INTRODUZIONE ALL'ANALISI ARMONICA

prof. Fulvio Ricci

A.A. 2000-2001

1. Funzioni periodiche

La retta reale $\mathbb{R}$ è dotata di una struttura di gruppo rispetto all'operazione di somma. $\mathbb{R}$ è un *gruppo topologico* in quanto le applicazioni $(x,y) \mapsto x+y$ e $x \mapsto -x$ sono continue, rispettivamente da $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e da $\mathbb{R}$ in sé.

Una misura di Borel regolare positiva μ su $\mathbb{R}$ si dice *invariante per traslazioni* se, per ogni Boreliano E e ogni $a \in \mathbb{R}$, $\mu(E+a) = \mu(E)$.

Teorema 1.1. *Se μ è una misura di Borel regolare positiva e invariante per traslazioni, allora $\mu = cm$, dove m è la misura di Lebesgue e $c > 0$.*

Dimostrazione. Sia $c = \mu\big([0,1)\big)$. Per l'additività e l'invarianza per traslazioni di μ, $\mu\big([a,a+k)\big) = ck$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, $\mu\big([0,1/n)\big) = 1/n$ per ogni intero positivo n, e infine, per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{Q}^+$,

$$\mu\big([a,a+q)\big) = qc\ .$$

Per la regolarità di μ, $\mu(I) = cm(I)$ per ogni intervallo I (aperto, chiuso ecc.). Poiché ogni aperto di $\mathbb{R}$ è un'unione numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti, $\mu(A) = cm(A)$ per ogni aperto A. Poiché ogni compatto è differenza di due aperti limitati contenuti l'uno nell'altro, $\mu(F) = cm(F)$ per ogni compatto.

Da questo segue l'uguaglianza $\mu(E) = cm(E)$ per ogni Boreliano. $\square$

Si osservi che anche la misura del conteggio è una misura di Borel positiva invariante per traslazioni, ma non è regolare.

Definizione. *Una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice periodica di periodo $T > 0$ se*

$$f(t+T) = f(t) \tag{1.1}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Una funzione è periodica di periodo T se e solo se è costante sulle classi laterali del sottogruppo $T\mathbb{Z}$ dei multipli interi relativi di T. Esiste quindi una naturale corrispondenza biunivoca tra le funzioni su $\mathbb{R}$ periodiche di periodo T e le funzioni definite sul gruppo quoziente $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$.

L'applicazione

$$f(t) \mapsto f\Big(\frac{T}{T'}t\Big)$$

trasforma funzioni periodiche di periodo T in funzioni periodiche di periodo T', per cui possiamo limitarci a studiare il caso $T = 2\pi$.

Il gruppo quoziente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ si indica con $\mathbb{T}$ e si chiama *toro*. Esso eredita la topologia quoziente di $\mathbb{R}$, ed è omeomorfo al quoziente dell'intervallo $[0,2\pi]$ ottenuto identificando tra loro i due estremi. Quindi $\mathbb{T}$ è compatto.

Il toro è chiaramente un gruppo topologico.

Definiamo su $\mathbb{T}$ una misura di Borel positiva m' come segue. Sia E un Boreliano in $\mathbb{T}$. Se $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{T}$ è la proiezione canonica, allora $h^{-1}(E)$ è un Boreliano in $\mathbb{R}$. Poniamo allora

$$m'(E) = m\big(h^{-1}(E) \cap [0,2\pi)\big)\ .$$

Teorema 1.2. *La misura m' è regolare e invariante per traslazioni. Se μ è una misura di Borel positiva su $\mathbb{T}$, regolare e invariante per traslazioni, allora $\mu = cm'$ con $c > 0$.*

Dimostrazione. Si osservi che, per l'invarianza della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$,

$$m'(E) = m\big(h^{-1}(E) \cap [a, a+2\pi)\big) \ ,$$

qualunque sia $a \in \mathbb{R}$.

Dato $a \in \mathbb{R}$, sia $[a]$ la classe laterale $a + 2\pi\mathbb{Z}$ in $\mathbb{T}$. Allora

$$m'(E + [a]) = m\Big(\big(h^{-1}(E) + a\big) \cap [a, a+2\pi)\Big) = m\big(h^{-1}(E) \cap [0, 2\pi)\big) = m'(E) \ .$$

Per verificare che m' è regolare, basta verificare la regolarità interna, cioè che $m'(E) = \sup\big\{m'(K) : K \subseteq E, K \text{ compatto } \big\}$ (la regolarità esterna segue per passaggio ai complementari).

Sia E un Boreliano in $\mathbb{T}$, che possiamo supporre un sottoinsieme proprio. Se $[a] \notin E$, sia $E' = h^{-1}(E) \cap [a, a+2\pi)$. Allora h stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i compatti K contenuti in E e i compatti K' contenuti in E'. Essa è tale che $m'(K)$ è uguale alla misura $m(K')$ del corrispondente K'. La conclusione è evidente.

Sia ora μ una misura di Borel positiva su $\mathbb{T}$, regolare e invariante per traslazioni. Dato un Boreliano E' in $\mathbb{R}$, poniamo

$$\mu'(E') = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu\big(h(E') \cap [n, n + 2\pi\mathbb{Z})\big) \ .$$

Si verifica facilmente che μ' è una misura di Borel regolare e invariante per traslazioni su $\mathbb{R}$. Dunque $\mu' = cm$.

Se E è un Boreliano in $\mathbb{T}$, e $E' = h^{-1}(E) \cap [0, 2\pi)$, si ha

$$\mu(E) = \mu'(E') = cm(E') = cm'(E) \ .$$

□

La misura m', opportunamente completata, viene normalmente chiamata la misura di Lebesgue su $\mathbb{T}$.

Se f è una funzione integrabile su $\mathbb{T}$ rispetto a m', si ha

$$\int_{\mathbb{T}} f \, dm' = \int_0^{2\pi} f\big(h(t)\big) \, dt = \int_a^{a+2\pi} f\big(h(t)\big) \, dt$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$. Per non appesantire le notazioni, indicheremo questo integrale come

$$\int_{\mathbb{T}} f(t) \, dt \ .$$

L'invarianza per traslazioni si traduce nell'identità

$$\int_{\mathbb{T}} f(t-u) \, dt = \int_{\mathbb{T}} f(t) \, dt$$

per ogni $u \in \mathbb{T}$. Le misure di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{T}$ godono dell'ulteriore proprietà che $m(E) = m(-E)$ (e lo stesso per m') per ogni Boreliano E. Quindi

$$\int_{\mathbb{T}} f(-t)\, dt = \int_{\mathbb{T}} f(t)\, dt \ ,$$

per ogni f integrabile.

Consideriamo l'applicazione

$$\varphi(t) = e^{it}$$

di $\mathbb{R}$ sul gruppo moltiplicativo dei numeri complessi di modulo 1. Essa è un omomorfismo suriettivo con nucleo $2\pi\mathbb{Z}$. Inoltre φ è continua. Quindi

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{T} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \ ,$$

data da $\tilde{\varphi}(t + 2\pi\mathbb{Z}) = e^{it}$, è un isomorfismo di gruppi. Per la compattezza di $\mathbb{T}$, essa è anche un omeomorfismo.

Quindi $\mathbb{T}$ e il cerchio unitario sono isomorfi come gruppi topologici.

Secondo la convenienza del momento, sarà utile vedere $\mathbb{T}$ sia come il cerchio unitario che come l'intervallo $[0, 2\pi]$ con gli estremi identificati.

La misura di Lebesgue su $\mathbb{T}$ può dunque essere vista come la misura σ-additiva sul cerchio che assegna ad ogni arco la sua lunghezza.

È conveniente normalizzare la misura di Lebesgue su $\mathbb{T}$, dividendola per 2π. Quindi sugli spazi di Lebesgue $L^p(\mathbb{T})$, con $p < \infty$, poniamo la norma

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p\, dt \right)^{1/p} \ . \tag{1.2}$$

Per la disuguaglianza di Hölder, se $1 \le p < q < \infty$, si ha

$$\|f\|_p \le \|f\|_q \le \|f\|_\infty \ . \tag{1.3}$$

In particolare,

$$L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^q(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T}) \ ,$$

e le inclusioni sono continue.

Per $n \in \mathbb{Z}$, poniamo

$$e_n(t) = e^{int} \ .$$

Si chiama *polinomio trigonometrico* una combinazione lineare finita degli e_n,

$$P(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikt} \ .$$

Teorema 1.3. *Il sistema* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *è una base ortonormale di* $L^2(\mathbb{T})$.

Dimostrazione. Con un facile calcolo si verifica che

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m} \ .$$

Per dimostrare la completezza del sistema, basta dimostrare che lo spazio $\mathcal{P}$ dei polinomi trigonometrici è denso in $L^2(\mathbb{T})$.

Segue dal Teorema di Stone-Weierstrass che $\mathcal{P}$ è denso in $C(\mathbb{T})$ per la topologia della convergenza uniforme. Infatti

(i) $\mathcal{P}$ è un'algebra (rispetto alla somma e al prodotto puntuale);
(ii) $\mathcal{P}$ è invariante per coniugazione;
(iii) $\mathcal{P}$ contiene le costanti;
(iv) $\mathcal{P}$ separa i punti; basta per questo considerare la funzione e_1: se $t \neq u$, allora $e_1(t) \neq e_1(u)$.

Data una funzione $f \in L^2(\mathbb{T})$ e fissato $\varepsilon > 0$, si prenda $g \in C(\mathbb{T})$ tale che $\|f-g\|_2 < \varepsilon/2$. Esiste allora $P \in \mathcal{P}$ tale che $\|g-P\|_\infty < \varepsilon/2$. Per la disuguaglianza triangolare e la (1.3),

$$\|f-P\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-P\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-P\|_\infty < \varepsilon \ . \qquad \square$$

Si osservi che l'ultima parte della dimostrazione, con ovvie modifiche, dà il seguente risultato.

Proposizione 1.4. *Lo spazio* $\mathcal{P}$ *dei polinomi trigonometrici è denso in* $L^p(\mathbb{T})$ *per* $1 \leq p < \infty$.

Definizione. *Sia* $f \in L^2(\mathbb{T})$ *e sia* $n \in \mathbb{Z}$. *Si chiama coefficiente di Fourier* n*-esimo di* f *il numero*

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} \, dt \ .$$

Il seguente enunciato dipende dalle proprietà generali delle basi ortonormali in spazi di Hilbert.

Teorema 1.5. *La serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n \ ,$$

detta serie di Fourier *di* f, *converge a* f *nella norma di* $L^2(\mathbb{T})$, *nel senso che, per ogni* $\varepsilon > 0$, *esiste* $N > 0$ *tale che, se* $m_1, m_2 \geq N$, *allora*

$$\left\| f - \sum_{n=-m_1}^{m_2} \hat{f}(n) e_n \right\|_2 < \varepsilon \ .$$

Inoltre valgono le seguenti formule (identità di Parseval):

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} \ .$$

Infine, data una qualunque successione $\{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, *esiste una funzione* $f \in L^2(\mathbb{T})$ *tale che* $\hat{f}(n) = a_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{Z}$.

Si ha la seguente conseguenza immediata.

Corollario 1.6. *L'applicazione*

$$\mathcal{F} : f \in L^2(\mathbb{T}) \longmapsto \{\hat{f}(n)\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

è biiettiva e isometrica. Inoltre, se una serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n$ *converge a* f *in norma* L^2*, allora* $a_n = \hat{f}(n)$ *per ogni* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Data una funzione f su $\mathbb{T}$, e dato $h \in \mathbb{T}$, indichiamo con $\tau_h f$ la funzione traslata

$$\tau_h f(t) = f(t-h) \ .$$

La base esponenziale $\{e_n\}$ ha delle proprietà particolari, in relazione agli operatori di traslazione:

$$\tau_h e_n = e^{-inh} e_n \ . \tag{1.4}$$

Segue dalla invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue che

$$\|\tau_h f\|_p = \|f\|_p$$

per ogni p e per ogni $f \in L^p(\mathbb{T})$.

Se $f \in L^2(\mathbb{T})$, si ha

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_h f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-h) e^{-int}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-in(t+h)}\, dt \\ &= e^{-inh}\hat{f}(n) \end{aligned} \tag{1.5}$$

per ogni n.

La (1.4) caratterizza gli elementi della base e_n nel senso seguente.

Proposizione 1.7. *Sia* $f \in L^2(\mathbb{T})$ *tale che* $\tau_h f = e^{-inh} f$ *per ogni* $h \in \mathbb{T}$*. Allora* f *è un multiplo scalare di* e_n*.*

Dimostrazione. Sia $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e_k$. Per la (1.4), $\tau_h f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-ikh}\hat{f}(k) e_k$. D'altra parte, per ipotesi, $\tau_h f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-inh}\hat{f}(k) e_k$. Segue dal Corollario 1.6 che $e^{-ikh}\hat{f}(k) = e^{-inh}\hat{f}(k)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e per ogni $h \in \mathbb{T}$. Se $k \neq n$, si può scegliere h in modo che $e^{-ikh} \neq e^{-inh}$. Di conseguenza, $\hat{f}(k) = 0$ se $k \neq n$. □

Definizione. *Siano* X *e* Y *due spazi di funzioni su* $\mathbb{T}$ *tali che per ogni* $f \in X$ *(risp.* $f \in Y$*) e ogni* $h \in \mathbb{T}$*, sia anche* $\tau_h f \in X$ *(risp.* $\tau_h f \in Y$*). Si dice che un operatore lineare* $T : X \longrightarrow Y$ è invariante per traslazioni*, o che* commuta con le traslazioni*, se*

$$T(\tau_h f) = \tau_h(Tf) \ , \tag{1.6}$$

per ogni $f \in X$ *e ogni* $h \in \mathbb{T}$*.*

Teorema 1.8. *Data una successione $m = \{m_n\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, l'operatore T definito come*

$$T_m f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) m_n e_n \tag{1.7}$$

è continuo da $L^2(\mathbb{T})$ in sé ed è invariante per traslazioni. Inoltre $\|T_m\| = \|m\|_\infty$. Viceversa, sia $T : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T})$ un operatore lineare continuo e invariante per traslazioni. Esiste allora una successione $m \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$ per cui valga la (1.7).

Dimostrazione. Se $f \in L^2(\mathbb{T})$, la successione $\{m_n \hat{f}(n)\}$ è in $\ell^2(\mathbb{Z})$, per cui $T_m f \in L^2(\mathbb{T})$. Per l'identità di Parseval,

$$\|Tf\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |m_n|^2 |\hat{f}(n)|^2 \le \|\{m_n\}\|_\infty^2 \|f\|_2^2 \ ,$$

da cui segue che T è continuo e $\|T\| \le \|\{m_n\}\|_\infty$. Poiché $|m_n| = \|Te_n\|_2 \le \|T\|$, si ha anche che $\|\{m_n\}\|_\infty \le \|T\|$.

Inoltre

$$T(\tau_h f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\tau_h f}(n) m_n e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-inh} \hat{f}(n) m_n e_n = \tau_h(Tf) \ .$$

Sia ora T un operatore lineare, continuo su $L^2(\mathbb{T})$ e invariante per traslazioni, e sia $g_n = T(e_n)$. Allora, se $h \in \mathbb{T}$,

$$\tau_h g_n = T(\tau_h e_n) = e^{-inh} T(e_n) = e^{-inh} g_n \ .$$

Per la Proposizione 1.7, $g_n = m_n e_n$. Allora

$$|m_n| = \|T(e_n)\|_2 \le \|T\| \ ,$$

da cui $\{m_n\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$.

