times \hat{G}$ in $\int_G (\tau_x f)\gamma$ è continua in (x_0, γ_0). Si ha

$$\left|\int_G (\tau_x f)\gamma - \int_G (\tau_{x_0} f)\gamma_0\right| \leq \int_G \left|\tau_x f - \tau_{x_0} f\right| + \left|\int_G (\tau_{x_0} f)\gamma - \int_G (\tau_{x_0} f)\gamma_0\right|\ . \tag{1.3}$$

Dato $\varepsilon > 0$, sia $U = U_{f,\tau_{x_0}f,\varepsilon}$ l'intorno di γ_0 costituito dai $\gamma \in \hat{G}$ per cui

$$\left|\int_G f\gamma - \int_G f\gamma_0\right| < \varepsilon\ , \qquad \left|\int_G (\tau_{x_0} f)\gamma - \int_G (\tau_{x_0} f)\gamma_0\right| < \varepsilon\ .$$

Per $\gamma \in U$ il secondo addendo della (1.3) è minore di ε. Per il Lemma 4.5 del Capitolo II, esiste poi un intorno V di x_0 in G tale che per $x \in V$ il primo addendo sia minore di ε.

Osserviamo ora che

$$\int_G (\tau_x f)\gamma = \int_G f(y)\gamma(y+x)\,dy = \gamma(x)\int_G f\gamma\ ,$$

e analogamente

$$\int_G (\tau_{x_0} f)\gamma_0 = \gamma_0(x_0) \int_G f\gamma_0 \ ,$$

per cui, assumendo $x \in V$ e $\gamma \in U$,

$$\begin{aligned}
\big|\gamma(x) - \gamma_0(x_0)\big|\left|\int_G f\gamma_0\right| &= \left|\gamma(x)\int_G f\gamma_0 - \gamma_0(x_0)\int_G f\gamma_0\right| \\
&\le \left|\gamma(x)\int_G f\gamma_0 - \gamma(x)\int_G f\gamma\right| + \left|\gamma(x)\int_G f\gamma - \gamma_0(x_0)\int_G f\gamma_0\right| \\
&\le \left|\int_G f\gamma_0 - \int_G f\gamma\right| + \left|\int_G (\tau_x f)\gamma - \int_G (\tau_{x_0} f)\gamma_0\right| \\
&< 3\varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Basta allora scegliere f tale che $\int_G f\gamma_0 = 1$ per avere la continuità di F in (x_0, γ_0). $\square$

Proposizione 1.3. *La topologia di Gelfand su $\hat{G}$ coincide con la* topologia compatto-aperto*, in cui un sistema fondamentale di intorni di $\gamma_0 \in \hat{G}$ è costituito dagli insiemi*[10]

(1.4) $$U_{K,\varepsilon}(\gamma_0) = \{\gamma : \big|\gamma(x) - \gamma_0(x)\big| < \varepsilon \ \forall\, x \in K\} \ ,$$

al variare di $\varepsilon > 0$ e di K tra i compatti di G.

Si verifichi per esercizio che gli intorni (1.4) definiscono effettivamente una topologia su $\hat{G}$.

Dimostrazione. Un sistema fondamentale di intorni di $\gamma_0 \in \hat{G}$ nella topologia di Gelfand è costituito dagli insiemi

$$V_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}(\gamma_0) = \left\{\gamma : \left|\int_G f_j(x)\gamma(x)\,dx - \int_G f_j(x)\gamma_0(x)\,dx\right| < \varepsilon \ , j = 1\dots,n\right\} ,$$

al variare di $\varepsilon > 0$ e $\{f_1, \dots, f_n\}$ tra i sottoinsiemi finiti di $L^1(G)$.

Dato un intorno $V_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}(\gamma_0)$, sia K compatto in G tale che

$$\int_{G\setminus K} |f_j(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

per $j = 1, \dots, n$. Se $M = \max \|f_j\|_1$ e $\gamma \in U_{K,\varepsilon/2M}(\gamma_0)$, si ha

$$\begin{aligned}
\left|\int_G f_j(x)\gamma(x)\,dx - \int_G f_j(x)\gamma_0(x)\,dx\right| &\le \int_K |f_j(x)|\big|\gamma(x) - \gamma_0(x)\big|\,dx \\
&\quad + 2\int_{G\setminus K} |f_j(x)|\,dx \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

[10] Questa è la topologia della convergenza uniforme sui compatti di G, nel senso che una successione generalizzata $\{\gamma_\alpha\}$ converge a γ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni compatto K di G, esiste α_0 tale che $\max_{x\in K} \big|\gamma_\alpha(x) - \gamma(x)\big| < \varepsilon$ per ogni $\alpha > \alpha_0$.

Quindi $U_{K,\varepsilon/2M}(\gamma_0) \subseteq V_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}(\gamma_0)$.

Viceversa, sia dato un intorno $U_{K,\varepsilon}(\gamma_0)$ nella topologia compatto-aperto. Per il Lemma 1.2, per ogni $y \in K$ esistono un intorno $S(y)$ di y in G e un intorno $V_y(\gamma_0)$ di γ_0 in $\hat{G}$ nella topologia di Gelfand, tali che $\left|\gamma(x) - \gamma_0(y)\right| < \varepsilon/2$ per ogni $x \in S(y)$ e ogni $\gamma \in V_y(\gamma_0)$.

Siano $x_1, \dots, x_n \in K$ tali che $S(x_1), \dots, S(x_n)$ formino un ricoprimento di K, e sia $V = \bigcap_{j=1}^n V_{x_j}(\gamma_0)$. Se $\gamma \in V$ e $x \in K$, sia j tale che $x \in S(x_j)$. Si ha allora

$$\left|\gamma(x) - \gamma_0(x)\right| \leq \left|\gamma(x) - \gamma_0(y)\right| + \left|\gamma_0(y) - \gamma_0(x)\right| < \varepsilon \ .$$

Quindi $V \subseteq U_{K,\varepsilon}$. $\square$

$\hat{G}$ possiede una struttura naturale di gruppo. Se $\gamma, \gamma' \in \hat{G}$, poniamo

$$(\gamma\gamma')(x) = \gamma(x)\gamma'(x) \ .$$

Si verifica facilmente che il carattere banale $e(x) \equiv 1$ è l'elemento neutro, e che $\gamma^{-1}(x) = \frac{1}{\gamma(x)} = \overline{\gamma(x)}$. Inoltre $\hat{G}$ è abeliano.

Teorema 1.4. *$\hat{G}$, con la topologia compatto-aperto, è un gruppo topologico localmente compatto.*

Dimostrazione. Verifichiamo che l'applicazione $(\gamma, \gamma') \longmapsto \gamma\gamma'$ da $\hat{G} \times \hat{G}$ in $\hat{G}$ è continua. Siano $\gamma_0, \gamma_0' \in \hat{G}$; fissati K compatto in G e $\varepsilon > 0$, consideriamo l'intorno $U_{K,\varepsilon}(\gamma_0\gamma_0')$. Se $\gamma \in U_{K,\varepsilon/2}(\gamma_0)$ e $\gamma' \in U_{K,\varepsilon/2}(\gamma_0')$, si vede facilmente che

$$\left|(\gamma\gamma')(x) - (\gamma_0\gamma_0')(x)\right| \leq \left|\gamma(x) - \gamma_0(x)\right| + \left|\gamma'(x) - \gamma_0'(x)\right| < \varepsilon \ ,$$

per ogni $x \in K$. È poi evidente che l'applicazione $\gamma \longmapsto \gamma^{-1} = \bar{\gamma}$ è pure continua.

Per la Proposizione 1.3, $\hat{G}$ è localmente compatto. $\square$

Definizione. *Il gruppo $\hat{G}$, dotato della topologia compatto-aperto, si chiama il* gruppo duale *di G.*

Esempi.

(1.a) Sia $G = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Le funzioni $\gamma_\xi(x) = e^{i\xi x}$ con $\xi \in \mathbb{R}$ sono caratteri di $\mathbb{R}$. Viceversa, sia γ un carattere di $\mathbb{R}$. Data $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$f * \gamma(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\gamma(y)\, dy$$

è una funzione C^∞ su $\mathbb{R}$. Ma si ha anche

$$f * \gamma(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\gamma(x-y)\, dy = \gamma(x) \int_R f(y)\overline{\gamma(y)}\, dy \ .$$

Scegliendo f in modo che $\int_{\mathbb{R}} f\bar{\gamma} \neq 0$, si conclude che $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$. Allora

$$\gamma'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(x+h) - \gamma(x)}{h} = \gamma(x)\gamma'(0) \ .$$

Sia $\zeta = \gamma'(0) \in \mathbb{C}$. Allora γ soddisfa l'equazione differenziale $\gamma' = \zeta\gamma$, da cui $\gamma(x) = ce^{\zeta x}$. Poiché $\gamma(0) = 1$, è $c = 1$. Poiché γ è limitata, deve necessariamente essere $\zeta = i\xi$, con $\xi \in \mathbb{R}$. Quindi $\gamma = \gamma_\xi$.

Attraverso l'applicazione $\Lambda(\xi) = \gamma_\xi$, $\hat{G}$ è dunque isomorfo a $\mathbb{R}$ come gruppo. Verifichiamo ora che Λ è pure un omeomorfismo.

Se $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{R}$, si vede facilmente che $\gamma_{\xi_n} \to \gamma_\xi$ uniformemente sui compatti, per cui Λ è continua. Poiché le topologie su entrambi i gruppi sono invarianti per traslazioni, è sufficiente verificare la continuità di Λ^{-1} in $\gamma_0 \equiv 1$.

Dato $\varepsilon > 0$, si può verificare che, posto $K = [-1, 1]$, esiste $\delta > 0$ tale che $\gamma_\xi \in U_{K,\delta}(\gamma_0) \Rightarrow |\xi| < \varepsilon$. La dimostrazione è lasciata per esercizio.

In conclusione $\hat{\mathbb{R}}$ è isomorfo a $\mathbb{R}$.

(1.b) Sia $G = \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \sim \{e^{it} : t \in [0, 2\pi)\}$ con la topologia indotta da $\mathbb{R}^2$ (o, equivalentemente, con la topologia quoziente).

Dato un intero $n \in \mathbb{Z}$, la funzione $\gamma(e^{it}) = e^{int}$ è un carattere di $\mathbb{T}$. Viceversa, sia γ un carattere di $\mathbb{T}$. Se σ è la proiezione canonica di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma$ è un carattere di $\mathbb{R}$.

Esiste allora $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $\tilde{\gamma}(x) = e^{i\xi x}$. Inoltre, deve essere

$$\tilde{\gamma}(2k\pi) = \gamma\big(\sigma(2k\pi)\big) = 1 .$$

In particolare $\tilde{\gamma}(2\pi) = e^{i2\pi\xi} = 1$, da cui segue che $\xi \in \mathbb{Z}$.

Abbiamo così dimostrato che $\hat{\mathbb{T}}$ è isomorfo, come gruppo, a $\mathbb{Z}$. Si verifichi per esercizio che la topologia compatto-aperto su $\hat{\mathbb{T}}$ è la topologia discreta.

(1.c) Sia $G = \mathbb{Z}$ con la topologia discreta. Un carattere di $\mathbb{Z}$ è unvocamente determinato dal suo valore $\zeta = \gamma(1) \in \mathbb{T}$, in quanto deve necessariamente essere $\gamma(n) = \zeta^n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Si lascia per esercizio la verifica che l'applicazione $\zeta \mapsto \gamma_\zeta(n) = \zeta^n$ è un isomorfismo e un omeomorfismo di $\mathbb{T}$ su $\hat{\mathbb{Z}}$.

(1.d) Sia $G = \prod_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$ il prodotto cartesiano di un'infinità numerabile di copie di $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Un elemento di G è una successione (ε_j), con ε_j uguale a 0 o a 1. La somma si fa componenet per componente:

$$(\varepsilon_j) + (\delta_j) = (\varepsilon_j + \delta_j \mod 2) .$$

In questo modo G ha una struttura di gruppo abeliano.

Su $\mathbb{Z}_2$ consideriamo la topologia discreta, e su G la topologia prodotto. G è di Hausdorff e compatto per il Teorema di Tychonoff. Un sistema fondamentale di intorni di $\varepsilon = (\varepsilon_j) \in G$ è costituito dagli insiemi "cilindrici"

$$U_n(\varepsilon) = \{\delta = (\delta_j) : \delta_j = \varepsilon_j \ \forall\, j \le n\} .$$

Si verifica allora facilmente che le operazioni di gruppo sono continue. Quindi G è un gruppo compatto. Un utile esercizio è dimostrare che l'applicazione

$$(\varepsilon_j) \longmapsto \frac{2}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j 3^{-j}$$

è un omeomorfismo di G sull'insieme ternario di Cantor. Per questo motivo, G si chiama il *gruppo di Cantor*.

Sia γ un carattere di G. Poiché $\gamma(\varepsilon)^2 = \gamma(2\varepsilon) = \gamma(0) = 1$ per ogni $\varepsilon \in G$, $\gamma(G) \subseteq \{-1, 1\}$. Indichiamo con e^k l'elemento di G tale che $e^k_j = \delta_{k,j}$, e poniamo $\gamma_j = \gamma(e_j)$. Per la continuità di γ in 0, esiste n tale che $\gamma\big(U_n(0)\big) \subseteq \{1\}$. Se $k > n$, $e^k \in U_n(0)$, per cui $\gamma_k = 1$.

Quindi la successione (γ_k) è definitivamente uguale a 1; si verifica facilmente che

$$\gamma(\varepsilon) = \prod_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{\varepsilon_j} \ ,$$

dove il prodotto va inteso come un prodotto finito, essendo i suoi fattori definitivamente uguali a 1.

Quindi $\hat{G} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$, inteso come il gruppo abeliano liberamente generato da un'infinità numerabile di copie di $\mathbb{Z}_2$.

Si verifichi per esercizio che la topologia compatto-aperto su $\hat{G}$ è la topologia discreta.

Elenchiamo alcune relazioni generali tra gruppi e loro duali.

Proposizione 1.5. *Valgono le seguenti proprietà.*

(1) *Se G è compatto, $\hat{G}$ è discreto.*
(2) *Se G è discreto, $\hat{G}$ è compatto.*
(3) $\widehat{G_1 \times G_2} = \widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$.
(4) *Dato un un sottogruppo chiuso H di G, indichiamo con $H^\perp$, detto l'*annullatore di H in $\hat{G}$*, il sottogruppo chiuso di $\hat{G}$ definito come*

$$H^\perp = \{\gamma \in \hat{G} : \gamma(h) = 1 \ \forall\, h \in H\} \ .$$

Se π è la proiezione canonica di G su G/H, l'applicazione da $\widehat{G/H}$ a $H^\perp$ che associa a un carattere γ su G/H il carattere $\gamma \circ \pi$ di G è un isomorfismo di gruppi topologici.

Dimostrazione. (1) Se γ non è il carattere banale γ_0, $\gamma(G)$ è un sottogruppo compatto non banale di $\mathbb{T}$. Le possibilità sono: (a) $\gamma(G) = \mathbb{T}$, (b) $\gamma(G)$ uguale al sottogruppo delle radici n-esime dell'unità per qualche $n > 1$. In tutti i casi esiste $\zeta \in \gamma(G)$ tale che $|1 - \zeta| \geq \sqrt{3}$. Quindi l'intorno $U_{G,\sqrt{3}}(\gamma_0)$ consiste del solo γ_0. Per invarianza per traslazioni, ogni elemento di $\hat{G}$ è isolato.

(2) Se G è discreto, $L^1(G)$ ha un'unità (Corollario 4.4 del Capitolo II), per cui $\hat{G} = \Delta\big(L^1(G)\big)$ è compatto.

(3) Dati due caratteri $\gamma_1 \in \widehat{G_1}$ e $\gamma_2 \in \widehat{G_2}$, chiaramente $\gamma_1 \otimes \gamma_2(x_1, x_2) = \gamma_1(x_1)\gamma_2(x_2)$ è un carattere di $G_1 \times G_2$.

Viceversa, dato $\gamma \in \widehat{G_1 \times G_2}$, siano $\gamma_1(x_1) = \gamma(x_1, 0)$, $\gamma_2(x_2) = \gamma(0, x_2)$. Allora $\gamma = \gamma_1 \otimes \gamma_2$.

L'applicazione $(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_1 \otimes \gamma_2$ di $\widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$ in $\widehat{G_1 \times G_2}$ è dunque un isomorfismo di gruppi. Si verifica facilmente che è anche un omeomorfismo.

(4) Se γ è un carattere di G/H, $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \pi$ è un carattere di G. Poiché $\tilde{\gamma}(h) = 1$ per ogni $h \in H$, $\tilde{\gamma} \in H^\perp$. Viceversa, dato un carattere in $H^\perp$, esso passa al quoziente, dando un carattere di G/H.

Quindi l'applicazione $\gamma \mapsto \gamma \circ \pi$ è un isomorfismo di $\widehat{G/H}$ su $H^\perp$. Il fatto che sia un omeomorfismo è abbastanza semplice a dimostrarsi. $\square$

Esempio.

(1.e) Sia G un gruppo localmente compatto, e sia G_d lo stesso gruppo con la topologia discreta. Allora $\widehat{G_d}$ è compatto. Esso è costituito da tutti gli omomorfismi di gruppo (anche discontinui) di G in $\mathbb{T}$. C'è un'inclusione naturale di $\hat{G}$ in $\widehat{G_d}$. Si dimostra[11] che l'inclusione è continua con immagine densa. $\widehat{G_d}$ si chiama la *compattificazione di Bohr* di $\hat{G}$.

2. La trasformata di Fourier

Definizione. *Sia $f \in L^1(G)$. La* trasformata di Fourier *di f è la funzione*

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,dx \ , \tag{2.1}$$

definita su $\hat{G}$.

La trasformata di Fourier non è altro che la trasformata di Gelfand in $L^1(G)$. La coniugazione del carattere in (2.1) è tradizionale, e deriva dalle formule dei coefficienti di Fourier di funzioni periodiche. Indicheremo con $\mathcal{F}$ l'operatore che applica f in $\hat{f}$.

Proposizione 2.1. *La trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ applica $L^1(G)$ in $C_0(\hat{G})$ e soddisfa le seguenti proprietà:*

(1) *è un omomorfismo di algebre; in particolare $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$;*
(2) $\widehat{\tau_y f}(\gamma) = \overline{\gamma(y)}\hat{f}(\gamma)$;
(3) $\widehat{\gamma_0 f}(\gamma) = \tau_{\gamma_0}\hat{f}$;
(4) *se $\check{f}(x) = f(-x)$, allora $\hat{\check{f}}(\gamma) = \hat{f}(-\gamma)$;*
(5) *se $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, allora $\widehat{f^*}(\gamma) = \overline{\hat{f}(\gamma)}$; in particolare $L^1(G)$, con l'involuzione $f \mapsto f^*$, è un'algebra di Banach simmetrica;*
(6) *$\mathcal{F}\big(L^1(G)\big)$ è una sottoalgebra densa di $C_0(\hat{G})$.*

Dimostrazione. La (1) è ovvia. Le (2)-(4) sono di facile verifica. L'uguaglianza $\widehat{f^*} = \overline{\hat{f}}$ è pure di facile verifica. L'applicazione $f \mapsto f^*$ è un'involuzione su $L^1(G)$. Applicando la Proposizione 4.3 del Cap. I, $L^1(G)$ è simmetrica. Per il Corollario 4.4 del Capitolo I, l'immagine di $L^1(G)$ secondo $\mathcal{F}$ è una sottoalgebra densa di $C_0(\hat{G})$. $\square$

Esempi.

(2.a) I casi $G = \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{T}^n$ sono classici. Se $G = \mathbb{Z}$, la trasformata di Fourier di una successione $a = \{a_n\}$ è la funzione

$$\hat{a}(e^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-int} \ ,$$

[11] v. W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, p. 30.

definita su $\mathbb{T}$.

(2.b) Sia $G = \mathbb{R}_d$, la retta reale con la topologia discreta. Una funzione in $L^1(\mathbb{R}_d) = \ell^1(\mathbb{R})$ è una successione sommabile $\{a_{\lambda_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, con $\lambda_j \in \mathbb{R}$. La sua trasformata di Fourier è definita sulla compattificazione di Bohr di $\mathbb{R}$. La sua restrizione a $\mathbb{R}$ è

$$\hat{a}(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{\lambda_j} e^{-i\lambda_j\xi} \ .$$

Essa è dunque una serie trigonometrica con frequenze arbitrarie. Pertanto non è in generale periodica, ma soddisfa la seguente condizione di *quasi-periodicità*:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $L > 0$ tale che ogni intervallo di $\mathbb{R}$ di lunghezza L contenga un ε-quasi-periodo, *ossia un numero $T > 0$ tale che $\big|f(x+T) - f(x)\big| < \varepsilon$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.*

(v. W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups.*)

Definizione. *Sia $\mu \in M(G)$. Si chiama* trasformata di Fourier-Stjeltjes *(o semplicemente trasformata di Fourier) la funzione*

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \overline{\gamma(x)}\, d\mu(x) \ , \tag{2.2}$$

definita su $\hat{G}$.

Proposizione 2.2. *Data $\mu \in M(G)$, $\hat{\mu}$ è continua e limitata su $\hat{G}$. Inoltre $\|\hat{\mu}\|_\infty \leq \|\mu\|_1$, e l'applicazione $\mathcal{F} : M(G) \to C_b(\hat{G})$ che manda μ in $\hat{\mu}$ è un omomorfismo di algebre.*

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Anche se la trasformata di Fourier-Stjeltjes gode delle proprietà formali di una trasformata di Gelfand, essa *non* è la trasformata di Gelfand di $M(G)$. Lo spettro di Gelfand di $M(G)$ è uno spazio compatto che contiene propriamente $\hat{G}$ (a meno che G non sia discreto). Per maggiori dettagli si rinvia a W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, cap. 5.

3. Il teorema di Bochner

Definizione. *Una funzione continua φ su G si dice* di tipo positivo *(o anche* definita positiva*) se per ogni scelta di punti $x_1, \dots, x_n$ di G e per ogni $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$, risulta*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \varphi(x_k - x_j)\xi_j\overline{\xi_k} \geq 0 \ . \tag{3.1}$$

Proposizione 3.1. *Una funzione continua φ su G è di tipo positivo se e solo se*

$$\int_{G\times G} \varphi(y-x) f(x)\overline{f(y)}\, dx\, dy \geq 0 \ , \tag{3.2}$$

per ogni $f \in C_c(G)$. Inoltre, sono di tipo positivo le seguenti funzioni:

(1) $\varphi(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma)$, *dove μ è una misura di Borel finita positiva su $\hat{G}$;*
(2) $\varphi(x) = h * h^*(x)$, *con $h \in L^2(G)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che valga la (3.1). Fissata una partizione finita $\{E_j\}$ del supporto di f con E_j boreliani, e fissati punti $x_j \in E_j$, si ha

$$\sum_{j,k} \varphi(x_k - x_j) f(x_j) \overline{f(x_k)} m(E_j) m(E_k) \geq 0 \ .$$

Questa uguaglianza non è altro che la (3.2) per combinazioni finite di funzioni caratteristiche. L'estensione della (3.2) a funzioni continue a supporto compatto si ottiene con l'abituale metodo di approssimanzione.

Supponiamo invece che valga la (3.2). Fissata un'identità approssimata $\{\psi_i\}$ costituita da funzioni continue a supporto compatto, e assegnati punti $x_j \in G$ e valori $\xi_j \in \mathbb{C}$, poniamo $f_i = \sum_j \xi_j \tau_{x_j} \psi_i$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_{G\times G} \varphi(y-x) f_i(x) \overline{f_i(y)}\, dx\, dy = \\
&= \sum_{j,k} \xi_j \overline{\xi_k} \int_{G\times G} \varphi(y-x) \psi_i(x - x_j) \overline{\psi_i(y - x_k)}\, dx\, dy \\
&= \sum_{j,k} \xi_j \overline{\xi_k} \int_{G\times G} \varphi(y + x_j - x - x_k) \psi_i(x) \overline{\psi_i(y)}\, dx\, dy \ .
\end{aligned}$$

Passando al limite rispetto ad i, si ottiene la (3.1).

Sia φ è come in (1), e verifichiamo che è è continua. Dato $\varepsilon > 0$, sia $K \subset \hat{G}$ tale che $\int_{\hat{G}\setminus K} d\mu(\gamma) < \varepsilon$. Siano poi $x_0 \in G$ e V un intorno compatto si x_0. Per il Lemma 1.2, la funzione $F(x,\gamma) = \gamma(x)$ è uniformemente continua su $V \times K$. Esiste allora un intorno $V' \subset V$ di x_0 tale che $\big|\gamma(x) - \gamma(x_0)\big| < \varepsilon$. Se $x \in V'$,

$$\begin{aligned}
\big|\varphi(x) - \varphi(x_0)\big| &< \int_K \big|\gamma(x) - \gamma(x_0)\big|\, d\mu(\gamma) + 2\varepsilon \\
&< \big(\|\mu\|_1 + 2\big)\varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Data allora $f \in C_c(G)$,

$$\begin{aligned}
\int_{G\times G} \varphi(y-x) f(x) \overline{f(y)}\, dx\, dy &= \int_{\hat{G}} \int_{G\times G} \gamma(y-x) f(x) \overline{f(y)}\, dx\, dy\, d\mu(\gamma) \\
&= \int_{\hat{G}} \big|\hat{f}(\gamma)\big|^2\, d\mu(\gamma) \geq 0 \ .
\end{aligned}$$

Se φ è come in (2), essa è continua per il Teorema 4.6 del Cap. II. Inoltre, se $f \in C_c(G)$,

$$\begin{aligned}
\int_{G\times G} \varphi(y-x) f(x) \overline{f(y)}\, dx\, dy &= \int_{G\times G\times G} h(t) \overline{h(t - y + x)} f(x) \overline{f(y)}\, dt\, dx\, dy \\
&= \int_{G\times G\times G} h(t-x) \overline{h(t-y)} f(x) \overline{f(y)}\, dt\, dx\, dy \\
&= \int_G \big|(h * f)(t)\big|^2\, dt \geq 0 \ . \qquad \square
\end{aligned}$$

Teorema 3.2 (di Bochner). *Sia φ di tipo positivo su G. Esiste una e una sola misura di Borel positiva e finita μ_φ su $\hat{G}$ tale che $\|\mu_\varphi\|_1 = \|\varphi\|_\infty = \varphi(0)$, e*

$$\varphi(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\mu_\varphi(\gamma) \ . \tag{3.3}$$

Dimostrazione. Osserviamo che, applicando la (3.1) con $x_1 = 0$ e $x_2 = x$ generico, si ha

$$\left(1 + |\xi|^2\right)\varphi(0) + \xi f(x) + \bar{\xi} f(-x) \geq 0$$

per ogni $\xi \in \mathbb{C}$. Ponendo $\xi = 0$, si deduce che $\varphi(0) \geq 0$. Ponendo uguale a 0 la parte immaginaria per $\xi = 1$ e per $\xi = i$, si ricava che $\varphi(-x) = \overline{\varphi(x)}$. Allora, per ipotesi,

$$\det \begin{pmatrix} \varphi(0) & \varphi(x) \\ \overline{\varphi(x)} & \varphi(0) \end{pmatrix} = \varphi(0)^2 - |\varphi(x)|^2 \geq 0 \ ,$$

da cui $|\varphi(x)| \leq \varphi(0)$. In particolare, se $\varphi(0) = 0$, φ è identicamente nulla.

Possiamo allora supporre che $\|\varphi\|_\infty = \varphi(0) = 1$. Consideriamo la forma Hermitiana semidefinita positiva

$$\langle f, g \rangle = \int_{G\times G} \varphi(y - x) f(x) \overline{g(y)}\, dx\, dy = \int_G (f * g^*)(x) \varphi(-x)\, dx \ ,$$

definita per $f, g \in L^1(G)$. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int_G (f * g^*)(x)\varphi(-x)\, dx \right|^2 \leq \left(\int_G (f * f^*)(x)\varphi(-x)\, dx \right) \left(\int_G (g * g^*)(x)\varphi(-x)\, dx \right) .$$

Sia $\{g_i\}$ un'identità approssimata. Allora anche $\{g_i^*\}$ e $\{g_i * g_i^*\}$ sono identità approssimate. Inserendo g_i al posto di g e passando al limite, si ottiene

$$\left| \int_G f(x)\varphi(-x)\, dx \right|^2 \leq \int_G (f * f^*)(x)\varphi(-x)\, dx \ . \tag{3.4}$$

Poniamo $h = f * f^*$. Allora $h = h^*$. Indicando con h^{*n} la convoluzione di h con se stessa n volte, si ottiene per induzione dalla (3.4) che

$$\left(\int_G h(x)\varphi(-x)\, dx \right)^{2^k} \leq \int_G h^{*2^k}(x)\varphi(-x)\, dx \ ,$$

da cui

$$\int_G h(x)\varphi(-x)\, dx \leq \|h^{*2^k}\|_1^{2^{-k}} \ .$$

Passando al limite per $k \to \infty$, si ottiene

$$\int_G h(x)\varphi(-x)\, dx \leq \|\hat{h}\|_\infty = \|\hat{f}\|_\infty^2 \ .$$

Riapplicando la (3.4), si ricava che

$$\left| \int_G f(x)\varphi(-x)\, dx \right| \leq \|\hat{f}\|_\infty \ .$$

Consideriamo allora il funzionale, definito su $\mathcal{F}\big(L^1(G)\big)$ che associa a $\hat{f}$ l'integrale $\int_G f(x)\varphi(-x)\,dx$. Esso è continuo rispetto alla norma di $C_0(\hat{G})$. Per la Proposizione 2.1, questo funzionale si estende per densità a tutto $C_0(\hat{G})$ in modo unico. Esiste dunque una e una sola misura $\mu_\varphi \in M(\hat{G})$ tale che $\|\mu_\varphi\|_1 \leq 1$ e

$$\int_G f(x)\varphi(-x)\,dx = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\gamma)\,d\mu_\varphi(\gamma)\ .$$

Ma allora

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\varphi(-x)\,dx &= \int_{\hat{G}}\int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,dx\,d\mu_\varphi(\gamma)\\ &= \int_G f(x)\Big(\int_{\hat{G}}\overline{\gamma(x)}\,d\mu_\varphi(\gamma)\Big)\,dx\ ,\end{aligned}$$

per ogni $f \in L^1(G)$. Quindi

$$\varphi(-x) = \int_{\hat{G}} \gamma(-x)\,d\mu_\varphi(\gamma)\ ,$$

da cui segue la (3.3). Infine

$$\mu_\varphi(\hat{G}) = \varphi(0) = 1\ ,$$

per cui $\mu_\varphi \geq 0$ e $\|\mu_\varphi\|_1 = 1$. $\square$

4. La formula di Plancherel

Sia ora f una funzione in $L^1(G)\cap L^2(G)$. Allora $F = f * f^*$ è di tipo positivo e in $L^1(G)$. Vogliamo determinare la relazione tra la misura μ_F e la trasformata di Fourier $\hat{F} = |\hat{f}|^2$.

Proposizione 4.1. *Esiste una misura di Haar $d\gamma$ su $\hat{G}$, indipendente da f e tale che $d\mu_F(\gamma) = |\hat{f}(\gamma)|^2\,d\gamma$.*

La dimostrazione richiede un paio di lemmi.

Lemma 4.2. *Dato un compatto K in $\hat{G}$, esiste $f \in L^1(G)\cap L^2(G)$ tale che $\hat{f} \neq 0$ su K.*

Dimostrazione. Sia $\eta \in C_c(G)$ non identicamente nulla e non negativa. Allora $\hat{\eta}(0) > 0$. Sia U un intorno di 0 su cui $\hat{\eta} \neq 0$.

Esistono $\gamma_1,\dots,\gamma_n \in K$ tali che $K \subset \bigcup_{j=1}^n(\gamma_j + U)$. Posto $f = \sum_{j=1}^n(\eta * \eta^*)\gamma_j$, si ha

$$\hat{f}(\gamma) = \sum_{j=1}^n |\hat{\eta}(\gamma - \gamma_j)|^2\ ,$$

che è strettamente positivo su K. $\square$

Lemma 4.3. *Se φ è di tipo positivo e $\gamma_0 \in \hat{G}$, allora anche $\varphi\gamma_0$ è di tipo positivo, e $\mu_{\varphi\gamma_0} = \tau_{\gamma_0}\mu_\varphi$.*

Dimostrazione. Si ha

$$\varphi(x)\gamma_0(x) = \int_{\hat{G}} (\gamma + \gamma_0)(x)\, d\mu_\varphi(\gamma) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\mu_\varphi(\gamma - \gamma_0)\ .$$

Per la Proposizione 3.1 (1), $\varphi\gamma_0$ è di tipo positivo, e il resto segue banalmente. □

Dimostrazione della Proposizione 4.1. Data una funzione $u \in L^1(G)$, si ha

$$\begin{aligned} u * F(0) &= \int_G u(-x)F(x)\, dx \\ &= \int_{\hat{G}} \int_G u(-x)\gamma(x)\, dx\, d\mu_F(\gamma) \\ &= \int_{\hat{G}} \hat{u}(\gamma)\, d\mu_F(\gamma)\ . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Sia ora h un'altra funzione in $L^1(G) \cap L^2(G)$, e siano $H = h * h^*$ e μ_H come sopra. Sostituendo u con $u * H$ nella (4.1), si ha

$$(u * H) * F(0) = \int_{\hat{G}} \hat{u}(\gamma)\big|\hat{h}(\gamma)\big|^2\, d\mu_F(\gamma)\ .$$

Scambiando f e h,

$$(u * F) * H(0) = \int_{\hat{G}} \hat{u}(\gamma)\big|\hat{f}(\gamma)\big|^2\, d\mu_H(\gamma)\ .$$

Poiché $\mathcal{F}\big(L^1(G)\big)$ è denso in $C_0(\hat{G})$, si ottiene l'uguaglianza

$$|\hat{h}|^2\, d\mu_F = |\hat{f}|^2\, d\mu_H\ , \tag{4.2}$$

per ogni $f, h \in L^1(G) \cap L^2(G)$.

Definiamo allora un funzionale Φ su $C_c(\hat{G})$ come segue. Data $g \in C_c(\hat{G})$, sia $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ tale che $\hat{f} \neq 0$ sul supporto di g. Poniamo

$$\Phi(g) = \int_{\hat{G}} g(\gamma)\frac{1}{|\hat{f}(\gamma)|^2}\, d\mu_F(\gamma)\ .$$

Per la (4.2), questa definizione non dipende dalla scelta di f. Si vede facilmente che Φ è lineare e positivo. Per il Teorema di rappresentazione di Riesz, esiste una e una sola misura di Borel positiva σ su $\hat{G}$, tale che $\Phi(g) = \int_{\hat{G}} g(\gamma)\, d\sigma(\gamma)$. Mostriamo che σ è una misura di Haar. Se $\gamma_0 \in \hat{G}$ e $\hat{f} \neq 0$ su $\operatorname{supp} g \cup (\operatorname{supp} g - \gamma_0)$,

$$\begin{aligned} \int_{\hat{G}} g(\gamma + \gamma_0)\, d\sigma(\gamma) &= \int_{\hat{G}} g(\gamma + \gamma_0)\frac{1}{|\hat{f}(\gamma)|^2}\, d\mu_F(\gamma) \\ &= \int_{\hat{G}} g(\gamma)\frac{1}{|\hat{f}(\gamma - \gamma_0)|^2}\, d\mu_F(\gamma - \gamma_0) \\ &= \int_{\hat{G}} g(\gamma)\frac{1}{|\widehat{f\gamma_0}|^2}\, d\mu_{F\gamma_0}(\gamma)\ , \end{aligned}$$

per il Lemma 4.3. Ma si verifica facilmente che

$$F\gamma_0 = (f * f^*)\gamma_0 = (f\gamma_0) * (f\gamma_0)^* \ ;$$

per la (4.2), questo implica che $\frac{1}{|\widehat{f\gamma_0}|^2}\, d\mu_{F\gamma_0}(\gamma) = \frac{1}{|\hat{f}|^2}\, d\mu_F$, e dunque $\int_{\hat G} g(\gamma + \gamma_0)\, d\sigma(\gamma) = \int_{\hat G} g(\gamma)\, d\sigma(\gamma)$.

Scriviamo $d\gamma$ in luogo di $d\sigma(\gamma)$. Abbiamo allora visto che

$$\int_{\hat G} g(\gamma) \frac{1}{|\hat{f}(\gamma)|^2}\, d\mu_F(\gamma) = \int_{\hat G} g(\gamma)\, d\gamma$$

tutte le volte che $\hat{f} \neq 0$ sul supporto di g. Sostituendo g con $g|\hat{f}|^2$, si ottiene che

$$\int_{\hat G} g(\gamma)\, d\mu_F(\gamma) = \int_{\hat G} g(\gamma) |\hat{f}(\gamma)|^2\, d\gamma \ .$$

Quindi $d\mu_F(\gamma) = |\hat{f}(\gamma)|^2\, d\gamma$ sull'insieme dove $\hat{f} \neq 0$. Se $\hat{f} = 0$ su un Boreliano E, per la (4.2),

$$\int_E |\hat{h}|^2\, d\mu_F = 0 \ ,$$

per ogni $h \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Per continuità l'uguaglianza vale per ogni $h \in L^1(G)$. Utilizzando ancora una volta la densità di $\mathcal{F}\big(L^1(G)\big)$ in $C_0(\hat G)$, si conclude che $\mu_F(E) = 0$. $\square$

Teorema 4.4 (Formula di Plancherel). *Esiste una misura di Haar $d\gamma$ su $\hat G$ tale che, se $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, allora $\hat{f} \in L^2(\hat G)$ e*

$$\int_{\hat G} |\hat{f}(\gamma)|^2\, d\gamma = \int_G |f(x)|^2\, dx \ . \tag{4.3}$$

Dimostrazione. Si osservi che

$$\int_G |f(x)|^2\, dx = \int_G f(x) f^*(-x)\, dx = f * f^*(0) = F(0) \ .$$

Per la Proposizione 4.1, esiste una misura di Haar $d\gamma$ su $\hat G$ tale che

$$\int_G |f(x)|^2\, dx = \int_{\hat G} d\mu_F(\gamma) = \int_{\hat G} |\hat{f}(\gamma)|^2\, d\gamma \ . \qquad \square$$

Dalla (4.3) segue per polarizzazione che

$$\int_G f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{\hat G} \hat{f}(\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma}\, d\gamma \ , \tag{4.4}$$

per $f, g \in L^1(G) \cap L^2(G)$.

Corollario 4.5. *Siano dx e $d\gamma$ misure di Haar su G e $\hat{G}$ rispettivamente per cui valga la (4.3). L'operatore $\mathcal{F}$ (trasformata di Fourier) si estende a una isometria suriettiva di $L^2(G, dx)$ su $L^2(\hat{G}, d\gamma)$.*

Dimostrazione. Per la (4.3), e per la densità di $L^1(G) \cap L^2(G)$ in $L^2(G)$, $\mathcal{F}$ si estende per continuità a una isometria di $L^2(G)$ in $L^2(\hat{G})$. Rimane da dimostrare che $\mathcal{F}$ è suriettivo.

Sia $h \in L^2(\hat{G})$ ortogonale a $\hat{f}$ per ogni $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Allora h è anche ortogonale a $\widehat{f * \varphi} = \hat{f}\hat{\varphi}$ per ogni $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ e ogni $\varphi \in L^1(G)$. Quindi

$$\int_{\hat{G}} h(\gamma)\overline{\hat{f}(\gamma)}\overline{\hat{\varphi}(\gamma)}\, d\gamma = 0 \ .$$

Ora $h\hat{f} \in L^1(\hat{G})$, in quanto entrambi i fattori sono in $L^2(\hat{G})$, e le funzioni $\hat{\varphi}$ formano, al variare di φ, un sottospazio denso di $C_0(\hat{G})$ per la Proposizione 2.1. Quindi $h(\gamma)\hat{f}(\gamma) = 0$ quasi ovunque per ogni $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$.