Per linearità, se $P = \sum_{|n|\le N} a_n e_n$ è un polinomio trigonometrico, si ha

$$TP = \sum_{|n|\le N} a_n m_n e_n = T_m P \ .$$

Poiché T e T_m sono entrambi continui su $L^2(\mathbb{T})$ e coincidono sul sottospazio denso $\mathcal{P}$, segue che $T = T_m$. $\square$

Definizione. *Sia T un operatore lineare continuo su $L^2(\mathbb{T})$ invariante per traslazioni. La successione $\{m_n\}$ per cui vale la* (1.7) *si chiama il* moltiplicatore di Fourier *dell'operatore T.*

Corollario 1.9. *Sia V un sottospazio chiuso di $L^2(\mathbb{T})$ invariante per traslazioni (tale cioè che $\tau_h f \in V$ per ogni $f \in V$ e ogni $h \in \mathbb{T}$). Esiste allora un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{Z}$ tale che*

$$V = V_E = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0 \ \forall n \notin E \right\} \ .$$

In particolare V è generato dagli elementi della base $\{e_n\}$ contenuti in V.

Dimostrazione. Sia P il proiettore ortogonale di $L^2(\mathbb{T})$ su V. Data $f \in L^2(\mathbb{T})$, sia $\tilde{f} = Pf$. Allora $\tilde{f}$ è l'unica funzione in V tale che

$$\|f - \tilde{f}\|_2 = \min\left\{\|f - g\|_2 : g \in V\right\} .$$

Poiché le traslazioni sono isometrie di $L^2(\mathbb{T})$,

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - \tau_h \tilde{f}\|_2 &= \|f - \tilde{f}\|_2 \\ &= \min\left\{\|\tau_h f - \tau_h g\|_2 : g \in V\right\} \\ &= \min\left\{\|\tau_h f - g\|_2 : g \in V\right\} , \end{aligned}$$

da cui si ricava che $\tau_h \tilde{f}$ è la proiezione ortogonale di $\tau_h f$ su V, ossia $P(\tau_h f) = \tau_h(Pf)$.

Quindi P è invariante per traslazioni. Sia m il suo moltiplicatore di Fourier. Poichè $P^2 = P$, si ha $m_n^2 = m_n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, da cui m_n può essere solo 0 oppure 1.

Sia $E = \{n \in \mathbb{Z} : m_n = 1\}$. Allora

$$Pf = \sum_{n \in E} \hat{f}(n) e_n ,$$

e si vede facilmente che $V = V_E$. $\square$

2. Convoluzione di funzioni integrabili

Siano f e g due funzioni continue su $\mathbb{T}$. La loro *convoluzione* è definita come

$$f * g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u) g(t-u)\, du \,. \tag{2.1}$$

Per le note proprietà degli integrali dipendenti da parametro, si vede facilmente che $f * g$ è continua su $\mathbb{T}$.

Verifichiamo ora che la (2.1) è ben definita anche quando $f, g \in L^1(\mathbb{T})$.

Teorema 2.1. *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Allora l'integrale (2.1) è assolutamente convergente per quasi ogni $t \in \mathbb{T}$ e definisce una funzione $f * g \in L^1(\mathbb{T})$. Inoltre $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che f e g siano funzioni Boreliane (cioè misurabili rispetto alla σ-algebra dei Boreliani). Allora $f(t)g(u)$ è Boreliana su $\mathbb{T}^2$. La funzione $H(t, u) = f(u)g(t-u)$ è pure Boreliana, in quanto composizione della precedente con l'omeomorfismo $(t, u) \mapsto (t, t-u)$ di $\mathbb{T}^2$ in sé.

Per il Teorema di Tonelli,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^2} |H(t,u)|\, dt\, du &= \int_{\mathbb{T}} |f(u)| \left(\int_{\mathbb{T}} |g(t-u)|\, dt \right) du \\
&= \int_{\mathbb{T}} |f(u)| \left(\int_{\mathbb{T}} |g(t)|\, dt \right) du \\
&= \left(\int_{\mathbb{T}} |f(u)|\, du \right) \left(\int_{\mathbb{T}} |g(t)|\, dt \right) \\
&< +\infty \,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, per quasi ogni $t \in \mathbb{T}$, la funzione $H(t, \cdot)$ è integrabile in du, e questo giustifica la prima asserzione. Il resto segue facilmente dal calcolo fatto sopra. $\square$

Proposizione 2.2. *La convoluzione su $L^1(\mathbb{T})$ gode delle proprietà commutativa e associativa.*

Dimostrazione. Per le (1.4) e (1.5), si ha

$$\begin{aligned}
g * f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(u) f(t-u)\, du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(-u) f(t+u)\, du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g\big(-(u-t)\big) f(u)\, du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(t-u) f(u)\, du \\
&= f * g(t) \,.
\end{aligned}$$

La proprietà associativa si dimostra con analoghi cambiamenti di variabile. $\square$

Il calcolo appena fatto giustifica, più rapidamente, il fatto che la sostituzione della variabile u con $u' = t - u$ comporta $du' = du$.

Poiché $L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ per ogni $p > 1$, la convoluzione è ben definita quando f e g sono in due spazi $L^p(\mathbb{T})$ e $L^q(\mathbb{T})$. Ci interessa ora vedere cosa si può dire più precisamente di $f * g$ in queste ipotesi.

In questo paragrafo consideriamo il caso in cui $q = p'$, indicando con p' l'esponente coniugato di p.

Dobbiamo premettere una considerazione sulla continuità dell'applicazione

$$h \in \mathbb{T} \longmapsto \tau_h f \in L^p(\mathbb{T})$$

per una data $f \in L^p(\mathbb{T})$.

Lemma 2.3. *Sia $f \in L^p(\mathbb{T})$ con $1 \le p < \infty$. Allora*

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0 \ .$$

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $g \in C(\mathbb{T})$ tale che $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$. Poichè g è uniformemente continua, esiste $\delta > 0$ tale che $|h| < \delta$ implica che $|g(t-h) - g(t)| < \varepsilon/3$ per ogni t, ossia $\|\tau_h g - g\|_\infty < \varepsilon/3$. Allora

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_p &\le \|\tau_h f - \tau_h g\|_p + \|\tau_h g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\le 2\|f - g\|_p + \|\tau_h g - g\|_\infty < \varepsilon \ . \end{aligned} \qquad \square$$

Corollario 2.4. *Se $f \in L^p(\mathbb{T})$ con $1 \le p < \infty$, l'applicazione $h \mapsto \tau_h f$ è continua da $\mathbb{T}$ in $L^p(\mathbb{T})$.*

Dimostrazione. Basta osservare che

$$\|\tau_h f - \tau_{h'} f\|_p = \|\tau_h (f - \tau_{h'-h} f)\|_p = \|f - \tau_{h'-h} f\|_p \ . \qquad \square$$

La conclusione del Lemma 2.3 è falsa per $p = \infty$ (basta prendere $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ costante a tratti e discontinua). Si ha tuttavia il seguente risultato.

Proposizione 2.5. *Se $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, $\lim_{h \to 0} \tau_h f = f$ nella topologia debole-*.*

Dimostrazione. Se $g \in L^1(\mathbb{T})$, indicando con $\langle\ ,\ \rangle$ la dualità bilineare tra $L^1(\mathbb{T})$ e $L^\infty(\mathbb{T})$, si ha

$$\begin{aligned} \big|\langle \tau_h f - f, g\rangle\big| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \big(f(t-h) - f(t)\big) g(t)\, dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \big(g(t+h) - g(t)\big)\, dt \right| \\ &\le \|f\|_\infty \|\tau_h g - g\|_1 \ , \end{aligned}$$

che tende a 0 per $h \to 0$. $\square$

Seguirà dal successivo paragrafo 5 che la condizione $\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_\infty = 0$ caratterizza le funzioni (uniformemente) continue su $\mathbb{T}$.

Teorema 2.6. *Siano $f \in L^p(\mathbb{T})$, $g \in L^{p'}(\mathbb{T})$, con $1 \le p \le \infty$. Allora la convoluzione $f * g$ è definita in ogni punto, è continua su $\mathbb{T}$, e $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$.*

Dimostrazione. L'integrale (2.1) è assolutamente convergente per ogni $t \in \mathbb{T}$ e, per la disuguaglianza di Hölder,

$$|f * g(t)| \le \|f\|_p \|g\|_{p'} \ .$$

Per dimostrare la continuità, possiamo supporre $p < \infty$ (salvo scambiare f con g). Allora

$$\begin{aligned}
|f * g(t+h) - f * g(t)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \big(f(t+h-u) - f(t-u)\big) g(u)\, du \right| \\
&\le \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \big|f(t+h-u) - f(t-u)\big|^p\, du \right)^{1/p} \|g\|_{p'} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \big|f(u+h) - f(u)\big|^p\, du \right)^{1/p} \|g\|_{p'} \\
&= \|\tau_{-h} f - f\|_p \|g\|_{p'} \ .
\end{aligned}$$

La conclusione segue dal Lemma 2.3. $\square$

3. Teorema di Riesz-Thorin e prime applicazioni

Il Teorema di Riesz-Thorin fornisce il più semplice e il più comune *teorema di interpolazione* per operatori lineari. La sua dimostrazione è basata su un importante risultato di analisi complessa, detto il *Teorema delle tre linee* (Lemma 3.1), che a sua volta rientra in una famiglia di teoremi, comunemente noti come *Teoremi di Phragmen-Lindelöf.*

Lemma 3.1. *Sia $F(z)$ una funzione continua e limitata sulla striscia chiusa $S = \{z : 0 \leq \Re\mathrm{e} z \leq 1\}$, e olomorfa nella striscia aperta. Se*

$$|F(iy)| \leq c_0 \ , \qquad |F(1+iy)| \leq c_1$$

per ogni $y \in \mathbb{R}$, allora, per ogni $x \in (0,1)$,

$$|F(x+iy)| \leq c_0^{1-x} c_1^x \ .$$

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente che $c_0 = c_1 = 1$. Si tratta allora di dimostrare che $|F(x+iy)| \leq 1$ su tutta la striscia.

Dato $\varepsilon > 0$, sia $F_\varepsilon(z) = F(z)e^{\varepsilon(z^2-1)}$. Allora

$$|F_\varepsilon(z)| = |F(z)|e^{\varepsilon \Re\mathrm{e}(z^2-1)} = |F(z)|e^{\varepsilon(x^2-y^2-1)} \leq |F(z)|e^{-\varepsilon y^2} \ .$$

Poiché F è limitata, $lim_{z\to\infty} F_\varepsilon(z) = 0$ su S. Sia $R = \{x+iy : 0 \leq x \leq 1, |y| < \rho\}$ un rettangolo al di fuori del quale $|F_\varepsilon(z)| \leq 1$. Per il principio del massimo, poiché $|F_\varepsilon(z)| \leq 1$ sulla frontiera di R, la disuguaglianza vale anche all'interno.

Dunque $|F_\varepsilon(z)| \leq 1$ su S. Passando al limite per $\varepsilon \to 0$, si ricava che $|F(z)| \leq 1$ su S.

Siano ora $c_0, c_1 > 0$. Consideriamo la funzione

$$\tilde{F}(z) = F(z) c_0^{z-1} c_1^{-z} \ .$$

Poiché

$$|c_0^{z-1}| = c_0^{\Re\mathrm{e} z - 1} \leq \max_{0 \leq x \leq 1} c_0^{x-1} \ ,$$
$$|c_1^{-z}| = c_1^{-\Re\mathrm{e} z} \leq \max_{0 \leq x \leq 1} c_1^{-x} \ ,$$

$\tilde{F}$ è limitata sulla striscia. Inoltre essa si estende per continuità alla frontiera e

$$|\tilde{F}(iy)| \leq 1 \ , \qquad |\tilde{F}(1+iy)| \leq 1$$

per ogni $y \in \mathbb{R}$. Per quanto visto sopra, $|\tilde{F}(x+iy)| \leq 1$ su S, e quindi

$$|F(x+iy)| = |\tilde{F}(x+iy)||c_0^{1-z}||c_1^z| \leq c_0^{1-x} c_1^x \ .$$

Infine, supponiamo che $c_0 = 0$. Per ogni $\varepsilon > 0$ vale la disuguaglianza $|F(x+iy)| \leq \varepsilon^{1-x} c_1^x$ da cui $F(x+iy) = 0$ se $x < 1$. Per continuità, F è identicamente nulla. $\square$

Siano ora (X, μ) e (Y, ν) due spazi di misura e siano dati esponenti $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$.

Teorema 3.2 (di Riesz-Thorin). *Sia T un operatore lineare definito sia su $L^{p_0}(X)$ che su $L^{p_1}(X)$ a valori nelle funzioni misurabili su Y e tale che*

$$\|Tf\|_{q_0} \le M_0 \|f\|_{p_0} \ , \qquad \|Tg\|_{q_1} \le M_1 \|g\|_{p_1} \ ,$$

per ogni $f \in L^{p_0}(X)$ e ogni $g \in L^{p_1}(X)$.

Siano p e q esponenti tali che

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \ , \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} \ ,$$

con $t \in (0,1)$. Allora T è definito su $L^p(X)$ e

$$\|Tf\|_q \le M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_p \ .$$

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente $p < \infty$. Allora le funzioni semplici $f(x) = \sum a_j \chi_{E_j}(x)$, dove la somma è finita e $\mu(E_j) < \infty$ per ogni j, sono dense in $L^p(X)$. Quindi

$$\|T\|_{p,q} = \sup_{f \text{ semplice}} \frac{\|Tf\|_q}{\|f\|_p} \ .$$

Inoltre,

$$\|Tf\|_q = \sup_{g \text{ semplice}} \frac{|\langle Tf, g\rangle|}{\|g\|_{q'}} \ ,$$

per cui

$$\|T\|_{p,q} = \sup_{f,g \text{ semplici}} \frac{|\langle Tf, g\rangle|}{\|f\|_p \|g\|_{q'}} \ .$$

Basta allora dimostrare che vale la disuguaglianza

$$\left| \int_Y Tf(y) g(y)\, d\nu(y) \right| \le M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_p \|g\|_{q'} \tag{3.1}$$

quando f e g sono funzioni semplici (su X e Y rispettivamente):

$$f(x) = \sum a_j \chi_{E_j}(x) \ , \qquad g(y) = \sum b_k \chi_{F_k}(y) \ .$$

Per $0 \le \Re z \le 1$ si definiscano p_z, q'_z in modo che

$$\frac{1}{p_z} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \ , \qquad \frac{1}{q'_z} = \frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1} \ ,$$

Se $a_j = |a_j| e^{i\theta_j}$, $b_k = |b_k| e^{i\varphi_k}$, si ponga

$$f_z(x) = \sum_j |a_j|^{p/p_z} e^{i\theta_j} \chi_{E_j}(x) \ , \qquad g_z(y) = \sum_k |b_k|^{q'/q'_z} e^{i\varphi_k} \chi_{F_k}(y) \ .$$

La funzione g_z è ben definita se $q' < \infty$. Se $q' = \infty$, allora $q'_0 = q'_1 = \infty$, e quindi $1/q'_z = 0$ per ogni z. In questo caso poniamo $q'/q'_z = 1$ per ogni z.

Infine si definisca la funzione

$$F(z) = \int_Y Tf_z(y) g_z(y)\, d\nu(y) = \sum_{j,k} c_{jk} |a_j|^{p/p_z} |b_k|^{q'/q'_z} \ ,$$

dove

$$c_{jk} = e^{i\theta_j} e^{i\varphi_k} \int_Y T\chi_{E_j}(y) \chi_{F_k}(y)\, d\nu(y) \ .$$

Verifichiamo che F soddisfa le ipotesi del Lemma 3.1.

Essa è una funzione intera, dunque continua sulla striscia chiusa. Inoltre,

$$|F(z)| \leq \sum_{j,k} |c_{jk}| |a_j|^{\Re\mathrm{e}(p/p_z)} |b_k|^{\Re\mathrm{e}(q'/q'_z)} \ ,$$

per cui F è limitata sulla striscia chiusa. Poi, se $u \in \mathbb{R}$,

$$|F(iu)| \leq M_0 \|f_{iu}\|_{p_0} \|g_{iu}\|_{q'_0} \ .$$

Se $p_0 < \infty$,

$$\|f_{iu}\|_{p_0} = \left(\sum_j |a_j|^p \mu(E_j) \right)^{1/p_0} = \|f\|_p^{p/p_0} \ ,$$

mentre, se $p_0 = \infty$, il primo e il terzo membro sono comunque uguali a 1. Allo stesso modo si vede che

$$\|g_{iu}\|_{q'_0} = \|g\|_{q'}^{q'/q'_0} \ ,$$

per cui

$$|F(iu)| \leq M_0 \|f\|_p^{p/p_0} \|g\|_{q'}^{q'/q'_0} \ .$$

Analogamente,

$$|F(1+iu)| \leq M_1 \|f\|_p^{p/p_1} \|g\|_{q'}^{q'/q'_1} \ .$$

Per il Lemma 3.1,

$$\begin{aligned} |F(t)| &\leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_p^{p\left(\frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}\right)} \|g\|_{q'}^{q'\left(\frac{1-t}{q'_0} + \frac{t}{q'_1}\right)} \\ &= M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_p \|g\|_{q'} \ . \end{aligned}$$

Ma $f_t = f$ e $g_t = g$, per cui

$$F(t) = \int_Y Tf(y) g(y)\, d\nu(y) \ ,$$

così che la (3.1) è dimostrata nel caso $p < \infty$, $q > 1$.

Se $p = \infty$, vuol dire che $p_0 = p_1 = \infty$. Per la disuguaglianza di Hölder,

$$\|Tf\|_q \leq \|Tf\|_{q_0}^{1-t} \|Tf\|_{q_1}^t \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_\infty \ . \qquad \square$$

Vediamo, come prima applicazione del Teorema di Riesz-Thorin, la *disuguaglianza di Young.*

Teorema 3.3. *Siano $f \in L^p(\mathbb{T})$, $g \in L^q(\mathbb{T})$, con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq 1$. Se*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \ , \tag{3.2}$$

allora $f * g \in L^r(\mathbb{T})$ e

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \ .$$

Dimostrazione. Consideriamo inizialmente il caso $q = 1$. Fissata $g \in L^1(\mathbb{T})$, si consideri l'operatore

$$Tf = f * g \ .$$

Per il Teorema 2.1, T è limitato da $L^1(\mathbb{T})$ in sé, e, per il Teorema 2.4, anche da $L^\infty(\mathbb{T})$ in sé. In entrambi i casi T ha norma non superiore a $\|g\|_1$. Per il Teorema di Riesz-Thorin, T è limitato da $L^p(\mathbb{T})$ in sé per tutti i valori di p e

$$\|f * g\|_p = \|Tf\|_p \leq \|g\|_1 \|f\|_p \ .$$

Si consideri ora l'operatore T definito come sopra, ma questa volta con $g \in L^q(\mathbb{T})$ e $q > 1$.

Osserviamo che possiamo supporre $q < \infty$; in caso contrario è necessariamente $p = 1$, $r = \infty$ e la conclusione è contenuta nel Teorema 2.4.

Per quanto visto sopra, T è limitato da $L^1(\mathbb{T})$ a $L^q(\mathbb{T})$, e, per il Teorema 2.3, anche da $L^{q'}(\mathbb{T})$ a $L^\infty(\mathbb{T})$. In entrambi i casi T ha norma non superiore a $\|g\|_q$.

Per il Teorema di Riesz-Thorin, se p è compreso tra 1 e q',

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{q'} \ , \tag{3.3}$$

e

$$\frac{1}{r} = \frac{1-t}{q} + \frac{t}{\infty} = \frac{1-t}{q} \ , \tag{3.4}$$

allora T è limitato da $L^p(\mathbb{T})$ a $L^r(\mathbb{T})$ con norma non superiore a $\|g\|_q^{1-t}\|g\|_q^t = \|g\|_q$.

Ma dire che $p \leq q'$ equivale a dire che $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq 1$. Dalla (3.3) si ricava che

$$t = q\left(1 - \frac{1}{p}\right) \ ,$$

e, sostituendo nella (3.4), si ottiene la relazione (3.2) tra p, q e r. $\square$

La disuguaglianza $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ può essere dimostrata, per $p < \infty$, senza ricorrere a interpolazione, nel modo seguente: consideriamo la funzione

$$G(u) = f(u)\tau_u g$$

definita su $\mathbb{T}$ a valori in $L^p(\mathbb{T})$. Essa è il prodotto di una funzione scalare integrabile per una vettoriale continua. Approssimando separatamente i due fattori con funzioni semplici, si vede che G è integrabile secondo Bochner. Si ha allora

$$f * g = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(u)\tau_u g \, du \ ,$$

e

$$\begin{aligned}\left\| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(u)\tau_u g \, du \right\|_p &\leq \frac{1}{2\pi}\int |f(u)| \|\tau_u g\|_p \, du \\ &= \|g\|_p \|f\|_1 \ .\end{aligned}$$

4. Serie di Fourier di funzioni integrabili.

La nozione di coefficiente di Fourier ha senso non solo per funzioni in $L^2(\mathbb{T})$, ma, più in generale, per funzioni in $L^1(\mathbb{T})$ (come vedremo, anche in ambiti più ampi).

Quindi a ogni funzione $f \in L^1(\mathbb{T})$ associamo la successione $\{\hat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dei suoi coefficienti di Fourier. Si ottiene facilmente che

$$|\hat{f}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int}\, dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, dt = \|f\|_1 \ ,$$

per cui la successione $\{\hat{f}(n)\}$ è limitata e

$$\|\{\hat{f}(n)\}\|_\infty \leq \|f\|_1 \ . \tag{4.1}$$

In realtà si può dire che $\{\hat{f}(n)\} \in c_0(\mathbb{Z})$.

Teorema 4.1 (di Riemann-Lebesgue). *Se $f \in L^1(\mathbb{T})$,*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \hat{f}(n) = 0 \ .$$

Dimostrazione. Consideriamo l'operatore (continuo) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z})$ che associa a f la successione dei suoi coefficienti di Fourier. La restrizione di $\mathcal{F}$ allo spazio $\mathcal{P}$ dei polinomi trigonometrici ha immagine contenuta in $c_0(\mathbb{Z})$. Poiché $\mathcal{P}$ è denso in $L^1(\mathbb{T})$ e $c_0(\mathbb{Z})$ è chiuso in $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, anche $\mathcal{F}\big(L^1(\mathbb{T})\big)$ è contenuta in $c_0(\mathbb{Z})$. $\square$

La (4.1) afferma che la norma dell'operatore $\mathcal{F}$ è minore o uguale a 1. Si vede facilmente che in effetti la norma è 1. Basta prendere una funzione $f \geq 0$. Si ha allora

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\, dt = \|f\|_1 \ .$$

Si pone ora il problema di individuare proprietà dei coefficienti di Fourier di funzioni in $L^p(\mathbb{T})$ per valori di p diversi da 1 e 2.

Teorema 4.2 (di Hausdorff-Young). *Se $f \in L^p(\mathbb{T})$ con $1 < p < 2$, allora $\{\hat{f}(n)\} \in \ell^{p'}(\mathbb{Z})$ e*

$$\|\{\hat{f}(n)\}\|_{p'} \leq \|f\|_p \ .$$

Dimostrazione. Poiché l'operatore $\mathcal{F}$ è limitato da $L^1(\mathbb{T})$ a $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ e da $L^2(\mathbb{T})$ a $\ell^2(\mathbb{Z})$, in entrambi i casi con norma 1, la conclusione segue dal Teorema di Riesz-Thorin. $\square$

Per $f \in L^p(\mathbb{T})$ con $p > 2$, l'unica cosa che si può dire (in questo ambito) è che la successione $\{\hat{f}(n)\}$ è in $\ell^2(\mathbb{Z})$, in quanto $L^p(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$.

Elenchiamo ora alcune proprietà formali della *trasformata di Fourier*

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}) \ .$$

Proposizione 4.3. *L'operatore $\mathcal{F}$ è lineare e inoltre*

(i) $\widehat{\bar{f}}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$;

(ii) *se* $\check{f}(t) = f(-t)$, *allora* $\widehat{\check{f}}(n) = \hat{f}(-n)$;

(iii) *se* $f^*(t) = \overline{f(-t)}$, *allora* $\widehat{f^*}(n) = \overline{\hat{f}(n)}$;

(iv) $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

Dimostrazione. la dimostrazione di (i) e (ii) è immediata. La (iii) è una loro conseguenza. Per la (iv), si ha

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(u)g(t-u)\,du\right)e^{-int}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(u)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(t-u)e^{-int}\,dt\right)du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(u)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(t)e^{-in(t+u)}\,dt\right)du \\
&= \hat{g}(n)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(u)e^{-inu}\,du \\
&= \hat{g}(n)\hat{f}(n)\ . \qquad \square
\end{aligned}$$

Accanto al problema di descrivere le proprietà della successione $\{\hat{f}(n)\}$ per f in un dato spazio, si ha il problema "duale": data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ in un dato spazio, determinare le proprietà della serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n\ . \tag{4.2}$$

Per il Teorema 1.4, possiamo dire che se $\{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, allora la serie (4.2) converge in norma L^2 a una funzione $f \in L^2(\mathbb{T})$ e $a_n = \hat{f}(n)$.

Lemma 4.4. *Se* $\{a_n\} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, *la serie* (4.2) *converge uniformemente a una funzione* f *continua su* $\mathbb{T}$. *Inoltre* $\|f\|_\infty \le \|\{a_n\}\|_1$ *e* $a_n = \hat{f}(n)$.

Dimostrazione. Le ridotte $\sum_{-m_1}^{m_2} a_n e^{int}$ verificano la condizione di Cauchy. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, sia $N > 0$ tale che

$$\sum_{|n|>N} |a_n| < \varepsilon\ .$$

Se $m_1, m_2, m_1', m_2' > N$, si ha

$$\left\|\sum_{-m_1}^{m_2} a_n e_n - \sum_{-m_1'}^{m_2'} a_n e_n\right\|_\infty \le \sum_{|n|>N} |a_n| < \varepsilon\ .$$

Detta allora f la somma della serie, si ha

$$\|f\|_\infty \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|\|e_n\|_\infty = \|\{a_n\}\|_1\ .$$

Integrando la serie termine a termine, si ha infine

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikt}\, e^{-int}\, dt \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{i(k-n)t}\, dt \\ &= a_n\ . \qquad \square\end{aligned}$$

Per interpolazione, si ottiene allora una versione "duale" del Teorema di Hausdorff-Young.

Teorema 4.5. *Sia* $\{a_n\} \in \ell^p(\mathbb{Z})$ *con* $1 < p < 2$. *Allora la serie* (4.2) *converge a una funzione* $f \in L^{p'}(\mathbb{T})$ *in norma* $L^{p'}$. *Inoltre* $\|f\|_{p'} \leq \|\{a_n\}\|_p$ *e* $a_n = \hat{f}(n)$.

Dimostrazione. Consideriamo l'operatore

$$\tilde{\mathcal{F}} : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T})$$

dato da $\tilde{\mathcal{F}}\big(\{a_n\}\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n$. Osserviamo inizialmente che, se $p < 2$, $\ell^p(\mathbb{Z}) \subset \ell^2(\mathbb{Z})$, per cui $\tilde{\mathcal{F}}$ è ben definito su $\ell^p(\mathbb{Z})$ a valori in $L^2(\mathbb{T})$.

Per il Lemma 4.4,

$$\tilde{\mathcal{F}} : \ell^1(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{T})\ ,$$

e dunque, per interpolazione,

$$\tilde{\mathcal{F}} : \ell^p(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^{p'}(\mathbb{T})\ ,$$

per $1 < p < 2$ e

$$\|\tilde{\mathcal{F}}\big(\{a_n\}\big)\|_{p'} \leq \|\{a_n\}\|_p\ . \tag{4.3}$$

Rimane da vedere che la serie (4.2) converge a f in norma $L^{p'}$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $N > 0$ tale che

$$\sum_{|n|>N} |a_n|^p < \varepsilon^p\ .$$

Presi $m_1, m_2 > N$, poniamo

$$a'_n = \begin{cases} 0 & \text{se } -m_1 \leq n \leq m_2 \\ a_n & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

In base alla (4.3), abbiamo

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n - \sum_{n=-m_1}^{m_2} a_n e_n \Big\|_{p'} &= \|\tilde{\mathcal{F}}\big(\{a'_n\}\big)\|_{p'} \\ &\leq \|\{a'_n\}\|_p \\ &< \varepsilon\ . \qquad \square\end{aligned}$$

5. Metodi di sommazione e convergenza delle serie di Fourier.

Data una funzione $f \in L^p(\mathbb{T})$ vogliamo iniziare a discutere in che senso la sua serie di Fourier converge a f in norma L^p. Poiché il problema non è semplice (per $p \neq 2$), dobbiamo allargare il discorso, introducendo i cosiddetti *metodi di sommazione*. Presentiamo qui i metodi di Cesaro e di Abel, che sono i più comuni. Per altri metodi, si può vedere il libro di A. Zygmund "Trigonometric serie".

Siano x_n elementi di uno spazio di Banach X, con indici $n \in \mathbb{N}$, e consideriamo le somme parziali

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} x_n$$

della serie degli x_n.

Definizione.

(i) *Si dice che la serie* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *converge in senso ordinario a* $s \in X$ *se*

$$\lim_{N\to\infty} \|s - s_N\| = 0 \ ;$$

(ii) *si dice che la serie converge a* $s \in X$ *secondo Cesaro se, posto*

$$\sigma_N = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} s_j \ ,$$

si ha

$$\lim_{N\to\infty} \|s - \sigma_N\| = 0 \ ;$$

(iii) *si dice che la serie converge a* $s \in X$ *secondo Abel se la serie*

$$\Sigma_r = \sum_{n=0}^{\infty} r^n x_n$$

converge in senso ordinario per ogni $r < 1$ *e inoltre*

$$\lim_{r\to 1^-} \|s - \Sigma_r\| = 0 \ .$$

Lemma 5.1. *Valgono le seguenti implicazioni:*

(i) *la convergenza ordinaria implica la convergenza secondo Cesaro;*
(ii) *la convergenza secondo Cesaro implica la convergenza secondo Abel.*

Dimostrazione. Supponiamo che la serie converga in senso ordinario. Possiamo supporre (per es. modificando il primo termine della serie) che la somma s sia 0. Fissato $\varepsilon > 0$, sia allora M tale che $\|s_j\| < \varepsilon$ per $j > M$. Poiché le norme $\|s_j\|$ sono limitate da una stessa costante, diciamo K, per $N > M$ si ha

$$\begin{aligned} \|\sigma_N\| &\le \frac{1}{N+1} \sum_{j\le M} \|s_j\| + \frac{1}{N+1} \sum_{M<j\le N} \|s_j\| \\ &\le \frac{K}{N+1} + \varepsilon \frac{N-M}{N+1} \ . \end{aligned}$$

Allora

$$\limsup_{N\to\infty} \|\sigma_N\| \le \varepsilon \ ,$$

e, per l'arbitrarietà di ε, si ha $\lim_{N\to\infty} \|\sigma_n\| = 0$.