Fissata una tale f che non sia identicamente nulla, esiste un aperto $U \subset \hat{G}$ tale che $\hat{f}$ non si annulli su U. Per ogni $\gamma_0 \in \hat{G}$, $\widehat{f\gamma_0} = \tau_{\gamma_0}\hat{f}$ è non nulla su $\gamma_0 + U$. Quindi $h = 0$ quasi ovunque su ogni aperto $\gamma_0 + U$, e di conseguenza $h = 0$. □

Grazie a questo Teorema, la nozione di trasformata di Fourier viene estesa a funzioni in $L^2(G)$, anche se l'integrale di Fourier (2.1) non converge puntualmente nel senso ordinario.

Se $1 < p < 2$, ogni funzione $f \in L^p(G)$ si decompone nella somma di una funzione in $L^1(G)$ e di una in $L^2(G)$ (basta prendere $f\chi_{\{|f|<1\}}$ come uno dei due addendi). Quindi $\hat{f}$ è ben definita, ed è in $C_0(\hat{G}) + L^2(\hat{G})$. Applicando il Teorema di interpolazione di Riesz-Thorin, si ha il seguente risultato.

Corollario 4.6 (Teorema di Hausdorff-Young). *Se $f \in L^p(G)$, con $1 < p < 2$, allora $\hat{f} \in L^{p'}(\hat{G})$ e $\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$.*

Il corollario che segue estende a gruppi compatti la proprietà fondamentale del sistema esponenziale su $\mathbb{T}$.

Corollario 4.7. *Sia G compatto. I caratteri $\gamma \in \hat{G}$ formano una base ortonormale di $L^2(G)$ (rispetto alla misura di Haar normalizzata).*

Dimostrazione. Chiaramente $\|\gamma\|_2 = 1$ per ogni $\gamma \in \hat{G}$. Se γ non è il carattere banale, sia x_0 tale che $\gamma(x_0) \neq 1$. Si ha allora

$$\int_G \gamma(x)\, dx = \int_G \gamma(x + x_0)\, dx = \gamma(x_0) \int_G \gamma(x)\, dx \ ,$$

da cui

$$\int_G \gamma(x)\, dx = 0 \ .$$

Allora

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \int_G (\gamma_1\gamma_2^{-1})(x)\, dx = 0 \ ,$$

se $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Sia $f \in L^2(G) \subset L^1(G)$. Allora

$$\hat{f}(\gamma) = \langle f, \gamma \rangle$$

per ogni $\gamma \in \hat{G}$. Poiché $\hat{G}$ è discreto, la (4.3) diventa

$$c \sum_{\gamma \in \hat{G}} |\hat{f}(\gamma)|^2 = \|f\|_2^2 \ .$$

Ponendo f uguale a un carattere, si ottiene che $c = 1$. Se poi f è ortogonale a tutti i caratteri, si ha che $f = 0$. Dunque i caratteri formano un sistema completo. $\square$

5. La formula di inversione

Sia $\{U_i\}$ un sistema fondamentale di intorni compatti simmetrici di 0 in G. Poniamo

$$\varphi_i = \frac{1}{m(U_i)} \chi_{U_i} \ ;$$

in base a quanto visto nel paragrafo 5 del Capitolo II, $\{\varphi_i\}$ è un'identità approssimata. Poiché $\varphi_i \in L^2(G) \cap L^1(G)$ per ogni i, data $f \in L^1(G)$, si ha $f * \varphi_i \in L^2(G) \cap L^1(G)$ e $\lim_i \|f - f * \varphi_i\|_1 = 0$.

Teorema 5.1 (di unicità). *$L^1(G)$ è un'algebra di Banach semisemplice, cioè la trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ è iniettiva.*

Dimostrazione. Sia $f \in L^1(G)$ tale che $\hat{f} = 0$. Se $\{\varphi_i\}$ è come sopra, $\widehat{f * \varphi_i} = \hat{f}\widehat{\varphi}_i = 0$. Per la (4.3), $f * \varphi_i = 0$ quasi ovunque, e dunque $f = 0$. $\square$

Teorema 5.2 (di inversione). *Sia $f \in L^1(G)$ tale che $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$. Allora f coincide quasi ovunque con la funzione continua*

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(x)\gamma(x)\, d\gamma \ ,$$

dove $d\gamma$ è la misura per cui vale la (4.3).

Dimostrazione. Per la (4.4), essendo $\varphi_i(x) = \overline{\varphi_i(-x)}$, si ha

$$\begin{aligned} f * \varphi_i * \varphi_i(x) &= \int_G f * \varphi_i(y) \varphi_i(x - y)\, dy \\ &= \int_G f * \varphi_i(y) \overline{\tau_x \varphi_i(y)}\, dy \\ &= \int_{\hat{G}} \hat{f}(\gamma) \widehat{\varphi}_i(\gamma)^2 \gamma(x)\, d\gamma \ . \end{aligned}$$

Ma $|\widehat{\varphi}_i(\gamma)| \le 1$ e

$$\lim_i \widehat{\varphi}_i(\gamma) = \lim_i \int_G \varphi_i(x) \overline{\gamma(x)}\, dx = \overline{\gamma(0)} = 1 \ .$$

Per convergenza dominata,

$$\lim_i \int_{\hat G} \hat f(\gamma)\widehat{\varphi}_i(\gamma)^2\gamma(x)\,d\gamma = \int_{\hat G} \hat f(\gamma)\gamma(x)\,d\gamma\ ,$$

e quest'ultima espressione, che chiamiamo provvisoriamente $g(x)$, è funzione continua di x.

Sia $h \in C_c(G)$. Allora, essendo

$$\left| \int_{\hat G} \hat f(\gamma)\widehat{\varphi}_i(\gamma)^2\gamma(x)\,d\gamma \right| \le \|\hat f\|_1\ ,$$

sempre per convergenza dominata si ha

$$\begin{aligned} \lim_i \int_G f*\varphi_i*\varphi_i(x)h(x)\,dx &= \lim_i \int_G\int_{\hat G} \hat f(\gamma)\widehat{\varphi}_i(\gamma)^2\gamma(x)\,d\gamma\, h(x)\,dx \\ &= \int_G g(x)h(x)\,dx\ . \end{aligned}$$

D'altra parte, $\{\varphi_i*\varphi_i\}$ è pure un'identità approssimata, per cui $\lim_i f*\varphi_i*\varphi_i = f$ nella norma di $L^1(G)$. Quindi

$$\lim_i \int_G f*\varphi_i*\varphi_i(x)h(x)\,dx = \int_G f(x)h(x)\,dx\ ,$$

e dunque $f = g$ quasi ovunque. $\square$

Osserviamo che le funzioni $f \in L^1(G)$ tali che $\hat f \in L^1(\hat G)$ è un sottospazio denso di $L^1(G)$. Data una funzione $g \in L^1(G)$, si consideri $g_i = g*\varphi_i*\varphi_i$. Essa è in $L^1(G)$. Inoltre $\widehat{g_i} = \hat g \widehat{\varphi_i}^2 \in L^1(\hat G)$ perché $\widehat{\varphi_i} \in L^2(\hat G)$ per la formula di Plancherel.

6. Il Teorema di dualità di Pontryagin

Poiché $\hat G$ è pure un gruppo abeliano localmente compatto, possiamo considerare il suo gruppo duale $\hat{\hat G}$. C'è un naturale omomorfismo Φ di G in $\hat{\hat G}$: a $x \in G$ associamo il carattere

$$\big(\Phi(x)\big)(\gamma) = \gamma(x)\ . \tag{6.1}$$

Dimostriamo in questo paragrafo che che questa applicazione è un isomorfismo di gruppi topologici. Occorre premettere un paio di lemmi.

Lemma 6.1. *Gli insiemi*

$$V_{K,\varepsilon}(x_0) = \{x : \big|\gamma(x)-\gamma(x_0)\big| < \varepsilon\ \forall\,\gamma\in K\}\ , \tag{6.2}$$

formano, al variare di K tra i compatti di $\hat G$ e di $\varepsilon > 0$, un sistema fondamentale di intorni di $x_0 \in G$.

Dimostrazione. Possiamo supporre $x_0 = 0$. Per verificare che $V_{K,\varepsilon} = V_{K,\varepsilon}(0)$ è un intorno di 0, osserviamo che per ogni $\gamma_0 \in K$ esiste un intorno compatto U_{γ_0} di 0 in G tale che $|\gamma_0(x) - 1| < \varepsilon/2$ per ogni $x \in U_{\gamma_0}$. Per definizione della topologia compatto-aperto, esiste un intorno W_{γ_0} di γ_0 in $\hat{G}$ tale che per ogni $\gamma \in W_{\gamma_0}$ e ogni $x \in U_{\gamma_0}$, $|\gamma(x) - \gamma_0(x)| < \varepsilon/2$. Di conseguenza $|\gamma(x) - 1| < \varepsilon$ per ogni $x \in U_{\gamma_0}$ e ogni $\gamma \in W_{\gamma_0}$.

Al variare di $\gamma_0 \in K$, i W_{γ_0} ricoprono K. Sia W_{γ_j}, $j = 1, \ldots, n$ un sottoricoprimento finito, e sia $U = \bigcap_j U_{\gamma_j}$. Allora $U \subset V_{K,\varepsilon}$.

Sia ora U un intorno di 0, e sia W un intorno compatto di 0 tale che $W - W \subset U$. Poniamo

$$f = \frac{1}{m(W)} \chi_W * \chi_W^* = \frac{1}{m(W)} \chi_W * \chi_{-W} \ .$$

Allora $\operatorname{supp} f \subset U$, $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ e $\hat{f} = |\widehat{\chi_W}|^2 \in L^1(\hat{G})$. Per la formula di inversione,

$$f(0) = 1 = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\gamma)\, d\gamma \ .$$

Esiste allora un compatto K in $\hat{G}$ tale che $\int_K \hat{f}(\gamma)\, d\gamma > 3/4$. Mostriamo che $V_{K,1/4} \subset U$. Sia $x \in V_{K,1/4}$. Si ha

$$f(x) = \int_K \hat{f}(\gamma)\big(\gamma(x) - 1\big)\, d\gamma + \int_K \hat{f}(\gamma)\, d\gamma + \int_{\hat{G}\setminus K} \hat{f}(\gamma)\gamma(x)\, d\gamma \ .$$

Essendo $\hat{f} \geq 0$, il primo e l'ultimo addendo addendo sono minori di $1/4$ in valore assoluto, mentre il secondo è maggiore di $3/4$. Quindi $f(x) \neq 0$, e dunque $x \in U$. $\square$

Osserviamo che segue dal Lemma 6.1 che per ogni $x \neq 0$ esiste un carattere γ tale che $\gamma(x) \neq 1$. Questo implica che Φ è iniettiva.

Lemma 6.2. *Sia H un sottogruppo di un gruppo localmente compatto G, che sia localmente compatto rispetto alla topologia indotta da G. Allora H è chiuso in G.*

Dimostrazione. Gli intorni di e in H sono gli insiemi $U \cap H$ al variare di U tra gli intorni di e in G.

Sia U un intorno di e in G. Poiché H è localmente compatto, esiste un intorno U' di e in G tale che $U' \cap H$ sia compatto e contenuto in $U \cap H$. Possiamo supporre $U' \subset U$. Sia $U'' \subset U'$ un intorno compatto di e in G. Allora $U'' \cap H$ è chiuso in H, contenuto in $U' \cap H$, e dunque compatto.

Sia quindi V un intorno simmetrico di e in G tale che $V^2 \subset U''$.

Dato $x \in \bar{H}$, sia $y \in xV \cap H$. Allora $x \in \overline{yU'' \cap H}$. Infatti, sia $W \subset V$ un intorno di e in G e sia $h \in H \cap xW$. Poiché $x \in yV$, $h \in H \cap yVW \subset H \cap yU''$.

Ma, poiché $y \in H$, $yU'' \cap H = y(U'' \cap H)$ è compatto. Dunque $x \in H$. $\square$

Teorema 6.3 (di dualità di Pontryagin). *L'omomorfismo Φ di G in $\hat{\hat{G}}$ data dalla* (6.1) *è un isomorfismo di gruppi e un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che, in base al Lemma 6.1, Φ è iniettiva. Al variare di K compatto in $\hat{G}$ e di $\varepsilon > 0$, gli insiemi

$$W_{K,\varepsilon}(\xi_0) = \{\xi \in \hat{\hat{G}} : |\xi(\gamma) - \xi_0(\gamma)| < \varepsilon \ \forall\, \gamma \in K\}$$

formano un sistema fondamentale di intorni di $\xi_0 \in \widehat{\hat{G}}$. Dalla (6.2) segue immediatamente che
$$W_{K,\varepsilon}\big(\Phi(x)\big) \cap \Phi(G) = \phi\big(V_{K,\varepsilon}(x)\big) \ .$$

Quindi Φ è un omeomorfismo di G con la sua immagine in $\in \widehat{\hat{G}}$. In particolare $\Phi(G)$ è relativamente compatto per la topologia indotta da $\widehat{\hat{G}}$, e dunque chiuso per il Lemma 6.2.

Supponiamo infine per assurdo che esista $\xi_0 \in \widehat{\hat{G}} \setminus \Phi(G)$, e sia V un intorno compatto di 0 tale che $\xi_0 + V + V$ sia disgiunto da $\Phi(G)$. Le funzioni $f = \chi_V$, $g = \chi_{\xi_0+V}$, sono in $L^1(\widehat{\hat{G}}) \cap L^2(\widehat{\hat{G}})$, per cui $f * g$ è continua. Inoltre non è identicamente nulla e ha supporto compatto disgiunto da $\Phi(G)$.

Siano dx, $d\gamma$ e $d\xi$ misure di Haar su G, $\hat{G}$ e $\widehat{\hat{G}}$ rispettivamente, per cui valga la (4.3) con riferimento sia alla dualità tra G e $\hat{G}$ che a quella tra $\hat{G}$ e $\widehat{\hat{G}}$. Poniamo
$$f'(\gamma) = \int_{\widehat{\hat{G}}} f(\xi)\xi(\gamma)\, d\xi \ , \qquad g'(\gamma) = \int_{\widehat{\hat{G}}} g(\xi)\xi(\gamma)\, d\xi \ .$$

Se $\varphi \in C_c(\hat{G})$,
$$\begin{aligned}\int_{\hat{G}} f'(\gamma)\overline{\varphi(\gamma)}\, d\gamma &= \int_{\hat{G}}\int_{\widehat{\hat{G}}} f(\xi)\xi(\gamma)\, d\xi\, \overline{\varphi(\gamma)}\, d\gamma \\ &= \int_{\widehat{\hat{G}}} f(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi)}\, d\xi \ .\end{aligned}$$

Per il Corollario 4.5, $f' \in L^2(\hat{G})$ e $f = \widehat{f'}$. Lo stesso vale per g e g'. Inoltre, prendendo sempre $\varphi \in C_c(\hat{G})$,
$$\begin{aligned}\int_{\hat{G}} f'(\gamma)g'(\gamma)\overline{\varphi(\gamma)}\, d\gamma &= \int_{\hat{G}}\int_{\widehat{\hat{G}}}\int_{\widehat{\hat{G}}} f(\xi)g(\xi')\xi(\gamma)\xi'(\gamma)\, d\xi\, d\xi'\overline{\varphi(\gamma)}\, d\gamma \\ &= \int_{\widehat{\hat{G}}}\int_{\widehat{\hat{G}}} f(\xi)g(\xi')\overline{\hat{\varphi}(\xi+\xi')}\, d\xi\, d\xi' \\ &= \int_{\widehat{\hat{G}}} f * g(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi)}\, d\xi \ .\end{aligned}$$

Quindi anche $f'g' \in L^2(\hat{G})$ e $\widehat{f'g'} = f * g$. Poiché $f'g'$ è anche integrabile, quest'uguaglianza è valida puntualmente. In particolare
$$\int_{\hat{G}} f'(\gamma)g'(\gamma)\gamma(-x)\, d\gamma = 0$$
per ogni $x \in G$. Se $h \in L^1(G)$, si ha
$$\begin{aligned}0 &= \int_G\int_{\hat{G}} f'(\gamma)g'(\gamma)\gamma(-x)\, d\gamma\, h(x)\, dx \\ &= \int_{\hat{G}} f'(\gamma)g'(\gamma)\hat{h}(\gamma)\, d\gamma \ .\end{aligned}$$

Dalla densità di $\mathcal{F}\big(L^1(G)\big)$ in $C_0(\hat{G})$ segue allora che $f'g' = 0$ quasi ovunque, e dunque $f * g = 0$, da cui l'assurdo. $\square$

A completamento della Proposizione 1.5 aggiungiamo il seguente enunciato.

Corollario 6.4. *Sia H è un sottogruppo chiuso di G. Allora $(H^\perp)^\perp = H$. Inoltre l'omomorfismo di $\hat{G}$ in $\hat{H}$ che applica γ in $\gamma_{|_H}$ è suriettivo. In particolare $\hat{H}$ si identifica in modo naturale con $\hat{G}/H^\perp$.*

Dimostrazione. Chiaramente $H \subseteq (H^\perp)^\perp$. Sia $x \notin H$. Segue dal Lemma 6.1 applicato a G/H e dal fatto che G/H è di Hausdorff che esiste un carattere η di G/H tale che $\eta(x+H) \neq 1$. Se γ è il sollevamento di η a G, $\gamma \in H^\perp$ e $\gamma(x) \neq 1$. Quindi $x \notin (H^\perp)^\perp$.

Segue dalla Proposizione 1.5 e dal Teorema di dualità di Pontryagin che H è isomorfo al gruppo duale di $\hat{G}/H^\perp$. Sia χ un carattere di H. Sempre per il Teorema di dualità, esiste uno e un solo elemento $u + H^\perp \in \hat{G}/H^\perp$ tale che $\chi(h) = \big(\Phi(h)\big)(u + H^\perp)$. Allora $\chi(h) = u(h)$. $\square$

CAPITOLO IV
ELEMENTI DI TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI

1. Rappresentazioni di gruppi

Nel Capitolo precedente abbiamo visto che l'analisi di Fourier su un gruppo abeliano localmente compatto G si svolge a partire dal gruppo degli omomorfismi continui di G nel toro $\mathbb{T}$. Questi non sono più sufficienti se G non è commutativo: ogni omomorfismo di G in $\mathbb{T}$ è infatti banale sul sottogruppo chiuso $[G,G]$ generato dai commutatori $xyx^{-1}y^{-1}$ al variare di $x, y \in G$. Pertanto essi consentono solo l'analisi di funzioni su $G/[G,G]$, che è commutativo.

Per gruppi non abeliani, occorre dunque, quanto meno, sostituire a $\mathbb{T}$ un gruppo altrettanto naturale, che sia a sua volta non abeliano. Questo conduce a considerare gli omomorfismi continui di un gruppo G sul gruppo $U(n)$ delle matrici unitarie $n \times n$, o, più generalmente, sul gruppo $U(H)$ degli operatori unitari su uno spazio di Hilbert H.

Ricordiamo che $U \in \mathcal{L}(H)$ si dice unitario se $UU^* = I$ e $U^*U = I$. In dimensione finita ciascuna delle due uguaglianze implica l'altra.

Definizione. *Sia G un gruppo localmente compatto, e sia V uno spazio di Banach complesso non banale. Si chiama* rappresentazione di G in V *un omomorfismo $\pi : G \longrightarrow \mathcal{L}(V)$ che sia continua rispetto alla topologia forte di $\mathcal{L}(V)$.*

Se V è uno spazio di Hilbert e $\pi(x)$ è un operatore unitario per ogni $x \in G$, la rappresentazione π si dice unitaria.

La condizione di continuità imposta su π consiste nel richiedere che per ogni $v \in V$ l'applicazione $x \longmapsto \pi(x)v$ sia continua da G in V. Essa implica la continuità congiunta in x e v.

Lemma 1.1. *Sia π una rappresentazione di G in V. L'applicazione $F(x,v) = \pi(x)v$ è continua da $G \times V$ in V.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in G$ e sia U un intorno compatto di x_0. Per ogni $v \in V$,

$$\sup_{x \in U} \|\pi(x)v\| < \infty \ .$$

Per il Teorema di Banach-Steinhaus, esiste una costante C tale che $\|\pi(x)\| \le C$ per ogni $x \in U$.

Fissiamo ora anche $v_0 \in V$. Dato $\varepsilon > 0$, sia $U' \subset U$ un intorno di x_0 tale che $\big\|\pi(x)v_0 - \pi(x_0)v_0\big\| < \varepsilon$ per $x \in U'$. Allora, se $x \in U'$,

$$\big\|\pi(x)v - \pi(x_0)v_0\big\| \le \big\|\pi(x)v - \pi(x)v_0\big\| + \big\|\pi(x)v_0 - \pi(x_0)v_0\big\| < C\|v - v_0\| + \varepsilon \ ,$$

da cui segue la tesi. $\square$

Per rappresentazioni unitarie, è sufficiente avere la continuità di π rispetto alla topologia debole per avere automaticamente la continuità forte.

Lemma 1.2. *Sia H uno spazio di Hilbert, e sia π un omomorfismo di G in $\mathcal{L}(H)$ tale che per ogni $u, v \in H$ l'applicazione $x \longmapsto \langle \pi(x)u, v\rangle$ sia continua da G in $\mathbb{C}$. Allora π è una rappresentazione.*

Dimostrazione. Basta dimostrare la continuità forte di π in $x_0 = e$. Sia $v \in H$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste un intorno U di e tale che $\left|\langle \pi(x)v, v\rangle - \langle v, v\rangle\right| < \varepsilon$ per ogni $x \in U$. In particolare, se $x \in U$, $\|v\|^2 - \Re\mathrm{e}\langle \pi(x)v, v\rangle < \varepsilon$. Essendo anche $\left\|\pi(x)v\right\| = \|v\|$, si ha

$$\left\|\pi(x)v - v\right\|^2 = \left\|\pi(x)v\right\|^2 + \|v\|^2 - 2\Re\mathrm{e}\langle \pi(x)v, v\rangle < 2\varepsilon \ . \qquad \square$$

Dati due elementi $u, v \in H$, la funzione continua $x \mapsto \langle \pi(x)u, v\rangle$ di G in $\mathbb{C}$ si chiama un *coefficiente della rappresentazione* π; se $u = v$ essa si chiama un *coefficiente diagonale*. La terminologia proviene dal caso finito dimensionale, e dalla abituale rappresentazione di operatori lineari attraverso matrici.

Se lo spazio X su cui agisce la rappresentazione π ha dimensione $d \leq \infty$, si dice che π ha dimensione d.

Definizione. *Un sottospazio chiuso Y di X si dice* π-invariante *(o semplicemente invariante) se $\pi(x)Y \subseteq Y$ per ogni $x \in G$.*

Una rappresentazione π di G su X si dice irriducibile *se gli unici sottospazi invarianti di X sono $\{0\}$ e X stesso.*

Se Y è un sottospazio π-invariante, si ottiene una rappresentazione di G su Y restringendo a Y ciascuno degli operatori $\pi(x)$. Si parla in tal caso di *sottorappresentazione* della rappresentazione data.

Lemma 1.3. *Sia π una rappresentazione unitaria di G su uno spazio di Hilbert H. Se $Y \subset H$ è un sottospazio invariante, anche $Y^{\perp}$ è invariante.*

Dimostrazione. Sia $u \in Y^{\perp}$. Per ogni $x \in G$ e ogni $v \in Y$ si ha

$$\langle \pi(x)u, v\rangle = \langle u, \pi(x)^* v\rangle = \langle u, \pi(x)^{-1} v\rangle = \langle u, \pi(x^{-1})v\rangle = 0 \ ,$$

per cui $\pi(x)u \in Y^{\perp}$. $\square$

Per rappresentazioni non unitarie, non è detto che ogni sottospazio invariante abbia un complementare che sia invariante. Si consideri per esempio la rappresentazione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}^2$ data da

$$\pi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Si verifica facilmente che il sottospazio Y generato da ${}^t(1,0)$ è l'unico sottospazio invariante proprio non banale.

Definizione. *Sia π una rappresentazione di G su X. Un vettore $v \in X$ si dice* ciclico *se il sottospazio generato da $\{\pi(x)v : x \in G\}$ è denso in X.*

Lemma 1.4. *Una rappresentazione π su X è irriducibile se e solo se ogni elemento non nullo di X è ciclico.*

Dimostrazione. Dato un vettore $v \in X$, sia Y la chiusura del sottospazio generato da $\{\pi(x)v : x \in G\}$. Allora Y è invariante. Quindi, se π è irriducibile, ogni $v \neq 0$ è ciclico.

Viceversa, se Y è un sottospazio proprio non banale invariante, e $v \in Y$ è non nullo, il sottospazio generato da $\{\pi(x)v : x \in G\}$ è contenuto in Y. Quindi v non è ciclico. $\square$

Da questo momento in poi consideriamo solo rappresentazioni unitarie su spazi di Hilbert.

Definizione. *Siano π_1, π_2 due rappresentazioni unitarie di G su H_1, H_2 rispettivamente. Un operatore $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ si dice un* operatore di intrallacciamento *da π_1 a π_2 se il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{\pi_1(x)} & H_1 \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A} \\ H_2 & \xrightarrow{\pi_2(x)} & H_2 \end{array} \tag{1.1}$$

è commutativo per ogni $x \in G$, ossia se vale l'identità $A\pi_1(x) = \pi_2(x)A$.

Se esiste un operatore di intrallacciamento che sia unitario, le due rappresentazioni si dicono unitariamente equivalenti*, o semplicemente* equivalenti[12]*.*

In altri termini, due rappresentazioni equivalenti si ottengono l'una dall'altra per coniugazione con un operatore unitario.

Indichiamo con $\mathcal{I}(\pi_1, \pi_2)$ lo spazio degli operatori di intrallacciamento da π_1 a π_2. Se $\pi_1 = \pi_2 = \pi$, $I(\pi, \pi)$ è una C^*-sottoalgebra di $\mathcal{L}(H)$. Essa consiste degli operatori che commutano con ogni $\pi(x)$.

Teorema 1.5 (Lemma di Schur). *Una rappresentazione π è irriducibile se e solo se $\mathcal{I}(\pi, \pi)$ è costituita dai soli multipli scalari dell'identità.*

Siano π_1 e π_2 due rappresentazioni irriducibili. Se esse sono equivalenti, e $U \in \mathcal{I}(\pi_1, \pi_2)$ è un particolare operatore unitario di intrallacciamento, allora $\mathcal{I}(\pi_1, \pi_2) = \mathbb{C}U$. Se π_1 e π_2 non sono equivalenti, $\mathcal{I}(\pi_1, \pi_2) = \{0\}$.

Dimostrazione. Se π è riducibile, sia Y un sottospazio invariante proprio non banale di H. Se P è il proiettore ortogonale di H su Y, allora, dato $v \in H$, si ha $\pi(x)Pv \in Y$ e $\pi(x)(v - Pv) \in Y^\perp$ per il Lemma 1.3. Quindi

$$P\pi(x)v = P\pi(x)Pv + P\pi(x)(v - Pv) = \pi(x)Pv \ ,$$

da cui $P \in \mathcal{I}(\pi, \pi)$. Quindi $\mathcal{I}(\pi, \pi)$ contiene operatori che non sono multipli scalari dell'identità.

[12] Questa semplificazione del linguaggio ci è comoda, ma non è del tutto corretta. Si dice infatti che due rappresentazioni tra generici spazi di Banach sono equivalenti se esiste un operatore A *invertibile* per cui il diagramma (1.1) sia commutativo. Per rappresentazioni su spazi di Hilbert occorrerebbe quindi distinguere tra le nozioni di "equivalenza" e di "equivalenza unitaria".

Viceversa, supponiamo che $\mathcal{I}(\pi,\pi)$ contenga un operatore $A \neq cI$. Esso contiene allora anche $A + A^*$ e $i(A - A^*)$, che sono autoaggiunti. Almeno uno dei due, che chiameremo B, non è un multiplo scalare dell'identità.

Per il Teorema spettrale (Corollario 5.6 del Capitolo I), lo spettro $\sigma(B)$ di B contiene più di un punto, perché altrimenti avremmo $B = \int_{\sigma(B)} \lambda\, dE(\lambda) = \lambda_0 I$, contro l'ipotesi. Esistono allora due aperti disgiunti non vuoti $\omega_1, \omega_2 \subset \sigma(B)$. Per il Lemma 5.3 (5), i corrispondenti proiettori spettrali $E(\omega_j)$ sono diversi da 0 e $E(\omega_1)E(\omega_2) = 0$. In particolare $P = E(\omega_1)$ è un proiettore ortogonale non banale.

Sempre per il Teorema spettrale, il fatto che $\pi(x)$ commuta con B implica che $\pi(x)$ commuta anche con P. Se $Y = PH$ e $v \in Y$,

$$\pi(x)v = \pi(x)Pv = P\pi(x)v \ ,$$

per cui $\pi(x)v \in Y$. Quindi π ammette un sottospazio invariante proprio non banale.

Siano ora π_1, π_2 irriducibili e tra loro equivalenti. Sia U unitario in $\mathcal{I}(\pi_1, \pi_2)$. Se $A \in \mathcal{I}(\pi_1, \pi_2)$, allora $U^{-1}A \in \mathcal{I}(\pi_1, \pi_1)$. Per la prima parte della dimostrazione, $U^{-1}A = cI$, da cui $A = cU$.

Se π_1, π_2 sono irriducibili ma non equivalenti, sia $A \in \mathcal{I}(\pi_1, \pi_2)$. Allora $A^* \in \mathcal{I}(\pi_2, \pi_1)$, in quanto

$$A^*\pi_2(x) = \big(\pi_2(x^{-1})A\big)^* = \big(A\pi_1(x^{-1})\big)^* = \pi_1(x)A^* \ ,$$

per ogni $x \in G$. Ma allora $A^*A \in \mathcal{I}(\pi_1, \pi_1)$ e $AA^* \in \mathcal{I}(\pi_2, \pi_2)$.

Per la prima parte della dimostrazione, $A^*A = c_1 I_{H_1}$ e $AA^* = c_2 I_{H_2}$. Deve essere $c_1 = c_2 = c \geq 0$, perché A^*A e AA^* sono entrambi semidefiniti positivi e $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$. Se fosse $c > 0$, allora $U = c^{-\frac{1}{2}}A$ sarebbe unitario, ma questo è assurdo perché π_1 e π_2 non sono equivalenti. Quindi $c = 0$, da cui $A = 0$. □

Corollario 1.6. *Sia G abeliano. Le rappresentazioni unitarie irriducibili di G hanno dimensione 1 e, a meno di equivalenza, sono in corrispondenza biunivoca con i caratteri di G.*

Dimostrazione. Sia π una rappresentazione unitaria irriducibile di G su uno spazio di Hilbert H. Poiché G è abeliano, dato $x \in G$, l'operatore $\pi(x)$ commuta con $\pi(y)$ per ogni $y \in G$. Per il Lemma di Schur, $\pi(x) = \gamma(x)I$, con $\gamma(x) \in \mathbb{C}$. Se fosse $\dim H > 1$, ogni sottospazio di dimensione 1 sarebbe invariante. Quindi $\dim H = 1$.

Essendo π unitaria, $|\gamma(x)| = 1$. Fissato $v \in H$ non nullo, l'applicazione $x \mapsto \pi(x)v$ è continua, per cui γ è continua. Poiché $\pi(x + y) = \pi(x)\pi(y)$, γ è un carattere.

Siano ora π_1, π_2 due rappresentazioni di dimensione 1 su due spazi di Hilbert H_1 e H_2, e siano γ_1, γ_2 i caratteri corrispondenti. Se $\gamma_1 = \gamma_2$, basta fissare $v_j \in H_j$ di norma 1, per $j = 1, 2$, e porre $Uv_1 = v_2$ per avere un operatore unitario $U \in \mathcal{I}(\pi_1, \pi_2)$.

Se invece γ_1 e γ_2 sono distinti, sia $A \in \mathcal{I}(\pi_1, \pi_2)$. Allora $A\pi_1(x) = \gamma_1(x)A$, mentre $\pi_2(x)A = \gamma_2(x)A$. Per avere uguaglianza per ogni x, deve essere $A = 0$. Quindi π_1 e π_2 non sono equivalenti. □

Esempi.

(1.a) Sia $G = U(n)$ il *gruppo unitario di ordine* n, costituito dalle matrici $n \times n$ tali che $UU^* = I$. Sia π la rappresentazione unitaria di G su $H = \mathbb{C}^n$ data dal prodotto matrice per vettore

$$\pi(g)v = gv \ .$$

Siano $u, v \in \mathbb{C}^n$ con $\|u\| = \|v\| = 1$. Se $\{u_1, \dots, u_n\}$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono basi ortonormali di $\mathbb{C}^n$ con $u_1 = u$ e $v_1 = v$, l'applicazione lineare T tale che $Tu_j = v_j$ per ogni j è unitaria. Se g è la matrice che rappresenta T nella base canonica, $gu = v$.

Questo implica che Y un sottospazio proprio non banale non può essere invariante. Dunque π è irriducibile.

Il Lemma di Schur implica che ogni applicazione $A \in \mathcal{I}(\pi, \pi)$ è un multiplo scalare dell'identità. Da questo segue che *il centro di G è costituito dalle matrici λI con $|\lambda| = 1$.*

Consideriamo ora la rappresentazione

$$\tilde{\pi}(g)v = \bar{g}v \ ,$$

sempre di G su $\mathbb{C}^n$. Sarebbe sbagliato concludere che π e $\tilde{\pi}$ sono equivalenti sulla base del fatto che l'operatore $Uv = \bar{v}$ soddisfa la condizione $U\pi(g) = \tilde{\pi}(g)U$: infatti U non è lineare, ma antilineare.

In realtà le due rappresentazioni non sono equivalenti. Si prenda ad esempio una matrice $g \in U(n)$ diagonale con coefficienti $e^{i\theta_j}$ sulla diagonale principale, $j = 1, \dots, n$. Se $A \in \mathcal{I}(\pi, \tilde{\pi})$, si ha

$$A\pi(g)e_j = Age_j = e^{i\theta_j} Ae_j = \tilde{\pi}(g)Ae_j = \bar{g}Ae_j \ .$$

Se $Ae_j \neq 0$, segue che $\bar{g}$ ammette $e^{i\theta_j}$ come autovalore, e dunque g ammette $e^{-i\theta_j}$ come autovalore. Scegliendo g diagonale in modo che nessuna coppia $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$ compaia sulla diagonale, si vede che deve necessariamente essere $A = 0$.

(1.b) Sia sempre $G = U(n)$, sia H lo spazio delle matrici $n \times n$, e sia σ la rappresentazione di G su H data da

$$\sigma(g)A = gAg^{-1}$$

(si verifichi che questa è effettivamente una rappresentazione). Su H introduciamo il prodotto scalare *di Hilbert-Schmidt*

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^*) \ .$$

Allora

$$\langle \sigma(g)A, B \rangle = \operatorname{tr}(gAg^{-1}B^*) = \operatorname{tr}(Ag^{-1}B^*g) = \operatorname{tr}\big(A(g^{-1}Bg)^*\big) = \langle A, \sigma(g^{-1})B \rangle \ ,$$

per cui σ è unitaria. Si vede facilmente che il sottospazio $V = \mathbb{C}I$ è invariante, per cui σ è riducibile.

(1.c) Sia G un gruppo localmente compatto con una misura di Haar sinistra m_ℓ fissata, e sia $H = L^2(G, m_\ell)$. Si chiama *rappresentazione regolare sinistra di G* la rappresentazione L su $L^2(G, m_\ell)$ data da $\big(L(g)f\big)(x) = f(g^{-1}x)$.

La *rappresentazione regolare destra* R su $L^2(G, m_r)$ si definisce in modo analogo (v. Capitolo II, paragrafo 1).

Le due rappresentazioni sono equivalenti. Per verificare ciò, basta considerare il caso in cui $dm_r(x) = \Delta(x)^{-1}\, dm_\ell(x)$. Allora l'operatore U dato da $(Uf)(x) = f(x^{-1})$ è unitario e in $\mathcal{I}(L, R)$.

(1.d) Sia ora G un gruppo abeliano localmente compatto. La rappresentazione regolare L è equivalente alla rappresentazione π su $L^2(\hat{G})$ data da

$$\big(\pi(x)f\big)(\gamma) = \overline{\gamma(x)} f(\gamma) \ .$$

Un operatore di intrallacciamento è dato dalla trasformata di Fourier.

(1.e) Sia G abeliano compatto, e sia L la rappresentazione regolare[13] di G su $L^2(G)$. Dato un carattere $\gamma \in \hat{G}$, il sottospazio unidimensionale $\mathbb{C}\gamma$ è invariante. Si ha quindi la decomposizione

$$L^2(G) = \sum_{\gamma \in \hat{G}}^{\oplus} \mathbb{C}\gamma \ , \tag{1.2}$$

in somma diretta di sottospazi invarianti minimali. La (1.2) è in realtà una formulazione equivalente del Corollario 4.7 del Capitolo III.

Se G è abeliano, ma non compatto, non si ha una simile decomposizione. In luogo di L, si consideri la rappresentazione equivalente π dell'Esempio (1.d). Dato un qualunque Boreliano $E \subset \hat{G}$ con misura di Haar positiva, sia

$$Y_E = \{f \in L^2(\hat{G}) : \operatorname{supp} f \subseteq E\} \ .$$

Chiaramente Y_E è un sottospazio π-invariante[14].

Si lascia da dimostrare per esercizio che, essendo la topologia di $\hat{G}$ non discreta, si può costruire una successione E_j di intorni dell'elemento neurto di $\hat{G}$ tali che $E_{j+1} \subset E_j$ e $0 < m(E_j) < 2^{-j}$ per ogni j. I corrispondenti sottospazi invarianti V_{E_j} sono allora inclusi l'uno nell'altro e la loro intersezione è banale.

2. Rappresentazioni di $L^1(G)$

Definizione. *Sia A un'algebra di Banach con involuzione, e sia H uno spazio di Hilbert. Si chiama* *-rappresentazione *di A su H uno *-omomorfismo continuo di A in $\mathcal{L}(H)$. Una *-rappresentazione π si dice* non degenere *se l'unico vettore $v \in H$ tale che $\pi(a)v = 0$ per ogni $a \in A$ è $v = 0$.*

Sia ora π una rappresentazione unitaria di un gruppo localmente compatto G su uno spazio di Hilbert H. Supporremo per semplicità G unimodulare, anche se molti risultati si estendono al caso non unimodulare con opportune modifiche nelle dimostrazioni o negli enunciati.

[13] Non ha senso distinguere tra destra e sinistra.

[14] Si può dimostrare che ogni sottospazio π-invariante ha questa forma.

Fissiamo una misura di Haar su G. Data $f \in L^1(G)$, poniamo

$$\pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)\,dx \,. \tag{2.1}$$

L'integrale (2.1) converge nella topologia forte di $\mathcal{L}(H)$, in quanto, per ogni $v \in H$, la funzione che applica x in $\pi(x)v$ è continua. Inoltre

$$\|\pi(f)v\| \le \int_G |f(x)|\,\|\pi(x)v\|\,dx = \|v\|\|f\|_1 \,,$$

da cui

$$\|\pi(f)\| \le \|f\|_1 \,. \tag{2.2}$$

Il risultato seguente è un analogo non commutativo del Lemma 1.1 del Capitolo III, che stabilisce la corrispondenza biunivoca tra i caratteri di un gruppo G abeliano localmente compatto e i caratteri di $L^1(G)$.

Proposizione 2.1. *Ogni rappresentazione unitaria π di G su H induce, attraverso la* (2.1)*, una *-rappresentazione, ancora indicata con π, da $L^1(G)$ in $\mathcal{L}(H)$ non degenere.*

*Viceversa, se π è una *-rappresentazione non degenere da $L^1(G)$ in $\mathcal{L}(H)$, esiste una e una sola rappresentazione unitaria, che pure indichiamo con π, di G su H per cui valga la* (2.1)*.*

Dimostrazione. Sia π una rappresentazione unitaria di G su H. Chiaramente l'applicazione $f \mapsto \pi(f)$ data dalla (2.1) è lineare. Inoltre

$$\begin{aligned}
\pi(f * g)v &= \iint_{G\times G} f(y)g(y^{-1}x)\pi(x)v\,dy\,dx \\
&= \iint_{G\times G} f(y)g(z)\pi(yz)\,dy\,dz \\
&= \iint_{G\times G} f(y)g(z)\pi(y)\pi(z)\,dy\,dz \\
&= \pi(f)\pi(g)v \,.
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'involuzione (v. Corollario 4.4 del Capitolo II), si ha

$$\begin{aligned}
\langle \pi(f^*)u, v\rangle &= \int_G \overline{f(x^{-1})}\langle \pi(x)u, v\rangle\,dx \\
&= \overline{\int_G f(x)\overline{\langle \pi(x^{-1})u, v\rangle}\,dx} \\
&= \overline{\int_G f(x)\langle v, \pi(x)^*u\rangle\,dx} \\
&= \overline{\int_G f(x)\langle \pi(x)v, u\rangle\,dx} \\
&= \overline{\langle \pi(f)v, u\rangle} \\
&= \langle \pi(f)^*u, v\rangle \,.
\end{aligned}$$

Quindi π è uno *-omomorfismo. Esso è continuo per la (2.2). Per vedere che è non degenere, sia v tale che $\pi(f)v = 0$ per ogni $f \in L^1(G)$. Allora, se $\{\varphi_i\}$ è un'identità approssimata,

$$v = \pi(e)v = \lim_i \pi(\varphi_i)v = 0 \ .$$

Viceversa, sia π una *-rappresentazione non degenere di $L^1(G)$ in $\mathcal{L}(H)$. Per poter procedere con la dimostrazione, premettiamo un paio di considerazioni.

La prima considerazione riguarda il comportamento di π rispetto alla convoluzione. Siano $f \in L^1(G)$ e $g \in C_c(G)$. La convoluzione $g * f$ può essere interpretata come l'integrale di Bochner su G della funzione continua $F(y) = g(y)L_y f$ a valori in $L^1(G)$:

$$g * f(x) = \int_G g(y)f(y^{-1}x)\,dy = \int_G g(y)(L_y f)(x)\,dy \ .$$

Approssimando in $L^1(G)$ l'integrale con somme di Riemann, e usando la linearità e la continuità di π, si ottiene la seguente identità:

$$\pi(g * f) = \int_G g(y)\pi(L_y f)\,dy \ . \tag{2.3}$$

La seconda considerazione riguarda la densità in H del sottospazio generato dagli elementi $\pi(f)v$ al variare di $f \in L^1(G)$ e di $v \in H$. Sia

$$H_0 = \text{rm span}\,\{\pi(f)v : f \in L^1(G)\,,\, v \in H\} \subseteq H \ .$$

Se $u \perp H_0$, allora $\langle u, \pi(f)v\rangle = 0$ per ogni f e ogni v. Ma allora $\langle \pi(f^*)u, v\rangle = 0$, da cui $\pi(f^*)u = 0$ per ogni f. Poiché π è non degenere, $u = 0$. Dunque H_0 è denso in H.

Sia ora $u = \sum_j \pi(f_j)v_j \in H_0$. Definiamo

$$\tilde\pi(x)u = \sum_j \pi(L_x f_j)v_j \ . \tag{2.4}$$

Mostriamo che questa è una buona definizione. Dobbiamo far vedere che, se

$$\sum_j \pi(f_j)v_j = \sum_k \pi(f'_k)v'_k \ ,$$

allora

$$\sum_j \pi(L_x f_j)v_j = \sum_k \pi(L_x f'_k)v'_k \ .$$

Sia $\{\varphi_i\}$ un'identità approssimata con $\varphi_i \in C_c(G)$. Allora

$$\lim_i (L_x\varphi_i) * f_j = \lim_i \delta_x * \varphi_i * f_j = \lim_i L_x(\varphi_i * f_j) = L_x f$$

in $L^1(G)$, e analogamente per le f'_k. Per ogni i,

$$\sum_j \pi\big(L_x(\varphi_i * f_j)\big)v_j = \sum_j \pi(L_x\varphi_i)\pi(f_j)v_j = \pi(L_x\varphi_i)\pi(f'_k)v'_k = \pi\big(L_x(\varphi_i * f'_k)\big)v'_k \ .$$

Passando al limite rispetto a i, si ottiene l'uguaglianza richiesta.

La (2.4) definisce dunque un'applicazione lineare $\tilde{\pi}(x)$ da H_0 in sé. Per la (2.4), essa ha la proprietà che

$$\tilde{\pi}(x)\pi(f)v = \pi(L_x f)v \ ,$$

per ogni $v \in H$ e ogni $f \in L^1(G)$.

Chiaramente $\tilde{\pi}(e) = I$ e $\tilde{\pi}(xy) = \tilde{\pi}(x)\tilde{\pi}(y)$. Inoltre,dati

$$u = \sum_j \pi(f_j)v_j \ , \qquad u' = \sum_k \pi(f'_k)v'_k$$

in H_0,

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\pi}(x)u, u' \rangle &= \sum_{j,k} \langle \pi(L_x f_j)v_j, \pi(f'_k)v'_k \rangle \\
&= \sum_{j,k} \lim_i \langle \pi\big((L_x\varphi_i) * f_j\big)v_j, \pi(f'_k)v'_k \rangle \\
&= \sum_{j,k} \lim_i \langle \pi(f_j)v_j, \pi(L_x\varphi_i)^* \pi(f'_k)v'_k \rangle \\
&= \sum_{j,k} \lim_i \langle \pi(f_j)v_j, \pi\big((L_x\varphi_i)^* * f'_k\big)v'_k \rangle \\
&= \sum_{j,k} \lim_i \langle \pi(f_j)v_j, \pi\big((R_x\varphi_i^*) * f'_k\big)v'_k \rangle \ .
\end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned}
(R_x\varphi_i^*) * f' &= \varphi_i^* * \delta_{x^{-1}} * f' \\
&= \varphi_i^* * (L_{x^{-1}} f') \ ,
\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\pi}(x)u, u' \rangle &= \sum_{j,k} \lim_i \langle \pi(f_j)v_j, \pi\big(\varphi_i^* * (L_{x^{-1}} f'_k)\big)v'_k \rangle \\
&= \langle \pi(f_j)v_j, \pi(L_{x^{-1}} f'_k)v'_k \rangle \\
&= \langle u, \tilde{\pi}(x^{-1})u' \rangle \ .
\end{aligned}$$

Quindi $\tilde{\pi}(x)^*\tilde{\pi}(x) = \tilde{\pi}(x)\tilde{\pi}(x)^* = I$ su H_0. In particolare, $\|\tilde{\pi}(x)\| = 1$ e $\tilde{\pi}(x)$ si estende per continuità a un operatore unitario, che chiamiamo $\pi(x)$, su H. Per la (2.4), $\tilde{\pi}(x)u$ è funzione continua di x per $u \in H_0$. Un semplice argomento di approssimazione mostra che ciò vale per un generico $u \in H$.

Infine, se $f \in C_c(G)$ e $u = \pi(g)v \in H_0$, per la (2.3)

$$\begin{aligned}
\pi(f)u &= \pi(f * g)v \\
&= \int_G f(x)\pi(L_x g)v\, dx \\
&= \int_G f(x)\pi(x)u\, dx \ .
\end{aligned}$$

Per densità, la (2.1) vale per ogni $u \in H$, e quindi anche per ogni $f \in L^1(G)$. $\square$

3. Rappresentazioni unitarie e funzioni di tipo positivo

La nozione di funzione di tipo positivo è stata data per gruppi abeliani nel paragrafo 3 del Capitolo III. La definizione si estende a gruppi non abeliani imponendo che φ sia continua e che, per ogni scelta dei punti $x_1, \dots, x_n \in G$ e dei numeri $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$, si abbia

$$\sum_{j,k=1}^{n} \varphi(x_k^{-1}x_j)\xi_j\overline{\xi_k} \geq 0 \ . \tag{3.1}$$

Analogamente a quanto visto nella dimostrazione del Teorema 3.2 del Capitolo III, una funzione di tipo positivo è limitata e $\|\varphi\|_\infty = \varphi(e)$. Vale inoltre l'identità

$$\varphi(x^{-1}) = \overline{\varphi(x)} \ .$$

Come per i gruppi abeliani, la (3.1) equivale alla condizione

$$\int_{G\times G} \varphi(y^{-1}x)f(x)\overline{f(y)}\, dx\, dy \geq 0 \ , \tag{3.2}$$

per ogni $f \in C_c(G)$. L'integrale nella (3.2) è fatto rispetto a una misura di Haar destra o sinistra. Nel seguito supporremo G unimodulare.

In questo paragrafo vogliamo analizzare le relazioni tra rappresentazioni unitarie e funzioni di tipo positivo.

Lemma 3.1. *Sia π una rappresentazione unitaria di un gruppo localmente compatto G su H e sia $v \in H$. Il coefficiente diagonale $\varphi(x) = \langle \pi(x)v, v\rangle$ è di tipo positivo.*

Dimostrazione. Chiaramente φ è continua. dati $x_1, \dots, x_n \in G$ e $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n} \varphi(x_k^{-1}x_j)\xi_j\overline{\xi_k} &= \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j\overline{\xi_k}\langle \pi(x_k)^{-1}\pi(x_j)v, v\rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j\overline{\xi_k}\langle \pi(x_j)v, \pi(x_k)v\rangle \\ &= \Big\langle \sum_j \xi_j\pi(x_j)v, \sum_k \xi_k\pi(x_k)v \Big\rangle \\ &\geq 0 \ . \qquad \square\end{aligned}$$

Come prima conseguenza, otteniamo la seguente estensione della Proposizione 3.1 (2) del Capitolo III.

Corollario 3.2. *Se $h \in L^2(G)$, la funzione $\varphi = h * h^*$ è di tipo positivo.*

Dimostrazione. Sia L la rappresentazione regolare sinistra di G su $L^2(G)$ (v. Esempio 1.c). Allora

$$\langle L_x\bar{h}, \bar{h}\rangle = \int_G \overline{h(x^{-1}y)}h(y)\, dy = \int_G h(y)h^*(y^{-1}x)\, dy = h * h^*(x) \ . \qquad \square$$

Il Lemma 3.1 ammette un inverso. Nell'enunciato che segue inglobiamo anche un importante teorema di continuità per funzioni limitate che soddisfino la (3.2).

Teorema 3.3. *Sia φ una funzione in $L^\infty(G) \setminus \{0\}$ che soddisfi la (3.2) per ogni $f \in C_c(G)$. Esistono allora una rappresentazione unitaria π di G su uno spazio di Hilbert H e un elemento $v \in H$ tali che $\varphi(x) = \langle \pi(x)v, v\rangle$ quasi ovunque. In particolare, φ coincide quasi ovunque con una funzione continua di tipo positivo.*

Dimostrazione. Su $C_c(G)$ introduciamo la forma sesquilineare

$$\langle f, g\rangle_\varphi = \int_{G\times G} f(x)\overline{g(y)}\varphi(y^{-1}x)\,dx\,dy \ . \tag{3.3}$$

Per la (3.2) essa è semidefinita positiva. Essendo $\varphi(x^{-1}) = \overline{\varphi(x)}$, essa è Hermitiana.

Indichiamo con $\{\psi_i\}$ un'identità approssimata in $C_c(G)$. Allora, se $\check\varphi(x) = \varphi(x^{-1})$,

$$\begin{aligned}\lim_i \langle f, \psi_i\rangle_\varphi &= \lim_i \int_{G\times G} f(x)\overline{\psi_i(y)}\varphi(y^{-1}x)\,dx\,dy\\ &= \lim_i \int_G (f * \check\varphi)(y)\overline{\psi_i(y)}\,dy\\ &= f*\check\varphi(e)\\ &= \int_G f(x)\varphi(x)\,dx\ .\end{aligned} \tag{3.4}$$

Quindi la forma non è identicamente nulla. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\big|\langle f, g\rangle_\varphi\big|^2 \le \langle f, f\rangle_\varphi \langle g, g\rangle_\varphi \ . \tag{3.5}$$

Quindi $N = \{f : \langle f, f\rangle_\varphi = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $C_c(G)$. Il quoziente $C_c(G)/N$ non è banale e la forma (3.3) induce su di esso una struttura di spazio pre-Hilbertiano. Indichiamo con H il suo completamento e con $\langle\ ,\ \rangle$ il prodotto scalare su H.

Dati $x \in G$ e $f, g \in C_c(G)$, si ha

$$\begin{aligned}\langle L_x f, L_x g\rangle_\varphi &= \int_{G\times G} f(x^{-1}y)\overline{g(x^{-1}z)}\varphi(z^{-1}y)\,dy\,dz\\ &= \int_{G\times G} f(y)\overline{g(z)}\varphi(z^{-1}y)\,dy\,dz\\ &= \langle f, g\rangle_\varphi\ .\end{aligned}$$

In particolare, se $f \in N$, anche $L_x f \in N$, per cui L_x passa al quoziente, dando luogo a un operatore unitario su $C_c(G)/N$. Indichiamo con $\pi(x)$ l'estensione continua di tale operatore ad H. Allora π è una rappresentazione unitaria di G su H.

Per la (3.4),

$$\begin{aligned}\left|\int_G f(x)\varphi(x)\,dx\right|^2 &\le \langle f, f\rangle_\varphi \sup_i \langle \psi_i, \psi_i\rangle_\varphi\\ &\le \langle f, f\rangle_\varphi \sup_i \|\psi_i\|_1^2 \|\varphi\|_\infty\\ &\le C\langle f, f\rangle_\varphi\ .\end{aligned}$$

Quindi il funzionale che applica f in $\int_G f(x)\varphi(x)\,dx$ passa al quoziente modulo N e induce un funzionale continuo su H. Esiste allora un elemento $v \in H$ non nullo e tale che, indicando con $\tilde{f}$ la proiezione di f su $C_c(G)/N \subset H$,

$$\langle \tilde{f}, v\rangle = \int_G f(x)\varphi(x)\,dx \ .$$

Per la (3.4), v è il limite debole in H dei $\tilde{\psi}_i$. Quindi

$$\begin{aligned}\langle \pi(x)v, \tilde{f}\rangle &= \langle v, \pi(x^{-1})\tilde{f}\rangle \\ &= \lim_i \langle \psi_i, L_{x^{-1}} f\rangle_\varphi \\ &= \lim_i \int_{G\times G} \psi_i(y)\overline{f(xz)}\varphi(z^{-1}y)\,dy\,dz \\ &= \lim_i \int_G \psi_i(y)\Big(\int_G \overline{f(xz)}\varphi(z^{-1}y)\,dz\Big)\,dy \\ &= \int_G \overline{f(xz)}\varphi(z^{-1})\,dz \ .\end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned}\langle \pi(x)v, v\rangle &= \lim_i \langle \pi(x)v, \tilde{\psi}_i\rangle \\ &= \lim_i \int_G \overline{\psi_i(xz)}\varphi(z^{-1})\,dz \\ &= \lim_i (\overline{\psi_i} * \varphi)(x) \ .\end{aligned}$$

Nella topologia debole* di $L^\infty(G)$, $\lim_i \overline{\psi_i} * \varphi = \varphi$. Ma essendo $\big|(\overline{\psi_i} * \varphi)(x)\big| \leq C\|\varphi\|_\infty$, il criterio di convergenza dominata implica che per ogni $h \in L^1(G)$

$$\lim_i \int_G h(x)(\overline{\psi_i} * \varphi)(x)\,dx = \int_G h(x)\langle \pi(x)v, v\rangle\,dx \ .$$

Quindi $\varphi(x) = \langle \pi(x)v, v\rangle$ quasi ovunque. $\square$

Data una funzione di tipo positivo φ, ci si può chiedere se è unica la rappresentazione di cui φ è coefficiente diagonale. Semplici considerazioni mostrano che questo non può essere vero. Infatti se π e π' sono due rappresentazioni equivalenti, esse hanno gli stessi coefficienti: se U è un operatore unitario di intrallacciamento tra di esse, allora

$$\langle \pi(x)u, v\rangle = \langle U^{-1}\pi'(x)Uu, v\rangle = \langle \pi'(x)Uu, Uv\rangle \ . \tag{3.5}$$

Occorre quindi domandarsi se la rappresentazione è unica *a meno di equivalenza.* Ma anche così la risposta è negativa. Sia $\varphi(x) = \langle \pi(x)v_0, v_0\rangle$, con π rappresentazione unitaria su uno spazio di Hilbert H. Sia $\tilde{H} = H \oplus H'$, dove H' è un altro spazio di Hilbert, e sia $\tilde{\pi}(x)(v + v') = \pi(x)v$, se $v \in H$, $v' \in H'$. Allora $\langle \tilde{\pi}(x)(v_0 + 0), v_0 + 0\rangle = \varphi(x)$.

Bisogna quindi imporre una condizione di *minimalità* su H. Richiediamo allora che H sia generato da v, ossia che v sia ciclico.

Teorema 3.4. *Siano π, π' due rappresentazioni unitarie di G su H e H' rispettivamente, e siano $v \in H$, $v' \in H'$ vettori ciclici tali che $\langle \pi(x)v, v\rangle = \langle \pi'(x)v', v'\rangle$ per ogni $x \in G$. Allora π e π' sono equivalenti, ed esiste un operatore unitario di intrallacciamento U da H in H' tale che $Uv = v'$.*

Dimostrazione. Sia H_0 il sottospazio denso di H costituito dalle combinazioni lineari finite dei vettori $\pi(x)v$. Se $w = \sum_j c_j \pi(x_j)v$, definiamo

$$Uw = \sum_j c_j \pi'(x_j)v'.$$

Questa è una buona definizione, perché se $\sum_j c_j\pi(x_j)v = 0$, allora

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_j c_j \pi'(x_j)v' \Big\|^2 &= \sum_{j,k} c_j \overline{c_k} \langle \pi'(x_j)v', \pi'(x_k)v'\rangle \\
&= \sum_{j,k} c_j \overline{c_k} \varphi(x_k^{-1}x_j) \\
&= \sum_{j,k} c_j \overline{c_k} \langle \pi(x_j)v, \pi(x_k)v\rangle \\
&= \Big\| \sum_j c_j \pi(x_j)v \Big\|^2 \\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

Lo stesso calcolo mostra che U è un'isometria. Poiché v' è ciclico, UH_0 è denso in H', quindi U è unitario. Che U sia un operatore di intrallacciamento è ovvio. □

Consideriamo ora le coppie (π, v), dove π è una rappresentazione unitaria di G su uno spazio di Hilbert H e $v \in H$ ha norma unitaria ed è π-ciclico. Stabiliamo tra tali coppie la relazione di equivalenza per cui $(\pi, v) \sim (\pi', v')$ se esiste un operatore unitario di intrallacciamento U tra π e π' tale che $Uv = v'$. Indichiamo con E l'insieme di tali classi di equivalenza.

Corollario 3.5. *L'applicazione che associa alla classe di equivalenza di (π, v) il coefficiente $\varphi(x) = \langle \pi(x)v, v\rangle$ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra E e l'insieme delle funzioni di tipo positivo su G non identicamente nulle.*

Dimostrazione. L'applicazione è ben definita per la (3.5). Per il Teorema (3.4) essa è iniettiva. Per vedere che è suriettiva, data φ di tipo positivo non identicamente nulla, si costruiscano H, π e v come nel Teorema 3.3. Se H_0 è il sottospazio chiuso di H generato dai vettori $\pi(x)v$ al variare di $x \in G$, la coppia $(\pi_{|H_0}, v)$ è quanto richiesto per concludere la dimostrazione. □

4. Rappresentazioni irriducibili e funzioni di tipo positivo

Per comprendere più a fondo i legami tra rappresentazioni unitarie di G e funzioni di tipo positivo, discutiamo l'irriducibilità della rappresentazione associata a una data funzione di tipo positivo sulla base del Corollario 3.5.

Le funzioni di tipo positivo su G formano un cono convesso in $L^\infty(G)$: se φ_1, φ_2 sono di tipo positivo e $c_1, c_2 \geq 0$, anche $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ è di tipo positivo. Questo segue facilmente dalla (3.1).

Indichiamo con $\mathcal{P}$ tale cono, e sia $\mathcal{P}_0$ il sottoinsieme di $\mathcal{P}$ costituito dalle φ tali che $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Allora $\mathcal{P}_0$ è convesso. Si noti che $\mathcal{P}_0$ coincide con l'insieme delle $\varphi \in \mathcal{P}$ tali che $\varphi(e) \leq 1$.

Nella topologia debole* di $L^\infty(G)$, $\mathcal{P}_0$ è chiuso. Questo segue dal fatto che se una successione generalizzata $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{P}_0$ converge a $\varphi \in L^\infty(G)$, allora φ soddisfa la (3.2) e $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Per il Teorema 3.3, φ è di tipo positivo.

Per il Teorema di Banach-Alaoglu, $\mathcal{P}_0$ è compatto nella topologia debole*. Il Teorema di Krein-Milman implica allora che $\mathcal{P}_0$ è l'inviluppo convesso chiuso dell'insieme dei suoi punti estremali, e di conseguenza ogni funzione di tipo positivo è approssimabile con combinazioni lineari a coefficienti positivi di punti estremali di $\mathcal{P}_0$.

Teorema 4.1. *Gli elementi estremali di $\mathcal{P}_0$ sono $\varphi(x) = 0$ e le funzioni $\varphi(x) = \langle \pi(x)v, v\rangle$, con π unitaria irriducibile e $\|v\| = 1$.*

Dimostrazione. Chiaramente l'origine è estremale, perché se φ e $-\varphi$ sono entrambe di tipo positivo, allora $\varphi = 0$.

Se $\varphi \neq 0$, per il Teorema 3.3 $\varphi(x) = \langle \pi(x)v, v\rangle$, con π unitaria e v ciclico. Poiché $\|\varphi\|_\infty = \varphi(e) = \|v\|^2$, perché φ sia estremale è necessario che $\|v\| = 1$. Supponiamo quindi che tale condizione sia soddisfatta.

Se π è riducibile, siano H_1, H_2 sottospazi chiusi invarianti non banali, con $H_2 = H_1^\perp$. Indichiamo con P_j il proettore ortogonale di H su H_j, e con π_j la restrizione di π a H_j. Decomponiamo v nella somma $v = v_1 + v_2$, con $v_j = P_j v \in H_j$.

Il proiettore P_j è in $\mathcal{I}(\pi, \pi_j)$ (v. la dimostrazione del Teorema 1.5). Inoltre le combinazioni lineari dei vettori $\pi(x)v$, al variare di $x \in G$, sono dense in H. Di consguenza, le combinazioni lineari dei vettori $\pi_j(x)v_j = P_j\pi(x)v$ sono dense in H_j, ossia v_j è π_j-ciclico.

Sia $\varphi_j(x) = \|v_j\|^{-2}\langle \pi_j(x)v_j, v_j\rangle$. Allora $\varphi_j \in \mathcal{P}_0$ e $\varphi = \|v_1\|^2\varphi_1 + \|v_2\|^2\varphi_2$ è combinazione convessa di φ_1 e φ_2.

Se φ fosse estremale, sarebbe $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Ma allora, per il Teorema 3.4, π_1 e π_2 sarebbero equivalenti, ed esisterebbe un operatore di intrallacciamento unitario U da H_1 in H_2 tale che $Uv_1/\|v_1\| = v_2/\|v_2\|$. Posto $c = \|v_2\|/\|v_1\|$, si avrebbe allora, per ogni $x \in G$,

$$\pi(x)v = \pi_1(x)v_1 + \pi_2(x)v_2 = \pi_1(x)v_1 + cU\pi_1(x)v_1 \ ,$$

per cui i vettori $\pi(x)v$, al variare di $x \in G$, sarebbero contenuti nel sottospazio chiuso proprio $H' = \{w + cUw : w \in H_1\}$, contro l'ipotesi che v sia ciclico.

Supponiamo ora π irriducible. Se φ non fosse estremale, sarebbe $\varphi = \alpha\varphi_1 + (1-\alpha)\varphi_2$, con $\varphi_1, \varphi_2 \neq \varphi$ e $0 < \alpha < 1$. Allora necessariamente $\varphi_1(e) = \varphi_2(e) = 1$. Sia $\varphi_j(x) = \langle \pi_j(x)v_j, v_j\rangle$, dove, per $j = 1, 2$, π_j è una rappresentazione unitaria su uno spazio di Hilbert H_j e v_j è un vettore ciclico in H_j di norma unitaria.

Consideriamo allora la rappresentazione $\pi_1 \oplus \pi_2$ di G su $H_1 \oplus H_2$, data da

$$\big(\pi_1 \oplus \pi_2(x)\big)(u, w) = \big(\pi_1(x)u, \pi_2(x)w\big) \ ,$$

per $u \in H_1$, $w \in H_2$. Rispetto al prodotto scalare

$$\big\langle (u, w), (u', w')\big\rangle = \langle u, u'\rangle + \langle w, w'\rangle \ ,$$

su $H_1 \oplus H_2$, $\pi_1 \oplus \pi_2$ è unitaria. Se $u_0 = \alpha^{\frac{1}{2}} v_1$, $w_0 = (1-\alpha)^{\frac{1}{2}} v_2$,

$$\big\langle \big(\pi_1 \oplus \pi_2(x)\big)(u_0, w_0), (u_0, w_0)\big\rangle = \varphi(x) \ .$$

Sia H_0 il sottospazio chiuso di $H_1 \oplus H_2$ generato dai vettori $\big(\pi_1 \oplus \pi_2(x)\big)(u_0, w_0)$ al variare di $x \in G$, e sia π_0 la restrizione di $\pi_1 \oplus \pi_2$ a H_0. Per il Teorema 3.4, π_0 è equivalente a π, in particolare è irriducibile.

Sia P_1 la restrizione ad H_0 della proiezione canonica di $H_1 \oplus H_2$ su H_1. Allora $P_1\pi_0(x) = \pi_1(x)P_1$ per ogni $x \in G$, ossia $P_1 \in \mathcal{I}(\pi_0, \pi_1)$. Per la ciclicità di v_1 rispetto a π_1, P_1 è suriettiva. Se V è un sottospazio chiuso π_1-invariante di H_1, allora $P_1^{-1}V$ è un sottospazio chiuso π_0-invariante di H_0. Questo mostra che P_1 è iniettiva e che π_1 è irriducibile. Per il Lemma di Schur, π_0 e π_1 sono equivalenti e $P_1 = c_1 U_1$ con U_1 unitario.

Ma $P_1(u_0, w_0) = u_0$, per cui $c_1 = \alpha^{\frac{1}{2}}$ e dunque $P_1^* = \alpha P_1^{-1}$. Ma allora

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \alpha^{-1}\langle \pi_1(x)u_0, u_0\rangle \\
&= \alpha^{-1}\big\langle \pi_1(x)P_1(u_0, w_0), u_0\big\rangle \\
&= \alpha^{-1}\big\langle P_1\pi_0(x)(u_0, w_0), u_0\big\rangle \\
&= \big\langle \pi_0(x)(u_0, w_0), P_1^{-1}u_0\big\rangle \\
&= \varphi(x) \ .
\end{aligned}$$

in contrasto con l'ipotesi. □

Esempio.

(4.a) Sia G abeliano. Per il Corollario 1.6, le sue rappresentazioni unitarie irriducibili hanno dimensione 1 e sono in corrispondenza biunivoca, a meno di equivalenza, con i caratteri di G. Se $\gamma \in \hat{G}$, sia π_γ la rappresentazione di G su $\mathbb{C}$ data da $\pi_\gamma(x)z = \gamma(x)z$. Allora

$$\langle \pi_\gamma(x)1, 1\rangle = \gamma(x)$$

è, a meno di coefficienti scalari positivi, l'unica funzione di tipo positivo associata a π_γ.

I punti estremali di $\mathcal{P}_0$ sono dunque l'origine e i caratteri di G. Ogni funzione di tipo positivo è dunque approssimabile nella topologia debole* di $L^\infty(G)$ con combinazioni lineari a coefficienti finiti di caratteri. Questa è in realtà una formulazione equivalente del Teorema di Bochner (Teorema 3.2 del Capitolo III).

Corollario 4.2 (Teorema di Gelfand-Raikov). *Siano x, y due elementi distinti di G. Esiste una rappresentazione unitaria irriducibile π di G tale che $\pi(x) \neq \pi(y)$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che $x = e$. Supponiamo per assurdo che $\pi(y) = \pi(e) = I$ per ogni rappresentazione irriducibile π. Allora sarebbe anche $\pi(xy) = \pi(x)$ per ogni $x \in G$. Questo implicherebbe che $\varphi(xy) = \varphi(x)$ per ogni elemento estremale $\varphi \in \mathcal{P}_0$ e per ogni x. L'uguaglianza $R_y\varphi = \varphi$ varrebbe allora per tutte le φ di un sottoinsieme denso di $\mathcal{P}$. Poiché questa identità è chiusa nella topologia debole* di $L^\infty(G)$, essa varrebbe per ogni $\varphi \in \mathcal{P}$.

Sia ora V un intorno compatto simmetrico di e tale che $y \notin V^2$. Allora $\varphi = \chi_V * \chi_V$ è di tipo positivo, tuttavia $\varphi(e) > 0$ ma $\varphi(y) = 0$, da cui l'assurdo. □

Dal Teorema 4.2 segue anche il seguente teorema di unicità.

Corollario 4.3. *Sia $f \in L^1(G)$ tale che $\pi(f) = 0$ per ogni rappresentazione unitaria irriducibile π di G. Allora $f = 0$.*

Dimostrazione. se $\pi(f) = 0$, anche

$$\pi(L_x f) = \int_G f(x^{-1}y)\pi(y)\,dy = \pi(x)\pi(f) = 0\ .$$

Se φ è un elemento estremale di $\mathcal{P}_0$, $\varphi(x) = \langle \pi(x)v, v\rangle$ con π unitaria irriducibile, si ha allora

$$\varphi * \check{f}(x) \int_G L_x f(y)\varphi(y)\,dy = \langle \pi(L_x f)v, v\rangle = 0\ .$$

Quindi $\varphi * \check{f} = 0$ per ogni φ in un sottoinsieme denso di $\mathcal{P}$, nella topologia debole-* di $L^\infty(G)$. Per densità, l'uguaglianza vale per ogni $\varphi \in \mathcal{P}$.

Sia $\{\psi_i\}$ una identità approssimata con $\psi_i \in L^1(G) \cap L^2(G)$ per ogni i. Allora $\psi_i * \psi_i^* \in \mathcal{P}$, per cui $(\psi_i * \psi_i^*) * \check{f} = 0$. Quindi $\check{f} = 0$. $\square$

5. Verso l'analisi di Fourier non commutativa

Abbiamo visto con il Corollario 4.3 che una funzione $f \in L^1(G)$ è univocamente determinata dalla famiglia di operatori $\pi(f)$ al variare di π tra le rappresentazioni unitarie irriducibili di G. In realtà è sufficiente considerare le *classi di equivalenza* di rappresentazioni unitarie irriducibili, perché se π_1 e π_2 sono equivalenti e $U \in \mathcal{I}(\pi_1, \pi_2)$ è unitario, allora $\pi_2(f) = U\pi_1(f)U^{-1}$, così che in sostanza $\pi_1(f)$ e $\pi_2(f)$ contengono le stesse informazioni.

Si chiama abitualmente *oggetto duale* di G l'insieme $\hat{G}$ delle classi di equivalenza di rappresentazioni unitarie irriducibili di G. Il termine proviene dal caso abeliano, in cui $\hat{G}$ si identifica in modo naturale con il gruppo duale di G. In generale tuttavia, se G non è abeliano, $\hat{G}$ non ha una struttura di gruppo.

Per quanto visto nel paragrafo precedente, possiamo interpretare $\hat{G}$ in un altro modo, che giustifica anche l'affermazione che $\hat{G}$ è un insieme. Sia X l'insieme delle funzioni di tipo positivo su G non nulle, che sono elementi estremali di $\mathcal{P}_0$. Stabiliamo su X la relazione di equivalenza per cui $\varphi_1(x) = \langle \pi_1(x)v, v\rangle$ e $\varphi_2(x) = \langle \pi_2(x)v', v'\rangle$ sono equivalenti se π_1 e π_2 sono equivalenti.

Data una funzione $f \in L^1(G)$, la funzione che associa a una rappresentazione unitaria irriducibile π l'operatore $\pi(f) \in \mathcal{L}(H_\pi)$ passa al quoziente (in un senso opportuno), dando luogo a una funzione definita su $\hat{G}$. Questa viene detta la *trasformata di Fourier non commutativa* $\hat{f}$ di f. Si usa la notazione $\hat{f}(\pi)$ in luogo di $\pi(f)$, trascurando di segnalare il passaggio al quoziente per non appesantire le notazioni.

Della trasformata di Fourier abeliana si conservano le proprietà di linearità, di moltiplicatività e di invarianza per involuzione:

$$(\alpha f + \beta g)\hat{}(\pi) = \alpha\hat{f}(\pi) + \beta\hat{f}(\pi)\ ,$$

$$\widehat{f * g}(\pi) = \hat{f}(\pi)\hat{g}(\pi)\ ,$$

$$\widehat{f^*}(\pi) = \hat{f}(\pi)^*\ .$$

Per sviluppare un'analisi di Fourier non commutativa, si vuole dotare $\hat{G}$ di una topologia, e possibilmente di una misura che consenta di ottenere una generalizzazione della formula di Plancherel.

Per la topologia, viene naturale considerare su $\hat{G}$ la topologia quoziente ereditata da X. Questa si chiama *topologia di Fell* e in generale non è di Hausdorff. Ancora più delicata è la questione della misura di Plancherel.

Invece di portare avanti una teoria generale, che presenta molte difficoltà e le cui implicazioni in casi specifici non sono semplici, preferiamo analizzare alcuni casi particolari, già di per sé molto rilevanti.

Per una presentazione più ampia di queste tematiche si rinvia a G.B. Folland, *A course in abstract harmonic analysis*, cap. VII, e ai riferimenti bibliografici ivi contenuti, in particolare J. Dixmier, *C^* Algebras*.

CAPITOLO V
ANALISI DI FOURIER SU GRUPPI COMPATTI

1. Rappresentazioni irriducibili di gruppi compatti

In questo paragrafo vedremo che

(1) ogni rappresentazione di un gruppo compatto su uno spazio di Hilbert è "unitarizzabile" (Teorema 1.1);
(2) ogni rappresentazione unitaria irriducibile è di dimensione finita (Teorema 1.4);
(3) Ogni rappresentazione unitaria si decompone come somma diretta di rappresentazioni irriducibili (Corollario 1.5).

Sia G un gruppo compatto e sia dx la misura di Haar normalizzata su G.

Teorema 1.1. *Sia π una rappresentazione di G su uno spazio di Hilbert H con prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$. Se*

$$\langle\langle v, w\rangle\rangle = \int_G \langle \pi(x)v, \pi(x)w\rangle\, dx \ , \tag{1.1}$$

allora $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ è pure un prodotto scalare su H, induce su H una norma equivalente a quella originaria e rispetto ad esso π è unitaria.

Dimostrazione. Chiaramente il nuovo prodotto scalare è Hermitiano. Se $\langle\langle v, v\rangle\rangle = 0$, allora $\langle \pi(x)v, \pi(x)v\rangle = 0$ per ogni $x \in G$, perché l'applicazione $\varphi_v(x) = \pi(x)v$ è continua da G in H. Ponendo $x = e$, si deduce che $v = 0$.

Indichiamo ora con $\|\ \|$ e $\|\ \|'$ le norme indotte rispettivamente dal prodotto scalare originario e dal prodotto (1.1).

Per la continuità di φ_v e la compattezza di G, $\sup_{x\in G} \|\pi(x)v\| \leq C_v$. Per il teorema di Banach-Steinhaus,

$$\sup_{x\in G} \|\pi(x)\| \leq C \ .$$

Allora

$$\|v\|' = \left(\int_G \|\pi(x)v\|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|v\| \ .$$

D'altra parte, $\|v\| = \|\pi(x^{-1})\pi(x)v\| \leq C\|\pi(x)v\|$, per cui si ha anche la disuguaglianza

$$\|v\| \leq C\|v\|' \ .$$

Infine, fissato $g \in G$,

$$\begin{aligned}\langle\!\langle \pi(g)v, \pi(g)w \rangle\!\rangle &= \int_G \langle \pi(x)\pi(g)v, \pi(x)\pi(g)w \rangle \, dx \\ &= \int_G \langle \pi(xg)v, \pi(xg)w \rangle \, dx \\ &= \langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle \ ,\end{aligned}$$

per cui $\pi(g)$ è unitario rispetto al prodotto scalare (1.1). $\square$

Questo appena visto è il primo esempio in cui si utilizza l'integrazione su G per guadagnare l'invarianza rispetto all'azione di G. Un altro esempio è il seguente.

Lemma 1.2. *Siano π_1 e π_2 due rappresentazioni unitarie di G sugli spazi di Hilbert H_1 e H_2 rispettivamente. Dato $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, l'operatore*

$$\tilde{T} = \int_G \pi_2(x)^{-1} T \pi_1(x) \, dx \ , \tag{1.2}$$

dove l'integrale converge nella topologia forte di $\mathcal{L}(H_1, H_2)$, è in $\mathcal{I}(\pi_1, \pi_2)$.

Inoltre, se T è compatto, anche $\tilde{T}$ è compatto.

Dimostrazione. La convergenza forte dell'integrale segue dal fatto che, dato $v \in H_1$, l'applicazione $x \mapsto \pi_2(x)^{-1} T \pi_1(x) v$ è continua da G in H (è la composizione di due applicazioni continue in virtù del Lemma 1.1 del Cap. IV). Per lo stesso motivo, se U è un operatore in $\mathcal{L}(H_1)$ e $V \in \mathcal{L}(H_2)$, si hanno le identità

$$V\tilde{T} = \int_G V \pi_2(x)^{-1} T \pi_1(x) \, dx \ , \qquad \tilde{T}U = \int_G \pi_2(x)^{-1} T \pi_1(x) U \, dx \ .$$

Quindi, cambiando variabile nell'integrale,

$$\begin{aligned}\pi_2(g)\tilde{T} &= \int_G \pi_2(xg^{-1})^{-1} T \pi_1(x) \, dx \\ &= \int_G \pi_2(x)^{-1} T \pi_1(xg) \, dx \\ &= \int_G \pi_2(x)^{-1} T \pi_1(x) \pi_1(g) \, dx \\ &= \tilde{T}\pi_1(g) \ .\end{aligned}$$

Supponiamo ora che T sia compatto. Data una successione $\{v_n\}$ in H_1 convergente debolmente a 0, si ha

$$\|\tilde{T} v_n\| \leq \int_G \|\pi_2(x)^{-1} T \pi_1(x) v_n\| \, dx = \int_G \|T \pi_1(x) v_n\| \, dx \ .$$

Per ogni $x \in G$, $\lim_{n\to\infty} \|T\pi_1(x)v_n\| = 0$. Inoltre, $\|T\pi_1(x)v_n\| \leq \|T\| \sup_n \|v_n\|$. Per convergenza dominata, $\{Tv_n\}$ converge a 0 in norma. $\square$

Lemma 1.3. *Ogni rappresentazione unitaria di G ammette un sottospazio invariante non banale di dimensione finita.*

Dimostrazione. Sia π una rappresentazione unitaria di G in H. Dato $v_0 \in H$ con $\|v_0\| = 1$, si consideri il proiettore ortogonale di H su $\mathbb{C}v_0$,

$$Pv = \langle v, v_0 \rangle v_0 \ .$$

Allora $\tilde{P}$ è compatto, per il Lemma 1.2, e autoaggiunto (in particolare normale). Infatti

$$\begin{aligned} \langle v, \tilde{P}w \rangle &= \int_G \langle v, \pi(x)^{-1} P \pi(x) w \rangle \, dx \\ &= \int_G \langle \pi(x)^{-1} P \pi(x)^{-1} v, w \rangle \, dx \\ &= \langle \tilde{P}v, w \rangle \ . \end{aligned}$$

Si ha inoltre

$$\begin{aligned} \langle \tilde{P}v_0, v_0 \rangle &= \int_G \langle \pi(x)^{-1} P \pi(x) v_0, v_0 \rangle \, dx \\ &= \int_G \|P\pi(x) v_0\|^2 \, dx \ . \end{aligned}$$

La funzione integranda è continua e vale 1 per $x = e$. Quindi $\tilde{P} \neq 0$.