Supponiamo ora che la serie converga secondo Cesaro. Come sopra, possiamo supporre che converga a 0. Applicando due volte la *formula di sommazione per parti*

$$\sum_{n=M}^{N} a_n(b_n - b_{n-1}) = a_{N+1}b_N - a_M b_{M-1} - \sum_{n=M}^{N} (a_{n+1} - a_n)b_n \ ,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} r^n x_n &= \sum_{n=0}^{N} r^n (s_n - s_{n-1}) \\
&= r^{N+1} s_N - \sum_{n=0}^{N} (r^{n+1} - r^n) s_n \\
&= r^{N+1} s_N + (1-r) \sum_{n=0}^{N} r^n s_n \\
&= r^{N+1} s_N + (1-r) \sum_{n=0}^{N} r^n \big((n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}\big) \\
&= r^{N+1} s_N + (1-r) \left(r^{N+1}(N+1)\sigma_N - \sum_{n=0}^{N} (r^{n+1} - r^n)(n+1)\sigma_n \right) \\
&= r^{N+1}\big((N+1)\sigma_N - N\sigma_{N-1}\big) + (1-r) r^{N+1}(N+1)\sigma_N \\
&\qquad + (1-r)^2 \sum_{n=0}^{N} r^n (n+1)\sigma_n \ .
\end{aligned}$$

Passando al limite per $N \to \infty$ (per $r < 1$ fissato), si ha

$$\Sigma_r = (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} r^n (n+1)\sigma_n \ ,$$

da cui

$$\|\Sigma_r\| \le (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\|\sigma_n\| r^n \ .$$

Fissato $\varepsilon > 0$, sia n_0 tale che $\|\sigma_n\| < \varepsilon$ per $n > n_0$. Allora, se $\|\sigma_n\| \le K$ per ogni n,

$$\begin{aligned}
\|\Sigma_r\| &\le K(1-r)^2 \sum_{n=0}^{n_0} (n+1) r^n + \varepsilon (1-r)^2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (n+1) r^n \\
&< (1-r)^2 P(r) + \varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

dove P indica un polinomio, ed è stata usata l'identità

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)r^n = \frac{1}{(1-r)^2} \ .$$

Quindi

$$\limsup_{r\to 1^-} \|\Sigma_r\| \le \varepsilon \ ,$$

e per l'arbitrarietà di ε si ha la tesi. $\square$

Nel resto di questo paragrafo discuteremo alcuni criteri generali di convergenza, ottenendo, come corollario, la convergenza in norma L^p, per $1 \le p < \infty$, delle serie di Fourier secondo Cesaro (e dunque anche secondo Abel). Daremo quindi un'interpretazione della convergenza secondo Abel.

Innanzitutto chiariamo che consideriamo solo somme parziali *simmetriche* delle serie di Fourier. Poniamo quindi

$$\begin{aligned}
S_N[f](t) &= \sum_{|n|\le N} \hat{f}(n)e^{int} \ , \\
\sigma_N[f](t) &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n[f](t) \\
\Sigma_r[f](t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)r^{|n|}e^{int} \ .
\end{aligned}$$

In altri termini, nello spazio di Banach $L^p(\mathbb{T})$ consideriamo i vettori $x_0 = \hat{f}(0)e_0$ e $x_n = \hat{f}(n)e_n + \hat{f}(-n)e_{-n}$ per $n \ge 1$.

Definizione. *Si chiama nucleo di Dirichlet di ordine N il polinomio trigonometrico*

$$D_N(t) = \sum_{|n|\le N} e^{int} \ .$$

Lemma 5.2. *Se $f \in L^1$, si ha*

$$S_N[f](t) = f * D_N(t) \ . \tag{5.1}$$

Inoltre

$$D_N(t) = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \ . \tag{5.2}$$

Dimostrazione. La (5.1) è ovvia. Per la (5.2) si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} e^{int} &= e^{-iNt}\sum_{n=0}^{2N} e^{int} \\
&= e^{-iNt}\frac{e^{i(2N+1)t}-1}{e^{it}-1} \\
&= e^{-iNt}\frac{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{i\frac{t}{2}}}\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \ ,
\end{aligned}$$

da cui la tesi. $\square$

In modo analogo si ottengono i nuclei di convoluzione che danno le medie di Cesaro e di Abel della serie di Fourier.

Definizione. *Si chiama nucleo di Fejér di ordine N il polinomio trigonometrico*

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n \ . \tag{5.3}$$

Si chiama nucleo di Poisson al raggio r la funzione

$$P_r(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int} \ . \tag{5.4}$$

Lemma 5.3. *Se $f \in L^1$, si ha*

$$\begin{aligned} \sigma_N[f](t) &= f * F_N(t) \ , \\ \Sigma_r[f](t) &= f * P_r(t) \ . \end{aligned}$$

Inoltre,

$$F_N(t) = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right)e^{int} = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\frac{N+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \ . \tag{5.5}$$

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} \ . \tag{5.6}$$

La dimostrazione consiste in calcoli basati sulla formula che dà la somma di una progressione geometrica, analoghi a quelli svolti sopra.

Come vedremo, i nuclei F_N e P_r forniscono esempi di *identità approssimate* in $L^1(\mathbb{T})$, che ora definiamo.

Definizione. *Una successione di funzioni $K_n \in L^1(\mathbb{T})$ è un'identità approssimata se le seguenti proprietà sono soddisfatte:*

(i) *le norme $\|K_n\|_1$ sono uniformemente limitate;*
(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_n(t)\,dt = 1$;
(iii) *per ogni $\delta > 0$, $\lim_{n\to\infty}\int_{|t|>\delta} |K_n(t)|\,dt = 0$.*

Un'identità approssimata può anche essere costituita da una famiglia di funzioni dipendenti, anziché da un parametro intero, da un parametro continuo, per es. $r \to 1^-$ oppure $\varepsilon \to 0^+$. Quanto segue vale anche in questi altri casi.

Teorema 5.4. *Sia $\{K_n\}$ un'identità approssimata, e sia $f \in L^p(\mathbb{T})$, con $1 \le p < \infty$. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f * K_n\|_p = 0 \ .$$

Inoltre, se f è continua su $\mathbb{T}$, allora le funzioni $f * K_n$ convergono uniformemente a f.

Dimostrazione. Possiamo supporre (come peraltro si verifica in molti casi rilevanti) che $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_n(t)\,dt = 1$ per ogni n. Se così non fosse, posto $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_n(t)\,dt$, basta dividere ciascun K_n per c_n.

Allora

$$f(t) - f * K_n(t) = f(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-u)K_n(u)\,du$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \big(f(t) - f(t-u)\big)K_n(u)\,du\ .$$

Per la disuguaglianza integrale di Minkowski, se $p < \infty$,

$$\|f - f * K_n\|_p = \left\| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f - \tau_u f)K_n(u)\,du \right\|_p$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \|f - \tau_u f\|_p |K_n(u)|\,du\ .$$

Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che $\|f - \tau_u f\|_p < \varepsilon$ per $|u| < \delta$. Sia poi N tale che $\int_{|t|>\delta} |K_n(t)|\,dt < \varepsilon$ per $n > N$. Allora, se $n > N$,

$$\|f - f * K_n\|_p \le \frac{1}{2\pi}\int_{|u|<\delta} \|f - \tau_u f\|_p |K_n(u)|\,du + \frac{1}{2\pi}\int_{|u|>\delta} 2\|f\|_p |K_n(u)|\,du$$
$$< \|K_n\|_1 \varepsilon + \frac{\|f\|_p}{\pi}\varepsilon\ .$$

La prima parte della tesi segue dalla proprietà (i) delle identità approssimate. La seconda parte si dimostra in modo analogo. □

Teorema 5.5. *I nuclei di Fejér e di Poisson formano identità approssimate, rispettivamente per $n \to \infty$ e per $r \to 1^-$.*

Dimostrazione. La proprietà (ii) è evidente dalle (5.4) e (5.5), guardando il coefficiente di Fourier di ordine 0. La (i) segue dalla (ii) perché sia F_N che P_r sono positivi.

Dimostriamo dunque la (iii) per i nuclei di Fejér. Fissato $\delta > 0$, si ha

$$\int_{|t|>\delta} F_N(t)\,dt \le \frac{2}{N+1}\int_\delta^\pi \frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$
$$\le \frac{C}{N+1}\ .$$

Per i nuclei di Poisson, osserviamo che

$$1 + r^2 - 2r\cos t \ge 2r(1 - \cos t)\ ,$$

per cui

$$\int_{|t|>\delta} P_r(t)\,dt \le \frac{1-r^2}{r}\int_\delta^\pi \frac{1}{1-\cos t}\,dt\ ,$$

che tende a 0 per $r \to 1^-$. □

Corollario 5.6. *La serie di Fourier di una funzione $f \in L^p(\mathbb{T})$, con $1 \le p < \infty$ converge a f nel senso di Cesaro e di Abel in norma L^p. La serie di Fourier di una funzione continua f converge uniformemente a f nel senso di Cesaro e di Abel.*

I nuclei di Dirichlet, invece, non formano un'identità approssimata. Si ha infatti la seguente proprietà.

Lemma 5.7.
$$\|D_N\|_1 \geq C\log(2+N)\ .$$

Dimostrazione. La funzione D_N si annulla N volte nell'intervallo $(0,\pi)$, nei punti

$$t_k = \frac{k\pi}{N+\frac{1}{2}}\ , \qquad k=1,\dots,N\ .$$

preso $N>1$, sia I_k la metà centrale dell'intervallo $[t_k,t_{k+1}]$. Su ciascuno di essi,

$$\left|\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,$$

mentre

$$\sin\frac{t}{2} < \frac{t}{2} < C\frac{k+1}{2N+1}\ .$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\|D_N\|_1 &\geq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N-1}\int_{I_k}|D_N(t)|\,dt \\
&\geq C(2N+1)\sum_{k=1}^{N-1}\frac{|I_k|}{k+1} \\
&\geq C\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k+1} \\
&\geq C\log(N+2)\ . \qquad \square
\end{aligned}$$

Il fatto che i D_N non formino un'identità approssimata non implica di per sé che le serie di Fourier non convergano in senso ordinario in norma L^p (per funzioni in $L^p(\mathbb{T})$ con $p<\infty$), o uniformemente (per funzioni continue).

Possiamo tuttavia dare un risultato negativo per funzioni continue e per $p=1$. Esso è basato sul seguente risultato di Analisi funzionale, noto come *Teorema di Banach-Steinhaus*, o come *Principio di limitatezza uniforme.* Alla fine del paragrafo costruiremo esplicitamente una funzione continua la cui serie di Fourier non converge in 0.

Teorema 5.8. *Sia $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una famiglia di operatori lineari continui da uno spazio di Banach X a uno spazio di Banach Y. Se per ogni $x\in X$ esiste una costante $c(x)$ tale che $\|T_\alpha x\|_Y \leq c(x)$ per ogni α, allora esiste una costante c tale che $\|T_\alpha\|\leq c$ per ogni α.*

Proposizione 5.9. *Esistono funzioni continue la cui serie di Fourier non converge puntualmente.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che

$$\lim_{N\to\infty} f*D_N(0) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)D_N(t)\,dt = f(0)$$

per ogni funzione f continua.

Allora i funzionali lineari continui su $C(\mathbb{T})$

$$\varphi_N(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) D_N(t)\, dt$$

soddisferebbero la condizione di limitatezza

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} |\varphi_N(f)| < \infty$$

per ogni $f \in C(\mathbb{T})$. Per il Teorema di Banach-Steinhaus, si avrebbe

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \|\varphi_N\| < \infty \ .$$

Ma $\|\varphi_N\| = \|D_N\|_1$, in contrasto con il Lemma 5.7. $\square$

In modo simile si vede che le serie di Fourier di funzioni L^1 non convergono in norma nel senso ordinario. Per questo premettiamo un lemma.

Lemma 5.10. *Si consideri l'operatore $Tf = f * \varphi$ di $L^1(\mathbb{T})$ in sé, con $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$. Allora $\|T\| = \|\varphi\|_1$.*

Dimostrazione. Poiché $\|Tf\|_1 \leq \|\varphi\|_1 \|f\|_1$, risulta $\|T\| \leq \|\varphi\|_1$.

Poiché i nuclei di Fejér formano un'identità approssimata, si ha d'altra parte che

$$\|\varphi\|_1 = \lim_{n \to \infty} \|TF_n\|_1 \leq \|T\| \lim_{n \to \infty} \|F_n\|_1 = \|T\| \ . \qquad \square$$

Proposizione 5.11. *Esistono funzioni in $L^1(\mathbb{T})$ la cui serie di Fourier non converge in norma L^1.*

Dimostrazione. Sia $S_N f = f * D_N$. Se le norme $\|S_N f - f\|_1$ tendessero a zero per ogni $f \in L^1(\mathbb{T})$, si avrebbe

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \|S_N f\|_1 < \infty \ .$$

Per il Teorema di Banach-Steinhaus, avremmo allora

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \|S_N\| = \sup_{N \in \mathbb{N}} \|D_N\|_1 < \infty \ ,$$

in contrasto con il Lemma 5.7. $\square$

Rimane non risolto il problema della convergenza in norma nel senso ordinario delle serie di Fourier per $1 < p < \infty$ (e $p \neq 2$). Vedremo in un successivo paragrafo che *la risposta è positiva.*

Costruiamo ora una funzione continua la cui serie di Fourier non converge in 0.

Consideriamo i seguenti polinomi trigonometrici:

$$P_n(t) = \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{1}{k} e^{ikt} \ ,$$

$$Q_n(t) = \sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{k} e^{ikt} \ .$$

Lemma 5.12. *I polinomi $P_n(t)$ sono uniformemente limitati in n e in t.*

Dimostrazione. Poiché P è dispari, basta considerare $t \in [0, \pi]$. Essendo

$$P_n'(t) = \sum_{1 \le |k| \le n} e^{ikt} = i\big(D_n(t) - 1\big) ,$$

si ha

$$P_n(t) = i \int_0^t \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{u}{2}}\, du - it .$$

Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{u}{2}}\, du &= 2 \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\sin(2n+1)s}{\sin s}\, ds \\ &= 2 \int_0^{\frac{t}{2}} \sin(2n+1)s \left(\frac{1}{\sin s} - \frac{1}{s}\right) ds + 2 \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\sin(2n+1)s}{s}\, ds .\end{aligned}$$

Ma

$$0 \le \frac{1}{\sin s} - \frac{1}{s} = \frac{s - \sin s}{s \sin s} \le cs ,$$

per cui il primo dei due integrali è limitato uniformemente in n e t. Per il secondo, bisogna osservare che l'integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{sins}{s}\, ds$$

è convergente, per cui gli integrali parziali

$$\int_0^\lambda \frac{sins}{s}\, ds$$

sono uniformemente limitati in λ. Cambiando variabile nell'integrale,

$$\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\sin(2n+1)s}{s}\, ds = \int_0^{\frac{(2n+1)t}{2}} \frac{\sin s}{s}\, ds ,$$

e vale la stessa conclusione. $\square$

Si osservi che i polinomi Q_n non sono uniformemente limitati, in particolare

$$|Q_n(0)| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \ge c \log(2+n) .$$

Consideriamo ora una serie della forma

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^2} e^{im_j t} P_{n_j}(t) , \tag{5.7}$$

con $\{m_j\}$, $\{n_j\}$ successioni crescenti di interi positivi.

La serie (5.7) converge uniformemente a una funzione f continua su $\mathbb{T}$ per il criterio di Weierstrass. Scegliamo ora gli n_j in modo che $\frac{\log n_j}{j^2} \to \infty$, e scegliamo quindi gli m_j in modo che $m_j + n_j < m_{j+1} - n_{j+1}$.

Così facendo, ogni termine della serie (5.7) è combinazione di esponenziali tutti diversi da quelli che compaiono negli altri termini. In particolare,

$$S_{m_k}[f](t) = \sum_{j=1}^{m_{k-1}} \frac{1}{j^2} e^{im_j t} P_{n_j}(t) + \frac{1}{k^2} e^{im_k t} Q_{n_k}(t) \ .$$

Quindi

$$\left|S_{m_k}[f](0)\right| \geq \frac{1}{k^2}\left|Q_{n_k}(0)\right| - \sum_{j=1}^{m_{k-1}} \frac{1}{j^2}\left|P_{n_j}(0)\right| \geq c\frac{\log n_k}{k^2} - c' \ .$$

Quindi le somme parziali $S_N[f](0)$ non sono neanche limitate al variare di N.

6. Funzioni armoniche e olomorfe sul disco unitario

L'operatore di Laplace (o *Laplaciano*) Δ in $\mathbb{R}^2$ è definito come

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ .$$

Identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e ponendo $z = x + iy$, si ha

$$\Delta u = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} \ .$$

Uns funzione u di classe C^2 in un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$ si dice *armonica* se $\Delta u = 0$ identicamente in Ω.

Teorema 6.1. *Se u è armonica in Ω, essa soddisfa la seguente* proprietà della media*: se $\overline{D(z_0, r)} = \{z : |z - z_0| \le r\} \subset \Omega$,*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) \, dt \ . \tag{6.1}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{it}) \, dt \ ,$$

definita per $0 \le \rho \le r$. Essa è continua, derivabile per $0 < \rho < r$ e $\varphi(0) = u(z_0)$. La sua derivata è

$$\begin{aligned} \varphi'(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} u(x_0 + \rho \cos t, x_0 + \rho \sin t) \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t) \cdot \nabla u(x_0 + \rho \cos t, x_0 + \rho \sin t) \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial D(z_0, \rho)} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds \ . \end{aligned}$$

Applicando la formula di Green, si ha

$$\varphi'(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{D(z_0, \rho)} \Delta u(x + iy) \, dx \, dy = 0 \ .$$

Quindi φ è costante, da cui si ricava la tesi. □

La stessa dimostrazione prova che se una funzione u è continua su $\overline{D(z_0, r)}$ e armonica nell'interno, allora vale la (6.1). Per comodità di notazioni, supponiamo ora che queste condizioni siano soddisfatte sulla chiusura del disco unitario $D = D(0, 1)$.

Lemma 6.2. *La composizone $u \circ F$ di una funzione armonica u con una funzione olomorfa F è armonica.*

Dimostrazione. Basta applicare la regola di derivazione in catena e le equazioni di Cauchy-Riemann per F. □

Teorema 6.3. *Sia u una funzione continua su $\bar{D}$ e armonica in D. Per ogni punto $re^{it} \in D$ vale la* formula integrale di Poisson

$$u(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(t - t')} u(e^{it'})\, dt' \ . \tag{6.2}$$

In altri termini, se $u_r(t) = u(re^{it})$, con $t \in \mathbb{T}$, $0 \le r \le 1$, si ha

$$u_r = u_1 * P_r \ .$$

Dimostrazione. Dato $\alpha \in D$, condieriamo la *funzione di Möbius*

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha} z} \ .$$

Essa gode delle seguenti properietà:
(1) è olomorfa in un intorno di $\bar{D}$;
(2) è una trasformazione conforme di D in sé ed è un diffeomorfismo di ∂D in sé;
(3) $\varphi_\alpha(0) = \alpha$.

Per verificare la (2), osserviamo che

$$\begin{aligned} 1 - |\varphi_\alpha(z)|^2 &= \frac{|1 + \bar{\alpha} z|^2 - |z + \alpha|^2}{|1 + \bar{\alpha} z|^2} \\ &= \frac{1 + |\alpha|^2 |z|^2 - |z|^2 - |\alpha|^2}{|1 + \bar{\alpha} z|^2} \\ &= \frac{(1 - |\alpha|^2)(1 - |z|^2)}{|1 + \bar{\alpha} z|^2} \ , \end{aligned}$$

che è positivo per $z \in D$. Quindi φ_α applica D in sé. Ma $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{-\alpha}$, per cui φ_α è biiettiva da D in sé. Allo stesso modo si verifica che φ_α è biiettiva dal cerchio in sé.

Indichiamo con $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ la funzione tale che $e^{it} = \varphi_\alpha(e^{i\psi(t)})$. Indichiamo inoltre con v la composizione $u \circ \varphi_\alpha$. Allora v è continua in $\bar{D}$ e armonica all'interno, per cui, applicando la (6.2),

$$\begin{aligned} u(\alpha) = v(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(\varphi_\alpha(e^{it'})\big)\, dt' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(\varphi_\alpha(e^{i\psi(t)})\big) \psi'(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(e^{it}\big) \psi'(t)\, dt \ . \end{aligned}$$

Per calcolare $\psi'(t)$, osserviamo che $e^{i\psi(t)} = \varphi_{-\alpha}(e^{it})$, da cui

$$e^{i\psi(t)}(1 - \bar{\alpha} e^{it}) = e^{it} - \alpha \ .$$

Derivando ambo i membri, si ottiene

$$i\psi'(t) e^{i\psi(t)}(1 - \bar{\alpha} e^{it}) - i\bar{\alpha} e^{i\psi(t)} e^{it} = ie^{it} \ ,$$

cioè
$$\psi'(t)(e^{it}-\alpha)(1-\bar\alpha e^{it})-\bar\alpha e^{it}(e^{it}-\alpha)=e^{it}(1-\bar\alpha e^{it})\ .$$

Dunque

$$\begin{aligned}\psi'(t)&=\frac{e^{it}(1-|\alpha|^2)}{(e^{it}-\alpha)(1-\bar\alpha e^{it})}\\&=\frac{1-|\alpha|^2}{(e^{it}-\alpha)(e^{-it}-\bar\alpha)}\\&=\frac{1-|\alpha|^2}{|e^{it}-\alpha|^2}\\&=\frac{1-|\alpha|^2}{1+|\alpha|^2-2\Re\mathrm{e}(\bar\alpha e^{it})}\ ,\end{aligned}$$

che fornisce la tesi. □

La funzione
$$P(re^{it})=P_r(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}$$
è armonica in D. Il modo più semplice per verificare ciò consiste nell'osservare che P è la parte reale di una funzione olomorfa,

$$P(z)=\Re\mathrm{e}\frac{1}{2\pi}\frac{1+z}{1-z}\ . \tag{6.3}$$

Osserviamo anche che se $v(z)=u(e^{it}z)$, con u di classe C^2, allora

$$\Delta v(z)=\Delta u(e^{it}z)\ ,$$

(in altri termini, Δ commuta con le rotazioni). In particolare, se u è armonica, anche v è armonica. Da queste considerazioni segue il seguente risultato.

Teorema 6.4. *Data $f\in C(\mathbb{T})$, sia*

$$u(re^{it})=f*P_r(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(t-t')}f(t')\,dt'\ .$$

Allora u è armonica in D, e si prolunga con continuità a $\bar D$ ponendola uguale a f sul bordo.

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\Delta u(z)&=\Delta\left(\int_{\mathbb{T}}P(ze^{-it'})f(t')\,dt'\right)\\&=\int_{\mathbb{T}}\Delta\big(P(ze^{-it'})\big)f(t')\,dt'\\&=0\ .\end{aligned}$$

Poiché le P_r formano un'identità approssimata, $\lim_{r\to1}f*P_r=f$ uniformemente. □

Corollario 6.5. *Sia u una funzione continua su un aperto Ω che soddisfi la proprietà della media* (6.1). *Allora u è armonica.*

Premettiamo la seguente osservazione.

Lemma 6.6. *Se una funzione u, continua in un aperto connesso Ω, soddisfa la proprietà della media, allora vale il* principio del massimo*: se $|u|$ assume valore massimo in un punto $z_0 \in \Omega$, allora u è costante.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che $u(z_0) > 0$. Se $D(z_0, r) \subset \Omega$ e $r' < r$,

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re e u(z_0 + r'e^{it})\, dt \ ,$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(u(z_0) - \Re e u(z_0 + r'e^{it})\big)\, dt = 0 \ .$$

Ma la funzione integranda è non negativa e continua, per cui deve essere identicamente nulla. Quindi $\Re e u(z) = u(z_0)$ su $D(z_0, r)$, e segue allora dall'ipotesi che $\Im m u(z) = 0$. L'insieme degli $z \in \Omega$ tali che $u(z) = u(z_0)$ è dunque aperto e chiuso. Poiché Ω è connesso, tale insieme coincide con tutto Ω. $\square$

Dimostrazione del Corollario 6.5. Basta dimostrare che u è armonica in ogni disco $D(z_0, r)$ la cui chiusura sia contenuta in Ω. Possiamo supporre che $z_0 = 0$ e $r = 1$. Posto $f(t) = u(e^{it})$, sia

$$\tilde{u}(re^{it}) = f * P_r(t) \ .$$

Allora $\tilde{u}$ è armonica in D e si prolunga con continuità al bordo assumendo ivi gli stessi valori di u. La differenza $v = u - \tilde{u}$ è dunque continua su $\bar{D}$ e nulla al bordo. Supponendo v non identicamente nulla, ci sarebbe un punto di D in cui $|v|$ è massimo. Ma v soddisfa la proprietà della media, per cui v sarebbe costante in D, e questo è assurdo. Dunque $\tilde{u} = u$ in D, per cui u è armonica in D. $\square$

Dalla (6.3) si ottiene il seguente risultato.

Proposizione 6.7. *Ogni u funzione armonica reale in D è la parte reale di una funzione olomorfa.*

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente che u si prolunghi con continuità al bordo e poniamo

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-it'}}{1 - ze^{-it'}} u(e^{it'})\, dt' \ .$$

Derivando sotto integrale, si verifica che $\bar{\partial} F = 0$, e inoltre, per la (6.3), $\Re e F = u$.

Per una generica funzione armonica u in D, applichiamo quanto appena visto alla funzione $u(rz)$, con $r < 1$. Allora

$$F_r(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-it'}}{1 - ze^{-it'}} u(re^{it'})\, dt' \ .$$

Poiché $\Re e F_r(z) = u(rz)$ per ogni $z \in D$, dati r, r' con $0 < r < r' < 1$, le funzioni $F_r(z/r)$ e $F_{r'}(z/r')$ sono definite rispettivamente in $D(0, r)$ e $D(0, r')$ e hanno la stessa parte reale in $D(0, r)$. Dunque la seconda è il prolungamento analitico della prima. Facendo tendere r' a 1, si ottiene una funzione olomorfa in D la cui parte reale è u. $\square$

Togliendo l'ipotesi che u assuma valori reali, si ottiene la seguente caratterizzazione delle funzioni armoniche nel disco.

Teorema 6.8. *Una funzione u definita in D è armonica se e solo se $u = F_1 + \bar{F}_2$, con F_1 e F_2 olomorfe. Le due funzioni F_1 e F_2 sono univocamente determinate da u a meno di una costante additiva.*

Dimostrazione. La dimostrazione ricalca i passi di quella precedente, dopo aver decomposto $P(z)$ come

$$P(z) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1+z}{1-z} + \overline{\frac{1+z}{1-z}}\right) .$$

Per l'unicità, basta osservare che, se $F_1 + \bar{F}_2 = F_3 + \bar{F}_4$, con F_j olomorfe, allora $F_1 - F_3 = \bar{F}_4 - \bar{F}_2$, e che una funzione che sia contemporaneamente olomorfa e antiolomorfa è costante. $\square$

7. La funzione coniugata.

Data una funzione f integrabile su $\mathbb{T}$, sia

$$u(re^{it}) = f * P_r(t) \ , \tag{7.1}$$

il suo integrale di Poisson.

Abbiamo visto che se f è continua, u è l'estensione armonica di f a D, nel senso che la funzione che coincide con u in D e con f sul bordo è continua in $\bar{D}$ e armonica in D.

Proposizione 7.1. *Se $f \in L^1(\mathbb{T})$, la funzione u è armonica in D.*

Dimostrazione. Scritta u come

$$u(z) = \int_{\mathbb{T}} P(ze^{-it'}) f(t')\, dt' \ ,$$

conviene verificare la proprietà della media. Dato $z_0 \in D$ e $r < 1 - |z_0|$, si ha, applicando il Teorema di Fubini-Tonelli e la proprietà della media alle singole funzioni $z \mapsto P(ze^{-it'})$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u(z_0 + re^{it})\, dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} P\big((z_0 + re^{it})e^{-it'}\big) f(t')\, dt' \right) dt \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P\big((z_0 + re^{it})e^{-it'}\big)\, dt \right) f(t')\, dt' \\
&= \int_{\mathbb{T}} P(z_0 e^{-it'}) f(t')\, dt' \\
&= u(z_0) \ . \qquad \square
\end{aligned}$$

Sappiamo inoltre dal Corollario 5.6 che

$$\lim_{r \to 1^-} \|u_r - f\|_1 = 0 \ .$$

In questo senso possiamo interpretare f come il "prolungamento al bordo" di u. Come è noto, la convergenza in norma L^1 non implica la convergenza quasi ovunque. Rimane quindi aperto il problema di stabilire se u ha limiti puntuali (o quasi ovunque) sul bordo. Questo sarà discusso in un paragrafo successivo.

Osserviamo che se $f \in L^p(\mathbb{T})$ per qualche $p \in (1, \infty)$, allora le u_r convergono a f in norma L^p. Se $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, ma non è continua, le u_r convergono a f in ogni norma L^p con $p < \infty$, ma non necessariamente in norma L^∞ (si può verificare che le u_r convergono a f anche nella topologia debole-* di L^∞).

Vogliamo ora applicare a una generica funzione integrabile f su $\mathbb{T}$ altri operatori, che pure producono funzioni armoniche o olomorfe in D.

Consideriamo per esempio

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-it'}}{1 - ze^{-it'}} f(e^{it'})\, dt' \ , \tag{7.2}$$

che è olomorfa in D (si verifica la formula integrale di Cauchy come nella dimostrazione precedente). Se f è reale, la parte reale di F è l'integrale di Poisson di f.

Oppure, consideriamo l'integrale di Cauchy

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(t')}{1 - ze^{-it'}}\, dt' \ , \tag{7.3}$$

che pure fornisce una funzione olomorfa.

Ci domandiamo cosa si può dire del "comportamento al bordo" delle funzioni F o G, ossia se i limiti $\lim_{r\to 1^-} F(re^{it})$ o $\lim_{r\to 1^-} G(re^{it})$ esistono in qualche senso.