Sia

$$\tilde{P} = \int_{\sigma(\tilde{P})} \lambda \, dE(\lambda)$$

la sua decomposizione spettrale (Corollario 5.6 del Cap. I). Poiché $\tilde{P} \neq 0$, il suo spettro non è ridotto al solo punto 0. Per il Lemma 5.3 del Cap. I, esiste allora un compatto $K \subset \sigma(\tilde{P}) \setminus \{0\}$ tale che $E(K) \neq 0$. Poiché $\tilde{P}$ commuta con $\pi(x)$ per ogni $x \in G$, lo stesso vale per $E(K) = \chi_K(\tilde{P})$. Quindi $E(K) \in \mathcal{I}(\pi, \pi)$.

La dimostrazione è conclusa se dimostriamo che l'immagine $V = E(K)H$ del proiettore $E(K)$ ha dimensione finita, in quanto V è un sottospazio invariante.

Supponiamo per assurdo che V ammetta un sistema ortonormale infinito $\{e_n\}$. Allora $\{e_n\}$ tende debolmente a zero, per cui $\{\tilde{P}e_n\}$ tende fortemente a zero. Ma, nelle notazioni del Cap.I, par. 5,

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}e_n\|^2 &= \langle \tilde{P}^* \tilde{P} e_n, e_n \rangle \\ &= \int_{\sigma(\tilde{P})} |\lambda|^2 \, d\mu_{e_n, e_n}(\lambda) \\ &\geq \delta^2 \int_K d\mu_{e_n, e_n}(\lambda) \\ &= \delta^2 \langle E(K) e_n, e_n \rangle \\ &= \delta^2 \ , \end{aligned}$$

se $\delta = \min_K |\lambda|$. $\square$

Il seguente risultato segue immediatamente.

Teorema 1.4. *Se π è irriducibile, allora H ha dimensione finita.*

Infine dimostriamo il terzo risultato annunciato.

Corollario 1.5. *Sia π una rappresentazione unitaria di G su H. Allora π è la somma diretta di sottorappresentazioni irriducibili di dimensione finita, con i sottospazi di H su cui agisce ciascuna di esse a due a due ortogonali.*

Dimostrazione. Consideriamo la classe $\mathcal{C}$ delle famiglie $\{V_i\}_{i\in I}$, dove i V_i sono sottospazi π-invarianti di H, di dimensione finita e a due a due ortogonali, e tali che la restrizione di π a ogni V_i sia irriducibile.

Per il Lemma 1.3, π ammette un sottospazio invariante non banale W di dimensione finita. Se la restrizione di π a W è riducibile, si sostituisca W con un sottospazio proprio non banale invariante. Con un numero finito di iterazioni, si giunge a un sottospazio non banale, invariante, e tale che la restrizione di π a tale sottospazio sia irriducibile.

Quindi $\mathcal{C}$ non è vuota. Ordinando gli elementi di $\mathcal{C}$ per inclusione, e applicando il Lemma di Zorn, si ottiene l'esistenza di una famiglia $\{V_i\}$ massimale.

Supponiamo per assurdo che $V = \sum_i^{\oplus} V_i$ sia propriamente contenuta in H (per definizione V è chiuso). Poiché V è invariante, per il Lemma 1.3 del Cap. IV anche $V^{\perp}$ è invariante. Sia π' la restrizione di π a $V^{\perp}$. Sempre per il Lemma 1.3, esiste un sottospazio invariante W di $V^{\perp}$ di dimensione finita. Ma ciò contrasta con la massimalità della famiglia $\{V_i\}$. □

2. Il teorema di Peter-Weyl

Consideriamo ora le rappresentazioni regolari di un gruppo compatto G su $L^2(G)$, precisamente la *rappresentazione regolare sinistra*

$$(L_g f)(x) = f(g^{-1}x) \ ,$$

e la *rappresentazione regolare destra*

$$(R_g f)(x) = f(xg) \ .$$

Conviene anche tener conto della rappresentazione di $G \times G$ su $L^2(G)$ data da

$$(S_{(g,h)} f)(x) = f(g^{-1}xh) = (L_g R_h f)(x) = (R_h L_g f)(x) \ .$$

Oserviamo he un sottospazio di $L^2(G)$ è S-invariante se e solo se esso è sia L-che R-invariante.

Sia π una rappresentazione unitaria irriducibile di G su uno spazio di Hilbert H_π di dimensione d_π (necessariamente finita), e sia $\{e_i, \dots, e_{d_\pi}\}$ una base ortonormale di H_π. Rispetto a tale base, ogni operatore $\pi(x)$, con $x \in G$, si rappresenta tramite la matrice

$$\pi(x) = \begin{pmatrix} \varphi^\pi_{1,1}(x) & \cdots & \varphi^\pi_{1,d_\pi}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi^\pi_{d_\pi,1}(x) & \cdots & \varphi^\pi_{d_\pi,d_\pi}(x) \end{pmatrix} , \tag{2.1}$$

dove

$$\varphi^\pi_{j,k}(x) = \langle \pi(x)e_k, e_j\rangle \tag{2.2}$$

è il coefficiente della rappresentazione relativo ai due elementi indicati della base di H_π.

Dimostreremo in questo paragrafo che questi coefficienti, opportunamente normalizzati, formano, al variare di π, una base ortonormale di $L^2(G)$ con notevoli proprietà di invarianza rispetto all'azione sia destra che sinistra di G.

Alcune proprietà dei coefficienti $\varphi^\pi_{j,k}$ sono immediate.

Lemma 2.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

(1) *le funzioni* $\varphi^\pi_{j,k}$ *sono continue;*
(2) $\varphi^\pi_{j,k}(x^{-1}) = \overline{\varphi^\pi_{k,j}(x)}$;
(3) $\varphi^\pi_{j,k}(xy) = \sum_{\ell=1}^{d_\pi} \varphi^\pi_{j,\ell}(x)\varphi^\pi_{\ell,k}(y)$;
(4) $\sum_{j=1}^{d_\pi} \left|\varphi^\pi_{j,k}(x)\right|^2 = 1$ *per ogni* x *e ogni* k, *e* $\sum_{k=1}^{d_\pi} \left|\varphi^\pi_{j,k}(x)\right|^2 = 1$ *per ogni* x *e ogni* j;
(5) *se* $k \neq k'$, $\sum_{j=1}^{d_\pi} \varphi^\pi_{j,k}(x)\overline{\varphi^\pi_{j,k'}(x)} = 0$, *e se* $j \neq j'$, $\sum_{k=1}^{d_\pi} \varphi^\pi_{j,k}(x)\overline{\varphi^\pi_{j',k}(x)} = 0$;
(6) *se* $v, w \in H$, *il coefficiente*

$$\varphi^\pi_{v,w}(x) = \langle \pi(x)w, v\rangle$$

è combinazione lineare dei $\varphi^\pi_{j,k}$.

Dimostrazione. La (1) è evidente. La (2) segue dall'identità $\pi(x^{-1}) = \pi(x)^*$, la (3) dall'identità $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$; la (4) e la (5) seguono dall'identità

$$\pi(x)\pi(x)^* = \pi(x)^*\pi(x) = I\ ,$$

e infine la (6) è ovvia. □

Indichiamo con M^π il sottospazio di $L^2(G)$ generato dai coefficienti $\varphi^\pi_{j,k}$.

Due rappresentazioni unitarie equivalenti π e π' determinano gli stessi coefficienti: infatti se $U \in \mathcal{I}(\pi,\pi')$ è unitario, allora, dati $v, w \in H_\pi$,

$$\langle \pi(x)w, v\rangle = \langle U^{-1}\pi'(x)Uv, w\rangle = \langle \pi'(x)Uv, Uw\rangle\ .$$

Per questo motivo selezioniamo una famiglia $\mathcal{P}$ di rappresentazioni unitarie irriducibili di G a due a due inequivalenti, e tale che per ogni rappresentazione unitaria irriducibile di G ne esista una e una sola equivalente in $\mathcal{P}$.

Le combinazioni lineari finite di elementi presi dagli spazi M^π con $\pi \in \mathcal{P}$ si chiamano *polinomi trigonometrici* su G. Ci proponiamo di dimostrare che, come i veri e propri polinomi trigonometrici su $\mathbb{T}$, quelli su G formano un sottospazio uniformemente denso in $C(G)$.

La dimostrazione richiede le nozioni di prodotto tensoriale di due rappresentazioni, e di rappresentazione controgradiente di una rappresentazione data. Diamo una breve presentazione di queste nozioni.

Siano $\{e_j\}_{1\le j\le m}$ e $\{f_k\}_{1\le k\le n}$ basi ortonormali di due spazi di Hilbert H_1 e H_2 di dimensione finita, e sia H uno spazio di Hilbert di dimensione mn, con una base ortonormale assegnata $\{\eta_{j,k}\}_{1\le j\le m\,,\,1\le k\le n}$. Consideriamo l'applicazione bilineare $\otimes : H_1 \times H_2 \to H$ tale che $\otimes(e_j, f_k) = \eta_{j,k}$.

Se $u_1 = \sum a_j e_j \in H_1$ e $u_2 = \sum b_k f_k \in H_2$, indichiamo con $u_1 \otimes u_2$ l'elemento $\otimes(u_1, u_2) \in H$. Si ha allora

$$u_1 \otimes u_2 = \sum_{j,k} a_j b_k \eta_{j,k} = \sum_{j,k} a_j b_k e_j \otimes f_k$$

(si osservi che i prodotti tensoriali $u_1 \otimes u_2$ descrivono solo un sottoinsieme proprio di H; il generico elemento di H è una combinazione lineari di tali elementi).

In particolare,

$$\|u_1 \otimes u_2\|^2 = \sum_{j,k} |a_j|^2 |b_k|^2 = \|u_1\|^2 \|u_2\|^2 \ .$$

Per polarizzazione,

$$\langle u_1 \otimes u_2, u_1' \otimes u_2' \rangle = \langle u_1, u_1' \rangle \langle u_2, u_2' \rangle \ .$$

Siano $S \in \mathcal{L}(H_1)$, $T \in \mathcal{L}(H_2)$. Si consideri l'applicazione lineare $S \otimes T$ di H in sé data da $(S \otimes T)(e_j \otimes f_k) = Se_j \otimes Tf_k$. Essa è ben definita e $S \otimes T(u_1 \otimes u_2) = Su_1 \otimes Tu_2$.

Si verifica allora facilmente che $(S_1 \otimes T_1)(S_2 \otimes T_2) = S_1 S_2 \otimes T_1 T_2$, e che, se S e T sono entrambe unitarie, anche $S \otimes T$ è unitaria.

Date ora due rappresentazioni unitarie π_1, π_2, agenti su H_1 e H_2 rispettivamente, il loro *prodotto tensoriale* è la rappresentazione unitaria $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$ su $H_1 \otimes H_2$, ottenuta ponendo $\pi(x) = \pi_1(x) \otimes \pi_2(x)$ per ogni $x \in G$.

Sia ora H uno spazio di Hilbert e H' il suo duale. Consideriamo l'applicazione antilineare $\theta : H' \to H$ che a $\lambda \in H'$ associa l'elemento $w = \theta\lambda \in H$ tale che $\lambda(v) = \langle v, w \rangle$. Poiché $\|\lambda\| = \|w\|$, la norma duale su H' è indotta da un prodotto scalare tale che, per polarizzazione,

$$\langle \lambda, \lambda' \rangle = \langle \theta\lambda', \theta\lambda \rangle \ .$$

Data una rappresentazione unitaria π di G su H, si defiscono gli operatori $\pi'(x)$ su H' come

$$\big(\pi'(x)\lambda\big)(v) = \lambda\big(\pi(x^{-1})v\big) \ ,$$

ossia $\pi'(x) = {}^t\pi(x^{-1})$. Si ha

$$\begin{aligned} \big\langle v, \theta\big(\pi'(x)\lambda\big) &= \big(\pi'(x)\lambda\big)(v) \\ &= \lambda\big(\pi(x^{-1})v\big) \\ &= \langle \pi(x^{-1})v, \theta\lambda \rangle \\ &= \langle v, \pi(x)(\theta\lambda) \rangle \ , \end{aligned}$$

da cui

$$\pi'(x) = \theta^{-1} \circ \pi(x) \circ \theta \ .$$

Quindi i $\pi'(x)$ sono lineari e definiscono una rappresentazione unitaria di G su H'. Essa si chiama la *rappresentazione controgradiente* di π. In generale π e π' non sono equivalenti (si osservi che θ è solo $\mathbb{R}$-lineare). Tuttavia, si vede facilmente che π' è irriducibile se e solo se lo è π.

Teorema 2.2. *I polinomi trigonometrici sono uniformemente densi in $C(G)$.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Stone-Weierstrass, è sufficiente dimostrare che lo spazio X dei polinomi trigonometrici è un'algebra per il prodotto puntuale, è invariante per coniugazione, separa i punti, e contiene le costanti.

Considerando la rappresentazione banale π_0, data da $\pi_0(x) = I$ per ogni $x \in G$, su uno spazio unidimensionale, si ottiene che le funzioni costanti sono in X.

Verifichiamo ora che il prodotto di due funzioni in X è pure in X. Siano $\varphi_1 = \varphi^{\pi_1}_{v_1,w_1}$ e $\varphi_2 = \varphi^{\pi_2}_{v_2,w_2}$ due coefficienti di due rappresentazioni (non necessariamente distinte). Considerando la rappresentazione $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$, si ha

$$\begin{aligned}\big\langle \pi(x)(v_1 \otimes v_2), w_1 \otimes w_2 \big\rangle &= \big\langle \pi_1(x)v_1 \otimes \pi_2(x)v_2, w_1 \otimes w_2 \big\rangle \\ &= \langle \pi_1(x)v_1, w_1\rangle\langle \pi_2(x)v_2, w_2\rangle \\ &= \varphi_1(x)\varphi_2(x) \ .\end{aligned}$$

Quindi $\varphi_1\varphi_2$ è il coefficiente di una rappresentazione di dimensione finita, che però non sarà in generale irriducibile. Tuttavia, in base al Lemma 1.5, π si decompone nella somma diretta di rappresentazioni irriducibili, $\pi = \sigma_1 \oplus \cdots \oplus \sigma_\nu$. Corrispondentemente, $v_1 \otimes v_2 = \xi_1 + \cdots \xi_\nu$, $w_1 \otimes w_2 = \omega_1 + \cdots + \omega_\nu$, con ξ_i, ω_i nel sottospazio su cui agisce σ_i. I sottospazi su cui agiscono le varie σ_i sono a due a due ortogonali, per cui

$$\begin{aligned}\varphi_1(x)\varphi_2(x) &= \big\langle \pi(x)(v_1 \otimes v_2), w_1 \otimes w_2 \big\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle \sigma_i(x)\xi_i, \omega_j\rangle \\ &= \sum_i \langle \sigma_i(x)\xi_i, \omega_i\rangle \\ &= \sum_i \varphi^{\sigma_i}_{\xi_i,\omega_i}(x) \ .\end{aligned}$$

Ogni σ_i è equivalente a una rappresentazione $\pi_i' \in \mathcal{P}$, per cui $\varphi^{\sigma_i}_{\xi_i,\omega_i}(x) \in M^{\pi_i'} \subset X$.

In conclusione $\varphi_1\varphi_2 \in X$ e dunque X è un'algebra.

Per il Teorema di Gelfand-Raikov (Corollario 4.2 del Cap. IV), dati due elementi distinti $x, y \in G$ esiste $\pi \in \mathcal{P}$ tale che $\pi(x) \neq \pi(y)$. Esisteranno allora $v, w \in H_\pi$ tali che $\langle \pi(x)v, w\rangle \neq \langle \pi(y)v, w\rangle$. Quindi X separa i punti.

Rimane da dimostrare che X è invariante per coniugazione.

Data una rappresentazione unitaria π su H, consideriamo la sua controgradiente π' su H'. Se $w = \theta\lambda$ e $w' = \theta\lambda'$, si ha

$$\varphi^{\pi'}_{\lambda,\lambda'}(x) = \langle w, \theta \circ \pi'(x)\lambda'\rangle = \langle w, \pi(x)w'\rangle = \overline{\varphi^{\pi}_{w,w'}(x)} \ .$$

Questo completa la dimostrazione. $\square$

Corollario 2.3. *Per ogni $\pi \in \mathcal{P}$ esiste $\tilde{\pi} \in \mathcal{P}$ (della stessa dimensione) equivalente alla controgradiente π' di π. L'applicazione $\pi \mapsto \tilde{\pi}$ è una biiezione di $\mathcal{P}$ in sé e $M^{\tilde{\pi}} = \overline{M^{\pi}}$.*

Vediamo ora le proprietà degli spazi M^π come sottospazi di $L^2(G)$.

Lemma 2.4. *I coefficienti $\varphi^\pi_{j,k}$ sono a due a due ortogonali in $L^2(G)$ e $\|\varphi^\pi_{j,k}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{d_\pi}}$. Inparticolare M^π ha dimensione d^2_π.*

Dimostrazione. Sia $E_{p,q}$ l'operatore lineare di H in sé tale che

$$E_{p,q}e_j = \begin{cases} e_q & \text{se } j = p \\ 0 & \text{se } j \neq p \ , \end{cases}$$

rappresentato, nella base fissata, dalla matrice avente 1 nel posto (q,p) e 0 altrove.

Poiché π è irriducibile, per il Lemma 1.2 e il Lemma di Schur, $\tilde{E}_{p,q} = cI$ per qualche scalare c. Osserviamo che, essendo la traccia di una matrice lineare nella matrice, ed essendo $\operatorname{tr}(A^{-1}BA) = \operatorname{tr}(B)$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\tilde{E}_{p,q}) &= \operatorname{tr}\left(\int_G \pi(x)^{-1}E_{p,q}\pi(x)\,dx\right) \\ &= \int_G \operatorname{tr}\big(\pi(x)^{-1}E_{p,q}\pi(x)\big)\,dx \\ &= \operatorname{tr}(E_{p,q}) \ . \end{aligned}$$

Se $p \neq q$, $\operatorname{tr}(E_{p,q}) = 0$, per cui $0 = \operatorname{tr}(\tilde{E}_{p,q}) = cd_\pi$, e dunque $\tilde{E}_{p,q} = 0$.

Se $p = q$, $cd_\pi = \operatorname{tr}(E_{p,p}) = 1$, per cui $\tilde{E}_{p,p} = \frac{1}{d_\pi}I$.

Osserviamo anche che il termine di posto (j,k) della matrice $\tilde{E}_{p,q}$ è

$$\begin{aligned} (\tilde{E}_{p,q})_{j,k} &= \int_G \big(\pi(x^{-1})E_{p,q}\pi(x)\big)_{j,k}\,dx \\ &= \int_G \sum_{r,s} \varphi^\pi_{j,r}(x^{-1})(E_{p,q})_{r,s}\varphi^\pi_{s,k}(x)\,dx \\ &= \int_G \varphi^\pi_{j,q}(x^{-1})\varphi^\pi_{p,k}(x)\,dx \\ &= \int_G \overline{\varphi^\pi_{q,j}(x)}\varphi^\pi_{p,k}(x)\,dx \ . \end{aligned}$$

Questo integrale è dunque nullo, tranne quando $p = q$ e $j = k$, nel qual caso è uguale a $1/d_\pi$. $\square$

Dato $v \in H$, $v \neq 0$, poniamo

$$\begin{aligned} M^\pi_v &= \{\varphi^\pi_{v,w} : w \in H\} \\ {}_vM^\pi &= \{\varphi^\pi_{w,v} : w \in H\} \ . \end{aligned}$$

Chiaramente M^π_v e ${}_vM^\pi$ sono sottospazi di M^π. Inoltre, se $\{v_1, \ldots, v_{d_\pi}\}$ è una base di H, allora

$$\sum_{j=1}^{d_\pi} M^\pi_{v_j} = \sum_{j=1}^{d_\pi} {}_{v_j}M^\pi = M^\pi \ . \tag{2.3}$$

Lemma 2.5. *Valgono le seguenti proprietà:*

(1) $\|\varphi^\pi_{v,w}\|_2 = \frac{\|v\|\|w\|}{\sqrt{d}}$;
(2) M^π_v *e* $M^\pi_{v'}$ *sono ortogonali se e solo se* v *e* v' *sono ortogonali;*
(3) *per ogni* $v \in H_\pi$, M^π_v *è* R*-invariante, e la restrizione di* R *a* M^π_v *è equivalente a* π*;*
(4) *i sottospazi* R*-invarianti di* M^π *sono tutti e soli quelli della forma*

$$\sum_{j=1}^{k} M^\pi_{v_j} \ ,$$

con $\{v_1, \dots, v_k\}$ *sistema ortonormale;*
(5) *analogamente,* ${}_vM^\pi$ *e* ${}_{v'}M^\pi$ *sono ortogonali se e solo se* v *e* v' *sono ortogonali; per ogni* $v \in H_\pi$, ${}_vM^\pi$ *è* L*-invariante, e la restrizione di* L *a* ${}_vM^\pi$ *è equivalente a* π'*, la controgradiente di* π*; i sottospazi* L*-invarianti di* M^π *sono tutti e soli quelli della forma* $\sum_{j=1}^k {}_{v_j}M^\pi$*, con* $\{v_1, \dots, v_k\}$ *sistema ortonormale;*
(6) *la restrizione di* S *a* M^π *è irriducibile.*

Dimostrazione. Dato $v \in H_\pi$, $v \neq 0$, sia $\{v_1, \dots, v_{d_\pi}\}$ una base ortonormale di H_π con $v_1 = v/\|v\|$. Se $w = \sum_{j=1}^{d_\pi} a_j v_j$, per il Lemma 2.4,

$$\begin{aligned}\big\|\langle \pi(x)w, v\rangle\big\|^2 &= \|v\|^2 \Big\| \sum_{j=1}^{d_\pi} a_j \langle \pi(x)v_j, v_1\rangle \Big\|^2 \\ &= \frac{\|v\|^2}{d_\pi} \sum_{j=1}^{d_\pi} |a_j|^2 \\ &= \frac{\|v\|^2\|w\|^2}{d_\pi} \ .\end{aligned}$$

Questo dimostra la (1).

Per polarizzazione rispetto a v, si ricava che

$$\langle \varphi^\pi_{v,w}, \varphi^\pi_{v',w}\rangle_{L^2} = \frac{\langle v', v\rangle_{H_\pi}\|w\|^2}{d_\pi} \ .$$

Da ciò segue che se M^π_v e $M^\pi_{v'}$ sono ortogonali, allora v e v' sono ortogonali. Polarizzando ora rispetto a w, si ha

$$\langle \varphi^\pi_{v,w}, \varphi^\pi_{v',w'}\rangle_{L^2} = \frac{\langle v', v\rangle_{H_\pi}\langle w, w'\rangle_{H_\pi}}{d_\pi} \ ,$$

per cui, se $\langle v, v'\rangle = 0$, M^π_v e $M^\pi_{v'}$ sono ortogonali. Questo dimostra la (2).

Dati $v, w \in H_\pi$, si ha

$$\begin{aligned}(R_g\varphi^\pi_{v,w})(x) &= \langle \pi(xg)w, v\rangle \\ &= \langle \pi(x)\pi(g)w, v\rangle \\ &= \varphi^\pi_{v,\pi(g)w}(x) \ .\end{aligned}$$

Quindi l'operatore $A : H_\pi \to M^\pi_v$ tale che $Aw = \varphi^\pi_{v,w}$ è in $I\big(\pi, R_{|_{M^\pi_v}}\big)$. Per la (1), $\frac{\sqrt{d_\pi}}{\|v\|}A$ è unitario.

Questo dimostra la (3). Passando alla (4), è evidente che i sottospazi indicati di M^π sono R-invarianti.

Viceversa, sia E un sottospazio R-invariante di M^π, e sia

$$f(x) = \sum_{j,k=1}^{d_\pi} c_{j,k}\varphi^\pi_{j,k}(x) \in E \ .$$

Applicando la (3) del Lemma 2.1, si ha allora che, per ogni $g \in G$,

$$\begin{aligned} f(xg) &= \sum_{j,k=1}^{d_\pi} c_{j,k}\varphi^\pi_{j,k}(xg) \\ &= \sum_{j,k,\ell=1}^{d_\pi} c_{j,k}\varphi^\pi_{j,\ell}(x)\varphi^\pi_{\ell,k}(g) \end{aligned}$$

è in E. Se $f \neq 0$, esistono p, q tali che $c_{p,q} \neq 0$. Consideriamo allora la funzione

$$h(x) = \int_G f(xg)\overline{\varphi^\pi_{q,q}(g)}\, dg \ .$$

Essa è pure in E, e, per il Lemma 2.2,

$$h(x) = \frac{1}{d_\pi}\sum_{j=1}^{d_\pi} c_{j,q}\varphi^\pi_{j,q}(x) \neq 0 \ .$$

Se $v = \frac{1}{d_\pi}\sum_{j=1}^{d_\pi}\overline{c_{j,q}}e_j$,

$$h(x) = \frac{1}{d_\pi}\sum_{j=1}^{d_\pi} c_{j,q}\langle \pi(x)e_q, e_j\rangle = \varphi^\pi_{v,e_q} \ .$$

Quindi $h \in M^\pi_v \cap E$. Allora anche tutte le traslate destre $R_g h$ sono in $M^\pi_v \cap E$. Ma π è irriducibile, e tale è anche la rappresentazione equivalente $R_{|_{M^\pi_v}}$. Quindi h è R-ciclico in M^π_v. Ne segue che $M^\pi_v \subseteq E$.

Se l'inclusione è propria, consideriamo il complemento ortogonale E' di M^π_v in E. Procedendo come sopra, si dimostra l'esistenza di $v' \in H_\pi$ tale che $M^\pi_{v'} \subset E'$. Per la (2) v e v' sono ortogonali in H_π.

Iterando questo procedimento, dopo un numero finito di passi si decompone E come somma diretta di sottospazi $M^\pi_{v_j}$ con i v_j a due a due ortogonali. Questi spazi rimangono invariati se si normalizzano i v_j, e così si conclude questa parte della dimostrazione.

La (5) si dimostra in modo analogo. Bisogna però sostituire A con l'operatore $\tilde{A} : H'_\pi \to {}_vM^\pi$ dato da $\tilde{A}\lambda = \varphi^\pi_{\theta\lambda,v}$. Allora

$$L_g(A\lambda)(x) = \varphi^\pi_{\theta\lambda,v}(g^{-1}x) = \langle \pi(x)v, \pi(g)\theta\lambda\rangle = \big\langle \pi(x)v, \theta\big(\pi'(g)\lambda\big)\big\rangle = (A\pi'(g)\lambda)(x) \ .$$

Infine, passando alla (6), sia E un sottospazio di M^π S-invariante, Se E non è banale, esso contiene un M^π_v, essendo R-invariante. Possiamo supporre che $\|v\| = 1$. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale di H on $e_1 = v$, usando l'invarianza di E sia rispetto a R che a L, si conclude che E contiene tutte le $\varphi^\pi_{j,k}$ relative a tale base. Dunque $E = M^\pi$. □

Con riferimento alla matrice (2.1), si noti che in particolare le funzioni in ogni riga generano un sottospazio R-invariante, e le funzioni in ogni colonna un sottospazio L-invariante di M^π.

Teorema 2.6 (di Peter-Weyl). *Allora*

$$L^2(G) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}} M^\pi \ ,$$

in cui gli addendi sono ortogonali a due a due.

Per ogni $\pi \in \mathcal{P}$, si fissi una base ortonormale $\{e^\pi_1, \dots, e^\pi_{d_\pi}\}$ di H_π, con $d_\pi = \dim H_\pi$. Posto

$$\varphi^\pi_{j,k}(x) = \langle \pi(x) e^\pi_k, e^\pi_j \rangle \ ,$$

il sistema

$$\left\{ \sqrt{d_\pi}\, \varphi^\pi_{j,k} \right\}_{\pi \in \mathcal{P}\,,\, 1 \le j,k \le d_\pi}$$

è una base ortonormale di $L^2(G)$.

Dimostrazione. Dimostriamo che se $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}$ sono distinte, e dunque non equivalenti, allora M^{π_1} e M^{π_2} sono ortogonali. Siano $\{e_1, \dots e_{d_1}\}$ e $\{f_1, \dots, f_{d_2}\}$ basi ortonormali degli spazi H_{π_1} e H_{π_2} rispettivamente. Sia $E_{p,q} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ definito da

$$E_{p,q} e_j = \begin{cases} e_q & \text{se } j = p \\ 0 & \text{se } j \neq p \ , \end{cases}$$

per $1 \le p \le d_1$, $1 \le q \le d_2$. Per il Lemma di Schur, $\tilde{E}_{p,q} = 0$. Ripetendo il procedimento usato nella dimostrazione del Lemma 2.2, si dimostra che

$$\int_G \varphi^{\pi_1}_{p,j}(x) \overline{\varphi^{\pi_2}_{q,k}(x)}\, dx = 0 \ ,$$

per ogni $j \le d_1$ e $k \le d_2$. □

3. Caratteri e funzioni centrali

Definizione. *Sia π una rappresentazione unitaria di G di dimensione finita. Si chiama* carattere *di π la funzione*

$$\chi_\pi(x) = \operatorname{tr} \pi(x) \tag{3.1}$$

I caratteri sono funzioni di tipo positivo (per il Lemma 3.1 del Cap. IV, è la somma di funzioni di tipo positivo), in particolare sono funzioni continue, soddisfano l'identità $\chi_\pi(x^{-1}) = \overline{\chi_\pi(x)}$, e la relazione

$$|\chi_\pi(x)| \le \chi_\pi(e) = d_\pi \ ,$$

dove d_π è la dimensione della rappresentazione.

Teorema 3.1. *Il proiettore ortogonale P^π di $L^2(G)$ su M^π è dato da*

$$P^\pi f(x) = f * (d_\pi \chi_\pi)(x) = (d_\pi \chi_\pi) * f(x) \ . \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Per il Lemma 2.5, una base ortonormale di M^π è costituita dalle funzioni $\sqrt{d_\pi}\varphi^\pi_{j,k}$ associate a una base ortonormale $\{e_j\}$ di H^π. Quindi, se $f \in L^2(G)$,

$$\begin{aligned}
P^\pi f(x) &= d_\pi \sum_{j,k=1}^{d_\pi} \langle f, \varphi^\pi_{j,k}\rangle_{L^2} \varphi^\pi_{j,k}(x) \\
&= d_\pi \sum_{j,k=1}^{d_\pi} \varphi^\pi_{j,k}(x) \int_G f(y)\overline{\varphi^\pi_{j,k}(y)}\, dy \\
&= d_\pi \int_G f(y) \sum_{j,k=1}^{d_\pi} \varphi^\pi_{j,k}(x)\varphi^\pi_{k,j}(y^{-1})\, dy \\
&= d_\pi \int_G f(y) \sum_{j=1}^{d_\pi} \varphi^\pi_{j,j}(xy^{-1})\, dy \\
&= d_\pi \int_G f(y) \operatorname{tr}\pi(xy^{-1})\, dy \\
&= (d_\pi \chi_\pi) * f(x) \ .
\end{aligned}$$

Poiché χ_π è centrale, si ha anche $P^\pi f(x) = f * (d_\pi\chi_\pi)(x)$. □

Corollario 3.2. *Ogni sottospazio R-invariante (risp. L-invariante) di $L^2(G)$ è la somma diretta, al variare di $\pi \in \mathcal{P}$, di sottospazi R-invarianti (risp. L-invarianti) di M^π.*

Ogni sottospazio S-invariante di $L^2(G)$ è la somma diretta di sottospazi M^π.

Dimostrazione. Sia V un sottospazio R-invariante. Se $f \in V$ e $\pi \in \mathcal{P}$,

$$P^\pi f = f * (d_\pi\chi_\pi) = d_\pi \int_G \chi_\pi(y) R_{y^{-1}} f\, dy$$

è pure in V. Quindi $\sum_{\pi\in\mathcal{P}} P^\pi V \subseteq V$. Se l'inclusione fosse propria, il complemento ortogonale in V di tale somma sarebbe ortogonale a ogni M^π, in contrasto con il Teorema di Peter-Weyl.

Si ha inoltre, per $f \in V$,

$$\begin{aligned}
R_g(P^\pi f)(x) &= (P^\pi f)(xg) \\
&= d_\pi \int_G f(y)\chi_\pi(y^{-1}xg)\, dy \\
&= d_\pi \int_G f(y)\chi_\pi(gy^{-1}x)\, dy \\
&= d_\pi \int_G f(yg)\chi_\pi(y^{-1}x)\, dy \\
&= P^\pi(R_g f) \ ,
\end{aligned}$$

per cui $P^\pi V$ è R-invariante.

Il resto della dimostrazione segue facilmente. □

Definizione. *Una funzione f su G si dice* centrale *se $f(xy) = f(yx)$ per ogni $x, y \in G$ (equivalentemente se $f(xyx^{-1}) = f(y)$ per ogni $x, y \in G$).*

Lemma 3.3.

(1) *I caratteri delle rappresentazioni di dimensione finita sono funzioni centrali.*
(2) *Le funzioni centrali integrabili costituiscono il centro di $L^1(G)$.*

Dimostrazione. Si ha

$$\chi_\pi(xy) = \operatorname{tr}\pi(xy) = \operatorname{tr}\big(\pi(x)\pi(y)\big) = \operatorname{tr}\big(\pi(y)\pi(x)\big) = \operatorname{tr}\pi(yx) = \chi_\pi(yx) \ .$$

Se $f \in L^1(G)$ è centrale e $g \in L^1(G)$,

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_G f(xy^{-1})g(y)\,dy \\ &= \int_G f(y^{-1}x)g(y)\,dy \\ &= g * f(x) \ . \end{aligned}$$

Viceversa, supponiamo che $f \in L^1(G)$ soddisfi la condizione $f * g = g * f$ per ogni $g \in L^1(G)$. Se $\{\varphi_i\}$ è un'identità approssimata,

$$\begin{aligned} R_y f &= \lim_i R_y(f * \varphi_i) \\ &= \lim_i f * \varphi_i * \delta_{y^{-1}} \\ &= \lim_i f * (R_y\varphi_i) \\ &= \lim_i (R_y\varphi_i) * f \\ &= \lim_i \varphi_i * \delta_{y^{-1}} * f \\ &= \lim_i \varphi_i * (L^{y^{-1}} f) \\ &= L^{y^{-1}} f \ . \qquad \Box \end{aligned}$$

Indichiamo con $L^2_c(G)$ il sottospazio chiuso di $L^2(G)$ costituito dalle funzioni centrali.

Proposizione 3.4. *Il proiettore ortogonale C di $L^2(G)$ su $L^2_c(G)$ è dato da*

$$Cf(x) = \int_G f(y^{-1}xy)\,dy = \int_G L_y R_y f(x)\,dy \ .$$

Per ogni $\pi \in \mathcal{P}$, il carattere χ_π è, a meno di multipli scalari, l'unica funzione centrale in M^π. Al variare di $\pi \in \mathcal{P}$, i caratteri χ_π formano una base ortonormale di $L^2_c(G)$.

Dimostrazione. Con il cambiamento di variabile $z = y^{-1}z'$, si ha

$$\begin{aligned} Cf(xy) &= \int_G f(z^{-1}xyz)\,dz \\ &= \int_G f(z'^{-1}yxz')\,dz' \\ &= Cf(yx) \ , \end{aligned}$$

per cui Cf è centrale. Inoltre, se f è già centrale, $Cf = f$. Da una semplice verifica segue che $C = C^*$, per cui C è il proiettore ortogonale su $L^2_c(G)$.

Sia $\varphi^\pi_{j,k}$ un coefficiente di $\pi \in \mathcal{P}$. Per il Lemma 2.1 e il Lemma 2.2,

$$\begin{aligned} C\varphi^\pi_{j,k}(x) &= \int_G \varphi^\pi_{j,k}(y^{-1}xy)\,dy \\ &= \sum_{m,n} \int_G \overline{\varphi^\pi_{m,j}(y)}\varphi^\pi_{m,n}(x)\varphi^\pi_{n,k}(y)\,dy \\ &= \frac{\delta_{j,k}}{d_\pi} \sum_m \varphi^\pi_{m,m}(x) \\ &= \frac{\delta_{j,k}}{d_\pi} \chi_\pi(x) \ . \end{aligned}$$

Quindi $C(M^\pi) = \mathbb{C}\chi_\pi$, da cui segue la seconda parte.

Poiché $\chi_\pi \in M^\pi$, per cui i caratteri sono a due a due ortogonali. Inoltre

$$\|\chi_\pi\|^2 = \sum_{j=1}^{d_\pi} \|\varphi^\pi_{j,j}\|^2 = 1 \ .$$

Se $f \in L^2_c(G)$ è ortogonale a χ_π, con $\pi \in \mathcal{P}$, si ha, per ogni $\varphi \in M^\pi$,

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle Cf, \varphi\rangle = \langle f, C\varphi\rangle = c\langle f, \chi_\pi\rangle = 0 \ .$$

Quindi $P^\pi f = 0$. In particolare, se f è ortogonale a tutti i caratteri χ_π con $\pi \in \mathcal{P}$, allora $f = 0$. $\square$

I caratteri consentono anche di descrivere lo spettro di Gelfand di $L^1_c(G)$, che è un'algebra di Banach commutativa per il Lemma 3.1 (2). Premettiamo una identità integrale che contraddistingue i caratteri di rappresentazioni irriducibili.

Lemma 3.5. *Una funzione $\psi \in L^\infty(G)$, non identicamente nulla, soddisfa l'identità*

$$\int_G \psi(xzyz^{-1})\,dz = \psi(x)\psi(y) \tag{3.3}$$

se e solo se $\psi(x) = \frac{1}{d_\pi}\chi_\pi(x)$, dove χ_π è il carattere di una rappresentazione unitaria irriducibile di G.

Dimostrazione. Sia $\pi \in \mathcal{P}$, e poniamo

$$F(x,y) = \int_G \chi_\pi(xzyz^{-1})\,dz \ . \tag{3.4}$$

Per ogni y fissato, $F(\cdot, y)$ è centrale nella prima variabile. Infatti, sostituendo $z = gz'$,

$$\begin{aligned} F(gx,y) &= \int_G \chi_\pi(gxzyz^{-1})\,dz \\ &= \int_G \chi_\pi(gxgz'yz'^{-1}g^{-1})\,dz' \\ &= \int_G \chi_\pi(xgz'yz'^{-1})\,dz' \\ &= F(xg,y) \ . \end{aligned}$$

Inoltre $F(\cdot,y)\in M^\pi$ per ogni y. Quindi, per la Proposizione 3.4,

$$F(x,y)=c(y)\chi_\pi(x)\ .$$

Dalla (3.4) si ha $F(e,y)=\chi_\pi(y)$, e uguagliando si ottiene $d_\pi c(y)=\chi_\pi(y)$. In conclusione $F(x,y)=\frac{1}{d_\pi}\chi_\pi(x)\chi_\pi(y)$, il che dimostra una delle due implicazioni.

Supponiamo ora che $\psi\in L^\infty(G)$ soddisfi la (3.3). Se $f\in L^1(G)$, la convoluzione $\psi * Cf$ è continua. Inoltre

$$\begin{aligned}(\psi * Cf)(x)&=\int_G \psi(xy^{-1})Cf(y)\,dy\\ &=\iint_{G\times G}\psi(xy^{-1})f(z^{-1}yz)\,dz\,dy\\ &=\iint_{G\times G}\psi(xzy^{-1}z^{-1})f(y)\,dz\,dy\\ &=\psi(x)\int_G \psi(y^{-1})f(y)\,dy\ .\end{aligned}\tag{3.5}$$

Scegliendo f in modo che l'ultimo integrale non sia nullo, si conclude che ψ è continua.