Osserviamo che i due problemi che abbiamo posto sono equivalenti, perché

$$\frac{1 + ze^{-it'}}{1 - ze^{-it'}} = -1 + \frac{2}{1 - ze^{-it'}} \ ,$$

da cui

$$F(z) = -\hat{f}(0) + 2G(z) \ .$$

Un terzo problema equivalente coinvolge la *armonica coniugata* di una funzione armonica reale u in D. Essa è, per definizione, l'unica funzione armonica reale v in D tale che $v(0) = 0$ e $u + iv$ sia olomorfa.

Data $f \in L^1(\mathbb{T})$ reale, sia u il suo integrale di Poisson, e v l'armonica coniugata di u. Naturalmente $(u + iv)(z) = F(z) - \Im\mathrm{m} F(0)$, ma dalla (7.2) si vede che $\Im\mathrm{m} F(0) = 0$, per cui

$$\begin{aligned} v(re^{it}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Im\mathrm{m} \left(\frac{1 + re^{i(t-t')}}{1 - re^{i(t-t')}} \right) f(t')\, dt' \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r \sin(t - t')}{1 + r^2 - 2r\cos(t - t')} f(t')\, dt' \ . \end{aligned} \tag{7.4}$$

Anche in questo caso ci chiediamo se e in che senso v ammette limiti al bordo. Essendo i tre problemi equivalenti, ci limitiamo a studiare il comportamento dell'armonica coniugata.

Gli sviluppi in serie di Fourier ci aiutano a descrivere meglio le funzioni in questione e a dare una prima risposta per $p = 2$.

Osserviamo che, fissato $r < 1$, l'operatore che applica f in $v_r(t) = v(re^{it})$ è un operatore di convoluzione:

$$v_r = f * Q_r \ ,$$

con

$$Q_r(t) = \frac{2r \sin t}{1 + r^2 - 2r\cos t} \ ,$$

detto il *nucleo di Poisson coniugato.*

Per ottenere lo sviluppo di Fourier di Q_r, osserviamo che

$$Q_r(t) = \Im\mathrm{m} \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \ .$$

Sviluppando in serie di potenze

$$\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n ,$$

si ricava

$$(7.5)\qquad \begin{aligned} Q_r(t) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nt \\ &= -i\sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{int} - e^{-int}) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-i\operatorname{sgn} n) r^{|n|} e^{int} , \end{aligned}$$

dove $sgn\, n = 1, 0, -1$ secondo che n sia positivo, nullo o negativo.

Proposizione 7.2. *Sia $f \in L^2(\mathbb{T})$. Allora $v_r(t) = f * Q_r(t)$ è in $L^2(\mathbb{T})$ per ogni $r < 1$ e $\lim_{r\to 1^-} v_r$ esiste in norma L^2.*

Dimostrazione. Per la (7.5),

$$v_r(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)(-i\operatorname{sgn} n) r^{|n|} e^{int} ,$$

per cui

$$\|v_r\|_2^2 = \sum_{n\neq 0} |\hat{f}(n)|^2 r^{2|n|} < \|f\|_2^2 .$$

Sia

$$(7.6)\qquad g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)(-i\operatorname{sgn} n) e^{int} .$$

Allora $g \in L^2(\mathbb{T})$ e

$$\lim_{r\to 1^-} \|g - v_r\|_2^2 = \lim_{r\to 1^-} \sum_{n\neq 0} |\hat{f}(n)|^2 (1 - r^{|n|})^2 = 0 ,$$

per convergenza monotona.

Chiamiamo H l'operatore che associa a f la funzione g nella (7.6), cioè

$$(7.7)\qquad Hf(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)(-i\operatorname{sgn} n) e^{int} .$$

La funzione Hf si chiama la *funzione coniugata* di f.
Per il Teorema 1.8, la norma di H, come operatore da $L^2(\mathbb{T})$ in sé, è uguale a 1.

Lemma 7.3. *Sia X uno degli spazi $L^p(\mathbb{T})$, con $1 \leq p < \infty$, oppure $C(\mathbb{T})$. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) *il limite $\lim_{r\to 1^-} v_r$ esiste nella norma di X per ogni $f \in X$;*
(2) *posto $T_r f = v_r = f * Q_r$, con $0 < r < 1$, le norme dei T_r come operatori da X in sé sono limitate da una stessa costante;*
(3) *l'operatore H è limitato da X in sé.*

Dimostrazione. Poiché $T_{rr'} f = (T_r f) * P_{r'}$, la funzione $r \mapsto \|T_r f\|_X$ è crescente. Quindi, se vale la (1), $\sup_{r<1} \|T_r f\|_X < \infty$ per ogni $f \in X$. Per il Teorema di Banach-Steinhaus, si ricava che $\sup_{r<1} \|T_r\| < \infty$.

Supponiamo ora che valga la (2). Se $g(t) = \sum_{|n|\leq N} a_n e^{int}$ è un polinomio trigonometrico, allora

$$T_r g(t) = \sum_{|n|\leq N} a_n(-i\operatorname{sgn} n) r^{|n|} e^{int}$$

è continuo in $r \leq 1$ e in t, per cui

$$\|Hg\|_p = \lim_{r\to 1^-} \|T_r g\| \leq \Big(\sup_{r<1} \|T_r\|\Big) \|g\|_p \,.$$

Per densità, H è limitato da $L^p(\mathbb{T})$ in sé.

Infine, supponiamo che valga la (3). Sia $g \in X$. Allora

$$g * Q_r = (Hg) * P_r$$

per cui

$$\lim_{r\to 1^-} \|g * Q_r - Hg\|_p = 0 \qquad \square$$

Vediamo a questo proposito due risultati negativi.

Proposizione 7.4. *Le condizioni del Lemma 7.3 non sono verificate se X è $L^1(\mathbb{T})$ o $C(\mathbb{T})$.*

Dimostrazione. Se H fosse limitato su $L^1(\mathbb{T})$, esiterebbe una costante C tale che $\|Q_r\|_1 = \|HP_r\|_1 \leq C\|P_r\|_1 = C$ per ogni $r < 1$.

Ma

$$\begin{aligned}
\|HP_r\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2r|\sin t|}{1 + r^2 - 2r\cos t}\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2r\sin t}{1 + r^2 - 2r\cos t}\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \log(1 + r^2 - 2r\cos t)\Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi} \log \frac{1+r}{1-r} \,,
\end{aligned}$$

che tende a ∞ per $r \to 1$.

Vediamo ora che la condizione (2) del Lemma 7.3 non è soddisfatta per $X = C(\mathbb{T})$. Se lo fosse, si avrebbe in particolare

$$|v(r)| = \big|f * Q_r(0)\big| \leq C\|f\|_\infty \,.$$

Quindi i funzionali lineari

$$\varphi_r(f) = f * Q_r(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) Q_r(t)\, dt$$

sarebbero uniformemente limitati in norma. Ma per il Teorema di rappresentazione di Riesz, $\|\varphi_r\| = \|Q_r\|_1$, che non sono limitate. $\square$

Sulla base dei calcoli appena svolti, è facile costruire esplicitamente una funzione f in $L^1(\mathbb{T})$ tale che l'armonica coniugata v del suo integrale di Poisson u non abbia limite al bordo nella norma di $L^1(\mathbb{T})$.

Siano a_n numeri positivi, e siano $r_n < 1$ tali che $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, la funzione $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_{r_n}$ è integrabile. Il suo integrale di Poisson è

$$u(re^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_{rr_n}(e^{it}) \ ,$$

e l'armonica coniugata di u è

$$v(re^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_{rr_n}(e^{it}) \ .$$

Dall'espressione esplicita di Q_r, si vede che essa è dispari edè positiva per $0 < t < \pi$. Poiché gli a_n sono positivi, lo stesso vale per v_r, per cui

$$\begin{aligned} \|v_r\|_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v(re^{it})\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\pi} \int_0^{\pi} Q_{rr_n}(t)\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \|Q_{rr_n}\|_1 \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \log \frac{1 + rr_n}{1 - rr_n} \ . \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{r\to 1^-} \|v_r\|_1 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \log \frac{1 + r_n}{1 - r_n} \ ,$$

e questa serie diverge se gli a_n e gli r_n sono scelti opportunamente.

8. Funzione coniugata e convergenza delle serie di Fourier per $1 < p < \infty$.

Iniziamo con alcune considerazioni sui moltiplicatori di Fourier.

Sia $m = \{m_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una successione di numeri complessi. Dato $p \in [1, \infty)$, si dice che m è un *moltiplicatore di L^p* se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\left\| \sum_{n=-N}^{N} a_n m_n e^{int} \right\|_p \le C \left\| \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int} \right\|_p$$

per ogni polinomio trigonometrico $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$. Per la densità dei polinomi trigonometrici in $L^p(\mathbb{T})$, questo è equivalente a dire che per ogni $f \in L^p(\mathbb{T})$ la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) m_n e^{int}$$

è la serie di Fourier di una funzione $T_m f \in L^p(\mathbb{T})$, e che $\|T_m f\|_p \le C\|f\|_p$.

I moltiplicatori di L^p formano uno spazio vettoriale, che indichiamo con M_p, sul quale introduciamo la norma dell'operatore T_m corrispondente:

$$\|m\|_{M_p} = \sup_{P\in\mathcal{P}\setminus\{0\}} \frac{\|T_m P\|_p}{\|P\|_p} = \sup_{f\in L^p(\mathbb{T})\setminus\{0\}} \frac{\|T_m f\|_p}{\|f\|_p} .$$

Lemma 8.1. *Sia $1 < p < \infty$. Allora m è un moltiplicatore di L^p se e solo se è un moltiplicatore di $L^{p'}$ e $\|m\|_{M_p} = \|m\|_{M'_p}$.*

Dimostrazione. Sia P un polinomio trigonometrico e sia $m \in M_{p'}$. Si ha

$$\|T_m P\|_p = \sup_{Q\in\mathcal{P}\setminus\{0\}} \frac{1}{\|Q\|_{p'}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} T_m P(t) Q(-t)\, dt \right| .$$

Ma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} T_m P(t) Q(-t)\, dt &= (T_m P) * (Q)(0) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{P}(n) m_n \hat{Q}(n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} T_m Q(t) P(-t)\, dt , \end{aligned}$$

e, per la disuguaglianza di Hölder,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} T_m P(t) Q(-t)\, dt \right| &\le \|T_m Q\|_{p'} \|P\|_p \\ &\le \|m\|_{M_{p'}} \|Q\|_{p'} \|P\|_p . \end{aligned}$$

Quindi

$$\|T_m P\|_p \le \|m\|_{M_{p'}} \|P\|_p ,$$

da cui $m \in M_p$ e $\|m\|_{M_p} \le \|m\|_{M_{p'}}$. Scambiando p con p' si ottiene la disugualianza opposta. □

Corollario 8.2. *Se m è un moltiplicatore di L^p, allora m è un moltiplicatore di L^q per tutti i q compresi tra p e p'. In particolare $m \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ e $\|m\|_\infty \leq \|m\|_{M_p}$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 8.1, T_m è limitato da $L^p(\mathbb{T})$ in sé e da $L^{p'}(\mathbb{T})$ in sé. Per il Teorema di Riesz-Thorin, T_m è limitato su $L^q(\mathbb{T})$ per ogni q compreso tra p e p'.

In particolare T_m è limitato su $L^2(\mathbb{T})$, per cui $m \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$. Per un opportuno $\theta \in (0,1)$,

$$\|T_m f\|_2 \leq \|m\|_{M_p}^{1-\theta} \|m\|_{M_{p'}}^{\theta} \|f\|_2 = \|m\|_{M_p} \|f\|_2 \ ,$$

e la conclusione segue dal Teorema 1.8. □

Vediamo ora che le condizioni del Lemma 7.3 sono soddisfatte da $X = L^p(\mathbb{T})$, per $1 < p < \infty$.

Premettiamo le seguenti due formule.

Lemma 8.3. *Se $u \geq 0$ è armonica e $p > 0$, allora*

$$\Delta(u^p) = p(p-1)u^{p-2}|\nabla u|^2$$

nei punti in cui $u(z) \neq 0$.

Se F è olomorfa e $p > 0$,

$$\Delta\big(|F|^p\big) = p^2 |F|^{p-2} |F'|^2$$

nei punti in cui $F(z) \neq 0$.

Dimostrazione. Si ha

$$\partial_x^2(u^p) = \partial_x\big(pu^{p-1}\partial_x u\big) = p(p-1)u^{p-2}(\partial_x u)^2 + pu^{p-1}\partial_x^2 u \ .$$

Sommando con l'analoga formula per $\partial_y^2(u^p)$, si ottiene la prima formula.

Posto $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, si ha $\Delta = 4\partial_z\partial_{\bar z}$. Se $F(z) \neq 0$, è possibile trovare una determinazione di $F^{p/2} = e^{\frac{p}{2}\log F}$ in un intorno di z. Quindi,

$$\Delta|F|^p = 4\partial_z\partial_{\bar z} F^{p/2}\bar F^{p/2} = p^2 F^{p/2-1}F'\bar F^{p/2-1}\bar F' = p^2|F|^{p-2}|F'|^2 \ . \qquad \square$$

Teorema 8.4. *Per $1 < p < \infty$ l'operatore H è continuo su $L^p(\mathbb{T})$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 8.1, basta supporre che $1 < p \leq 2$.

Sia f una funzione continua su $\mathbb{T}$, $f \geq 0$ e non identicamente nulla. Allora u, l'integrale di Poisson di f, è strettamente positiva su D. Sia v l'armonica coniugata di u, e sia $F = u + iv$. Dunque F è olomorfa e diversa da zero in D.

Applichiamo la formula di Green alle due funzioni u^p e $|F|^p$ sul disco D_r di centro l'origine e raggio $r < 1$. Si ha

$$\begin{aligned} r\int_0^{2\pi} \partial_r |u(re^{it}|^p\,dt &= p(p-1)\int_{D_r} |u(z)|^{p-2}|\nabla u(z)|^2\,dz \ , \\ r\int_0^{2\pi} \partial_r |F(re^{it}|^p\,dt &= p^2\int_{D_r} |F(z)|^{p-2}|F'(z)|^2\,dz \ . \end{aligned} \tag{8.1}$$

Ma

$$|\nabla u|^2 = (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = (\partial_x u)^2 + (\partial_x v)^2 = |\partial_x F|^2 = |F'|^2 \ .$$

Poiché $p \leq 2$ e $|u| \leq |F|$, si ha anche $|F|^{p-2} \leq |u|^{p-2}$. Si ricava che

$$\begin{aligned} r\int_0^{2\pi} \partial_r |F(re^{it}|^p \, dt &\leq p^2 \int_{D_r} |u(z)|^{p-2} |\nabla u(z)|^2 \, dz \\ &= \frac{p}{p-1} r \int_0^{2\pi} \partial_r |u(re^{it}|^p \, dt \ . \end{aligned} \tag{8.2}$$

Siano

$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} |u(re^{it}|^p \, dt \ , \qquad \psi(r) = \int_0^{2\pi} |F(re^{it}|^p \, dt \ .$$

Per le (8.1) sia φ che ψ sono crescenti. Per la (8.2), $\psi'(r) \leq p'\varphi'(r)$ per ogni r (si osservi che $\frac{p}{p-1} = p'$). Poiché $\varphi(0) = \psi(0) = 2\pi|u(0)|^p$, si ha $\psi(r) \leq p'\varphi(r)$ per ogni $r < 1$.