Ponendo $y=e$ nella (3.3) si trova che $\psi(y)=\psi(y)\psi(e)$ per ogni y. Poiché ψ non è identicamente nulla, si ha $\psi(e)=1$.

Ponendo poi $x=e$ nella (3.3), si ricava che $C\psi=\psi$, ossia ψ è centrale.

L'identità (3.5) vale in particolare se $f=\chi_\pi$, con $\pi\in\mathcal{P}$. Si ha allora

$$\psi * \chi_\pi(x)=\left(\int_G \psi(y^{-1})\chi_\pi(y)\,dy\right)\psi(x)=\langle\psi,\chi_\pi\rangle\psi\ .$$

Per la Proposizione 3.4, esiste $\pi_0\in\mathcal{P}$ tale che $\langle\psi,\chi_{\pi_0}\rangle\neq 0$. Allora $\psi\in M^{\pi_0}$, ed essendo centrale, $\psi=c\chi_{\pi_0}$. Essendo $\psi(e)=1$, si ha la conclusione. $\square$

Teorema 3.6. *Data una rappresentazione $\pi\in\mathcal{P}$, il funzionale*

$$\Phi_\pi(f)=\frac{1}{d_\pi}\int_G f(x)\overline{\chi_\pi(x)}\,dx\tag{3.4}$$

è un funzionale lineare moltiplicativo non banale su $L^1_c(G)$. Viceversa, dato $\Phi\in\Delta\big(L^1_c(G)\big)$, esiste una e una sola $\pi\in\mathcal{P}$ tale che $\Phi=\Phi_\pi$. La topologia di Gelfand su $\Delta\big(L^1_c(G)\big)$ è la topologia discreta.

Dimostrazione. Data $\pi\in\mathcal{P}$, Φ_π è chiaramente lineare. Inoltre,

$$\begin{aligned}\Phi_\pi(f*g)&=\frac{1}{d_\pi}\iint_{G\times G}f(xy^{-1})g(y)\overline{\chi_\pi(x)}\,dy\,dx\\ &=\frac{1}{d_\pi}\iint_{G\times G}f(x)g(y)\overline{\chi_\pi(xy)}\,dx\,dy\\ &=\frac{1}{d_\pi}\iiint_{G\times G\times G}f(x)g(z^{-1}yz)\overline{\chi_\pi(xy)}\,dz\,dx\,dy\\ &=\frac{1}{d_\pi}\iiint_{G\times G\times G}f(x)g(y)\overline{\chi_\pi(xzyz^{-1})}\,dz\,dx\,dy\\ &=\frac{1}{d_\pi^2}\iint_{G\times G}f(x)g(y)\overline{\chi_\pi(x)\chi_\pi(x)}\,dx\,dy\\ &=\Phi_\pi(f)\Phi_\pi(g)\ .\end{aligned}$$

Quindi $\Phi_\pi \in \Delta\big(L^1_c(G)\big)$. Viceversa, sia $\Phi \in \Delta\big(L^1_c(G)\big)$. Per il Teorema di Hahn-Banach, esiste $\psi \in L^\infty(G)$ tale che

$$\Phi(f) = \int_G f(x)\overline{\psi(x)}\,dx$$

per ogni $f \in L^1_c(G)$. Ma

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\overline{C\psi(x)}\,dx &= \iint_{G\times G} f(x)\overline{\psi(y^{-1}xy)}\,dy\,dx \\ &= \iint_{G\times G} f(yxy^{-1})\overline{\psi(x)}\,dy\,dx \\ &= \int_G f(x)\overline{\psi(x)}\,dx \ ,\end{aligned}$$

per cui possiamo supporre che ψ sia centrale. Allora

$$\psi(x) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}} a_\pi \chi_\pi(x) \ ,$$

per la Proposizione 3.4, e dunque $\Phi = \sum_{\pi\in\mathcal{P}} a_\pi d_\pi \Phi_\pi$.

Osserviamo ora che se $\pi \in \mathcal{P}$,

$$\Phi(\chi_\pi) = \int_G \chi_\pi(x)\overline{\psi(x)}\,dx = \overline{a_\pi} \ ,$$

e che, se π, π' sono elementi distinti di $\mathcal{P}$, allora $\chi_\pi * \chi_{\pi'} = 0$, in quanto $\chi_{\pi'}$ è ortogonale a M^π. Quindi

$$0 = \Phi(\chi_\pi * \chi_{\pi'}) = \Phi(\chi_\pi)\Phi(\chi_{\pi'}) = \overline{a_\pi a_{\pi'}} \ ,$$

da cui segue che uno solo degli a_π può essere diverso da zero. Ma allora $\Phi = \lambda\Phi_\pi$ per qualche $\lambda \neq 0$. Scegliendo f in modo che $\Phi_\pi(f) = 1$, si ricava

$$\Phi(f*f) = \lambda\Phi_\pi(f*f) = \lambda\Phi_\pi(f)^2 = \lambda \ ,$$

ma anche

$$\Phi(f*f) = \Phi(f)^2 = \lambda^2 \ ,$$

ed essendo $\Phi \neq 0$, si conclude che $\lambda = 1$.

Per l'ortogonalità dei caratteri, la trasformata di Gelfand di χ_π, con $\pi \in \mathcal{P}$, è

$$\widehat{\chi_\pi}(\Phi_{\pi'}) = \frac{\delta_{\pi,\pi'}}{d_\pi} \ .$$

Dovendo questa essere una funzione continua per la topologia di Gelfand, si conclude che questa è la topologia discreta. $\square$

4. Trasformata di Fourier

Nei paragrafi precedenti abbiamo inizialmente considerato generiche rappresentazioni unitarie irriducibili di G, e abbiamo indicato con $\mathcal{P}$ un insieme di tali rappresentazioni in cui ogni elemento appartenga a una distinta classe di equivalenza. Quindi $\mathcal{P}$ si identifica con l'*oggetto duale* di G (v. paragrafo 5 del Capitolo IV).

Abbiamo poi visto (Lemma 2.5 e Teorema 2.6) che ogni rappresentazione in $\mathcal{P}$ appare come sottorappresentazione della rappresentazione regolare sinistra L (o della destra R), *con molteciplità uguale alla dimensione della rappresentazione stessa.* Questo vuol dire che se $\pi \in \mathcal{P}$ ha dimensione d_π, esistono in $L^2(G)$ d_π sottospazi L-invarianti, a due a due ortogonali, tali che la restrizione di L a ciascuno di essi sia equivalente a π.

In questo paragrafo riformuliamo i risultati dei due paragrafi precedenti in modo diverso, con riferimento alla trasformata di Fourier non commutativa descritta in modo generale alla fine del Cap. IV. Otterremo così estensioni non commutative del teorema di Riemann-Lebesgue e delle formule di Plancherel e di inversione.

Ricordiamo che, data $f \in L^1(G)$, si chiama *trasformata di Fourier* di f la famiglia di operatori $\big\{\pi(f)\big\}_{\pi\in\mathcal{P}}$, dove

$$\pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)\,dx\ .$$

Il teorema che segue estende il Teorema di Riemann-Lebesgue.

Teorema 4.1. *Sia $f \in L^1(G)$. Dato $\varepsilon > 0$, si ha $\|\pi(f)\| < \varepsilon$ per tutte le $\pi \in \mathcal{P}$ tranne al massimo un numero finito.*

Dimostrazione. Consideriamo inizialmente $f \in M^\pi$, con $\pi \in \mathcal{P}$ e sia $\sigma \in \mathcal{P}$. Se $v, w \in H_\sigma$,

$$\begin{aligned}\langle\sigma(f)v, w\rangle &= \int_G f(x)\langle\sigma(x)v, w\rangle\,dx\\ &= \int_G f(x)\varphi^\sigma_{w,v}(x)\,dx\\ &= \langle f, \varphi^{\sigma'}_{w',v'}\rangle_{L^2}\ ,\end{aligned}$$

dove σ' è la rappresentazione controgradiente di σ e v', w' sono opportuni elementi in H'_σ. Ma $f \perp M^{\sigma'}$, a meno che non sia $\sigma' \equiv \pi$. Quindi $\sigma(f) = 0$ tranne per al più un'unico elemento di $\mathcal{P}$.

Lo spazio X dei polinomi trigonometrici (v. paragrafo 2), costituito dalle combinazioni lineari finite di elementi dei vari M^π, con $\pi \in \mathcal{P}$, è denso in $L^1(G)$. Per quanto appena visto, la tesi è vera banalmente per $f \in X$.

Data una generica $f \in L^1(G)$ e dato $\varepsilon > 0$, sia $g \in X$ tale che $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Allora

$$\|\pi(f) - \pi(g)\| = \|\pi(f - g)\| \leq \|f - g\|1 < \varepsilon$$

per ogni $\pi \in \mathcal{P}$. La conclusione segue facilmente. $\square$

Ricordiamo ora la nozione di *operatore di Hilbert-Schmidt* su uno spazio di Hilbert H.

Definizione. *Un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ si dice di Hilbert-Schmidt se, data un base ortonormale $\{e_i\}_{i\in I}$ di H, si ha*

$$\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2 \overset{\text{def}}{=} \|T\|_{HS}^2 < \infty \ . \tag{4.1}$$

Un altro modo per esprimere la norma di Hilbert-Schmidt è ovviamente il seguente:

$$\|T\|_{HS}^2 = \sum_{i,j\in I} \left|\langle Te_i, e_j\rangle\right|^2 \ .$$

Lemma 4.2. *Se $\|T\|_{op}$ indica la norma di T in $\mathcal{L}(H)$, si ha $\|T\|_{op} \leq \|T\|_{HS}$; inoltre la somma (4.1) non dipende dalla scelta della base ortonormale.*

Lo spazio $HS(H)$ degli operatori di Hilbert-Schmidt su H è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle T, S\rangle = \operatorname{tr}(TS^*) = \operatorname{tr}(S^*T) = \sum_i \langle Te_i, Se_i\rangle \ . \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Se $v = \sum \alpha_i e_i$,

$$\|Tv\| \leq \sum_i |\alpha_i| \|Te_i\| \leq \|T\|_{HS}\|v\| \ .$$

Sia poi $\{f_j\}$ un'altra base ortonormale, e sia $f_j = \sum_i c_{i,j}e_i$. Allora

$$\begin{aligned}\sum_j \|Tf_j\|^2 &= \sum_j \langle T^*Tf_j, f_j\rangle \\ &= \sum_{i,j,k} c_{i,j}\overline{c_{k,j}}\langle T^*Te_i, e_k\rangle \ .\end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned}\sum_j c_{i,j}\overline{c_{k,j}} &= \sum_j \langle f_j, e_i\rangle\overline{\langle f_j, e_k\rangle} \\ &= \langle e_i, e_k\rangle = \delta_{i,k} \ .\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_j \|Tf_j\|^2 = \sum_i \langle T^*Te_i, e_i\rangle = \sum_i \|Te_i\|^2 \ .$$

Che $HS(H)$ sia uno spazio pre-Hilbertiano è abbastanza evidente. La sua completezza segue facilmente dal fatto che, se I indicizza gli elementi di una base ortonormale di H, l'operatore che manda $T \in HS(H)$ nella funzione $\{\|Te_i\|\}$ è unitario da $HS(H)$ su $\ell^2(I)$. $\square$

Naturalmente in dimensione finita tutti gli operatori lineari sono di Hilbert-Schmidt.

Teorema 4.3 (formula di Plancherel). *Se* $f \in L^2(G)$,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\pi\in\mathcal{P}} d_\pi \|\pi(f)\|_{HS}^2 \ .$$

Viceversa, data una famiglia di operatori $\{T_\pi\}_{\pi\in\mathcal{P}}$, *con* $T_\pi \in \mathcal{L}(H_\pi)$ *tale che*

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}} d_\pi \|T_\pi\|_{HS}^2 < \infty \ ,$$

esiste $f \in L^2(G)$ *tale che* $\pi(f) = T_\pi$ *per ogni* π.

Dimostrazione. Siano $\pi \in \mathcal{P}$ e $\{e_j\}$ una base ortonormale di H_π. Allora

$$\begin{aligned}
\|\pi(f)\|_{HS}^2 &= \sum_{i,j=1}^{d_\pi} \big|\langle \pi(f)e_j, e_i\rangle\big|^2 \\
&= \sum_{i,j} \left| \int_G f(x) \sum_j \varphi_{i,j}^\pi(x)\, dx \right|^2 \\
&= \sum_{i,j} \big|\langle \varphi_{i,j}^\pi, \bar f\rangle_{L^2}\big|^2 \\
&= \frac{1}{d_\pi} \|P^\pi \bar f\|_2^2 \ .
\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}} d_\pi \|\pi(f)\|_{HS}^2 = \sum_{\pi\in\mathcal{P}} \|P^\pi \bar f\|_2^2 = \|\bar f\|_2^2 = \|f\|_2^2 \ .$$

Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato, per ogni $\pi \in \mathcal{P}$, sia $\{e_j^\pi\}_{1\le j\le d_\pi}$ una base ortonormale di H_π.

Vogliamo trovare $f \in L^2(G)$ tale che $\langle \pi(f)e_k, e_j\rangle = \langle T_\pi e_k, e_j\rangle$ per ogni π e ogni j,k. Ma

$$\langle \pi(f)e_k, e_j\rangle = \int_G f(x)\varphi_{j,k}^\pi(x)\, dx = \langle \varphi_{j,k}^\pi, \bar f\rangle_{L^2} \ ,$$

per cui si richiede alla funzione $\bar f$ di avere coefficienti uguali a $\sqrt{d_\pi}\langle e_j, T_\pi e_k\rangle$ nella base ortonormale di $L^2(G)$ data dal Teorema di Peter-Weyl.

Una tale funzione esiste in $L^2(G)$ a condizione che

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}} d_\pi \sum_{j,k=1}^{d_\pi} \big|\langle e_j, T_\pi e_k\rangle\big|^2 < \infty \ .$$

Ma questa è esattamente la condizione imposta ai T_π. □

Passiamo infine alla formula di inversione. Partiamo dalla formula implicita nel Teorema di Peter-Weyl, ossia

$$f(x) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}} d_\pi \sum_{j,k=1}^{d_\pi} \langle f, \varphi_{j,k}^\pi\rangle_{L^2} \varphi_{j,k}^\pi(x) \ , \tag{4.3}$$

dove la convergenza è in norma L^2. Si tratta di riformulare tale identità in termini degli operatori $\pi(f)$.

Teorema 4.4 (formula di inversione). *Se $f \in L^2(G)$, allora*

$$f(x) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}} d_\pi \operatorname{tr}\left(\pi(f)\pi(x)^*\right) , \tag{4.4}$$

dove la serie converge in norma L^2.

Dimostrazione. Sia $\tilde{\pi} \in \mathcal{P}$ la rappresentazione equivalente alla controgradiente di $\pi \in \mathcal{P}$. Per la Proposizione 2.6 e con le stesse notazioni,

$$\langle f, \varphi^\pi_{j,k} \rangle_{L^2} = \int_G f(x) \varphi^{\tilde{\pi}}_{j,k}(x)\, dx = \langle \tilde{\pi}(f) \tilde{e}_k, \tilde{e}_j \rangle .$$

Quindi, essendo anche $\varphi^\pi_{j,k}(x) = \overline{\varphi^{\tilde{\pi}}_{j,k}(x)} = \varphi^{\tilde{\pi}}_{k,j}(x^{-1})$,

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{d_\pi} \langle f, \varphi^\pi_{j,k} \rangle_{L^2} \varphi^\pi_{j,k}(x) &= \sum_{j,k=1}^{d_{\tilde{\pi}}} \langle \tilde{\pi}(f) \tilde{e}_k, \tilde{e}_j \rangle \varphi^{\tilde{\pi}}_{k,j}(x^{-1}) \\ &= \operatorname{tr}\left(\tilde{\pi}(f) \tilde{\pi}(x^{-1})\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\tilde{\pi}(f) \tilde{\pi}(x)^*\right) . \end{aligned}$$

Sempre per la Proposizione 2.6, la somma su π può essere sostituita dalla somma su $\tilde{\pi}$, e la tesi segue facilmente. □

Come per le serie di Fourier sul toro, viene naturale chiedersi che tipo di convergenza si ha per la serie (4.3), o equivalentemente per la serie (4.4), supponendo che f sia in altri spazi funzionali.

Posta in questa generalità, la domanda non ha una risposta, neanche se si suppone G abeliano. Sono disponibili risposte specifiche per gruppi specifici. Nel paragrafo seguente discuteremo un caso semplice ma rilevante, quello del gruppo $SU(2)$.

5. Analisi di Fourier su $SU(2)$

Il gruppo $SU(n)$ (la lettera S sta per "speciale") consiste delle matrici complesse $n \times n$ unitarie e con determinante uguale a 1. Dall'identità $xx^* = I$ per $x \in U(n)$, si ricava che $|\det x| = 1$. Si vede facilmente che $SU(n)$ è un sottogruppo proprio di $U(n)$. L'applicazione φ di $SU(n) \times \mathbb{T}$ in $U(n)$ che alla coppia $(x, e^{i\theta})$ associa $e^{i\theta}x$ è chiaramente suriettiva, e il suo nucleo è costituito dalle coppie $(e^{i\theta}I, e^{-i\theta})$, con $e^{i\theta}I \in SU(n)$. Questo richiede che $e^{i\theta}$ sia una radice n-esima dell'unità. Possiamo quindi dire che

$$U(n) \sim \big(SU(n) \times \mathbb{T}\big) / \ker\varphi ,$$

dove $\ker\varphi \sim \mathbb{Z}_n$.

Limitiamoci ora al caso $n = 2$. Un generico elemento di $SU(2)$ è una matrice complessa

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} ,$$

su cui imponiamo innanzitutto la condizione $x^*x = I$, per cui deve essere

$$\begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \\ \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} = 0 \ . \end{cases}$$

Quindi i due vettori (α, β) e (γ, δ) sono unitari e ortogonali in $\mathbb{C}^2$. Poiché $(-\bar{\beta}, \bar{\alpha})$ è, a meno di multipli scalari, l'unico vettore ortogonale a (α, β), deve essere, tenuto anche conto delle normalizzazioni, $(\gamma, \delta) = e^{it}(-\bar{\beta}, \bar{\alpha})$.

Imponendo ora la condizione sul detrminante, si ottiene $e^{it} = 1$. In conclusione, il generico elemento di $SU(2)$ è

$$x_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \ ,$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Come insieme, $SU(2)$ si identifica in modo naturale con la sfera unitaria S^3 in $\mathbb{C}^2$. Poiniamo quindi su $SU(2)$ la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{C}^2$. Il prodotto su $SU(2)$ è

$$x_{\alpha,\beta} x_{\alpha',\beta'} = x_{\alpha\alpha' - \bar{\beta}\beta', \beta\alpha' + \bar{\alpha}\beta'} \ ,$$

per cui il prodotto è continuo. Lo stesso vale per l'inversione, in quanto

$$x_{\alpha,\beta}^{-1} = x_{\alpha,\beta}^* = x_{\bar{\alpha},-\beta} \ .$$

È utile analizzare le classi di coniugazione in $SU(2)$,

$$C_x = \{y^{-1}xy : y \in SU(2)\} \ ,$$

essendo questi gli insiemi su cui le funzioni centrali sono costanti.

Lemma 5.1. *Ogni elemento $x \in SU(2)$ è coniugato con un elemento diagonale*

$$t_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \ ;$$

due elementi diagonali t_θ e $t_{\theta'}$ sono coniugati tra loro se e solo se $\theta = \pm\theta'$ mod (2π). *Le classi di coniugazione in $SU(2)$ sono dunque in corrispondenza biunivoca con gli elementi $\theta \in [0, \pi]$, essendo*

$$C_\theta = \{x_{\alpha,\beta} : \Re e \alpha = \cos\theta\}.$$

Dimostrazione. Dato $x = x_{\alpha,\beta} \in SU(2)$, la sua equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - 2\lambda \Re e \alpha + 1 = 0 \ .$$

Ponendo $\Re e \alpha = \cos\theta$, con $\theta \in [0, \pi]$, gli autovalori sono $e^{\pm i\theta}$. Se $\theta = 0$, necessariamente $\alpha = 1$, $\beta = 0$, e dunque $x = I$ è già diagonale. Analogamente, se $\theta = \pi$, $x = -I$.

Se $0 < \theta < \pi$, gli autovalori $e^{\pm i\theta}$ sono distinti e per ognuno di essi c'è un autovettore $v_\pm \in \mathbb{C}^2$ di norma unitaria. Ma

$$\langle v_+, v_- \rangle = \langle xv_+, xv_- \rangle = e^{2i\theta} \langle v_+, v_- \rangle \ ,$$

per cui $\langle v_+, v_- \rangle = 0$. Se $y \in U(2)$ è la matrice avente v_+ e v_- come colonne, allora $x = y^{-1} t_\theta y$. Sia $\omega \in \mathbb{T}$ tale che $\omega^2 = \det y$; allora $\tilde{y} = e^{-i\omega} y \in SU(2)$ e $x = \tilde{y}^{-1} t_\theta \tilde{y}$. Dunque x è coniugato con t_θ.

Poiché due elementi coniugati hanno gli stessi autovalori, due elementi diagonali distinti t_θ e $t_{\theta'}$ possono essere diagonali solo se $\theta = -\theta'$. D'altra parte, se

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SU(2) \ ,$$

si verifica facilmente che $t_{-\theta} = w^{-1} t_\theta w$. L'ultima affermazione è ora evidente. □

Introducendo in S^3 coordinate reali (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_1 + ix_2 = \alpha$, $x_3 + ix_4 = \beta$, la classe di coniugazione C_θ corrisponde al "parallelo" $x_1 = \cos\theta$ relativo al "polo" $e = (1, 0, 0, 0)$.

Si noti anche che una traslazione destra

$$R_{x_{\gamma,\delta}} x_{\alpha,\beta} = x_{\alpha\gamma - \bar{\beta}\delta, \beta\gamma + \bar{\alpha}\delta}$$

è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare di $C^2 \sim \mathbb{R}^4$ in sé, ed è ortogonale, in quanto

$$\left\| (\alpha\gamma - \bar{\beta}\delta, \beta\gamma + \bar{\alpha}\delta) \right\|^2 = |\alpha\gamma - \bar{\beta}\delta|^2 + |\beta\gamma + \bar{\alpha}\delta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \ .$$

Quindi le traslazioni destre lasciano invariata la misura di Hausdorff 3-dimensionale su S^3, e questa risulta essere una misura di Haar su $SU(2)$. Nel seguito indicheremo con dx la misura di Haar normalizzata su $SU(2)$.

Ci proponiamo ora di descrivere le rappresentazioni unitarie irriducibili. Vi è innanzitutto una naturale rappresentazione τ di $SU(2)$ in $\mathbb{C}^2$, detta anche *rappresentazione tautologica*, data da

$$\tau(x)v = xv \ .$$

Questa induce un'altrettanto naturale azione di $SU(2)$ sullo spazio $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ (per ora dotato della sola struttura algebrica) dei polinomi in due variabili,

$$\big(\sigma(x)P\big)(z) = P(x^{-1}z) \ .$$

Indichiamo con H_n il sottospazio di $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ costituito dai polinomi omogenei di grado n:

$$P(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^{n-k} z_2^k \ .$$

Ogni H_n è σ-invariante, e indichiamo con π_n la restrizione di σ a H_n. Avendo H_n dimensione finita, uguale a $n+1$, norme diverse su di esso sono equivalenti, e si vede facilmente che $\pi_n : SU(2) \to \mathcal{L}(H_n)$ è continua. Se introduciamo su H_n il prodotto scalare di $L^2(S^3)$ rispetto alla misura di Hausdorff normalizzata dz,

$$\langle P, Q \rangle = \int_{S^3} P(z) \overline{Q(z)} \, dz \ ,$$

si ha $d(xz) = dz$ per ogni $x \in SU(2)$, e dunque

$$\langle \pi(x)P, \pi(x)Q \rangle = \langle P, Q \rangle \ ,$$

per cui π_n è unitaria.

Teorema 5.2. *Le rappresentazioni π_n sono irriducibili. Ogni rappresentazione irriducibile di $SU(2)$ è equivalente a una e una sola delle π_n.*

Dimostrazione. Sia $V \subseteq H_n$ un sottospazio invariante non banale. Se

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^{n-k} z_2^k$$

è in V e non nullo, allora anche

$$P_\theta(z) = P(t_\theta^{-1} z) = \sum_{k=0}^{n} e^{-i(n-2k)\theta} a_k z_1^{n-k} z_2^k$$

è in V. Sia $a_k \neq 0$. Allora appartiene pure a V il monomio

$$\frac{1}{2\pi a_k} \int_0^{2\pi} P_\theta(z) e^{i(n-2k)\theta}\, d\theta = z_1^{n-k} z_2^k \ .$$

Quindi V contiene almeno un monomio e, se contiene un polinomio, contiene anche tutti i monomi che lo compongono.

Consideriamo ora gli elementi di $SU(2)$ della forma

$$u_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \ .$$

Se V contiene un polinomio P, contiene anche

$$P_\varphi(z) = P(u_\varphi^{-1} z) = P(\cos\varphi z_1 + \sin\varphi z_2, -\sin\varphi z_1 + \cos\varphi z_2) \ .$$

Ma allora anche il polinomio

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi\to 0} \frac{1}{\varphi}(P_\varphi - P) &= \frac{d}{d\varphi}_{|\varphi=0} P_\varphi \\ &= z_2 \frac{\partial P}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial P}{\partial z_2} \end{aligned}$$

è in V.

Sia quindi $z_1^{n-k} z_2^k$ un monomio in V. Allora

$$\left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)(z_1^{n-k} z_2^k) = (n-k) z_1^{n-k-1} z_2^{k+1} - k z_1^{n-k+1} z_2^{k-1}$$

è in V. Questo implica che anche i monomi “adiacenti” $z_1^{n-k-1} z_2^{k+1}$ e $z_1^{n-k+1} z_2^{k-1}$ sono in V (finché gli esponenti sono non negativi). Iterando questo argomento si conclude che V contiene tutti i monomi di grado n, e dunque $V = H_n$.

Quindi le rappresentazioni π_n sono irriducibili. Chiaramente esse sono tra loro non equivalenti, avendo dimensioni diverse.

Per dimostrare che, a meno di equivalenza, queste sono tutte le rappresentazioni irriducibili, ne calcoliamo i caratteri e dimostriamo che essi generano un sottospazio denso in $C_c(G)$. Per la Proposizione 3.4 e la densità di $C_c(G)$ in $L^2_c(G)$ (la dimostrazione di questa affermazione è lasciata per esercizio), si ha allora la conclusione.

Poiché i caratteri sono funzioni centrali, è sufficiente calcolarli sugli elementi diagonali t_θ. Osserviamo che

$$\pi_n(t_\theta)(z_1^{n-k}z_2^k) = (e^{-i\theta}z_1)^{n-k}(e^{i\theta}z_2)^k = e^{-i(n-2k)\theta}z_1^{n-k}z_2^k \ .$$

Rispetto alla base di H_n costituita dai monomi, $\pi_n(t_\theta)$ è rappresentato dunque dalla matrice diagonale

$$\pi_n(t_\theta) = \begin{pmatrix} e^{-in\theta} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-i(n-2)\theta} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{in\theta} \end{pmatrix} .$$

Quindi

$$\begin{aligned} \chi_n(t_\theta) &= \operatorname{tr}\big(\pi_n(t_\theta)\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{-i(n-2k)\theta} \ . \end{aligned}$$

Diamo due espressioni diverse per questa somma. La prima consiste nel sommare i termini con esponenti opposti, per cui

$$\chi_n(t_\theta) = \begin{cases} 2\cos n\theta + 2\cos(n-2)\theta + \cdots + 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 2\cos n\theta + 2\cos(n-2)\theta + \cdots + 2\cos\theta & \text{se } n \text{ è dispari} \ . \end{cases} \tag{5.1}$$

La seconda usa la formula per la somma di una progressione geometrica:

$$\chi_n(t_\theta) = e^{-in\theta}\frac{e^{i(2n+2)\theta}-1}{e^{2i\theta}-1} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \ . \tag{5.2}$$

Indichiamo ora con $C_c(G)$ l'algebra (rispetto al prodotto puntuale) delle funzioni continue centrali su G. L'applicazione di $C_c(G)$ in $C\big([0,\pi]\big)$ che associa a f la funzione $\tilde f(\theta) = f(t_\theta)$ è chiaramente un isomorfismo. Basta allora far vedere che le funzioni $\tilde\chi_n(\theta) = \chi_n(t_\theta)$ generano un sottospazio uniformemente denso in $C\big([0,\pi]\big)$.

Per la (5.1), $\chi_n(t_\theta) - \chi_{n-2}(t_\theta) = 2\cos n\theta$, e $\chi_0(t_\theta) = 1$, per cui ci riduciamo a mostrare che le funzioni $\cos n\theta$, al variare di $n \in \mathbb{N}$, generano un sottospazio denso di $C\big([0,\pi]\big)$.

Possiamo applicare il Teorema di Stone-Weierstrass: abbiamo un sottospazio che separa i punti, contiene le costanti ed è invariante per coniugazione. Infine esso è un'algebra, come conseguenza della formula $2\cos n\theta\,\cos m\theta = \cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta$. $\square$

Data $f \in L^1\big(SU(2)\big)$, possiamo quindi considerare, sulla base della (4.4) la sua *serie di Fourier*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\operatorname{tr}\big(\pi(f)\pi(x)^*\big) \ , \tag{5.3}$$

e discutere la sua convergenza in $L^p\big(SU(2)\big)$ per $p \neq 2$, in senso ordinario, di Cesaro, di Abel ecc. Ci limitiamo qui a dimostrare la convergenza nel senso di Abel in $L^p\big(SU(2)\big)$ per $\leq p < \infty$ e in $C\big(SU(2)\big)$, ossia la convergenza, nelle rispettive norme, di

$$f_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (n+1) \mathrm{tr}\,\big(\pi(f)\pi(x)^*\big)$$

a f, al tendere di $r < 1$ a 1.

Ricordiamo dal paragrafo precedente che l'addendo $(n+1)\mathrm{tr}\,\big(\pi(f)\pi(x)^*\big)$ è esattamente la proiezione ortogonale in $L^2\big(SU(2)\big)$ di f su M^{π_n}, per cui (v. Teorema 3.2)

$$(n+1)\mathrm{tr}\,\big(\pi(f)\pi(x)^*\big) = (n+1)\chi_{\pi_n} * f \ .$$

Dimostreremo che le funzioni

$$K_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (n+1)\chi_n(x) \tag{5.4}$$

formano, al tendere di $r \to 1^-$, un'identità approssimata in $L^1\big(SU(2)\big)$. Il calcolo esplicito dà

$$\begin{aligned}
K_r(t_\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n (n+1) \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{1}{\sin\theta} \Im\mathrm{m} \bigg(\sum_{n=0}^{\infty} r^n (n+1) e^{i(n+1)\theta} \bigg) \\
&= \frac{1}{\sin\theta} \Im\mathrm{m} \bigg(\frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} \bigg) \\
&= \frac{1}{\sin\theta} \Im\mathrm{m} \bigg(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{1 - re^{i\theta}} \bigg) \\
&= \frac{1}{\sin\theta} \Im\mathrm{m} \bigg(\frac{e^{i\theta}}{(1 - re^{i\theta})^2} \bigg) \\
&= \frac{1}{\sin\theta} \frac{\Im\mathrm{m}\big(e^{i\theta}(1 - re^{-i\theta})^2\big)}{|1 - re^{i\theta}|^4} \\
&= \frac{1 - r^2}{(1 + r^2 - 2r\cos\theta)^2} \ .
\end{aligned}$$

Per calcolare integrali su $SU(2)$ di funzioni centrali, serve una formula che li riporti a integrali su $[0, \pi]$.

Lemma 5.3. *Sia f una funzione centrale integrabile su $SU(2)$. Allora*

$$\int_{SU(2)} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t_\theta) \sin^2\theta\, d\theta \ .$$

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione lineare B che a una funzione f definita su $[0, \pi]$ associa la funzione centrale Bf su $SU(2)$. Il funzionale lineare

$$\lambda(f) = \int_{SU(2)} Bf(x)\,dx$$

è positivo su $C\big([0,\pi]\big)$, per cui esiste una misura positiva μ su $[0,\pi]$ tale che

$$\int_{SU(2)} f(x)\,dx = \int_0^\pi f(t_\theta)\,d\mu(\theta)\ .$$

Indichiamo con ν la misura su $[-\pi,\pi]\sim\mathbb{T}$ ottenuta come estensione pari di μ. Allora

$$\hat\nu(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\,d\nu(\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos n\theta\,d\mu(\theta)\ .$$

Per la (5.1), se $n\ge 0$,

$$\cos n\theta = \begin{cases} \frac12\big(\chi_n(t_\theta)-\chi_{n-2}(t_\theta)\big) & \text{se } n\ge 2\\ \frac12\chi_1(t_\theta) & \text{se } n=1\\ \chi_0(t_\theta) & \text{se } n=0\ .\end{cases}$$

Allora, per $|n|\ge 2$,

$$\begin{aligned}\hat\nu(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \big(\chi_{|n|}(t_\theta)-\chi_{|n|-2}(t_\theta)\big)\,d\mu(\theta)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{SU(2)} \big(\chi_{|n|}(x)-\chi_{|n|-2}(x)\big)\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\langle\chi_{|n|}-\chi_{|n|-2},\chi_0\rangle\\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } |n|\ge 3\\ -\frac{1}{2\pi} & \text{se } n=\pm 2\ ,\end{cases}\end{aligned}$$

e analogamente,

$$\hat\nu(\pm 1) = 0\ ,\qquad \hat\nu(0) = \frac{1}{\pi}\ .$$

Quindi

$$\nu = \frac{1}{\pi}\Big(1-\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}\Big) = \frac{2}{\pi}\sin^2\theta\ ,$$

e μ si ricava restringendo ν a $[0,\pi]$. $\square$

Teorema 5.4. *I nuclei K_r formano un'identità approssimata per $r\to 1^-$.*

Dimostrazione. I nuclei K_r sono positivi, per cui

$$\begin{aligned}\|K_r\|_1 &= \int_{SU(2)} K_r(x)\,dx\\ &= \sum_{n=0}^\infty r^n(n+1)\int_G \chi_n(x)\,dx\\ &= \sum_{n=0}^\infty r^n(n+1)\langle\chi_n,\chi_0\rangle\\ &= 1\ .\end{aligned}$$

Al variare di $\delta>0$, gli insiemi

$$B_\delta = \{x_{\alpha,\beta} : \Re\mathrm{e}\,\alpha > 1-\delta\}$$

formano un sistema fondamentale di intorni dell'identità in $SU(2)$. Si ha

$$\int_{SU(2)\setminus B_\delta} K_r(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{\theta_\delta}^{\pi} \frac{1-r^2}{(1+r^2-2r\cos\theta)^2}\sin^2\theta\,d\theta\ ,$$

dove θ_δ è tale che $\cos\theta_\delta = 1-\delta$. Per la disuguaglianza $\sin^2\theta \le 1+r^2-2r\cos\theta$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_{\theta_\delta}^{\pi} \frac{1-r^2}{(1+r^2-2r\cos\theta)^2}\sin^2\theta\,d\theta &\le \frac{2}{\pi}\int_{\theta_\delta}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\,d\theta \\ &\le 2\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta_\delta}\ ,\end{aligned}$$

che tende a 0 per r tendente a 1. $\square$

CAPITOLO VI
IL GRUPPO DI HEISENBERG

1. I gruppi di Heisenberg

I gruppi di Heisenberg sono, in vari sensi, i più vicini a $\mathbb{R}^n$ tra i gruppi non commutativi. Dal punto di vista topologico, il gruppo che indicheremo con $\mathbb{H}_n$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^{2n+1}$. Inoltre la sua formula di moltiplicazione appare come una "perturbazione" della somma su una sola delle componenti. In aggiunta, le rappresentazioni unitarie irriducibili di $\mathbb{H}_n$ contengono in sé molte informazioni proprie dell'analisi di Fourier di $\mathbb{R}^n$. Infine, vi sono aspetti legati all'analisi complessa per cui $\mathbb{H}_n$ appare come il naturale sostituto di $\mathbb{R}$ nel passaggio da una a più variabili complesse.

Il gruppo $\mathbb{H}_n$ può essere descritto in diversi modi equivalenti, la cui maggiore o minore convenienza dipende dal contesto. Diamo le tre descrizioni che, a meno di modificazioni minori, sono quelle di uso più frequente.

Proposizione 1.1. *I gruppi sotto elencati sono isomorfi tra loro:*

(i) *il gruppo delle matrici reali di dimensione* $(n+2)\times(n+2)$ *della forma*

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & c \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

con il prodotto di matrici;

(ii) $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ *con il prodotto*

$$(x,y,t)(x',y',t') = \big(x+x', y+y', t+t'+\alpha(x\cdot y' - y\cdot x')\big)\ , \tag{1.2}$$

con $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *e dove* $x,y,x',y'\in\mathbb{R}^n$, $t,t'\in\mathbb{R}$ *e "$\cdot$" indica il prodotto scalare in* $\mathbb{R}^n$*;*

Con la topologia ereditata in modo naturale da $\mathbb{R}^{2n+1}$*, ciascuno di essi fornisce una descrizione equivalente del* gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}_n$.

Dimostrazione. Si vede facilmente che le matrici della forma (1.1) formano un gruppo e che le operazioni sono continue rispetto alla topologia Euclidea. Analogamente, le proprietà di gruppo e la continuità delle operazioni sono verificate per il prodotto (1.2).

Indichiamo con G_0 e G_α i gruppi rispettivamente descritti da (i) e (ii). Consideriamo l'applicazione $\varphi : G_{1/2} \to G_0$ data da

$$\varphi(x,y,t) = \exp\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & y_n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & t + \frac{1}{2}x\cdot y \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

È facile vedere che φ è un omomorfismo e che è biiettivo. Quindi G_0 e $G_{1/2}$ sono isomorfi. È altrettanto facile vedere poi che

$$\psi_\alpha(x,y,t) = (x,y,2\alpha t)$$

è un isomorfismo di $G_{1/2}$ su G_α. $\square$

Conviene in molti casi usare coordinate complesse nella (1.2), ponendo $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$ e definendo su $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ il prodotto

$$(z,t)(z',t') = \big(z + z', t + t' - \alpha \Im\mathrm{m}\langle z, z'\rangle\big) , \tag{1.2'}$$

dove $\langle\ ,\ \rangle$ indica il prodotto Hermitiano in $\mathbb{C}^n$.

Nel seguito useremo il prodotto nella forma (1.2) o (1.2') indifferentemente. Salvo avviso contrario, porremo $\alpha = 1/2$. Osserviamo che l'identità coincide con l'origine $0 = (0,0,0)$. Altre semplici identità sono:

$$(x,y,t)^{-1} = (-x,-y,-t)$$
$$(x,y,t)(x',y',t')(x,y,t)^{-1} = (x', y', t' + x\cdot y' - y\cdot x') .$$

Dalla seconda si vede che $\mathbb{H}_n$ non è commutativo e che il suo centro $\mathbf{Z}$ è costituito dagli elementi $(0,0,t)$, con $t \in \mathbb{R}$. Inoltre

$$\mathbb{H}_n/\mathbf{Z} \sim \mathbb{R}^{2n} , \tag{1.3}$$

nel senso che ogni classe laterale modulo $\mathbf{Z}$ è determinata dalle prime due componenti (x,y), e che il prodotto nel gruppo quoziente coincide con la somma di tali vettori in $\mathbb{R}^{2n}$.

Proposizione 1.2. *Il gruppo di Heisenberg è unimodulare e la sua misura di Haar coincide con la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Dimostrazione. Basta osservare che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f\big((x,y,t)(x',y',t')\big)\,dx\,dy\,dt &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f\big((x+x',y+y',t+t'+(1/2)(x\cdot y'-y\cdot x'))\big)\,dx\,dy\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f\big((x+x',y+y',t)\big)\,dx\,dy\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(x,y,t)\,dx\,dy\,dt\ .\end{aligned}$$

Quindi la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni destre. Un calcolo simile mostra che essa è anche invariante per traslazioni sinistre. □

Segnaliamo che vi è un modo più "intrinseco" di definire il gruppo di Heisenberg, a partire da un generico spazio vettoriale dotato di una forma simplettica.

Definizione. *Una forma bilineare ω su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita si dice* non degenere *se la condizione $\omega(v,w)=0$ per ogni $w\in V$ implica che $v=0$. Una forma bilineare antisimmetrica e non degenere si chiama una* forma simplettica.

Se ω è una forma simplettica su V, indichiamo con $\mathbb{H}_\omega$ il gruppo $V\times\mathbb{R}$ con il prodotto

$$(v,t)(v',t') = \big(v+v',t+t'+\omega(v,v')\big)\ . \tag{1.4}$$

Anche qui le operazioni di gruppo sono facilmente verificate. Il seguente risultato mostra che ogni gruppo $\mathbb{H}_\omega$ è isomorfo a un $\mathbb{H}_n$.

Proposizione 1.3. *Sia ω una forma simplettica su V. Allora V ha dimensione pari e ammette una* base simplettica *$\{e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n\}$, tale cioè che per ogni j,k,*

$$\begin{gathered}\omega(e_j,e_k)=\omega(f_j,f_k)=0\ ,\\ \omega(e_j,f_k)=\delta_{j,k}\ .\end{gathered}$$

Dimostrazione. Dato $w\in V$, sia $\lambda_w\in V'$ il funzionale dato da $\lambda_w(v)=\omega(v,w)$. Se $\lambda_w=0$, allora $w=0$ perché ω è non degenere. Quindi l'applicazione $\lambda: V\to V'$ è iniettiva, e dunque suriettiva per motivi di dimensione.

Fissiamo $e_1\neq 0$ in modo arbitrario. Poiché ω è non degenere, esiste f_1 tale che $\omega(e_1,f_1)=1$. Per antisimmetria, $\omega(e_1,e_1)=\omega(f_1,f_1)=0$. In particolare, f_1 è linearmente indipendente da e_1.

Se $\dim V>2$, esiste $e_2\neq 0$ tale che $\lambda_{e_2}(e_1)=\lambda_{e_2}(f_1)=0$. Necessariamente e_2 è linearmente indipendente da e_1 e f_1. Se fosse infatti $e_2=ae_1+bf_1$, sarebbe $b=\omega(e_1,e_2)=0$ e anche $a=-\omega(f_1,e_2)=0$.

Poiché ω è non degenere, esiste poi f_2 tale che $\omega(e_2,f_2)=1$. Per costruzione, tale f_2 è linearmente indipendente da e_1,f_1,e_2.

Procedendo induttivamente, si giunge a costruire una base simplettica di V e a concludere che $\dim V$ è pari. $\square$

Ponendo $v = \sum_{j=1}^n (x_j e_j + y_j f_j)$ e $v' = \sum_{j=1}^n (x'_j e_j + y'_j f_j)$, il prodotto (1.4) si riduce al prodotto (1.2) con $\alpha = 1$.

2. La formula di Plancherel

In questo paragrafo descriveremo due famiglie di rappresentazioni di $\mathbb{H}_n$. Vedremo nel seguito che esse sono, a meno di equivalenza, tutte le rappresentazioni unitarie irriducibili di $\mathbb{H}_n$. Iniziamo con alcune proprietà di carattere generale.

Lemma 2.1. *Sia π una rappresentazione unitaria irriducibile di $\mathbb{H}_n$. Esiste allora $\lambda = \lambda(\pi) \in \mathbb{R}$ tale che $\pi(0,0,t) = e^{i\lambda t} I$. Se $\pi_1 \sim \pi_2$, allora $\lambda(\pi_1) = \lambda(\pi_2)$.*

Dimostrazione. Poiché $(0,0,t)$ è nel centro di $\mathbf{Z}$ di $\mathbb{H}_n$,

$$\pi(0,0,t)\pi(x,y,u) = \pi\big((0,0,t)(x,t,u)\big) = \pi(x,y,u)\pi(0,0,t)$$

per ogni $(x,y,t) \in \mathbb{H}_n$. Quindi $\pi(0,0,t) \in \mathcal{I}(\pi,\pi)$ e, per il Lemma di Schur, $\pi(0,0,t) = c(t)I$, con $c(t) \in \mathbb{T}$. Ma $c(t)$ risulta essere un carattere di $\mathbb{R}$, da cui segue la prima affermazione. La seconda è ovvia. $\square$

Consideriamo prima il caso $\lambda = 0$.

Proposizione 2.2. *Se π è unitaria irriducibile e $\lambda(\pi) = 0$, allora π ha dimensione 1 ed esiste $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tale che $\pi(x,y,t) = e^{i(\xi\cdot x + \eta\cdot y)}$.*

Dimostrazione. Se $\lambda(\pi) = 0$, vuol dire che π è banale sul centro $\mathbf{Z}$ di $\mathbb{H}_n$. Passando al quoziente, essa induce una rappresentazione unitaria irriducibile di $\mathbb{H}_n/\mathbf{Z} \sim \mathbb{R}^{2n}$, secondo quanto detto in relazione alla (1.3). $\square$

Supponiamo ora $\lambda \neq 0$.

Lemma 2.3. *Siano σ_1, σ_2 due rappresentazioni unitarie di $\mathbb{R}^n$ su uno stesso spazio di Hilbert H, tali che*

$$\sigma_1(x)\sigma_2(y) = e^{i\lambda x\cdot y}\sigma_2(y)\sigma_1(x)\ . \tag{2.1}$$

Esiste allora una e una sola rappresentazione unitaria π di $\mathbb{H}_n$ su H tale che $\pi(x,0,0) = \sigma_1(x)$, $\pi(0,y,0) = \sigma_2(y)$, $\pi(0,0,t) = e^{i\lambda t}$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Osservando che

$$(x,y,t) = (0,0,t - \frac{1}{2}x\cdot y)(x,0,0)(0,y,0)\ ,$$

si ponga

$$\pi(x,y,t) = e^{i\lambda(t - \frac{1}{2}x\cdot y)}\sigma_1(x)\sigma_2(y)\ . \tag{2.2}$$

Per la (2.1),

$$\begin{aligned}
\pi(x,y,t)\pi(x',y',t') &= e^{i\lambda\left(t+t'-\frac{1}{2}(x\cdot y + x'\cdot y')\right)}\sigma_1(x)\sigma_2(y)\sigma_1(x')\sigma_2(y') \\
&= e^{i\lambda\left(t+t'-\frac{1}{2}(x\cdot y + x'\cdot y' + 2y\cdot x')\right)}\sigma_1(x)\sigma_1(x')\sigma_2(y)\sigma_2(y') \\
&= e^{i\lambda(t+t'+\frac{1}{2}(x\cdot y' - y\cdot x') - \frac{1}{2}(x+x')\cdot(y+y'))}\sigma_1(x+x')\sigma_2(y+y') \\
&= \pi\big(x+x', y+y', t+t'+\frac{1}{2}(x\cdot y' - y\cdot x')\big)\ .
\end{aligned}$$

Quindi π è una rappresentazione di $\mathbb{H}_n$, chiaramente continua e unitaria. L'unicità è ovvia. $\square$

Proposizione 2.4. *Con $H = L^2(\mathbb{R}^n)$, si ponga*

$$\begin{aligned}\big(\sigma_1(x)\varphi\big)(u) &= \varphi(u+x) \ ,\\ \big(\sigma_2(y)\varphi\big)(u) &= e^{iy\cdot u}\varphi(u) \ .\end{aligned}$$

La condizione (2.1) *è verificata e la rappresentazione π_1 di $\mathbb{H}_n$ data dalla* (2.2) *è irriducibile.*

Dimostrazione. Si ha

$$\big(\sigma_1(x)\sigma_2(y)\varphi\big)(u) = \sigma_1(x)\big(e^{iy\cdot u}\varphi(u)\big) = e^{iy\cdot(u+x)}\varphi(u+x) \ ,$$

mentre

$$\big(\sigma_2(y)\sigma_1(x)\varphi\big)(u) = e^{iy\cdot u}\big(\sigma_1(x)\varphi\big)(u) = e^{iy\cdot u}\varphi(u+x) \ .$$

La (2.1) è dunque verificata.

Dimostriamo ora l'irriducibilità di π_1. Sia V un sottospazio chiuso π-invariante di $L^2(\mathbb{R}^n)$, e sia P il corrispondente proiettore ortogonale. Come risulta dalla dimostrazione del Lemma di Schur (Teorema 1.5 del Cap. IV), $P \in \mathcal{I}(\pi_1, \pi_1)$. In particolare P commuta con σ_1, cioè è invariante per traslazioni. Si ha dunque

$$\widehat{P\varphi}(\xi) = m(\xi)\hat{\varphi}(\xi) \ ,$$

dove il moltiplicatore m è in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Essendo P un proiettore, $m^2 = m$ quasi ovunque, per cui $m = \chi_E$, con $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile.

Poiché P commuta anche con σ_2, si ha $P(e^{iy\cdot u}\varphi)(u) = e^{iy\cdot u}P\varphi(u)$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$. Passando alle trasformate di Fourier,

$$\begin{aligned}m(\xi)\widehat{e^{iy\cdot u}\varphi}(\xi) &= m(\xi)\hat{\varphi}(\xi - y)\\ &= \mathcal{F}\big(e^{iy\cdot u}P\varphi\big)(\xi)\\ &= m(\xi - y)\hat{\varphi}(\xi - y) \ .\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di φ, segue che $m(\xi) = m(\xi - y)$ (q.ov. risp a ξ) per ogni y, e dunque $E = E - y$ (a meno di insiemi di misura nulla) per ogni y. In definitiva, o $E = \emptyset$, nel qual caso V è banale, oppure $E = \mathbb{R}^n$, nel qual caso $V = L^2(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Abbiamo quindi costruito una rappresentazione unitaria irriducibile di $\mathbb{H}_n$ corrispondente a $\lambda = 1$. Per ottenere rappresentazioni corrispondenti agli altri valori di λ, basta appellarsi ai seguenti due fatti, abbastanza ovvi:

(1) se π è una rappresentazione unitaria (irriducibile) di G su H, e τ è un automorfismo continuo di G, allora $\pi' = \pi \circ \tau$ è pure una rappresentazione unitaria (irriducibile) di G su H;

(2) dato $\lambda \neq 0$, l'applicazione

$$\tau_\lambda(x, y, t) = (x, \lambda y, \lambda t)$$

è un automorfismo continuo di $\mathbb{H}_n$.

Tenendo conto della (2.2), porremo dunque, per $\lambda \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
\big(\pi_\lambda(x,y,t)\varphi(u) &= \big(\pi_1(x,\lambda y,\lambda t)\varphi\big)(u) \\
&= e^{i\lambda(t-\frac{1}{2}x\cdot y)}\big(\sigma_1(x)\sigma_2(\lambda y)\varphi\big)(u) \\
&= e^{i\lambda(t-\frac{1}{2}x\cdot y)}e^{i\lambda(u+x)\cdot y}\varphi(u+x) \\
&= e^{i\lambda(t+\frac{1}{2}x\cdot y+u\cdot y)}\varphi(u+x)\ .
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Definizione. *Le rappresentazioni di $\mathbb{H}_n$ su $L^2(\mathbb{R}^n)$ date dalla* (2.3) *si chiamano* rappresentazioni di Schrödinger.

Dimostreremo più avanti che le rappresentazioni di Schrödinger, insieme alle rappresentazioni unidimensionali della Proposizione 2.2, forniscono, a meno di equivalenza, tutte le rappresentazioni unitarie irriducibili di $\mathbb{H}_n$. Questo è in sostanza il contenuto del Teorema di Stone-von Neumann, che sarà dimostrato nel paragrafo 6.

Per ora dimostriamo solo che le rappresentazioni di Schrödinger sono sufficienti a fornire la formula di Plancherel (in un certo senso, sono tutte a meno di un insieme di misura nulla).

Lemma 2.5. *Sia $f \in L^1(\mathbb{H}_n)$. L'operatore $\pi_\lambda(f)$ è l'operatore integrale*

$$
\big(\pi_\lambda(f)\varphi\big)(u) = \int_{\mathbb{R}^n} K_f^\lambda(u,v)\varphi(v)\,dv\ ,
$$

con[15]

$$
\begin{aligned}
K_f^\lambda(u,v) &= (\mathcal{F}_{y,t}f)\big(v-u,-\frac{\lambda}{2}(v+u),-\lambda\big) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} f(v-u,y,t)e^{i\left(\frac{\lambda}{2}(v+u)\cdot y+\lambda t\right)}\,dy\,dt\ .
\end{aligned}
$$

Dimostrazione. Per definizione,

$$
\begin{aligned}
\big(\pi_\lambda(f)\varphi\big)(u) &= \int_{\mathbb{H}_n} f(x,y,t)\big(\pi_\lambda(x,y,t)\varphi\big)(u)\,dx\,dy\,dt \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} f(x,y,t)e^{i\lambda(t+\frac{1}{2}x\cdot y+u\cdot y)}\varphi(u+x)\,dx\,dy\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}_{y,t}f)\big(x,-\lambda(\frac{x}{2}+u),-\lambda\big)\varphi(u+x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}_{y,t}f)\big(v-u,-\frac{\lambda}{2}(v+u),-\lambda\big)\varphi(v)\,dv\ . \qquad \square
\end{aligned}
$$

Per operatori integrali su spazi L^2, la norma di Hilbert-Schmidt si calcola in modo molto semplice.

---

[15] Qui e nel seguito, il simbolo $\mathcal{F}$ con uno o più indici denota la traformata di Fourier parziale nelle variabili indicate.

Lemma 2.6. *Sia X uno spazio di misura. Gli operatori di Hilbert-Schmidt su $L^2(X)$ sono tutti e soli gli operatori integrali*

$$T\varphi(u) = \int_X K(u,v)\varphi(v)\,dv \tag{2.4}$$

con $K \in L^2(X \times X)$. Inoltre

$$\|T\|_{HS}^2 = \int_{X\times X} |K(u,v)|^2\,du\,dv\ . \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Sia T l'operatore (2.4) con $K \in L^2(X \times X)$. Per la disuguaglianza integrale di Minkowski e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\|T\varphi\|_{L^2(X)} &\le \int_X \|K(\cdot,v)\|_{L^2(X)}|\varphi(v)|\,dv\\ &\le \|K\|_{L^2(X\times X)}\|\varphi\|_{L^2(X)}\ .\end{aligned}$$

Quindi T è limitato su $L^2(X)$. Se $\{e_i\}$ è una base ortonormale di $L^2(X)$, si ha (v. par. 4 del Cap. 5)

$$\|T\|_{HS}^2 = \sum_{i,j} \big|\langle Te_i, e_j\rangle\big|^2\ .$$

Indicando con $f \otimes g$ la funzione $f(u)g(v)$ su $X \times X$, risulta

$$\langle Te_i, e_j\rangle_{L^2(X)} = \int_{X\times X} K(u,v)e_i(v)\overline{e_j(u)}\,du\,dv = \langle K, e_j \otimes \overline{e_i}\rangle_{L^2(X\times X)}\ .$$

Poiché $\{e_j \otimes \overline{e_i}\}_{i,j}$ è una base ortonormale di $L^2(X \times X)$, segue che T è di Hilbert-Schmidt e che vale la (2.5).

Viceversa, dato un operatore di Hilbert-Schmidt T su $L^2(X)$ e posto

$$K(u,v) = \sum_{i,j}\langle Te_i, e_j\rangle e_j(u)\overline{e_i(v)}\ ,$$

risulta $K \in L^2(X \times X)$ e T è dato dalla (2.4). $\square$

Teorema 2.7 (formula di Plancherel). *Sia $f \in L^1(\mathbb{H}_n) \cap L^2(\mathbb{H}_n)$. Per quasi ogni $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\pi_\lambda(f)$ è un operatore di Hilbert-Schmidt e*

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}} \|\pi_\lambda(f)\|_{HS}^2\,|\lambda|^n\,d\lambda\ .$$

Dimostrazione. Usando la formula di Plancherel in $\mathbb{R}^n$ e con opportuni cambiamenti di variabili, si ha

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \big|(\mathcal{F}_{y,t}f)(x,\eta,-\lambda)\big|^2\,dx\,d\eta\,d\lambda\\ &= \frac{1}{2^n(2\pi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \big|(\mathcal{F}_{y,t}f)(x,-\frac{\lambda}{2}\eta',-\lambda)\big|^2|\lambda|^n\,dx\,d\eta'\,d\lambda\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \big|(\mathcal{F}_{y,t}f)\big(v-u,-\frac{\lambda}{2}(v+u),-\lambda\big)\big|^2|\lambda|^n\,du\,dv\,d\lambda\ .\end{aligned}$$

Quindi per quasi ogni $\lambda \neq 0$, $(\mathcal{F}_{y,t}f)\big(v-u, -\frac{\lambda}{2}(v+u), -\lambda\big)$ è in $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ nelle variabili u, v. Per i Lemmi 2.5 e 2.6, $\pi_\lambda(f)$ è un operatore di Hilbert-Schmidt per tali valori di λ. La conclusione segue ora facilmente. $\square$

In sostanza, la famiglia di operatori $\{\pi_\lambda(f)\}$ è completamente individuata dalla famiglia di nuclei integrali $K_f^\lambda(u,v)$ del Lemma 2.5. Il Teorema 2.7 stabilisce l'uguaglianza tra la norma di f in $L^2(\mathbb{H}_n)$ e la norma L^2 di K_f, come funzione di u, v, λ, rispetto alla misura $(2\pi)^{-(n+1)}|\lambda|^n\, du\, dv\, d\lambda$.

In modo equivalente e più adeguato al formalismo della trasformata di Fourier non commutativa, quest'ultimo spazio può essere descritto, sulla base del Lemma 2.6, come

$$L^2\big(\mathbb{R}, (2\pi)^{-(n+1)}|\lambda|^n\, d\lambda, HS(\mathbb{R}^n)\big) \ ,$$

lo spazio delle funzioni a valori in $HS(\mathbb{R}^n)$ e a quadrato sommabile rispetto alla misura $(2\pi)^{-(n+1)}|\lambda|^n\, d\lambda$.

Con semplici argomenti di densità si ottiene il corollario seguente.

Corollario 2.8. *La trasformata di Fourier si estende a un operatore unitario da* $L^2(\mathbb{H}_n)$ *su* $L^2\big(\mathbb{R}, (2\pi)^{-(n+1)}|\lambda|^n\, d\lambda, HS(\mathbb{R}^n)\big)$.

3. Il gruppo di Heisenberg ridotto

Nella formula di Plancherel su $\mathbb{H}_n$ le rappresentazioni unidimensionali della Proposizione 2.2 non svolgono alcun ruolo. In un certo senso, ciò è dovuto al fatto che il punto $\lambda = 0$ ha misura nulla rispetto alla misura $|\lambda|^n\, d\lambda$. La situazione è diversa se in luogo di $\mathbb{H}_n$ si considera un suo quoziente avente centro compatto, isomorfo a $\mathbb{T}$ anziché a $\mathbb{R}$.

Definizione. *Si chiama* gruppo di Heisenberg ridotto *il quoziente* $\tilde{\mathbb{H}}_n = \mathbb{H}_n/D$, *dove* $D = \{(0,0,2\pi m) : m \in \mathbb{Z}\}$.

Naturalmente D, essendo contenuto nel centro, è normale in $\mathbb{H}_n$, per cui il quoziente è un gruppo. Possiamo ovviamente rappresentare gli elementi di $\tilde{\mathbb{H}}_n$ come terne (x, y, e^{it}), con il prodotto

$$(x,y,e^{it})(x',y',e^{it'}) = \big(x+x', y+y', e^{i\left(t+t'+\frac{1}{2}(x\cdot y' - y\cdot x')\right)}\big) \ . \tag{3.1}$$

La seguente affermazione è piuttosto ovvia.

Lemma 3.1. *Una rappresentazione unitaria irriducibile* π *di* $\mathbb{H}_n$ *passa al quoziente modulo* D *se e solo se* $\lambda(\pi) \in \mathbb{Z}$. *Viceversa, se* σ *è una rappresentazione unitaria irriducibile di* $\tilde{\mathbb{H}}_n$, *e* p *è la proiezione canonica di* $\mathbb{H}_n$ *su* $\tilde{\mathbb{H}}_n$, *allora* $\pi = \sigma \circ p$ *è una rappresentazione unitaria irriducibile di* $\mathbb{H}_n$ *tale che* $\lambda(\pi) \in \mathbb{Z}$.

Abbiamo quindi a disposizione le seguenti rappresentazioni unitarie irirducibili di $\tilde{\mathbb{H}}_n$:

(1) in corrispondenza di $\lambda = 0$, le rappresentazioni di dimensione uno

$$\sigma^0_{\xi,\eta}(x,y,e^{it}) = e^{i(\xi\cdot x + \eta\cdot y)} \ ;$$

(2) in corrispondenza di $\lambda = k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, la rappresentazione di Schrödinger su $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\big(\sigma_k(x,y,e^{it})\varphi\big)(u) = e^{ik(t+\frac{1}{2}x\cdot y+u\cdot y)}\varphi(u+x) \ .$$

Come misura di Haar su $\tilde{\mathbb{H}}_n$ scegliamo la misura $\frac{1}{2\pi}dx\,dy\,dt$ su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}$. Ovviamente,

$$\sigma^0_{\xi,\eta}(f) = \hat{f}(-\xi,-\eta,0) \ ,$$

intendendo con $\hat{f}$ la trasformata di Fourier abeliana su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}$.

Adattando la dimostrazione del Teorema 2.7, si ottiene la seguente formula di Plancherel per $\tilde{\mathbb{H}}_n$.

Teorema 3.2. *Sia $f \in L^1(\tilde{\mathbb{H}}_n) \cap L^2(\tilde{\mathbb{H}}_n)$. Per ogni $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\sigma_k(f)$ è un operatore di Hilbert-Schmidt e*

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^{2n}} |\hat{f}(\xi,\eta,0)|^2\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |k|^n \|\sigma_k(f)\|^2_{HS} \ .$$

Quindi la misura di Plancherel si compone di due parti, una discreta, che tiene conto delle rappresentazioni di Schrödinger, e una continua, che tiene conto delle rappresentazioni unidimensionali.

4. Vettori C^∞ di una rappresentazione

In questo paragrafo e nel successivo presentiamo alcuni degli aspetti della teoria delle rappresentazioni che intervengono quando il gruppo G ha una struttura differenziale. L'argomento è molto ampio e richiederebbe una trattazione più diffusa. Ci limitiamo a quegli elementi della teoria che utilizzeremo nella parte rimanente di questo Capitolo.

Definizione. *Si chiama* gruppo di Lie *un gruppo G dotato di una struttura di varietà differenziabile*[16] *tale che l'applicazione $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ da $G \times G$ in G sia di classe C^∞.*

Un gruppo di Lie è un gruppo topologico localmente compatto rispetto alla struttura topologica soggiacente a quella differenziale. Sono gruppi di Lie $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}$, $SO(n)$, $U(n)$, $\mathbb{H}_n$, ecc.

Definizione. *Sia π una rappresentazione unitaria di un gruppo di Lie G su uno spazio di Hilbert H. Un vettore $v \in H$ si dice un* vettore C^∞ per π *se l'applicazione $x \mapsto \pi(x)v$ da G in H è C^∞.*

Lo spazio dei vettori C^∞ si chiama anche spazio di Gårding *di π.*

Proposizione 4.1. *Siano $f \in C_c^\infty(G)$ e $v_0 \in H$. Allora $v = \pi(f)v_0$ è un vettore C^∞. Lo spazio di Gårding è denso in H.*

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\pi(x)v = \pi(x)\pi(f)v_0 = \int_G f(y)\pi(x)\pi(y)v_0\, dy = \int_G f(x^{-1}y)\pi(y)v_0\, dy = \pi(L_x f)v_0 \ .$$

[16] Si intende C^∞.

Sia $x_0 \in G$ e sia $x = x(t) = x(t_1, \dots, t_n)$, con n uguale alla dimensione di G come varietà, un sistema di coordinate locali in un intorno di x_0, con $x(0) = x_0$. La funzione

$$\varphi(t, y) = L_{x(t)} f(y) = f\big(x(t)^{-1} y\big)$$

è C^∞ sul prodotto $U \times G$ con U intorno dell'origine in $\mathbb{R}^n$, e, per ogni $t \in U$, $\varphi(t, \cdot)$ ha supporto compatto in G. Poniamo allora

$$F(t) = \pi\big(x(t)\big) v = \int_G \varphi(t, y) \pi(y) v_0 \, dy \ ,$$

e dimostriamo che è di classe C^1 in U. Se $\bar{t} \in U$,

$$\partial_{t_j} F(\bar{t}) = \lim_{h \to 0} \int_G \frac{\varphi(\bar{t} + h e_j, y) - \varphi(\bar{t}, y)}{h} \, \pi(y) v_0 \, dy \ .$$

Al tendere di h a 0, il rapporto incrementale nell'integrale tende a $\partial_{t_j} \varphi(\bar{t}, y)$ uniformemente in y, e al variare di h i supporti rimangono contenuti in un unico compatto. Quindi

$$\partial_{t_j} F(\bar{t}) = \int_G \partial_{t_j} \varphi(\bar{t}, y) \pi(y) v_0 \, dy \ ,$$

che è funzione continua di $\bar{t}$. In modo analogo si dimostra che F è di classe C^k per ogni k.

Sia ora $\{\varphi_i\}$ un'identità approssimata, C^∞ a supporto compatto, su G. Dato $v_0 \in H$, si verifica facilmente che

$$\lim_{i \to \infty} \pi(\varphi_i) v_0 = \lim_{i \to \infty} \int_G \varphi_i(x) \pi(x) v_0 \, dx = \pi(e) v_0 = v_0 \ .$$

Quindi v_0 è limite di vettori C^∞. $\square$

Esempi.

(4.a) Se π ha dimensione finita, ogni vettore è C^∞.

(4.b) Dimostriamo che lo spazio di Gårding delle rappresentazioni di Schrödinger di $\mathbb{H}_n$ coincide con la classe di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Fissiamo per comodità $\lambda = 1$.

Se $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ è un vettore C^∞, l'applicazione $F(y) = \pi_1(0, y, 0)\varphi$ è C^∞ da $\mathbb{R}^n$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Essendo

$$\big(\pi_1(0, y, 0)\varphi\big)(u) = e^{iy \cdot u} \varphi(u) \ ,$$

si ha

$$\partial_{y_j} F(\bar{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{ihu_j} - 1}{h} e^{i\bar{y} \cdot u} \varphi(u)$$

in norma L^2. Se questo limite esiste, esso coincide quasi ovunque con $iu_j e^{i\bar{y} \cdot u} \varphi(u)$. È dunque necessario che $u_j \varphi(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Viceversa, se questa condizione è verificata,

$$\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{e^{ihu_j} - 1}{h} e^{i\bar{y} \cdot u} - iu_j e^{i\bar{y} \cdot u} \right|^2 |\varphi(u)|^2 \, du = 0$$

per convergenza dominata, essendo

$$\left|\frac{e^{ihu_j}-1}{h}-iu_j\right| \leq 2|u_j| \ .$$

Iterando questo argomento, si vede che F è C^∞ se e solo se $u^\alpha\varphi(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ per ogni multiindice α.

Analogamente, la funzione $G(x) = \pi_1(x,0,0)\varphi$ deve essere C^∞ su $\mathbb{R}^n$. Osserviamo che

$$\mathcal{F}\big(\pi(x,0,0)\varphi)\big)(\xi) = \mathcal{F}\big(\varphi(\cdot + x)\big)(\xi) = e^{ix\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi) \ ,$$

per cui lo stesso argomento si applica a $\hat{\varphi}$. Dunque G è C^∞ se e solo se $\xi^\alpha\hat{\varphi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ per ogni multiindice α, ovvero se e solo se $\partial_u^\alpha\varphi(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ per ogni α.

Ma se φ è un vettore C^∞, anche la funzione

$$H(x,y) = \pi_1(0,y,0)\pi_1(x,0,0)\varphi$$

deve essere C^∞ nelle $2n$ variabili x, y. Questo implica che per ogni coppia di multiindici α, β, risulta $u^\alpha\partial_u^\beta\varphi(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, o, equivalentemente, $\xi^\alpha\partial_\xi^\beta\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Questa condizione implica che $\xi^\alpha\partial_\xi^\beta\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Infatti

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \big|\xi^\alpha\partial_\xi^\beta\hat{\varphi}(\xi)\big|\,d\xi &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{2n}}\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\qquad \times \left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{2n}\big|\xi^\alpha\partial_\xi^\beta\hat{\varphi}(\xi)\big|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&< \infty \ .
\end{aligned}$$

Ma allora

$$\begin{aligned}
\big|u^\alpha\partial_u^\beta\varphi(u)\big| &\leq (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\big|\mathcal{F}\big(u^\alpha\partial_u^\beta\varphi(u)\big)(\xi)\big|\,d\xi \\
&= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\big|\partial_\xi^\alpha\big(\xi^\beta\hat{\varphi}(\xi)\big)\big|\,d\xi \\
&\leq C\sum_\gamma\int_{\mathbb{R}^n}\big|\xi^{\beta-\gamma}\partial_\xi^{\alpha-\gamma}\hat{\varphi}(\xi)\big|\,d\xi \\
&\leq C_{\alpha,\beta} \ .
\end{aligned}$$

Dunque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Viceversa, non è difficile dimostrare che ogni funzione di Schwartz è un vettore C^∞ per π_1.

5. Campi vettoriali invarianti sul gruppo di Heisenberg

Le nozioni che stiamo per introdurre in relazione al gruppo di Heisenberg hanno un corrispettivo su gruppi di Lie generali. Ci limitiamo tuttavia a $\mathbb{H}_n$ per sfruttare il vantaggio offerto dal fatto che, come varietà, $\mathbb{H}_n$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^{2n+1}$, e dunque dispone di un sistema di coordinate globali.

Ricordiamo che un campo vettoriale in $\mathbb{R}^m$ è un operatore differenziale del primo ordine privo di termine di ordine zero:

$$X = \sum_{j=1}^{m} a_j(x)\partial_{x_j} \ .$$

Applicare il campo X a una funzione f vuol dire calcolare, in ogni punto $x \in \mathbb{R}^m$, la derivata direzionale $X(x) = \partial_v$ individuata dal vettore $v = \big(a_1(x), \dots, a_m(x)\big)$.

Un campo vettoriale X si dice *invariante a sinistra* (risp. *a destra*) se

$$X(L_g f) = L_g(Xf) \ , \qquad \text{risp. } X(R_g f) = R_g(Xf)$$

per ogni $g \in \mathbb{H}_n$ e ogni f di classe C^1.[17]

Lemma 5.1. *Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^{2n+1}$, esiste uno e un solo campo vettoriale X su $\mathbb{H}_n$ invariante a sinistra (risp. a destra) tale che $X(0) = \partial_v$. Lo spazio dei campi vettoriali invarianti a sinistra (risp. destra) ha dunque dimensione $2n+1$.*

Dimostrazione. Se X è invariante a sinistra e $Xf(0) = \partial_v f(0)$, allora necessariamente

$$Xf(g) = L_{g^{-1}}(Xf)(0) = X(L_{g^{-1}}f)(0) = \partial_v(L_{g^{-1}}f)(0) \ ,$$

ossia

$$Xf(g) = \frac{d}{ds}_{|_{s=0}}(L_{g^{-1}}f)(sv) = \frac{d}{ds}_{|_{s=0}} f\big(g \cdot (sv)\big) \ . \tag{5.1}$$

Questo dimostra l'unicità. D'altronde, la (5.1) ovviamente definisce un campo invariante a sinistra, e questo garantisce l'esistenza.

Per i campi invarianti a destra, il discorso è analogo, sostiutendo la (5.1) con

$$Xf(g) = \frac{d}{ds}_{|_{s=0}} f\big((sv) \cdot g\big) \ . \qquad \square \tag{5.2}$$

Per determinare i campi vettoriali invarianti, è sufficiente trovare quelli corrispondenti ai vettori della base canonica di $\mathbb{R}^{2n+1}$, gli altri essendo loro combinazioni lineari. Indicheremo con $X_j^{(\ell)}, Y_j^{(\ell)}, T^{(\ell)}$ i campi invarianti a sinistra che nell'origine coincidono con le derivate parziali $\partial_{x_j}, \partial_{y_j}, \partial_t$ rispettivamente, e con $X_j^{(r)}, Y_j^{(r)}, T^{(r)}$ quelli invarianti a destra.

Lemma 5.2. *Si ha*

$$\begin{aligned} X_j^{(\ell)} &= \partial_{x_j} - \tfrac{y_j}{2}\partial_t \ , & X_j^{(r)} &= \partial_{x_j} + \tfrac{y_j}{2}\partial_t \ , \\ Y_j^{(\ell)} &= \partial_{y_j} + \tfrac{x_j}{2}\partial_t \ , & X_j^{(r)} &= \partial_{y_j} - \tfrac{x_j}{2}\partial_t \ , \\ T^{(\ell)} &= \partial_t \ , & T^{(r)} &= \partial_t \ . \end{aligned}$$

[17] Si osservi che, con riferimento alla struttura di gruppo additivo, i campi vettoriali invarianti su $\mathbb{R}^m$ sono quelli a coefficienti costanti.

Dimostrazione. Per esempio, per la (5.1),

$$\begin{aligned} X_j^{(\ell)} f(x,y,t) &= \frac{d}{ds}_{|s=0} f\big((x,y,t)\cdot(se_j,0,0)\big) \\ &= \frac{d}{ds}_{|s=0} f\big(x+se_j,y,t-\frac{sy_j}{2}\big) \\ &= \partial_{x_j} f(x,y,t) - \frac{y_j}{2}\partial_t f(x,y,t) \ . \qquad \square \end{aligned}$$

Se π è una rappresentazione unitaria di $\mathbb{H}_n$ su H e $v \in H$ è un vettore C^∞ per π, è utile considerare le derivate della funzione $\pi(x,y,t)v$.

Definizione. *Sia π una rappresentazione unitaria di $\mathbb{H}_n$. Si indica con $d\pi(X_j)$ l'operatore, definito sullo spazio di Gårding,*

$$d\pi(X_j)v = \frac{d}{ds}_{|s=0} \big(\pi(se_j,0,0)v\big) \ ,$$

e analogamente per $d\pi(Y_j)$ e $d\pi(T)$.

Lemma 5.3. *Se U indica uno qualunque dei simboli X_j, Y_j, T, $g=(x,y,t)$, e v è un vettore C^∞ per π, valgono le seguenti formule:*

$$\begin{aligned} U^{(\ell)}\big(\pi(g)v\big) &= \pi(g)d\pi(U)v \ , \\ U^{(r)}\big(\pi(g)v\big) &= d\pi(U)\pi(g)v \ . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Se w è un altro vettore C^∞ per π, si ha inoltre

$$\begin{aligned} U^{(\ell)}\big(\langle\pi(g)v,w\rangle\big) &= \langle\pi(g)d\pi(U)v,w\rangle \ , \\ U^{(r)}\big(\langle\pi(g)v,w\rangle\big) &= -\langle\pi(g)v,d\pi(U)w\rangle \ . \end{aligned} \tag{5.4}$$

Infine, se f è una funzione di classe C^∞ a supporto compatto,

$$\begin{aligned} \pi(U^{(\ell)}f)v &= -\pi(f)d\pi(U)v \ , \\ \pi(U^{(r)}f)v &= -d\pi(U)\pi(f)v \ , \end{aligned} \tag{5.5}$$

con v vettore C^∞ nella prima e generico nella seconda.

Dimostrazione. Dimostriamo solo la seconda delle (5.4) con $U = X_j$:

$$\begin{aligned} X_j^{(r)}\big(\langle\pi(g)v,w\rangle\big) &= \frac{d}{ds}_{|s=0}\langle\pi(se_j,0,0)(\pi(g)v,w\rangle \\ &= \frac{d}{ds}_{|s=0}\langle(\pi(g)v,\pi(-se_j,0,0)w\rangle \\ &= -\langle\pi(g)v,d\pi(X_j)w\rangle \ . \end{aligned}$$

Le altre verifiche vengono lasciate per esercizio. $\square$

Vediamo ora le formule esplicite per campi invarianti a sinistra e per le rappresentazioni di Schrödinger.

Proposizione 5.4. *Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\begin{aligned} d\pi_\lambda(X_j)\varphi(u) &= \partial_{u_j}\varphi(u) \ , \\ d\pi_\lambda(Y_j)\varphi(u) &= i\lambda u_j\varphi(u) \ , \\ d\pi_\lambda(T)\varphi(u) &= i\lambda\varphi(u) \ . \end{aligned} \tag{5.6}$$

6. Il Teorema di Stone-von Neumann

In questo paragrafo dimostreremo il seguente risultato.

Teorema 6.1 (di Stone-von Neumann). *Sia π una rappresentazione unitaria irriducibile di $\mathbb{H}_n$ con $\lambda(\pi) = \lambda \neq 0$. Allora π è equivalente alla rappresentazione di Schrödinger π_λ.*

Diamo una dimostrazione abbastanza elementare, limitandoci, senza perdere in generalità, al caso $\lambda = 1$. In essa svolgono un ruolo fondamentale due oggetti: uno è la funzione

$$h(u) = \pi^{-n/4} e^{-\frac{|u|^2}{2}} \tag{6.1}$$

su $\mathbb{R}^n$, vista come vettore C^∞ (normalizzato) della rappresentazione π_1; l'altro è la famiglia di campi invariante complessi

$$\begin{aligned} Z_j^{(\ell)} &= \frac{1}{2}(X_j^{(\ell)} - iY_j^{(\ell)}) = \partial_{z_j} - i\frac{\bar z_j}{4}\partial_t \\ \bar Z_j^{(r)} &= \frac{1}{2}(X_j^{(r)} + iY_j^{(r)}) = \partial_{\bar z_j} - i\frac{z_j}{4}\partial_t \ . \end{aligned} \tag{6.2}$$

Valgono le seguenti semplici proprietà:

Lemma 6.2. *La funzione h è, a meno di fattori scalari, l'unica funzione su $\mathbb{R}^n$ tale che $d\pi_1(Z_j)h = 0$ per ogni j. Il coefficiente diagonale di π_1 relativo alla funzione h è*

$$\Phi(z,t) = \langle \pi_1(z,t)h, h\rangle = e^{it - \frac{|z|^2}{4}} \ . \tag{6.3}$$

Dimostrazione. Per la (5.6),

$$d\pi_1(Z_j) = \frac{1}{2}(\partial_{u_j} + u_j) \ ,$$

e la prima affermazione è evidente. Per la seconda, si ha

$$\begin{aligned} \langle \pi_1(z,t)h, h\rangle &= \pi^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t + \frac{1}{2}x\cdot y + u\cdot y)} e^{-\frac{(u+x)^2}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\ &= \pi^{-n/2} e^{it} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\left(u+\frac{x}{2}\right)\cdot y} e^{-\left(u+\frac{x}{2}\right)^2}\, du \\ &= \pi^{-n/2} e^{it} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iu\cdot y} e^{-u^2}\, du \\ &= e^{it} e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} \ . \qquad \square \end{aligned}$$

In realtà la funzione in (6.3) è contraddistinta da una proprietà "universale".