Poiché $|v| \leq |F|$, si ha allora che

$$\|v_r\|_p \leq (p')^{1/p} \|u_r\|_p \leq (p')^{1/p} \|f\|_p \ ,$$

dove $u_r(t) = u(re^{it})$ e così per v.

Se f è una generica funzione continua, si può decomporre $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$, con le f_j continue e non negative. Per linearità si ottiene che

$$\|v_r\|_p \leq c_p \|f\|_p \ .$$

La conclusione segue dal Lemma 7.3. $\square$

Possiamo ora dimostrare la convergenza delle serie di Fourier in norma L^p con $1 < p < \infty$. Premettiamo un paio di semplici considerazioni sui moltiplicatori di Fourier.

Lemma 8.5. *Se $\{m_n\} \in M_p$, allora anche $\{m_{-n}\}$ e $\{m_{n-n_0}\}$ sono in M_p e definiscono operatori invarianti per traslazioni con la stessa norma.*

Dimostrazione. Indichiamo con T, $\tilde{T}$ e T_{n_0} gli operatori associati ai moltiplicatori $\{m_n\}$, $\{m_{-n}\}$ e $\{m_{n-n_0}\}$ rispettivamente. Si verifica facilmente che

$$\tilde{T}f = (T\check{f})\check{} \ , \qquad T_{n_0} f = e_{n_0} T(e_{-n_0} f) \ .$$

Quindi $\|\tilde{T}f\|_p = \|T\check{f}\|_p \leq \|T\|_{p,p} \|f\|_p$, da cui $\|\tilde{T}\|_{p,p} \leq \|T\|_{p,p}$. Ma $\tilde{\tilde{T}} = T$, per cui si ha anche $\|T\|_{p,p} \leq \|\tilde{T}\|_{p,p}$. Dimostrazione analoga per T_{n_0}. $\square$

Teorema 8.6. *La serie di Fourier di una funzione $f \in L^p(\mathbb{T})$ con $1 < p < \infty$ converge nel senso ordinario a f.*

Dimostrazione. Per il Teorema 8.4, $\{\operatorname{sgn} n\} \in M_p$ per $1 < p < \infty$. Poiché il moltiplicatore identicamente uguale a 1 pure è in M_p (corrisponde all'operatore identità), così come pure il moltiplicatore che vale 1 per $n = 0$ e 0 altrimenti, segue che il moltiplicatore

$$m_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

è in M_p per $1 < p < \infty$.

Per il Lemma 8.5, fissato un intero $N > 0$, i moltiplicatori

$$m_n^{(N)} = m_{n+N} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq -N \\ 0 & \text{se } n < -N \end{cases} ,$$

e

$$m'^{(N)}_n = m_{-n-N} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq N \\ 0 & \text{se } n > N \end{cases} ,$$

Siano T_N e T'_N gli operatori invarianti per traslazioni associati a questi due moltiplicatori. Si ha

$$T_N T'_N f = S_N[f] ,$$

per cui le norme $\|S_N\|_{p,p}$ sono uniformemente limitate, in base al Lemma 8.5.

Data $f \in L^p(\mathbb{T})$ e fissato $\varepsilon > 0$, sia P un polinomio trigonometrico tale che $\|f - P\|_p < \varepsilon$. Se $N \geq \deg P$, $S_N[P] = P$, per cui

$$\begin{aligned} \|f - S_N[f]\|_p &\leq \|f - P\|_p + \|S_N[f - P]\|_p \\ &< C\varepsilon . \qquad \square \end{aligned}$$

9. Convergenza quasi ovunque

Nei paragrafi precedenti abbiamo studiato problemi di convergenza *in media di ordine* p, ossia nella norma di $L^p(\mathbb{T})$, senza preoccuparci della convergenza puntuale, o meglio, della convergenza quasi ovunque.

Come è noto, la convergenza in media non implica la convergenza quasi ovunque, per cui questo tipo di problema si presenta come indipendente (almeno parzialmente).

In questo paragrafo vedremo che, data $f \in L^1(\mathbb{T})$, le medie di Cesaro e di Abel della sua serie di Fourier convergono a f quasi ovunque. Non tratteremo il caso della convergenza nel senso ordinario, che richiede strumenti più sofisticati, e che dà risultati positivi assumendo che $f \in L^p(\mathbb{T})$ per qualche $p > 1$ (mentre esistono funzioni integrabili la cui serie di Fourier non converge in quasi nessun punto).

Dovendo discutere l'esistenza di limiti come $\lim_{N\to\infty} \sigma_N[f](t)$ o $\lim_{r\to 1^-} f * P_r(t)$, è conveniente introdurre i corrispondenti *operatori massimali*:

$$M_\sigma f(t) = \sup_{N\in\mathbb{N}} \left|\sigma_N[f](t)\right| \ , \tag{9.1}$$

$$M_P f(t) = \sup_{r<1} \left|f * P_r(t)\right| \ . \tag{9.2}$$

Come vedremo, opportune proprietà di limitatezza di tali operatori daranno come conseguenza la convergenza quasi ovunque dei limiti cui siamo interessati.

C'è un terzo operatore massimale che, pur essendo di natura diversa, svolge un ruolo importante, l'*operatore massimale di Hardy-Littlewood*, definito, per $f \in L^1(\mathbb{T})$ come

$$Mf(t) = \sup_{0<r\leq\pi} \frac{1}{2r} \int_{|u-t|<r} |f(u)|\, du \ , \tag{9.3}$$

in cui compaiono le medie integrali di $|f|$ sugli intervalli di $\mathbb{T}$ centrati in t.

Bisogna fare attenzione al fatto che gli operatori massimali non sono lineari. Essi sono tuttavia *sublineari*. In generale, un operatore T che trasforma funzioni in funzioni si dice sublineare se soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{gathered} \left|T(f+g)\right| \leq \left|T(f)\right| + \left|T(g)\right| \\ \left|T(\lambda f)\right| = |\lambda|\left|T(f)\right| \ . \end{gathered} \tag{9.4}$$

Se $f \in L^1(\mathbb{T})$, le funzioni $M_\sigma f$, $M_P f$, Mf sono definite ovunque (eventualmente infinite). La loro misurabilità non è del tutto evidente.

Lemma 9.1. *Se $f \in L^1(\mathbb{T})$, le funzioni $M_\sigma f$, $M_P f$, Mf sono misurabili.*

Dimostrazione. È noto che se $\{g_n\}$ è una successione di funzioni reali misurabili, allora anche $g = \sup_n g_n$ è misurabile. Quindi $M_\sigma f$ è misurabile.

Osserviamo ora che, fissato t, la funzione $r \to f * P_r(t)$ è continua su $[0,1)$, per cui

$$M_P f(t) = \sup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} \left|f * P_r(t)\right| \ ,$$

ed è dunque misurabile.

Per la funzione massimale di Hardy-Littlewood, occorre verificare che la funzione $r \mapsto \int_{|u-t|<r} |f(u)|\,du$ è continua su $[0,\pi]$.

Ciò dipende dal fatto che la misura $\mu = |f|m$ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue m. Quindi, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni Boreliano E,

$$m(E) < \delta \Longrightarrow \mu(E) = \int_E |f(t)|\,dt < \varepsilon\ .$$

Quindi, se $0 < r - r' < \delta/2$,

$$\int_{|u-t|<r} |f(u)|\,du - \int_{|u-t|<r'} |f(u)|\,du = \int_{r'<|u-t|<r} |f(u)|\,du < \varepsilon\ .$$

Possiamo allora dire che

$$Mf(t) = \sup_{r\in\mathbb{Q}\cap(0,\pi)} \frac{1}{2r}\int_{|u-t|<r} |f(u)|\,du\ ,$$

e concludere che è misurabile. $\square$

In generale, però, le funzioni massimali Mf ecc. non sono integrabili. Vediamo un semplice esempio relativo alla funzione massimale di Hardy-Littlewood: la funzione $f(t) = \frac{1}{t\log^2 t}\chi_{(0,1/2)}(t)$ è in $L^1(\mathbb{T})$, ma fissato $t \in (0,1/4)$, si ha

$$Mf(t) \geq \frac{1}{2t}\int_0^{2t} \frac{1}{u\log^2 u}\,du = -\frac{1}{2t\log(2t)}\ ,$$

che non è integrabile.

Nel paragrafo successivo vedremo la dimostrazione del seguente teorema, in base al quale Mf, anche se non integrabile, soddisfa una disuguaglianza di tipo Chebishev.

Teorema 9.2. *Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$. La funzione massimale di Hardy-Littlewood Mf soddisfa la seguente proprietà: per ogni $s > 0$*

$$m\{t : Mf(t) > s\} \leq C\frac{\|f\|_1}{s}\ . \tag{9.5}$$

Si dice che l'operatore massimale M è *di tipo debole* $1-1$. Sugli operatori di tipo debole torneremo in un successivo paragrafo.

Nel resto di questo paragrafo vedremo invece le conseguenze del Teorema 9.2 sulla convergenza delle serie di Fourier.

Lemma 9.3. *Esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni $f \in L^1(\mathbb{T})$,*

$$M_P f(t) \leq M_\sigma f(t) \leq cMf(t)\ .$$

Di conseguenza, anche M_σ e M_P soddisfano la (9.5).

Dimostrazione. Ricordiamo che $\sigma_N[f](t) = f * F_N$, con

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2\frac{N+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}\ .$$

Nell'intervallo $[0,\pi]$ consideriamo i punti $t_k = \frac{2k\pi}{N+1}$, per $1 \le k \le \frac{N+1}{2}$, e, se N è pari, aggiungiamo il punto $t_{\frac{N}{2}+1} = \pi$. Sia quindi $I_k = [-t_k, t_k]$.

Se $t \in I_1$, si ha $0 \le F_N(t) \le F_N(0) = N+1$.

Per $t \in I_k \setminus I_{k-1}$, con $k \ge 2$, usando il fatto che $\sin u \ge \frac{2}{\pi} u$ per $0 < u < \frac{\pi}{2}$, risulta

$$F_N(t) \le \frac{1}{(N+1)\sin^2 \frac{t_{k-1}}{2}} \le \frac{\pi^2}{(N+1)t_{k-1}^2} = \frac{N+1}{4(k-1)^2} \ .$$

Quindi, indicando con k_0 l'ultimo dei k da considerare,

$$\begin{aligned} F_N(t) &\le (N+1)\chi_{I_1}(t) + (N+1)\sum_{k=2}^{k_0} \frac{1}{(k-1)^2}\big(\chi_{I_k}(t) - \chi_{I_{k-1}}(t)\big) \\ &= (N+1)\sum_{k=2}^{k_0-1}\left(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right)\chi_{I_k}(t) + \frac{N+1}{(k_0-1)^2}\chi_{I_{k_0}}(t) \ . \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \big|\sigma_N[f](t)\big| &\le |f| * F_N(t) \\ &\le (N+1)\sum_{k=2}^{k_0-1}\left(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right)|f| * \chi_{I_k}(t) + \frac{N+1}{(k_0-1)^2}|f| * \chi_{I_{k_0}}(t) \ . \end{aligned}$$

Ma

$$|f| * \chi_{I_k}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t-u|<t_k} |f(u)|\,du \le \frac{t_k}{\pi} Mf(t) \ ,$$

da cui

$$\begin{aligned} \big|\sigma_N[f](t)\big| &\le \frac{N+1}{\pi}\left(\sum_{k=2}^{k_0-1}\left(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right)t_k + \frac{t_{k_0}}{(k_0-1)^2}\right) Mf(t) \\ &= \frac{N+1}{\pi}\left(t_2 + \sum_{k=2}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}(t_{k+1} - t_k)\right) Mf(t) \\ &\le c\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right) Mf(t) \ . \end{aligned}$$

Prendendo l'estremo superiore al variare di N, si ottiene che $M_\sigma f(t) \le cMf(t)$.

Per la funzione massimale M_P, usiamo l'identità, già incontrata nel paragrafo 5,

$$f * P_r(t) = (1-r^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)r^n \sigma_n[f](t) \ ,$$

per $r < 1$, da cui

$$|f * P_r(t)| \le (1-r^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)r^n M_\sigma f(t) = M_\sigma f(t) \ .$$

Prendendo l'estremo superiore in r si ottiene la tesi. $\square$

Corollario 9.4. *Se $f \in L^1(\mathbb{T})$, la sua serie di Fourier converge secondo Cesaro (e dunque secondo Abel) quasi ovunque.*

Dimostrazione. Possiamo supporre f reale, e quindi che le somme di Cesaro $\sigma_N[f]$ siano pure reali. Poniamo

$$\Omega_f(t) = \limsup_{N\to\infty} \sigma_N[f](t) - \liminf_{N\to\infty} \sigma_N[f](t) \geq 0 \ .$$

La funzione Ω_f è ben definita (eventualmente infinita) quasi ovunque. Infatti, poiché le $\sigma_N[f]$ convergono a f in $L^1(\mathbb{T})$, esiste una sottosuccessione $\{N_j\}$ tale che $\lim_{j\to\infty} \sigma_{N_j}[f](t) = f(t)$ quasi ovunque. Quindi $\limsup_{N\to\infty} \sigma_N[f](t) > -\infty$ quasi ovunque e $\liminf_{N\to\infty} \sigma_N[f](t) < \infty$ quasi ovunque, per cui l'espressione $+\infty - \infty$ non si presenta quasi mai.

Se dimostriamo che, per ogni $s > 0$, $m\big(\{t : \Omega_f(t) > s\}\big) = 0$, possiamo concludere che $\Omega_f(t) = 0$ quasi ovunque, e dunque che $\lim_{N\to\infty} \sigma_N[f](t)$ esiste quasi ovunque. Per quanto detto sopra, tale limite coincide con $f(t)$ quasi ovunque.

Dato $\varepsilon > 0$, sia P un polinomio trigonometrico tale che $\|f - P\|_1 < \varepsilon$. Per le proprietà di limsup e liminf,

$$\Omega_f(t) \leq \Omega_{f-P}(t) + \Omega_P(t) \ .$$

Ma $\Omega_P(t) = 0$ per ogni t, per cui $\Omega_f(t) \leq \Omega_{f-P}(t)$. Osserviamo ora che $\Omega_{f-P}(t) \leq 2M_\sigma(f-P)(t)$, per cui, dato $s > 0$,

$$\begin{aligned} m\big(\{t : \Omega_f(t) > s\}\big) &= m\big(\{t : \Omega_{f-P}(t) > s\}\big) \\ &\leq m\big(\{t : M_\sigma(f-P)(t) > s/2\}\big) \\ &\leq C\frac{\|f-P\|_1}{s} \\ &< C\frac{\varepsilon}{s} \ . \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε, $m\big(\{t : \Omega_f(t) > s\}\big) = 0$. $\square$

10. La funzione massimale di Hardy-Littlewood

In Questo paragrafo dimostreremo il Teorema 9.2, ma lo faremo in un ambito più generale, cosa che non aggiunge particolari complicazioni.

Sia (X,d) uno spazio metrico localmente compatto, e sia m una misura di Borel regolare positiva su X. Si dice che m è una misura *doubling* se esiste una costante $c>1$ tale che

$$m\big(B(x,2r)\big)\le cm\big(B(x,r)\big)\ , \tag{10.1}$$

per ogni $x\in X$ e $r>0$. Se m è una misura doubling su (X,d), si dice che (X,d,m) è uno *spazio di tipo omogeneo.*

Il toro $\mathbb{T}$ è un esempio di spazio di tipo omogeneo, rispetto alla distanza indotta come quoziente di $\mathbb{R}$ e alla misura di Lebesgue. Anche $\mathbb{R}^n$, con la metrica euclidea e la misura di Lebesgue, è di tipo omogeneo.