Lemma 6.3. *Sia π una qualunque rappresentazione unitaria irriducibile di $\mathbb{H}_n$ su uno spazio H con $\lambda(\pi) = 1$. Se $v \in H$ è un vettore C^∞ di norma unitaria e tale che $d\pi(Z_j)v = 0$ per ogni j, allora*

$$\langle \pi(z,t)v, v\rangle = e^{it - \frac{|z|^2}{4}} \ .$$

Dimostrazione. Per la (5.4), posto $\varphi(z,t) = \langle \pi(z,t)v, v\rangle$, si ha

$$Z_j^{(\ell)}\varphi(z,t) = \frac{1}{2}(X_j^{(\ell)} - iY_j^{(\ell)})\langle \pi(z,t)v, v\rangle = \langle \pi(z,t)d\pi(Z_j)v, v\rangle = 0$$

e

$$\bar{Z}_j^{(r)}\varphi(z,t) = \frac{1}{2}(X_j^{(r)} + iY_j^{(r)})\langle \pi(z,t)v, v\rangle = \frac{1}{2}\big\langle \pi(z,t)v, \big(d\pi(X_j) - id\pi(Y_j)\big)v\big\rangle = 0$$

Inoltre, poiché $\lambda(\pi) = 1$,

$$\varphi(z,t) = e^{it}\langle \pi(z,0)v, v\rangle = \psi(z)e^{it} \ .$$

Per le (6.2),

$$\partial_{z_j}\psi + \frac{\bar{z}_j}{4}\psi = 0 \ , \qquad \partial_{\bar{z}_j}\psi + \frac{z_j}{4}\psi = 0 \ .$$

In coordinate reali si ricava

$$\partial_{x_j}\psi + \frac{x_j}{2}\psi = 0 \ , \qquad \partial_{y_j}\psi + \frac{y_j}{2}\psi = 0 \ ,$$

da cui $\psi(z) = ce^{-\frac{|z|^2}{4}}$. Essendo $c = \psi(0) = \|v\|^2 = 1$, si ha la tesi. $\square$

In base al Teorema 3.4 del Cap. IV, basta dimostrare che ogni rappresentazione irriducibile π con $\lambda(\pi) = 1$ ammette un vettore C^∞ non nullo v tale che $d\pi(Z_j)v = 0$ per ogni j.

Lemma 6.4. *Sia $f(z,t) = e^{-\frac{|z|^2}{4}}\eta(t)$, dove $\eta(t) \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ è tale che*

$$\hat{\eta}(-1) = \int_{\mathbb{R}} \eta(t)e^{it}\, dt = 1 \ .$$

Se π è una rappresentazione unitaria irriducibile di $\mathbb{H}_n$ con $\lambda(\pi) = 1$, allora

(1) $\pi(f) \neq 0$;
(2) $\pi(f)$ *applica H nello spazio di Gårding di π;*
(3) $d\pi(Z_j)\pi(f) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\pi(f) = 0$. Poiché

$$\begin{aligned}\pi(f) &= \int_{\mathbb{H}_n} e^{-\frac{|z|^2}{4}}\eta(t)\pi(z,t)\, dz\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \eta(t)e^{it}\, dt \int_{\mathbb{C}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}}\pi(z,0)\, dz \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}}\pi(z,0)\, dz \ ,\end{aligned}$$

per ogni coppia di vettori $v, w \in H$ avremmo

$$\int_{\mathbb{C}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \langle \pi(z,0)v, w\rangle \, dz = 0 \ .$$

Ma allora, per ogni $z' \in \mathbb{C}^n$, si avrebbe anche

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{C}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \langle \pi(z,0)\pi(z',0)v, \pi(z',0)w\rangle \, dz \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \langle \pi(-z',0)\pi(z,0)\pi(z',0)v, w\rangle \, dz \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \big\langle \pi\big(z, -\Im\mathrm{m}(\langle z, z'\rangle_{\mathbb{C}^n})\big)v, w\big\rangle_H \, dz \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \langle \pi(z,0)v, w\rangle \, e^{-i\Im\mathrm{m}(\langle z,z'\rangle)} \, dz \ . \end{aligned}$$

Ma $\Im\mathrm{m}(\langle z, z'\rangle) = y \cdot x' - x \cdot y'$, per cui questo equivale a dire che la trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^{2n}$ di $e^{-\frac{|z|^2}{4}}\langle \pi(z,0)v, w\rangle$ è identicamente nulla. Avremmo allora $\langle \pi(z,0)v, w\rangle = 0$ per ogni z e ogni v, w, il che è assurdo.

La (2) è conseguenza del fatto che $e^{-\frac{|z|^2}{4}}$ è nella classe di Schwartz e dell'osservazione seguente.

Supponiamo che $\varphi(x,y)$ sia C^1, e inoltre

$$\varphi,\ \partial_{x_j}\varphi,\ \partial_{y_j}\varphi,\ x_j\varphi,\ y_j\varphi \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$$

per ogni j. Posto

$$w = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(x,y)\pi(x,y,0)v \, dx\, dy \ ,$$

con $v \in H$, esiste la derivata

$$\frac{d}{ds}_{|_{s=0}} \pi(se_j, 0, 0)w \ .$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned} \pi(se_j,0,0)w &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(x,y)\pi(se_j,0,0)\pi(x,y,0)v \, dx\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(x,y)e^{i\frac{sy_j}{2}}\pi(x+se_j,y,0)v \, dx\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(x-se_j,y)e^{i\frac{sy_j}{2}}\pi(x,y,0)v \, dx\, dy \ . \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{s}\big(\pi(se_j,0,0)w - w\big) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\varphi(x-se_j,y)e^{i\frac{sy_j}{2}} - \varphi(x,y)}{s}\pi(x,y,0)v \, dx\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(\frac{1}{s}\int_0^s \big(-\partial_{x_j}\varphi(x-ue_j) + i\frac{y_j}{2}\varphi(x-ue_j)\big)e^{i\frac{uy_j}{2}} \, du\right)\pi(x,y,0)v \, dx\, dy \ . \end{aligned}$$

Per ipotesi, $-\partial_{x_j}\varphi + i\frac{y_j}{2}\varphi \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$, per cui l'espressione in parentesi tende a $-\partial_{x_j}\varphi + i\frac{y_j}{2}\varphi$ in norma L^1 al tendere di s a 0.

Questo dimostra la (2), ma mostra anche che, se $f(z,t) = \varphi(z)\eta(t)$,

$$d\pi(X_j)\pi(f)v = \int_{\mathbb{C}^n} \big(- \partial_{x_j}\varphi(z) + i\frac{y_j}{2}\varphi(z)\big)\pi(z,0)\, dz \ .$$

Analogamente,

$$d\pi(Y_j)\pi(f)v = \int_{\mathbb{C}^n} \big(- \partial_{y_j}\varphi(z) - i\frac{x_j}{2}\varphi(z)\big)\pi(z,0)\, dz \ ,$$

per cui

$$d\pi(Z_j)\pi(f)v = \int_{\mathbb{C}^n} \big(- \partial_{z_j}\varphi(z) - \frac{\bar{z}_j}{4}\varphi(z)\big)\pi(z,0)\, dz \ .$$

Se $\varphi(z) = e^{-\frac{|z|^2}{4}}$, il secondo membro è nullo, e la (3) è dimostrata. □

Dimostrazione del Teorema 6.1. Se π è irriducibile con $\lambda(\pi) = 1$, per il Lemma 6.4 esiste $v_0 \in H$ tale che $v = \pi(f)v_0 \neq 0$. Poiché $d\pi(Z_j)v = 0$ per ogni j, il Lemma 6.3 implica che il coefficiente diagonale relativo a v è un multiplo sclare non nullo di $e^{it-\frac{|z|^2}{4}}$. Poiché π e la rappresentazione di Schrödinger π_1 sono entrambe irriducibili, sia v che la funzione h nella (6.1) sono vettori ciclici per le rispettive rappresentazioni. Ma allora π è equivalente a π_1. Per il Teorema 3.4 del Cap. IV, π e π_1 sono equivalenti. □

CAPITOLO VII
SPAZI OMOGENEI E COPPIE DI GELFAND

1. Azioni di gruppi e spazi omogenei

Siano G un gruppo e M un insieme. Si dice che G *agisce* su M se è definita una applicazione $\varphi : G \to M^M$ tale che:

(1) $\varphi(e) = i_M$;
(2) $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ per ogni $g, h \in G$.

Questo implica in particolare che $\varphi(g)$ è biiettiva per ogni g e $\varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1})$.

In modo equivalente, si può dire che un'azione di G su M è un'applicazione $\psi : G \times M \to M$ tale che

(1') $\psi(e, x) = x$ per ogni $x \in M$;
(2') $\psi\big(g, \psi(h, m)\big) = \psi(gh, m)$ per ogni $g, h \in G$ e $x \in M$.

Esempi.

(1.a) Sia $G = \mathfrak{S}_n$ il gruppo delle permutazioni di n elementi, e sia $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ponendo $\psi(\sigma, k) = \sigma(k)$, si ha un'azione di G su M.

(1.b) Sia $G = GL(n, \mathbb{R})$ il gruppo delle matrici invertibili reali $n \times n$, e sia $M = \mathbb{R}^n$. Allora $\psi(g, x) = gx$ è un'azione. Più in generale, una rappresentazione di un gruppo G su uno spazio di Banach X individua un'azione di G su X. Si dice in questo caso che l'azione è lineare.

(1.c) Sia $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sfera di Riemann. Il gruppo $GL(2, \mathbb{C})$ agisce su S^2 come segue: se $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, si pone

$$\psi(g, z) = \frac{az + b}{cz + d} \ .$$

Useremo spesso la notazione $g \cdot x$ in luogo di $\psi(g, x)$. Le condizioni (1') e (2') si scrivono

(1") $e \cdot x = x$;
(2") $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

Se G è un gruppo localmente compatto e M è uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto, si dice che un'azione di G su M è topologica se la corrispondente applicazione $\psi : G \times M \to M$ è continua. Nel seguito considereremo solo azioni topologiche, anche senza menzionare esplicitamente la continuità di ψ.

Definizione. *Dato $x \in M$, si chiama* orbita *di x il sottoinsieme $O_x = \{g \cdot x : g \in G\}$ di M.*

Si chiama stabilizzatore *di $x \in M$ il sottogruppo $G_x = \{g : g \cdot x = x\}$ di G.*

Un'azione di G su M si dice effettiva *se dall'ipotesi $g \cdot x = x$ per ogni $x \in M$ segue che $g = e$.*

Un'azione si dice transitiva *se, dati $x, y \in M$, esiste $g \in G$ tale che $g \cdot x = y$.*

Un'azione si dice semplicemente transitiva *se, dati $x, y \in M$, esiste uno e un solo $g \in G$ tale che $g \cdot x = y$.*

Un'azione non effettiva diventa tale se si sostituisce a G il suo quoziente modulo il sottogruppo $H = \{h \in G : h \cdot x = x \; \forall x \in M\}$. H è chiuso e normale di G e l'azione di G induce in modo naturale un'azione di quoziente G/H su M ponendo $(gH) \cdot x = g \cdot x$. Questa nuova azione è effettiva.

Risulta evidente dalle definizioni quanto segue.

Lemma 1.1.

(1) *Per ogni $g \in G$, l'applicazione $x \mapsto g \cdot x$ è un omeomorfismo di M in sé;*
(2) *la relazione su X data da $x \sim y$ se esiste $g \in G$ tale che $y = g \cdot x$ è di equivalenza, e le sue classi di equivalenza sono le orbite dell'azione;*
(3) *l'azione è transitiva se e solo se M consiste di un'unica orbita;*
(4) *lo stabilizzatore di un punto $x \in M$ è un sottogruppo chiuso di G;*
(5) *se $x, y \in M$ appartengono alla stessa orbita, i loro stabilizzatori sono sottogruppi coniugati tra loro; precisamente se $y = g \cdot x$, allora $G_y = gG_xg^{-1}$.*

Definizione. *Si chiama* spazio omogeneo *di un gruppo localmente compatto G una coppia (M, ψ), dove M è uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e ψ è un'azione transitiva di G su M.*

Dati due spazi omogenei (M, ψ) e (M', ψ') di uno stesso gruppo G, un'applicazione continua $F : M \to M'$ si dice G-equivariante *se $\psi'\big(g, F(x)\big) = F\big(\psi(g, x)\big)$ per ogni $g \in G$ e $x \in M$.*

I due spazi omogenei si dicono equivalenti se esiste un omeomorfismo G-equivariante F di M su M'.

Teorema 1.2. *Sia H un sottogruppo chiuso (non necessariamente normale) di G. Allora lo spazio quoziente G/H è di Hausdorff localmente compatto. L'azione di G su G/H data da $g \cdot (g'H) = gg'H$ rende G/H uno spazio omogeneo.*

Viceversa, sia M uno spazio omogeneo di G. Fissato $x_0 \in M$, l'applicazione di G su M che associa a un elemento $g \in G$ il punto $g \cdot x_0 \in M$ passa al quoziente modulo lo stabilizzatore G_{x_0} di x_0 e induce un'applicazione continua G-equivariante F_{x_0} di G/G_{x_0} su M.

Dimostrazione. Per il Corollario 1.3 (4) del Cap. II, G/H è di Hausdorff. Poiché le proiezioni canoniche su spazi quoziente sono aperte, se U è un intorno compatto si $g \in G$, la sua proiezione sul quoziente è un intorno compatto di gH.

Poiché il prodotto è continuo da $G \times G$ in G, lo è anche la sua composizione con la proiezione canonica del codominio G su G/H. Questa applicazione passa al quoziente modulo H sul secondo fattore in $G \times G$, per cui induce un'applicazione continua da $G \times (G/H)$ su G/H, che è proprio l'azione indicata. Questa azione è transitiva, perché $(g'g^{-1}) \cdot gH = g'H$ per ogni $g, g' \in G$.

Sia ora (M, ψ) uno spazio omogeneo di G, e sia $x_0 \in M$. L'applicazione φ_{x_0} da G in M data da $\varphi_{x_0}(g) = g \cdot x_0$ è continua e suriettiva. Sia $x = g \cdot x_0$ un generico elemento di M. Allora $g' \in \varphi_{x_0}^{-1}(\{x\})$ se e solo se $({g'}^{-1}g) \cdot x_0 = {g'}^{-1} \cdot x = x_0$, ossia se e solo se $g' \in gG_{x_0}$. Quindi φ_{x_0} passa al quoziente modulo G_{x_0}, e induce un'applicazione continua e biiettiva F_{x_0} di G/G_{x_0} su M. Tale applicazione è chiaramente G-equivariante. $\square$

In generale F_{x_0} non è un omeomorfismo. Consideriamo per esempio $G = \mathbb{R}_d$, la retta reale con la topologia discreta, $M = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea, e l'azione $\psi(g, x) = g + x$. Allora M è omogeneo; scegliendo $x_0 = 0$, si ha $G_0 = \{0\}$, e $F_0 = \varphi_0$ è l'applicazione identica da $\mathbb{R}_d$ in $\mathbb{R}$.

Imponendo un'ipotesi topologica su G, precisamente che abbia una base numerabile, si può concludere che F_{x_0} è un omeomorfismo. La dimostrazione è basata sul seguente teorema di categoria.

Lemma 1.3. *Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto, e sia $\{C_n\}_{n\geq 1}$ un ricoprimento chiuso numerabile di X. Allora almeno uno dei C_n ha parte interna non vuota.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che ogni C_n abbia interno vuoto.

Sia $U_0 \subset X$ un aperto relativamente compatto. Poiché C_1 non contiene U, esiste $x_1 \in U_0 \setminus C_1$. Sia U_1 un intorno aperto e relativamente compatto di x_1 tale che $\overline{U_1} \subset U_0$ e $\overline{U_1} \cap C_1 = \emptyset$.

Procedendo induttivamente, si costruiscono una successione di punti x_n e di intorni U_n di x_n, aperti e relativamente compatti, tali che $x_n \in U_{n-1} \setminus C_n$, $\overline{U_n} \subset U_{n-1}$ e $\overline{U_n} \cap C_n = \emptyset$.

Esiste allora $\bar{x} \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{U_n}$. Ma allora $\bar{x} \notin C_n$ per ogni n, il che è assurdo. $\square$

Corollario 1.4. *Se G ha una base numerabile e M è un suo spazio omogeneo, allora, dato $x_0 \in M$, l'applicazione F_{x_0} è un omeomorfismo di G/H su M.*

In particolare, se in aggiunta l'azione di G su M è semplicemente transitiva, allora F_{x_0} è un omeomorfismo di G su M.

Dimostrazione. Per dimostrare che F_{x_0} è un omeomorfismo, basta far vedere che φ_{x_0} è aperta.

Sia $\{A_n\}$ una base numerabile di G. Dato U, intorno compatto di e, sia V intorno simmetrico di e tale che $V^2 \subset U$. Per ogni n, sia poi g_n tale che $g_nU \cap A_n \neq \emptyset$. Allora $\bigcup_n g_nV$ è denso in G. Dato $h \in G$, sia n tale che $hV \cap g_nV \neq \emptyset$. Allora $h \in g_nU$, e dunque $\{g_nU\}$ è un ricoprimento di G.

Poniamo allora $C_n = (g_nU) \cdot x_0 = \varphi_{x_0}(g_nU) \subset M$. Poiché ogni C_n è compatto, per il Lemma 1.3, esiste n tale che C_n ha un punto interno $x = g \cdot x_0$.

Sia ora A un aperto di G. Dato $h \in A$, sia U intorno relativamente compatto di e tale che $hU \subset A$. Se i C_n sono gli insiemi costruiti ora a partire da U' simmetrico take che ${U'}^2 \subset U$, esistono n e x interno a $C_n = (g_nU') \cdot x_0$.

Sia $x = (g_nu) \cdot x_0$, con $u \in U'$. Allora $h \cdot x_0 = (hu^{-1}g_n^{-1}) \cdot \big((g_nu) \cdot x_0\big)$ è interno a

$$(hu^{-1}g_n^{-1}) \cdot C_n = (hu^{-1}U') \cdot x_0 \subset (hU) \cdot x_0 \subset \varphi_{x_0}(A) \; .$$

Quindi $\varphi_{x_0}(A)$ è aperto. $\square$

Esempi.

(1.d) Sia $G = U(n)$ e $M = S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, con l'azione naturale data da $g \cdot z = gz$. Per verificare che M è uno spazio omogeneo, basta ripetere le osservazioni svolte nell'Esempio 1.a del Cap. IV.

Fissiamo il punto $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ di S^{2n-1}. Il suo stabilizzatore consiste delle matrici $g \in U(n)$ tali che $ge_1 = 1$. Quindi deve essere

$$g = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} .$$

Dall'identità $g^*g = I_n$ si deduce che gli elementi sulla prima riga sono nulli tranne il primo, per cui G si rappresenta a blocchi come

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} ,$$

con h matrice unitaria di dimensione $(n-1) \times (n-1)$. Quindi lo stabilizzatore di e_1 è un sottogruppo di $U(n)$ isomorfo a $U(n-1)$. Con abuso di linguaggio, si scrive $S^{2n-1} \sim U(n)/U(n-1)$. Questa identificazione è un omeomorfismo, perché $U(n)$, con la topologia indotta da C^{n^2}, ha sicuramente base numerabile.

L'azione su S^{2n-1} rimane transitiva se ci si restringe al sottogruppo $SU(n)$ con $U(n)$. In tal caso $S^{2n-1} \sim SU(n)/SU(n-1)$.

Risultati analoghi valgono per la sfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, con $G = O(n)$, oppure $G = SO(n)$.

(1.e) Sia M il semipiano superiore $\{z = x + iy : y > 0\} \subset \mathbb{C}$. Sia $G = SL(2, \mathbb{R})$ il gruppo delle matrici 2×2 reali con detrminante uguale a 1. G agisce su M per trasformazioni lineari fratte: se $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$g \cdot z = \frac{az + b}{cz + d} .$$

Bisogna osservare in proposito che, se $z = x + iy \in M$, allora

$$\Im\mathrm{m}(g \cdot z) = \Im\mathrm{m}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{\Im\mathrm{m}\big((az + b)\overline{(cz + d)}\big)}{|cz + d|^2} = \frac{(ad - bc)y}{|cz + d|^2} > 0 ,$$

per cui anche $g \cdot z \in M$. L'azione non è effettiva, in quanto $g = -I$ lascia fisso ogni punto di M.

Fissato il punto $i \in M$, il suo stabilizzatore è costituito dalle matrici

$$g = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ,$$

ossia il gruppo $SO(2)$ delle matrici ortogonali 2×2 con determinante uguale a 1. Quindi $M \sim SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$.

(1.f) In geometria differenziale, una varietà Riemanniana M si dice *omogenea* se per ogni coppia di punti $x, y \in M$ esiste una isometria di M in sé che applichi x in y.

Le isometrie di una varietà omogenea[18] formano un gruppo per composizione. Tale gruppo G ha una naturale struttura di gruppo localmente compatto (più precisamente di gruppo di Lie). Si ha un'azione di G su M ponendo $g \cdot x = g(x)$, e M risulta quindi uno spazio omogeneo.

Lo stabilizzatore di un generico punto di M è compatto. Questo è dovuto a una serie di fatti, cui accenniamo brevemente. Ogni isometria $g : M \to M$ è un'applicazione C^∞ tra varietà. Come tale, è ben definita la nozione di *differenziale* dg_x come applicazione lineare tra lo spazio tangente T_xM a M in x nello spazio tangente $T_{g(x)}M$ in $g(x)$. Vale inoltre la regola di composizione $d(gh)_x = dg_{h(x)}dh_x$.

Se un'isometria g lascia fisso il punto $x_0 \in M$, il suo differenziale dg_{x_0} nel punto x_0 applica $T_{x_0}M$ in sé. Per al regola di composizione dei differenziali, l'insieme $\{dg_{x_0} : g \in G_{x_0}\}$ è un sottogruppo di $GL(T_{x_0}M)$, il gruppo delle trasformazioni lineari invertibili di $T_{x_0}M$ in sé. Inoltre l'applicazione $g \mapsto dg_{x_0}$ è iniettiva.

La struttura di varietà Riemanniana presuppone poi che ogni spazio tangente T_xM sia dotato di un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle_x$, che consente di definire una "lunghezza", $\|v\|_x$, per i vettori tangenti in x. Le isometrie di M hanno la proprietà che i loro differenziali conservano la norma dei vattori tangenti: $\|dg_xv\|_{g(x)} = \|v\|_x$ (o equivalentemente conservano il prodotto scalare tra vettori tangenti).

In particolare, se $g \in G_{x_0}$, dg_{x_0} è una trasformazione ortogonale di $T_{x_0}M$ in sé. Quindi G_{x_0} è isomorfo a un sottogruppo del gruppo ortogonale $O(T_{x_0}M)$, che si dimostra essere chiuso. Poiché i gruppi ortogonali sono compatti, si conclude che G_{x_0} è compatto.

(1.g) L'Esempio 1.e si ricollega direttamente alla situazione generale descritta ora. La *metrica di Poincaré* sul semipiano superiore M, per cui la lunghezza di un vettore $u + iv \in \mathbb{C}$ applicato nel punto $z = x + iy \in M$ è data da

$$\|u + iv\|_z^2 = \frac{u^2 + v^2}{y^2}\ ,$$

o, come si scrive abitualmente, $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$, è tale che le trasformazioni lineari fratte $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ sono isometrie.

Queste trasformazioni descrivono tutte le isometrie di M di tipo olomorfo. Vi sono poi isometrie antiolomorfe, ottenute componendo quelle olomorfe con l'applicazione $z \mapsto -\bar{z}$, che pure è un'isometria di M.

Da un punto di vista topologico, il gruppo G delle isometrie di M è costituito da due componenti connesse, quella delle isometrie olomorfe e quella delle isometrie antiolomorfe.

2. Misure e operatori G-invarianti

Sia M uno spazio omogeneo di G. Da questo momento supporremo che

(1) lo stabilizzatore G_x di un generico elemento $x \in M$ è compatto;
(2) posto $K = G_{x_0}$, con $x_0 \in M$ arbitrariamente scelto, M è omeomorfo a G/K.

[18] Per tutto quanto non definito o dimostrato in questo esempio si rinvia a S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces.*

Lemma 2.1. *Sia $M = G/K$ con K sottogruppo compatto di G, e sia Λ la proiezione canonica di G su G/K. L'applicazione Λ^* che a $f \in C_c(G/K)$ associa la funzione $\Lambda^* f = f \circ \Lambda$ su G è un isomorfismo tra $C_c(G/K)$ e lo spazio $C_c(G;K)$ delle funzioni in $C_c(G)$ invarianti per traslazioni destre per elementi di K (ossia tali che $R_k f = f$ per ogni $k \in K$).*

Se dk è la misura di Haar normalizzata su K, l'applicazione che a $f \in C_c(G)$ associa la funzione

$$f^\sharp(g) = \int_K f(gk)\, dk \tag{2.1}$$

ha come immagine $C_c(G;K)$ e $(f^\sharp)^\sharp = f^\sharp$.

Dimostrazione. Chiaramente se f è una funzione definita su G/K,

$$f \circ \Lambda(gk) = f \circ \Lambda(g)\ ,$$

in quanto $\Lambda(gk) = \Lambda(g)$. Viceversa se F è una funzione definita su G e $F(gk) = F(g)$ per ogni $g \in G$ e ogni $k \in K$, allora F passa al quoziente modulo K, dando luogo a una funzione $\tilde{F}$ su G/K tale che $F = \tilde{F} \circ \Lambda$. Inoltre F è continua se e solo se lo è $\tilde{F}$.

Meno evidente è che se f ha supporto compatto su G/K, allora $f \circ \Lambda$ ha supporto compatto in G. Mostriamo quindi che se C è compatto in G/K, allora $\Lambda^{-1}(C)$ è compatto in G.

Sia $\mathcal{A} = \{A_i\}$ un ricoprimento aperto di $\Lambda^{-1}(C)$. Fissato $x_0 = g_0 K \in C$, $\Lambda^{-1}(x_0) = g_0 K \subset G$ è compatto, essendo un traslato di K. Esistono dunque $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ che ricoprono $g_0 K$. Vogliamo vedere che gli stessi aperti ricoprono gK se g è in un opportuno intorno di g_0.

Consideriamo l'applicazione prodotto da $G \times K$ in G. Dato $k \in K$ esistono un intorno U_k di g_0 in G e un intorno V_k di k in K tali che $U_k V_k \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Siano $k_1, \dots, k_m \in K$ tali che $V_{k_1} \cup \cdots \cup V_{k_m} = K$, e sia $U = U_{k_1} \cap \cdots \cap U_{k_m}$. Allora $UK \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Poiché UK è aperto, $W(x_0) = \Lambda(UK)$ è un intorno aperto di x_0.

Questo vale per ogni $x_0 \in C$. Esistono allora un numero finito di tali intorni $W(x_j)$ di punti $x_1, \dots, x_p \in C$ che ricoprono C. Per costruzione, $\Lambda^{-1}(W_j)$ è ricopribile con un numero finito di elementi di $\mathcal{A}$. Essendo $\Lambda^{-1}(C)$ contenuto nell'unione dei $\Lambda^{-1}(W_j)$, esso ammette un sottoricoprimento finito.

L'ultima affermazione segue facilmente dalle proprietà della misura di Haar su K. $\square$

Una misura di Borel regolare μ su uno spazio omogeneo M si dice G-invariante se $\mu(g \cdot B) = \mu(B)$ per ogni Boreliano B in M e ogni $g \in G$. La G-invarianza equivale alla condizione

$$\int_M f(g \cdot x)\, d\mu(x) = \int_M f(x)\, d\mu(x)$$

per ogni $f \in C_c(M)$ e ogni $g \in G$.

Proposizione 2.2. *Sia $M = G/K$ con K sottogruppo compatto di G. Esiste su M una misura di Borel regolare e positiva G-invariante, unica a meno di moltiplicazione per costanti positive.*

Dimostrazione. Sia dg una misura di Haar sinistra su G. Consideriamo il funzionale λ definito su $C(G/K)$ dato da $\lambda(f) = \int_G (\Lambda^* f)(g)\, dg$. Esso è ben definito perché $\Lambda^* f \in C_c(G)$ e positivo. Per il Teorema di rappresentazione di Riesz, esiste una e una sola misura di Borel regolare e positiva μ su G/K, tale che

$$\int_{G/K} f(x)\, d\mu(x) = \int_G f\big(\Lambda(g)\big)\, dg \ .$$

Se $h \in G$, poniamo $\tau_h f(x) = f(h^{-1} \cdot x)$. Se $x = \Lambda(g) \in G/K$, si ha $h \cdot \Lambda(x) = h \cdot (gK) = hgK = \Lambda(hg)$, per cui

$$\begin{aligned}
\int_{G/K} f(h \cdot x)\, d\mu(x) &= \int_{G/K} \tau_{h^{-1}} f(x)\, d\mu(x) \\
&= \int_G (\tau_{h^{-1}} f)\big(\Lambda(g)\big)\, dg \\
&= \int_G f\big(h \cdot \Lambda(g)\big)\, dg \\
&= \int_G f\big(\Lambda(hg)\big)\, dg \\
&= \int_G f\big(\Lambda(g)\big)\, dg \\
&= \int_{G/K} f(x)\, d\mu(x) \ .
\end{aligned}$$

Dunque μ è G-invariante. Viceversa, sia ν una misura di Borel regolare, positiva e G-invariante su G/K. Data $f \in C_c(G)$, sia $f^\sharp \in C_c(G; K)$ definita dalla (2.1). Per il Lemma 2.1, $f^\sharp = \psi \circ \Lambda$, con $\psi \in C_c(G/K)$ univocamente determinata. Poniamo allora

$$\lambda(f) = \int_{G/K} \psi(x)\, d\nu(x) \ .$$

Se $x = gK$ e $h \in G$,

$$\psi(h \cdot x) = \psi(hgK) = \varphi(hg) = \int_K L_{h^{-1}} f(gk)\, dk \ .$$

Quindi

$$\lambda(L_{h^{-1}} f) = \int_{G/K} \psi(h \cdot x)\, d\nu(x) \int_{G/K} \psi(x)\, d\nu(x) = \lambda(f) \ .$$

La misura positiva m su G corrispondente al funzionale positivo λ per il Teorema di rappresentazione di Riesz è dunque una misura di Haar. Esiste quindi una costante $c > 0$ tale che $\lambda(f) = c \int_G f(g)\, dg$. Ma allora, data $F \in C_c(G/K)$, sia $f = F \circ \Lambda$. Poiché f è K-invariante a destra, $f^\sharp = f$ e

$$\int_{G/K} F(x)\, d\nu(x) = \lambda(f) = c \int_G f(g)\, dg = c \int_{G/K} F(x)\, d\mu(x) \ .$$

Quindi $\nu = c\mu$. $\square$

Esempi.

(2.a) La misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale su $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ è invariante rispetto all'azione di $O(n)$. Questo segue facilmente dal fatto che la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ è pure $O(n)$-invariante. Analogamente, la misura di Hausdorff $(2n-1)$-dimensionale su $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ è invariante rispetto all'azione di $U(n)$. Un modo semplice per rendersi conto di ciò consiste nell'osservare che $U(n)$ è il gruppo delle trasformazioni $\mathbb{C}$-lineari che, viste come applicazioni di $\mathbb{R}^{2n}$ in sé, sono ortogonali. Con abuso di linguaggio si dice che $U(n) \subset O(2n)$.

(2.b) Si verifica facilmente che la misura $d\mu(x+iy) = \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$ è invariante per l'azione di $SL(2,\mathbb{R})$ sul semipiano superiore.

Nel corso della dimostrazione precedente abbiamo introdotto la notazione

$$\tau_g f(x) = f(g^{-1} \cdot x) \ . \tag{2.2}$$

Fissata una misura di Borel positiva G-invariante dx su M, indichiamo con $L^p(M)$ gli spazi di Lebesgue relativi a tale misura. Si vede facilmente che

$$\|\tau_g f\|_p = \|f\|_p$$

per ogni $p \in [1,\infty]$. Inoltre, adattando la dimostrazione del Lemma 4.5 del Cap.II, si vede pure facilmente che l'applicazione $g \mapsto \tau_g f$ è continua da G in $L^p(M)$ per ogni $f \in L^p(M)$ se $p < \infty$ e per ogni $f \in C_0(M)$ se $p = \infty$. In particolare τ definisce una rappresentazione unitaria di G su $L^2(M)$.

Poiché

$$\Lambda^*(\tau_g f) = L_g(\Lambda^* f) \ ,$$

τ è equivalente alla sottorappresentazione della rappresentazione regolare L di G sul sottospazio $L^2(G;K)$ delle funzioni K-invarianti a destra.

Consideriamo ora un operatore integrale su M, definito su $C_c(M)$,

$$Tf(x) = \int_M \Phi(x,y) f(y)\, dy \ , \tag{2.3}$$

con Φ continua su $M \times M$.

Diciamo che T è G-invariante se

$$T(\tau_g f) = \tau_g(Tf)$$

per ogni funzione f e ogni $g \in G$.

Teorema 2.3. *Sia x_0 un punto fissato in M, e sia $K = G_{x_0}$. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) *T è G-invariante;*
(2) *$\Phi(g \cdot x, g \cdot y) = \Phi(x,y)$ per ogni $g \in G$ e ogni $x, y \in M$;*
(3) *esiste una funzione φ continua su M e K-invariante (soddisfacente cioè l'identità $\varphi(k \cdot x) = \varphi(x)$), tale che $\Phi(x, g \cdot x_0) = \varphi(g^{-1} \cdot x)$;*
(4) *esiste una funzione ψ continua su G e bi-K-invariante (soddisfacente cioè l'identità $\psi(k_1 g k_2) = \psi(g)$), tale che*

$$\Phi(g \cdot x_0, h \cdot x_0) = \psi(h^{-1} g) \ . \tag{2.4}$$

Inoltre, se Φ *e* ψ *son legate dalla* (2.4), *e* $\Lambda(g) = g \cdot x_0$, *allora*

$$\Lambda^*(Tf) = (\Lambda^* f) * \psi \ .$$

Dimostrazione. Se T è G-invariante,

$$\begin{aligned}\int_M \Phi(g^{-1} \cdot x, y) f(y)\, dy &= \tau_g(Tf)(x) \\ &= T(\tau_g f)(x) \\ &= \int_M \Phi(x,y) f(g^{-1}y)\, dy \\ &= \int_M \Phi(x, g\cdot y) f(y)\, dy \ .\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di f e di x segue l'identità $\Phi(g^{-1}\cdot x, y) = \Phi(x, g\cdot y)$. Quindi $(1) \Rightarrow (2)$.

Supponiamo ora che valga la (2). Posto $\varphi(x) = \Phi(x, x_0)$, si ha per $k \in K$

$$\varphi(k\cdot x) = \Phi(k\cdot x, x_0) = \Phi(x, k^{-1}\cdot x_0) = \Phi(x, x_0) = \varphi(x) \ .$$

Inoltre

$$\Phi(x, g\cdot x_0) = \Phi(g^{-1}\cdot x, x_0) = \varphi(g^{-1}\cdot x) \ ,$$

per cui $(2) \Rightarrow (3)$.

Per vedere che $(3) \Rightarrow (4)$, basta prendere $\psi = \varphi \circ \Lambda$.

Infine, se ψ è continua e bi-K-invariante su G, sia Φ data dalla (2.4). Se $x = h_1 \cdot x_0$ e $y = h_2 \cdot x_0$,

$$\Phi(g\cdot x, g\cdot y) = \Phi\big((gh_1)\cdot x_0, (gh_2)\cdot x_0\big) = \psi\big((gh_2)^{-1} gh_1\big) = \psi(h_2^{-1}h_1) = \Phi(x,y) \ .$$

Infine,

$$\begin{aligned}(Tf)\circ\Lambda(g) &= \int_M \Phi(g\cdot x_0, y) f(y)\, dy \\ &= \int_G \Phi(g\cdot x_0, h\cdot x_0) f(h\cdot x_0)\, dh \\ &= \int_G \psi(h^{-1}g)(f\circ\Lambda)(h)\, dh \\ &= (f\circ\Lambda) * \psi(g) \ . \qquad \square\end{aligned}$$

Si noti che una funzione K-invariante su M, come in (3), è una funzione costante sulle orbite dell'azione di K. Le equivalenze stabilite nel Teorema 2.3 valgono anche per nuclei Φ che siano semplicemente localmente integrabili.

Esempi.

(2.c) Sia $G = O(n)$, $M = S^{n-1}$ la sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$. Lo stabilizzatore di $x_0 = e_1$ è il sottogruppo K, isomorfo a $O(n-1)$, costituito dalle matrici

$$\tilde{k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} ,$$

con $k \in O(n-1)$ (in questo c'è completa analogia con l'Esempio 1.d). L'elemento $\tilde{k} \in K$ applica il punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^{n-1}$ nel punto

$$\tilde{k} \cdot x = \big(x_1, k(x_2, \dots, x_n)\big) .$$

Poiché $O(n-1)$ agisce in modo transitivo sulla sfera S^{n-2}, l'orbita di x sotto l'azione di K è il "parallelo" (con polo e_1) costituito dai punti di S^{n-1} aventi la stessa coordinata x_1.

Una funzione K-invariante su S^{n-1} è dunque una funzione dipendente solo dalla coordinata x_1 (dalla "latitudine"). Una tale funzione si dice *zonale*.

Il gruppo $O(n)$ può essere sostituito dal gruppo $SO(n)$ delle matrici ortogonali di determinante 1 (si noti che una matrice ortogonale ha determinante ± 1). Le conclusioni sono le stesse.

(2.d) Sia G il *gruppo dei moti Euclidei su* $\mathbb{R}^n$, uguale al prodotto semidiretto di $\mathbb{R}^n$ (sottogruppo delle traslazioni) con $O(n)$ (sottogruppo delle rotazioni). Il prodotto di $(k, v) \in O(n) \times \mathbb{R}^n$ per (k', v') è dato da $(kk', kv' + v)$ (v. Esempio 3.c del Cap.II).

G agisce in modo naturale su $\mathbb{R}^n$:

$$(k, v) \cdot x = kx + v ,$$

e l'azione è transitiva. Lo stabilizzatore del punto 0 è il sottogruppo $K = O(n)$ delle rotazioni. Una funzione K-invariante su $\mathbb{R}^n$ è una funzione costante su tutte le sfere centrate nell'origine, ossia una funzione *radiale*.

(2.e) Sia H un gruppo compatto. Si prenda G uguale al prodotto diretto $H \times H$, e si consideri la sua azione su $M = H$ data da

$$(h, h') \cdot x = hx{h'}^{-1} .$$

L'azione è transitiva e lo stabilizzatore dell'elemento neutro $e \in H$ è il sottogruppo "diagonale" $K = \{(h, h) : h \in H\}$, isomorfo a H. Una funzione f su $H = M$ è K-invariante se e solo se

$$f\big((h, h) \cdot x\big) = f(hxh^{-1}) = f(x)$$

per ogni $h, x \in H$. Essa è dunque una funzione centrale.

Il Teorema 2.3 assume in questo caso la seguente formulazione: un operatore integrale $Tf(x) = \int_H \Phi(x, y) f(y)\, dy$ commuta con le traslazioni sia destre che sinistre su H se e solo se $\Phi(x, y) = \varphi(y^{-1}x)$ con φ centrale, e di conseguenza $Tf = \varphi * f$.

3. Spazi omogenei compatti e armoniche sferiche

Sia G un gruppo compatto, K un suo sottogruppo chiuso, e $M = G/K$ il corrispondente spazio omogeneo. Vogliamo utilizzare i risultati del Cap.V per ottenere la decomposizione di $L^2(M)$ sotto l'azione di G, ossia le componenti irriducibili della rappresentazione τ del paragrafo precedente.

Usando la corrispondenza tra funzioni su G/K e funzioni K-invarianti a destra su G, stabilita nel Lemma 2.1, possiamo ricondurre il problema a quello di decomporre, rispetto all'azione della rappresentazione L, il sottospazio $L^2(G;K)$ delle funzioni $f \in L^2(G)$ tali che $R_k f = f$ per ogni $k \in K$.

Per il Corollario 3.3 del Cap.V,

$$L^2(G;K) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}} L^2(G;K) \cap M^\pi \ .$$

Si tratta dunque di individuare le funzioni K-invarianti a destra in M^π.

Definizione. *Una rappresentazione π di G si dice* di classe 1 rispetto a K *se esistono vettori v non nulli in H_π tali che $\pi(k)v = v$ per ogni $k \in K$.*

Indichiamo con H_π^K il sottospazio di H_π costituito dai vettori K-invarianti.

Lemma 3.1. *L'intersezione $L^2(G;K) \cap M^\pi$ è non banale se e solo se π è di classe 1 rispetto a K. Esso è generato dai coefficienti $\varphi^\pi_{v,w}$ con $v \in H_\pi$ e $w \in H_\pi^K$.*

Dimostrazione. Chiaramente $L^2(G;K) \cap M^\pi$ è un sottospazio L-invariante di M^π. Per il Lemma 2.3 (5), esso è la somma diretta di sottospazi di M^π della forma ${}_vM^\pi$. Se un tale sottospazio è costituito da funzioni K-invarianti a destra, vuol dire in particolare che, per ogni $w \in H_\pi$ e ogni $k \in K$,

$$\langle \pi(k)v, w \rangle = \varphi_{w,v}(k) = \varphi_{w,v}(e) = \langle v, w \rangle \ .$$

Quindi $v \in H_\pi^K$. Viceversa, è facile vedere che, se $v \in H_\pi^K$, allora ${}_vM^\pi \subset L^2(G;K)$. $\square$

Dal Teorema di Peter-Weyl si ricava a questo punto la seguente decomposizione di $L^2(M)$. Le notazioni sono quelle del Cap.V.

Teorema 3.2. *Sia $\mathcal{P}_K$ il sottoinsieme di $\mathcal{P}$ costituito dalle rappresentazioni di classe 1 rispetto a K. Per ogni $\pi \in \mathcal{P}_K$ si fissi una base $\{e_i^\pi, \dots, e_{d_\pi}^\pi\}$ di H_π, tale che $\{e_1, \dots, e_{m_\pi}^\pi\}$, con $m_\pi \le d_\pi$, sia una base di H_π^K. Allora il sistema*

$$\left\{ \sqrt{d_\pi}\varphi^\pi_{j,k} \right\}_{\pi \in \mathcal{P}_K\ ,\, j \le d_\pi\ ,\, k \le m_\pi}$$

forma una base ortonormale di $L^2(G;K)$. Queste funzioni passano al quoziente modulo K, dando luogo a una base ortonormale di $L^2(G/K)$.

In modo analogo si ricava la seguente descrizione dello spazio $L^2(K;G;K)$ delle funzioni bi-K-invarianti su G, isomorfo allo spazio delle funzioni K-invarianti in $L^2(M)$.

Theorem 3.3. *Siano $\mathcal{P}_K$, $\varphi^\pi_{j,k}$ come sopra. Il sistema*

$$\{\sqrt{d_\pi}\varphi^\pi_{j,k}\}_{\pi\in\mathcal{P}_K\ ,\, j,k\leq m_\pi}$$

forma una base ortonormale di $L^2(K;G;K)$.

Nel resto di questo paragrafo analizziamo in dettaglio un caso particolare: $G = SO(n)$ e $M = S^{n-1}$.

Per il Teorema di Stone-Weierstrass, lo spazio $\mathbb{P}$ dei polimoni in n variabili è uniformemente denso in $C(S^{n-1})$, e dunque denso in $L^2(S^{n-1})$. Indichiamo con $\mathbb{P}_k$ il sottospazio dei polinomi omogenei di grado k,

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha \ .$$

Chiaramente

$$\mathbb{P} = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}_k \ ,$$

e se $g \in SO(n)$ e $p \in \mathbb{P}_k$, anche $\tau_g p = p\circ g^{-1}$ è in $\mathbb{P}_k$. Quindi

$$V_k = \{p_{|_{S^{n-1}}} : p \in \mathbb{P}_k\}$$

è un sottospazio invariante di dimensione finita di $L^2(S^{n-1})$ e la somma dei V_k è densa in $L^2(S^{n-1})$. Tuttavia, l'operatore di restrizione alla sfera non è iniettivo, per cui i V_k non sono a due a due disgiunti. Per esempio, $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ sulla sfera. Occorre quindi trovare una descrizione più precisa di tali spazi e delle loro componenti $SO(n)$-invarianti.

Introduciamo su $\mathbb{P}_k$ il prodotto scalare *di Riesz-Fischer*

$$\langle\!\langle p, q\rangle\!\rangle = p(\partial_x)\bar{q} \ , \tag{3.1}$$

dove $p(\partial_x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \partial_x^\alpha$. Poiché p e q sono costituiti da monomi dello stesso grado, il secondo membro della (3.1) è una costante. Precisamente, se $|\alpha| = |\beta| = k$,

$$\partial_x^\alpha(x^\beta) = \partial_{x_1}^{\alpha_1}(x_1^{\beta_1})\,\partial_{x_2}^{\alpha_2}(x_2^{\beta_2})\,\cdots\,\partial_{x_n}^{\alpha_n}(x_n^{\beta_n}) = \delta_{\alpha,\beta}\alpha! \ ,$$

con $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$. Da questa formula seguono facilmente le proprietà di prodotto scalare.

Indichiamo inoltre con $\mathbb{P}_k^0 \subset \mathbb{P}_k$ lo spazio dei polinomi omogenei di grado k e *armonici*, aventi cioè Laplaciano nullo.

Lemma 3.4. *$\mathbb{P}_k$ si decompone come somma diretta*

$$\mathbb{P}_k = |x|^2\mathbb{P}_{k-2} \oplus \mathbb{P}_k^0 \ ,$$

dove i due addendi sono ortogonali rispetto al prodotto scalare di Riesz-Fischer.

Dimostrazione. Consideriamo l'operatore $T : \mathbb{P}_{k-2} \to \mathbb{P}_k$ dato dalla moltiplicazione per $|x|^2$. Allora $\mathbb{P}_k = \operatorname{im} T \oplus \ker T^*$ come somma ortogonale. Dati $p \in \mathbb{P}_k$, $q \in \mathbb{P}_{k-2}$, si ha allora

$$\begin{aligned}\langle\!\langle q, T^*p\rangle\!\rangle &= \langle\!\langle Tq, p\rangle\!\rangle \\ &= q(\partial_x)\Delta\bar{p} \\ &= \langle\!\langle q, \Delta p\rangle\!\rangle \ ,\end{aligned}$$

in quanto, se $r(x) = |x|^2$, $r(\partial_x) = \Delta$. Quindi $\ker T^* = \mathbb{P}_0^k$. $\square$

Quindi ogni polinomio omogeneo di grado k si decompone in modo unico come somma $q(x) + |x|^2 r(x)$, dove q è armonico e r ha grado $k-2$.

Teorema 3.5. *Un polinomio omogeneo $p \in \mathbb{P}_k$ si decompone in uno e un solo modo come*

$$p(x) = p_k(x) + |x|^2 p_{k-2}(x) + |x|^4 p_{k-4}(x) + \cdots \tag{3.2}$$

con ogni p_j armonico e omogeneo di grado j.

La restrizione a S^{n-1} di ogni polinomio coincide con la restrizione di uno e un solo polinomio armonico. Posto

$$\mathcal{H}_k = \{p_{|_{S^{n-1}}} : p \in \mathbb{P}_k^0\} \ ,$$

gli spazi H_k sono a due a due ortogonali in $L^2(S^{n-1})$, $SO(n)$-invarianti, e la loro somma è densa in $L^2(S^{n-1})$.

Se $n \geq 3$, la restrizione τ_k di τ a ogni H_k è irriducibile, e $\tau_k \sim \tau_{k'}$ se e solo se $k = k'$.

Gli elementi di $\mathcal{H}_k$ si chiamano *armoniche sferiche di grado k.*

Prima di dare la dimostrazione, enunciamo due lemmi.

Lemma 3.6. *Sia A una matrice $n \times n$. Allora*

$$\Delta(f \circ A)(x) = \sum_{j,k=1}^{n} b_{j,k} \partial_j \partial_k f(Ax) \ ,$$

dove $(b_{j,k}) = A\,{}^tA$. In particolare, se A è ortogonale, $\Delta(f \circ A)(x) = \Delta f(Ax)$.

Dimostrazione. Sia $A = (a_{j,k})$. Allora

$$\partial_i (f \circ A)(x) = \sum_j a_{j,i} \partial_j f(Ax) \ ,$$

e

$$\partial_i^2 (f \circ A)(x) = \sum_{j,k} a_{j,i} a_{k,i} \partial_j \partial_k f(Ax) \ .$$

Quindi

$$\begin{aligned} \Delta(f \circ A)(x) &= \sum_i \partial_i^2 (f \circ A)(x) \\ &= \sum_{i,j,k} a_{j,i} a_{k,i} \partial_j \partial_k f(Ax) \\ &= \sum_{j,k} \Big(\sum_i a_{j,i} a_{k,i} \Big) \partial_j \partial_k f(Ax) \ . \end{aligned}$$

L'ultima affermazione è evidente. $\square$

Lemma 3.7. *Sia V un sottospazio τ-invariante di $L^2(S^{n-1})$ contenente, a meno di moltiplicazione per scalari, una sola funzione K-invariante, dove $K = SO(n-1)$ è lo stabilizzatore di $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Allora la restrizione di τ a V è irriducibile.*

Dimostrazione. Il sottospazio $\pi^*V \subset L^2(G; K) \subset L^2(G)$ è L-invariante. Per il Corollario 3.3 e il Lemma 2.3 del Cap.V, π^*V è la somma diretta di sottospazi irriducibili ${}_{v_j}M^\pi$, con $\{v_j\}$ sistema ortonormale in H_π. Per il Lemma 3.1, deve essere $v_j \in H_\pi^K$. Per ognuno di tali sottospazi irriducibili, la funzione $\varphi^\pi_{v_j, v_j}$ è in π^*V ed è bi-K-invariante. Riportando tali funzioni su $G/K = S^{n-1}$, si ottengono altrettante funzioni K-invarianti e linearmente indipendenti. Di conseguenza solo uno di tali spazi può essere presente in π^*V, che è pertanto irriducibile. Allora anche V è irriducibile rispetto a τ. $\square$

Dimostrazione del Teorema 3.5. Si decomponga $p \in \mathbb{P}_k$ come $p(x) = p_k(x) + |x|^2 r(x)$, con $q \in \mathbb{P}_k^0$ e $r \in \mathbb{P}_{k-2}$. Si applichi quindi la stessa decomposizione a r e così via. Si giunge in tal modo alla (3.2). L'unicità della decomposizione è conseguenza del Lemma 3.4.

Preso un generico polinomio $p \in \mathbb{P}$, si decomponga prima p nella somma delle sue componenti omogenee, e si applichi poi a ciascuna di esse la (3.2). Vale allora per p la (3.2), con la differenza che i polinomi p_j non sono più omogenei, pur restando armonici. La restrizione di p a S^{n-1} coincide allora con quella di

$$\tilde{p}(x) = p_k(x) + p_{k-2}(x) + p_{k-4}(x) + \cdots ,$$

che è armonico.

Per vedere che $\tilde{p}$ è l'unico polinomio armonico tale che $\tilde{p}_{|_{S^{n-1}}} = p_{|_{S^{n-1}}}$, sia q un altro polinomio con la stessa proprietà. Allora $q - \tilde{p}$ è armonico e nullo su tutta la sfera. Per il principio del massimo, esso è nullo sulla palla unitaria B_n, da cui $q = \tilde{p}$.

Siano ora $p \in \mathbb{P}_k^0$ e $q \in \mathbb{P}_j^0$. Per la loro omogeneità,

$$\frac{\partial}{\partial r} p(rx) = \frac{\partial}{\partial r} r^k p(x) = k r^{k-1} p(x) ,$$

e analogamente $\frac{\partial}{\partial r} q(rx) = k r^{j-1} q(x)$. In particolare, se $\omega \in S^{n-1}$ e $\frac{\partial}{\partial n}$ è la derivata lungo la normale uscente dalla sfera,

$$\frac{\partial p}{\partial n}(\omega) = k p(\omega) , \qquad \frac{\partial q}{\partial n}(\omega) = j q(\omega) .$$

Per il Teorema di Gauss-Green,

$$\begin{aligned}(j-k) \int_{S^{n-1}} p(\omega)\bar{q}(\omega)\, d\omega &= \int_{S^{n-1}} \left(p(\omega) \frac{\partial \bar{q}}{\partial n}(\omega) - \bar{q}(\omega) \frac{\partial p}{\partial n}(\omega) \right) d\omega \\ &= \int_{B_n} \big(p(\omega) \Delta \bar{q}(\omega) - \bar{q}(\omega) \Delta p(\omega) \big)\, d\omega \\ &= 0 .\end{aligned}$$

Quindi, se $j \neq k$, $\mathcal{H}_j$ e $\mathcal{H}_k$ sono ortogonali in $L^2(S^{n-1})$. Per il Lemma 3.6, $\mathcal{H}_k$ è τ-invariante.

Per vedere che τ_k è irriducibile, basta far vedere, per il Lemma 3.7, che $\mathcal{H}_k$ contiene, a meno di scalari, un'unica funzione K-invariante.

Sia allora $p \in \mathbb{P}_k^0$ un polinomio armonico omogeneo di grado k e K-invariante. Indichiamo un punto $x \in \mathbb{R}^n$ come (x_1, x'), con $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x' = (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Per ogni x_1 fissato, $p(x_1, \cdot)$ è una funzione su $\mathbb{R}^{n-1}$ invariante rispetto all'azione di $SO(n-1)$. Per l'Esempio (2.d), essa dipende solo da $|x'|$. Quindi

$$p(x_1, x') = c_0 x_1^k + c_1 x_1^{k-2} |x'|^2 + \cdots + x_1^{k-2j} |x'|^{2j} + \cdots \ .$$

Imponiamo a tale funzione di essere armonica. Semplici calcoli danno

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1}^2 \big(x_1^{k-2j} |x'|^{2j} \big) &= (k-2j)(k-2j-1) x_1^{k-2j-2} |x'|^{2j} \\
\partial_{x_\ell}^2 \big(x_1^{k-2j} |x'|^{2j} \big) &= 2j(2j-2) x_1^{k-2j} x_e ll^2 |x'|^{2j-4} + 2j x_1^{k-2j} |x'|^{2j-2} \ ,
\end{aligned}$$

se $\ell \geq 2$. Sommando si ottiene

$$\Delta \big(x_1^{k-2j} |x'|^{2j} \big) = (k-2j)(k-2j-1) x_1^{k-2j-2} |x'|^{2j} + 2j(2j-2+n-1) x_1^{k-2j} |x'|^{2j-2} \ .$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\Delta p(x_1, x') = \big(k(k-1)c_0 + 2(n-1)c_1 \big) x_1^{k-2} \\
+ \big((k-2)(k-3)c_1 + 4(n+1)c_2 \big) x_1^{n-4} |x'|^2 + \cdots
\end{aligned}$$

Perché p sia armonico, occorre che i singoli addendi siano nulli. Assegnato un valore non nullo a c_0, si determinano ricorsivamente i valori degli altri coefficienti in modo univoco.

La non equivalenza delle τ_k segue dal fatto che le dimensioni degli spazi $\mathcal{H}_k$ sono tutte diverse. Per il Lemma 3.4,

$$\dim \mathcal{H}_k = \dim \mathbb{P}_k^0 = \dim \mathbb{P}_k - \dim \mathbb{P}_{k-2} \ .$$

La dimensione di $\mathbb{P}_k$ è uguale al numero di monomi x^α di grado k. Dato $t \in \mathbb{R}$, si consideri la serie

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} t^{|\alpha|} x^\alpha &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (tx)^\alpha \\
&= \Big(\sum_{\alpha_1 = 0}^{\infty} (tx_1)^{\alpha_1} \Big) \cdots \Big(\sum_{\alpha_n = 0}^{\infty} (tx_n)^{\alpha_n} \Big) \\
&= \frac{1}{(1 - tx_1) \cdots (1 - tx_n)} \ ,
\end{aligned}$$

in cui si ha convergenza se $|tx_j| < 1$ per ogni j. Posto $x_j = 1$ per ogni j, si ottiene, per $|t| < 1$, l'identità

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} t^{|\alpha|} = \frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} t^k \ .$$

Ma il coefficiente di t^k a primo membro è uguale al numero di multiindici α con $|\alpha| = k$. Quindi $\dim \mathbb{P}_k = \binom{n+k-1}{n-1}$ e infine

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{H}_k &= \binom{n+k-1}{n-1} - \binom{n+k-3}{n-1} \\ &= (n+2k-2)\frac{(n+k-3)(n+k-4)\cdots(k+1)}{(n-2)!} \ ,\end{aligned}$$

quantità che è strettamente crescente in k. $\square$

In dimensione $n = 2$, La decomposizione in armoniche sferiche si comprende facilmente se si usa la variabile complessa $z = x + iy$ in luogo delle due coordinate reali. Un generico polinomio omogeneo di grado k ha la forma

$$p(z) = c_0 z^k + c_1 z^{k-1}\bar{z} + \cdot + c_j z^{k-j}\bar{z}^j + \cdot + c_k \bar{z}^k \ .$$

Il primo addendo è olomorfo, dunque armonico; l'ultimo è pure armonico perché antiolomorfo. In ciascuno dei termini intermedi si può mettere in evidenza un fattore $z\bar{z} = |z|^2$ ottenendo $p(z) = q(z) + |z|^2 r(z)$, con

$$q(z) = c_0 z^k + c_k \bar{z}^k \ , \qquad r(x) = \sum_{j=1}^{k-1} c_j z^{k-j-1}\bar{z}^{j-1} \ .$$

Ripetendo questa decomposizione su r e così via, si giunge a scrivere

$$p(z) = c_0 z^k + c_k \bar{z}^k + |z|^2(c_1 z^{k-2} + c_{k-1}\bar{z}^{k-2}) + |z|^4(c_2 z^{k-4} + c_{k-2}\bar{z}^{k-4}) + \cdots \ .$$

Quindi i polinomi omogenei armonici di grado k sono le combinazioni lineari di z^k e $\bar{z}^k$. Le loro restrizioni a $S^1 = \mathbb{T}$ sono i caratteri $e^{\pm ikt}$. La decomposizione in armoniche sferiche coincide dunque con lo sviluppo di Fourier sul toro. Si noti che in questo caso gli spazi $\mathcal{H}_k$ hanno dimensione 2 (se $k \geq 1$) e non sono irriducibili[19].

Corollario 3.8. *Le rappresentazioni τ_k di $G = SO(n)$ sono, a meno di equivalenza, tutte e sole quelle di classe 1 rispetto a $K = SO(n-1)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, il sottospazio $\mathcal{H}_k^K$ ha dimensione 1.*

Le funzioni in $\mathcal{H}_k^K$ si chiamano *armoniche zonali* di grado k.

4. Coppie di Gelfand

La discussione svolta nel paragrafo 2 mostra il ruolo svolto dalle funzioni K-invarianti a destra su G, ottenute "sollevando" tramite la proiezione canonica Λ le funzioni su $M = G/K$, e quello svolto dalle funzioni bi-K-invarianti, che corrispondono, nel senso del Teorema 2.3, agli operatori integrali su M che commutano con l'azione di G.

Nel paragrafo 3 abbiamo descritto, nel caso compatto, le funzioni K- e bi-K-invarianti in $L^2(G)$ in relazione alla decomposizione di $L^2(G)$ data dal Teorema di Peter-Weyl.

[19] Diventano però irriducibili sotto l'azione di $O(2)$.

Rimuoviamo ora la condizione di compattezza su M, o equivalentemente su G, ma supponiamo che G sia unimodulare. Continueremo a indicare con $L^p(G;K)$ e $L^p(K;G;K)$ gli spazi delle funzioni rispettivamente K-invarianti a destra e bi-K-invarianti in $L^p(G)$.

Se π è una rappresentazione unitaria di G, indichiamo ancora con H_π^K il sottospazio chiuso di H_π costituito dai vettori v tali che $\pi(k)v = v$ per ogni $k \in K$, e diciamo che π è di classe 1 rispetto a K se H_π^K è non banale.

In termini di trasformata di Fourier si ha la seguente caratterizzazione delle funzioni integrabili K- e bi-K-invarianti.

Lemma 4.1. *Una funzione $f \in L^1(G)$ è K-invariante a destra se e solo se, per ogni rappresentazione unitaria irriducibile π di G, $\pi(f) = \pi(f)P_\pi^K$, dove*

$$P_\pi^K = \int_K \pi(k)\,dk$$

è il proiettore ortogonale di H_π su H_π^K (con dk misura di Haar normalizzata su K). Analogamente, f è bi-K-invariante se e solo se $\pi(f) = P_\pi^K \pi(f) P_\pi^K$ per ogni π unitaria irriducibile.

Dimostrazione. Verifichiamo innanzitutto che P_π^K è il proiettore indicato. Dati $v \in H_\pi$ e $k \in K$, si vede facilmente che

$$\pi(k)P_\pi^K v = P_\pi^K \pi(k) v = P_\pi^K v \ .$$

Quindi l'immagine di P_π^K è contenuta in H_π^K. Viceversa, se $v \in H_\pi^K$, $P_\pi^K v = v$. Quindi $(P_\pi^K)^2 = P_\pi^K$ e $\operatorname{im} P_\pi^K = H_\pi^K$. Infine

$$(P_\pi^K)^* = \int_K \pi(k)^*\,dk = \int_K \pi(k^{-1})\,dk = P_\pi^K \ .$$

Se ora $f \in L^1(G;K)$, si ha

$$\begin{aligned}
\pi(f)P_\pi^K &= \int_G f(g)\pi(g) \int_K \pi(k)\,dk\,dg \\
&= \int_K \int_G f(g)\pi(gk)\,dg\,dk \\
&= \int_K \pi(f)\,dk \\
&= \pi(f) \ .
\end{aligned}$$

Viceversa, se $\pi(f) = \pi(f)P_\pi^K$ per ogni π unitaria irriducibile, per ogni $k \in K$ si ha

$$\pi(R_k f) = \int_G f(gk)\pi(g)\,dg = \pi(f)\pi(k) = \pi(f)P_\pi^K \pi(k) = \pi(f)P_\pi^K = \pi(f) \ .$$

Per il Teorema di unicità (Corollario 4.3 del Cap.IV), $R_k f = f$, e dunque f è K-invariante a destra.

Il caso bi-K-invariante si tratta in modo analogo. $\square$

Si verifica facilmente che $L^1(K;G;K)$ è una sottoalgebra di Banach di $L^1(G)$ rispetto alla convoluzione, chiusa per involuzione.

Definizione. *Si dice che (G, K) è una* coppia di Gelfand *se $L^1(K; G; K)$ è commutativa.*

Indichiamo due criteri per determinare se una coppia (G, K) è di Gelfand. Il primo è una condizione solo sufficiente, ma piuttosto elementare.

Proposizione 4.2. *Supponiamo che per ogni $x \in G$ esistano $k_1, k_2 \in K$ tali che $x^{-1} = k_1 x k_2$. Allora (G, K) è una coppia di Gelfand.*

Dimostrazione. L'ipotesi implica che, per ogni $f \in L^1(K; G; K)$, allora $f(x^{-1}) = f(x)$ quasi ovunque, ossia $\check{f} = f$. Quindi, se $f, g \in L^1(K; G; K)$,

$$f * g = \check{f} * \check{g} = (g * f)\check{} = g * f \,. \qquad \square$$

Il secondo criterio riguarda le rappresentazioni unitarie irriducibili di G. Premettiamo la seguente versione del Lemma di Schur per *-rappresentazioni di algebre di Banach.

Lemma 4.3. *Sia π una *-rappresentazione irriducibile di un'algebra con involuzione A su uno spazio di Hilbert H. Se $T \in \mathcal{L}(H)$ commuta con ogni operatore $\pi(a)$, con $a \in A$, allora T è un multiplo scalare dell'identità. In particolare, una *-rappresentazione irriducibile di un'algebra commutativa con involuzione ha dimensione uno.*

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 1.5 del Cap.IV.

Teorema 4.4. *La coppia (G, K) è di Gelfand se e solo se per ogni rappresentazione unitaria irriducibile π di G, di classe 1 rispetto a K, H_π^K ha dimensione uno.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\dim H_\pi^K \leq 1$ per ogni rappresentazione unitaria irriducibile π di G. Per il Lemma 4.1, se $f \in L^1(K; G; K)$, si ha $\pi(f) = 0$, se π non è di classe 1, oppure $\pi(f) = c(\pi) P_\pi^K$, perché P_π^K è un proiettore di rango 1. In ogni caso, date $f, g \in L^1(K; G; K)$, $\pi(f)$ e $\pi(g)$ commutano fra loro, e dunque $\pi(f * g) = \pi(g * f)$. Per il Teorema di unicità, $f * g = g * f$.

Viceversa, supponiamo che (G, K) sia una coppia di Gelfand, e sia π una rappresentazione unitaria irriducibile di G, di classe 1 rispetto a K. Allora anche la corrispondente *-rappresentazione di $L^1(G)$, che pure indichiamo con π, è irriducibile (si lascia per esercizio la dimostrazione per induzione).

Per ogni $f \in L^1(K; G; K)$, l'operatore $\pi(f)$ lascia invariato il sottospazio H_π^K, per cui è ben definita la *-rappresentazione

$$\tilde{\pi}(f) = \pi(f)_{|_{H_\pi^K}}$$

di $L^1(K; G; K)$ su H_π^K. Mostriamo che essa è irriducibile.

Sia $H_\pi^K = X_1 \oplus X_2$, con X_1, X_2 ortogonali e $\tilde{\pi}$-invarianti. Supponendo X_1 non banale, sia $H_1 = \text{rm span}\{\pi(f)v : f \in L^1(G)\,, v \in X_1\} \subset H_\pi$. Poiché H_1 è invariante rispetto alla rappresentazione di $L^1(G)$. Quindi H_1 è denso in H_π.

D'altra parte, H_1 è ortogonale a X_2. Infatti, dati $v \in X_1$, $w \in X_2$ e$f \in L^1(G)$, si ha

$$\begin{aligned}
\langle \pi(f)v, w\rangle &= \int_G f(g)\langle \pi(g)v, w\rangle\, dg \\
&= \int_{K\times K}\int_G f(g)\langle \pi(g)\pi(k_1)v, \pi(k_2)w\rangle\, dg\, dk_1, dk_2 \\
&= \int_G \left(\int_{K\times K} f(k_2^{-1}gk_1)\, dk_1\, dk_2\right)\langle \pi(g)v, w\rangle\, dg \\
&= \langle \tilde\pi(\tilde f)v, w\rangle \\
&= 0\ ,
\end{aligned}$$

dove $\tilde f(g) = \int_{K\times K} f(k_2^{-1}gk_1)\, dk_1\, dk_2 \in L^1(K;G;K)$.

Quindi $X_2 = \{0\}$ e $\tilde\pi$ è irriducibile. Per il Lemma 4.3, $\dim H_\pi^K = 1$. $\square$

Esempi.

(4.a) I risultati del paragrafo precedente mostrano che $\big(SO(n), SO(n-1)\big)$ è una coppia di Gelfand, perché ogni spazio $\mathcal{H}_k$ contiene, a meno di scalari, un'unica armonica zonale, in accordo con il Teorema 4.4.

D'altra parte, anche il primo criterio dà la stessa conclusione. La condizione della Proposizione 4.2 si traduce nel fatto che, posto $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, per ogni $g \in SO(n)$ esista $k \in SO(n-1)$ tale che $g^{-1}e_1 = kge_1$. Ma questo equivale a dire che la prima coordinata di $g^{-1}e_1$ coincida con quella di ge_1.

Se $g = (a_{j,k})$, la prima coordinata di ge_1 è $a_{1,1}$, e quella di $g^{-1}e_1 = {}^t ge_1$ è ancora $a_{1,1}$.

(4.b) Un argomento simile, ma un po' più elaborato, porta a concludere che la coppia $\big(SU(n), SU(n-1)\big)$ è pure di Gelfand.

Due punti $z, w \in S^{2n-1}$ appartengono alla stessa orbita di $K = SU(n-1)$ se e solo se $z_1 = w_1$. Inoltre, dato $g = (a_{j,k}) \in SU(n) = G$, la prima componente di ge_1 è $a_{1,1}$, mentre quella di $g^{-1}e_1 = g^*e_1$ è $\overline{a_{1,1}}$. La situazione non è quindi del tutto analoga al caso reale. Si ha tuttavia $g^{-1}e_1 = \bar g e_1$. Data allora una funzione f su $SU(n)$, poniamo $\tilde f(g) = f(\bar g)$. Se $f \in L^1(K;G;K)$, quanto detto implica che $\check f(g) = f({}^{-1}g) = \tilde f(g)$. Osservando che

$$\check f * \check h = (h * f)\check{}\ , \qquad \tilde f * \tilde h = \widetilde{f * h}\ ,$$

si conclude che $f * h = h * f$ per $f, h \in L^1(K;G;K)$.

(4.c) Consideriamo la coppia $\big(SL(2,\mathbb{R}), SO(2)\big)$, il cui spazio omogeneo è il semipiano superiore. Ad essa si può applicare il criterio della Proposizione 4.2: data $g \in SL(2,\mathbb{R})$, esistono $k_1, k_2 \in SO(2)$ tali che $g^{-1} = k_1gk_2$. Questo segue dal seguente teorema di decomposizione per matrici quadrate invertibili: data una matrice $n\times n$ A invertibile, esistono una matrice diagonale D e due matrici ortogonali U, V, tali che $A = UDV$.

Questo enunciato si dimostra come segue: consideriamo ${}^tAA$, che è simmetrica definita positiva. Essa si diagonalizza su una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, per cui esistono D_0 diagonale, con coefficienti diagonali positivi, e $V \in O(n)$ tali che ${}^tAA =$

${}^t V D_0 V$. Sia D la matrice diagonale i cui coefficienti diagonali sono le radici quadrate positive dei corrispondenti coefficienti di D_0. Allora ${}^tAA = {}^tVD^2V$. Sia $U = AV^{-1}D^{-1}$, in modo che $A = UDV$. Allora

$$ {}^tUU = D^{-1}V\,{}^tAA\,{}^tVD^{-1} = D^{-1}D^2D^{-1} = I \ , $$

per cui $U \in O(n)$.

In particolare, data $g \in SL(2,\mathbb{R})$, si ha $g = h_1dh_2$, con $h_1, h_2 \in O(2)$ e d diagonale con coefficenti diagonali positivi. Quindi $\det d > 0$. Poiché $\det h_j = \pm 1$, si ha anche $\det d = \pm 1$. In definitiva, $\det d = 1$, per cui

$$ d = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \ , $$

con $a > 0$. Inoltre $\det h_1 \det h_2 = 1$, da cui $\det h_1 = \det h_2$.

Posto $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, si ha

$$ jdj^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = d^{-1} \ . $$

Quindi

$$ g^{-1} = h_2^{-1}d^{-1}h_1^{-1} = (h_2^{-1}j)d(j^{-1}h_1^{-1}) = (h_2^{-1}jh_1^{-1})g(h_2^{-1}j^{-1}h_1^{-1}) \ , $$

dove i due termini in parentesi sono in $SO(2)$.

(4.d) Dato H gruppo compatto, siano $G = H \times H$ e $K = \{(h,h) : h \in H\}$. Sulla base dell'Esempio (2.e), l'applicazione Λ introdotta nel paragrafo 2 stabilisce una corrispondenza biunivoca tra funzioni bi-K-invarianti su G e funzioni centrali su H, in modo tale che la convoluzione su G delle prime corrisponda alla convoluzione su H delle seconde. Poiché le funzioni centrali in $L^1(H)$ formano un'algebra commutativa, segue che (G,K) è una coppia di Gelfand.

Per trovare la corrispondenza tra queste argomentazioni, basate sui risultati del Cap. V, e quanto affermato nel Teorema 4.4, occorre premettere alcuni fatti sulle rappresentazioni di $H \times H$, le cui dimostrazioni sono lasciate per esercizio:

(1) date due rappresentazioni unitarie π_1, π_2 di H, la rappresentazione di G su $H_{\pi_1} \otimes H_{\pi_2}$,

$$ \pi(h_1,h_2) = (\pi_1 \otimes \pi_2)(h_1,h_2) = \pi_1(h_1) \otimes \pi_2(h_2) \ , \tag{4.1} $$

è unitaria;

(2) se π_1 e π_2 sono irriducibili, anche π è irriducibile (usare il Lemma di Schur: se $A \in \mathcal{I}(\pi,\pi)$, allora, per ogni $w \in H_{\pi_2}$, $A_{|_{H_{\pi_1} \otimes \{w\}}} \in \mathcal{I}(\pi_1,\pi_1)$; quindi $A(v \otimes w) = \lambda(w) v \otimes w$, con $\lambda(w)$ scalare; scambiando i ruoli di v e w, si trova che λ è costante);

(3) le rappresentazioni (4.1) danno, al variare di $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}$, tutte e sole le rappresentazioni irriducibili di G, a meno di equivalenza (osservare che tra i coefficienti di tali rappresentazioni vi sono le funzioni della forma

$\varphi_1(h_1)\varphi_2(h_2)$, con φ_1, φ_2 coefficienti di π_1, π_2 rispettivamente; per il Teorema 2.2 del Cap. V e il Teorema di Stone-Weierstrass, esse generano un sottospazio denso di $C(G)$);

(4) se $\pi_2 \sim \pi_1'$, la rappresentazione π in (4.1) è di classe 1 rispetto a K (si prenda $\xi \in H_{\pi_1} \otimes H_{\pi_2}$, $\xi = \sum_{j=1}^d e_j \otimes f_j$, con $\{e_j\}$ base ortonormale di H_{π_1} e $\{f_j\}$ la sua base duale; il coefficiente diagonale $\langle \pi(h_1, h_2)\xi, \xi\rangle$ è uguale a $\chi_\pi(h_2^{-1}h_1)$, che è bi-K-invariante);

(5) al variare di $\pi \in \mathcal{P}$, queste funzioni generano un sottospazio denso di $C(K; G; K) \sim C_c(H)$.

5. Funzioni sferiche

Sia (G, K) una coppia di Gelfand. Vogliamo determinare i caratteri dell'algebra commutativa $L^1(K; G; K)$. Cominciamo con la caratterizzazione del duale di tale spazio.

Lemma 5.1. *I funzionali lineari continui su $L^1(K; G; K)$ sono tutti e soli quelli della forma*

$$\lambda(f) = \int_G f(g)\varphi(g)\, dg \ ,$$

con $\varphi \in L^\infty(K; G; K)$. Inoltre $\|\lambda\| = \|\varphi\|_\infty$.

Dimostrazione. Sia λ un funzionale continuo su $L^1(K; G; K)$. Per il Teorema di Hahn-Banach, esso si estende a $L^1(G)$, per cui esiste $\psi \in L^\infty(G)$ tale che $\lambda(f) = \int_G f\psi\, dg$ e $\|\psi\|_\infty = \|\lambda\|$. Poniamo

$$\varphi(g) = \iint_{K\times K} \psi(k_1 g k_2)\, dk_1\, dk_2 \in L^\infty(K; G; K) \ .$$

Se $f \in L^1(K; G; K)$,

$$\begin{aligned}\int_G f(g)\varphi(g)\, dg &= \int_G f(g) \iint_{K\times K} \psi(k_1 g k_2)\, dk_1\, dk_2\, dg \\ &= \iint_{K\times K} \int_G f(k_1^{-1} g k_2^{-1})\psi(g)\, dg\, dk_1\, dk_2 \\ &= \lambda(f) \ .\end{aligned}$$

Inoltre, $|\lambda(f)| \le \|\varphi\|_\infty \|f\|_1$. D'altra parte, dalla definizione di φ segue che $\|\varphi\|_\infty \le \|\psi\|_\infty$, per cui $\|\varphi\|_\infty = \|\lambda\|$. $\square$

Teorema 5.2. *Una funzione $\varphi \in L^\infty(K; G; K)$ induce un carattere di $L^1(K; G; K)$ se e solo se essa coincide quasi ovunque con una funzione continua tale che*

$$\int_K \varphi(gkg')\, dk = \varphi(g)\varphi(g') \ . \tag{5.1}$$

Dimostrazione. Sia φ continua, limitata, bi-K-invariante e soddisfacente la (5.1). Allora, date $f, g \in L^1(K;G;K)$,

$$\begin{aligned}
\int_G (f*g)(x)\varphi(x)\,dx &= \iint_{G\times G} f(xy^{-1})g(y)\varphi(x)\,dy\,dx \\
&= \iint_{G\times G} f(x)g(y)\varphi(xy)\,dy\,dx \\
&= \iint_{G\times G} \int_K f(xk^{-1})\,dk\,g(y)\varphi(xy)\,dy\,dx \\
&= \iint_{G\times G} \int_K f(x)g(y)\varphi(xky)\,dk\,dy\,dx \\
&= \int_G f(x)\varphi(x)\,dx \int_G g(y)\varphi(y)\,dy\ .
\end{aligned}$$

Il funzionale definito da φ è dunque moltiplicativo.

Viceversa, sia $\lambda(f) = \int_G f\varphi\,dx$ moltiplicativo, con $\varphi \in L^\infty(K;G;K)$. Allora, per ogni $g \in L^1(G)$, si ponga

$$\tilde{g}(x) = \iint_{K\times K} g(k_1 x k_2)\,dk_1\,dk_2\ ,$$

e si osservi che

$$\begin{aligned}
\int_G (f*\tilde{g})(x)\varphi(x)\,dx &= \iint_{G\times G} f(xy^{-1}) \iint_{K\times K} g(k_1 y k_2)\,dk_1\,dk_2\,\varphi(x)\,dy\,dx \\
&= \iint_{G\times G} \iint_{K\times K} f(xk_2 y^{-1} k_1) g(y)\varphi(x)\,dk_1\,dk_2\,dy\,dx \\
&= \iint_{G\times G} \iint_{K\times K} f(xy^{-1}k_1) g(y)\varphi(xk_2^{-1})\,dk_1\,dk_2\,dy\,dx \\
&= \int_G (f*g)(x)\varphi(x)\,dx\ .
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_G (f*g)(x)\varphi(x)\,dx &= \int_G (f*\tilde{g})(x)\varphi(x)\,dx \\
&= \int_G f(x)\varphi(x)\,dx \int_G \tilde{g}(y)\varphi(y)\,dy \\
&= \int_G f(x)\varphi(x)\,dx \int_G g(y)\varphi(y)\,dy\ .
\end{aligned}$$

Ma anche

$$\int_G (f*g)(x)\varphi(x)\,dx = \int_G (\check{f}*\varphi)(y)g(y)\,dy\ ,$$

e per l'arbitrarietà di g, si ha

$$(5.2) \qquad \Big(\int_G f(x)\varphi(x)\,dx\Big)\varphi(y) = (\check{f}*\varphi)(y)$$

per quasi ogni $y \in G$. Il secondo membro è funzione continua di y, per cui, scegliendo f in modo che l'integrale in parentesi sia diverso da zero, si deduce che φ coincide quasi ovunque con una funzione continua.

Sia ora $h \in L^1(G)$. Ponendo $f = \tilde{h}$ nella (5.2), si ottiene

$$\varphi(y) \int_G \iint_{K\times K} h(k_1 x k_2)\, dk_1\, dk_2\, dx = \int_G \iint_{K\times K} h(k_1 x k_2)\varphi(xy)\, dk_1\, dk_2\, dx \ ,$$

da cui, con il cambio di variabile $x' = k_1 x k_2$ e per la bi-invarianza di φ,

$$\varphi(y) \int_G h(x)\varphi(x)\, dx = \int_G \int_K h(x)\varphi(x k_2^{-1} y)\, dk_2\, dx \ .$$

Per l'arbitrarietà di h, vale la (5.1). □

Definizione. *Si chiamano* funzioni sferiche *della coppia* (G, K) *le funzioni continue e limitate su* G *che soddisfano la* (5.1)*.*