Su uno spazio di tipo omogeneo definiamo la funzione massimale

$$\mathcal{M}f(x)=\sup_{B\ni x}\frac{1}{m(B)}\int_B|f(y)|\,dy\ , \tag{10.2}$$

dove f è localmente integrabile rispetto alla misura m, e l'estremo superiore è calcolato rispetto a tutte le palle B, relative alla distanza d, contenenti x. Si osservi che, se $X=\mathbb{T}$, la funzione massimale di Hardy-Littlewood Mf è minore o uguale, in ogni punto, a $\mathcal{M}f$.

Si ha la seguente proprietà[1].

Lemma 10.1. *La funzione $\mathcal{M}f$ è semicontinua inferiormente, e dunque misurabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M}f(x_0)>\alpha$. Esiste allora una palla B contenente x_0 tale che

$$\frac{1}{m(B)}\int_B|f(y)|\,dy>\alpha\ .$$

Ma allora per ogni $x\in B$ $\mathcal{M}f(x)>\alpha$. $\square$

Per dimostrare che l'operatore $\mathcal{M}$ è di tipo debole $1-1$, si utilizza la seguente versione del *lemma di ricoprimento di Vitali.*

Lemma 10.2. *Sia $\{B_j\}_{j\in J}$ una famiglia finita di palle che ricoprono un sottoinsieme misurabile E di X. Esiste allora una sottofamiglia $\{B_j\}_{j\in J'}$ tale che $B_j\cap B_k=\emptyset$ per $j,k\in J'$, $j\ne k$, e inoltre*

$$m\Big(\bigcup_{j\in J'}B_j\Big)\ge\frac{1}{c^2}m(E)\ ,$$

[1] Su un generico spazio di tipo omogeneo non è detto che la funzione massimale di Hardy-Littlewood, ottenuta prendendo le medie solo sulle palle centrate in x, sia misurabile. Il motivo è che non è garantita la continuità della funzione $r\mapsto m\big(B(x,r)\big)$ per cui non è possibile restringersi ai valori razionali di r.

dove c è la costante nella (10.1).

Dimostrazione. Sia B_{j_1} una palla che abbia misura massima. Induttivamente si prenda $B_{j_{k+1}}$ in modo che abbia misura massima tra le palle disgiunte da $B_{j_1} \cup \cdots \cup B_{j_k}$. Ovviamente il procedimento si arresta dopo un numero finito di passi, precisamente quando non ci sono più palle disgiunte da $B_{j_1} \cup \cdots \cup B_{j_k}$. Poniamo $J' = \{j_1, \ldots, j_k\}$.

Se B è una palla, indichiamo con B^* la palla con lo stesso centro e raggio triplo.

Sia B' una delle palle B_j con $j \notin J'$. Necessariamente essa interseca almeno una di quelle selezionate. Sia $\bar{\ell}$ il primo intero ℓ tale che $B' \cap B_{j_\ell} \neq \emptyset$. Allora il raggio di $B_{j_{\bar{\ell}}}$ è maggiore o uguale al raggio di B', per cui

$$B' \subseteq B^*_{j_{\bar{\ell}}} \ .$$

Di conseguenza

$$E \subseteq \bigcup_{j \in J} B_j \subseteq \bigcup_{j \in J'} B_j^* \ ,$$

ed essendo $m(B_j^*) \leq c^2 m(B_j)$ per la proprietà doubling,

$$m(E) \leq \sum_{j \in J'} m(B_j^*) \leq c^2 \sum_{j \in J'} m(B_j) = c^2 m \left(\bigcup_{j \in J'} B_j \right) \ . \qquad \square$$

Teorema 10.3. *L'operatore $\mathcal{M}$ è di tipo debole* $1-1$.

Dimostrazione. Data $f \in L^1(X, m)$ e dato $s > 0$, sia $E_s = \{x : \mathcal{M}f(x) > s\}$. Per il Lemma 10.1, E_s è misurabile, e la sua misura è l'estremo superiore delle misure dei suoi sottoinsiemi compatti. Sia E un sottoinsieme compatto di E_s.

Preso $x \in E$, essendo $\mathcal{M}f(x) > s$, esiste una palla B_x contenente x tale che

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| \, dy > s \ ,$$

ossia

$$m(B_x) \leq \frac{1}{s} \int_{B_x} |f(y)| \, dy \ .$$

Per la compattezza di E, si estragga da $\{B_x\}$ un sottoricoprimento finito, e quindi, applicando il Lemma 10.2, un sottoinsieme finito $\{B_{x_j}\}$ di palle disgiunte tali che $\sum_j m(B_{x_j}) \geq c^{-2} m(E)$. Si ha allora

$$m(E) \leq c^2 \sum_j m(B_{x_j}) \leq \frac{c^2}{s} \sum_j \int_{B_{x_j}} |f(y)| \, dy \leq c^2 \frac{\|f\|_1}{s} \ .$$

Di conseguenza $m(E_s) \leq c^2 \|f\|_1 / s$. $\square$

Chiaramente il Teorema 10.3 implica il Teorema 9.2, e questo conclude la discussione della convergenza quasi ovunque delle medie di Cesaro di una serie di Fourier.

Vediamo ora una interessante conseguenza del Teorema 10.3.

Proposizione 10.4. *Se $f \in L^1(X)$, il limite*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy \tag{10.3}$$

esiste finito per quasi ogni x.

Dimostrazione. Possiamo supporre f reale. Poniamo

$$f_r(x) = \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy\ , \tag{10.4}$$

e

$$\Omega_f(x) = \limsup_{r\to 0} f_r(x) - \liminf_{r\to 0} f_r(x)\ .$$

Anche qui basta dimostrare che $m\big(\{x : \Omega_f(x) > s\}\big) = 0$ per ogni $s > 0$.

Dato $\varepsilon > 0$, sia g una funzione continua a supporto compatto tale che $\|f-g\|_1 < \varepsilon$.

Poiché g è uniformemente continua, esiste $\delta > 0$, tale che $d(x,y) < \delta$ implichi $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Se $r < \delta$,

$$\begin{aligned} |g(x) - g_r(x)| &= \left| \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} \big(g(x) - g(y)\big)\,dy \right| \\ &\le \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} \big|g(x) - g(y)\big|\,dy \\ &\le \varepsilon\ . \end{aligned} \tag{10.5}$$

Quindi $g(x) = \lim_{r\to 0} g_r(x)$ per ogni x, e $\Omega_g(x) = 0$. Quindi

$$\Omega_f(x) \le \Omega_{f-g}(x) + \Omega_g(x) = \Omega_{f-g}(x) \le 2\mathcal{M}(f-g)(x)\ ,$$

e la dimostrazione procede come quella del Corollario 9.4. $\square$

Ci interessa sapere se il limite (10.3) coincide, quasi ovunque, con la funzione f. vedremo che questo è vero assumendo che le funzioni f_r definite dalla (10.4) sono misurabili. Una condizione sufficiente è che

$$m\big(B(x,r)\big) = \sup_{r'<r} m\big(B(x,r')\big)\ ,$$

per ogni x e $r > 0$. In tal caso, infatti, per $f \ge 0$ sia il numeratore che il denominatore nella (10.4) sono semicontinui inferiormente (la verifica è lasciata per esercizio).

Lemma 10.5. *Sia $f \in L^1(X,m)$, e supponiamo che le funzioni f_r siano misurabili. Allora*

$$\lim_{r\to 0} \|f_r - f\|_1 = 0\ .$$

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, sia g continua a supporto compatto tale che $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Posto $K = \operatorname{supp} g$, esiste $\delta_0 > 0$ tale che $K' = \{x : d(x,K) \le \delta_0\}$ sia compatto.

Segue dalla (10.5) che esiste $\delta < \delta_0$ tale che, se $r < \delta$, $|g(x) - g_r(x)| \le \frac{\varepsilon}{m(K')}$.

Inoltre g e g_r hanno supporto contenuto in K', per cui

$$\|g-g_r\|_1=\int_{K'}|g(x)-g_r(x)|\,dx<\varepsilon\ .$$

Usando il fatto che

$$\|f-f_r\|_1\le\|f-g\|_1+\|g-g_r\|_1+\|g_r-f_r\|_1\ ,$$

rimane da stimare $\|g_r-f_r\|_1$. Ma

$$\begin{aligned}\|g_r-f_r\|_1&=\int_X\left|\frac{1}{m\big(B(x,r)\big)}\int_{B(x,r)}\big(g(y)-f(y)\big)\,dy\right|\,dx\\&\le\int_X\frac{1}{m\big(B(x,r)\big)}\int_{B(x,r)}\big|g(y)-f(y)\big|\,dy\,dx\\&=\int_X\big|g(y)-f(y)\big|\int_{B(y,r)}\frac{1}{m\big(B(x,r)\big)}\,dx\,dy\ .\end{aligned}$$

Se $x\in B(y,r)$, si ha $B(y,r)\subset B(x,2r)$ e, per la proprietà doubling,

$$m\big(B(y,r)\big)\le cm\big(B(x,r)\big)\ .$$

Quindi

$$\int_{B(y,r)}\frac{1}{m\big(B(x,r)\big)}\,dx\le\frac{1}{c}\int_{B(y,r)}\frac{1}{m\big(B(y,r)\big)}\,dx=\frac{1}{c}\ ,$$

da cui si ricava che

$$\|g_r-f_r\|_1\le\frac{1}{c}\int_X\big|g(y)-f(y)\big|\,dy<\frac{\|f-g\|_1}{c}\ .$$

In conclusione, se $r<\delta$ e $r<1$, $\|f-f_r\|_1<C\varepsilon$. □

Corollario 10.6. *Sia $f\in L^1(X)$, e supponiamo che le f_r siano misurabili. Allora il limite* (10.3) *è uguale a $f(x)$ quasi ovunque.*

Dimostrazione. Segue dal Lemma 10.5 che esiste una successione r_n tendente a 0 tale che $\lim_{n\to\infty}f_{r_n}(x)=f(x)$ quasi ovunque. Ma per la Proposizione 10.4,

$$\lim_{r\to0}f_r(x)=\lim_{n\to\infty}f_{r_n}(x)=f(x)$$

quasi ovunque. □

Sia E_f l'insieme dei punti x per cui il limite (10.3) esiste finito. Per $x\in E_f$ definiamo $f(x)$ uguale a tale limite.

Un punto di E_f si chiama *punto di Lebesgue* per f se

$$\lim_{r\to0}\frac{1}{m\big(B(x,r)\big)}\int_{B(x,r)}|f(y)-f(x)|\,dy=0\ .$$

Teorema 10.7. *Se $f \in L^1(X)$, quai ogni punto di X è un punto di Lebesgue per f.*

Dimostrazione. Ancora una volta possiamo supporre che f sia reale.

Dato $q \in \mathbb{Q}$, consideriamo l'insieme $E_{|f-q|}$, costituito dai punti x per cui

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)-q|\,dy \tag{10.6}$$

esiste finito. Per il Lemma 10.5, la funzione definita da questo limite (come elemento di L^1) è $|f-q|$, pertanto per quasi ogni $x \in E_{|f-q|} \cap E_f$ il limite (10.6) è uguale a $|f(x)-q|$, dove $f(x)$ è il valore del limite (10.3). Indichiamo con E'_q l'insieme di tali x.

Sia E_0 l'intersezione dei vari E'_q al variare di q in $\mathbb{Q}$. Trattandosi di una famiglia numerabile, $m(X \setminus E_0) = 0$.

Se $x \in E_0$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)-q|\,dy = |f(x)-q| \tag{10.7}$$

per ogni $q \in \mathbb{Q}$. Il limite a primo membro è funzione uniformemente continua di q, in quanto

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)-q|\,dy - \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)-q'|\,dy \right| \\
&\qquad \le \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |q-q'|\,dy \\
&\qquad = |q-q'| \,.
\end{aligned}$$

Quindi l'uguaglianza (10.6) si estende a ogni $q \in \mathbb{R}$, in particolare a $q = f(x)$. $\square$

11. Teorema di interpolazione di Marcinkiewicz

In questo paragrafo vediamo un altro importante teorema di interpolazione. Questo teorema si applicanon solo a operatori lineari su spazi L^p, ma, più in generale, a operatori sublineari.

Diamo prima la nozione di funzione distribuzione (di una funzione data) e la definizione di operatore di tipo debole $p - q$.

Definizione. *Sia f una funzione misurabile su uno spazio di misura (X, μ). Si chiama* funzione distribuzione *di f la funzione*

$$\lambda_f(s) = \mu\big(\{x : |f(x)| > s\}\big) \ ,$$

definita per $s \geq 0$.

La funzione λ_f è chiaramente decrescente.

Lemma 11.1. *Sia $1 \leq p < \infty$. Se $f \in L^p(X, \mu)$, vale la* disuguaglianza di Chebishev

$$\lambda_f(s) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{s}\right)^p \ , \tag{11.1}$$

per ogni $s > 0$.

Inoltre f è in $L^p(X, \mu)$ se e solo se $\int_0^\infty s^{p-1}\lambda_f(s)\, ds < \infty$ e vale l'uguaglianza

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty s^{p-1}\lambda_f(s)\, ds \ . \tag{11.2}$$

Dimostrazione. Sia $E_s = \{x : |f(x)| > s\}$. Allora

$$s^p\mu(E_s) \leq \int_{E_s} |f(x)|^p\, dx \leq \|f\|_p^p \ .$$

Passando alla (11.2), possiamo supporre che $f \geq 0$. Supponiamo che f sia una funzione semplice, $f(x) = \sum c_j\chi_{A_j}$, con gli A_j a due a due disgiunti. Allora

$$\lambda_f(s) = \sum_{j:c_j>s} \mu(A_j) \ .$$

Se $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$, e ponendo $c_0 = 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty s^{p-1}\lambda_f(s)\, ds &= \sum_{j=1}^n \int_{c_{j-1}}^{c_j} s^{p-1}\big(\mu(A_j) + \cdots + \mu(A_n)\big)\, ds \\
&= \frac{1}{p}\sum_{j=1}^n \big(\mu(A_j) + \cdots + \mu(A_n)\big)(c_j^p - c_{j-1}^p) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{j=1}^n \mu(A_j)c_j^p \\
&= \frac{1}{p}\|f\|_p^p \ .
\end{aligned}$$

Per una generica $f \geq 0$ in $L^p(X, \mu)$, sia f_n una successione crescente di funzioni semplici convergente a f quasi ovunque. Allora, per ogni s, gli insiemi $\{x : |f_n(x)| > s\}$ crescono con n e la loro unione è $\{x : |f(x)| > s\}$. Pertanto i valori $\lambda_{f_n}(s)$ tendono in modo crescente a $\lambda_f(s)$ per ogni s. Per il Teorema di convergenza monotona,

$$\lim_{n\to\infty} p \int_0^\infty s^{p-1} \lambda_{f_n}(s)\, ds = p \int_0^\infty s^{p-1} \lambda_f(s)\, ds \ ,$$

e, sempre per convergenza monotona, le norme $\|f_n\|_p$ tendono a $\|f\|_p$. $\square$

Definizione. *Si chiama L^p-debole, o $L^{p,\infty}(X, \mu)$ lo spazio delle funzioni f misurabili su X per cui esiste una costante $c > 0$ tale che*

$$\lambda_f(s) \leq \frac{c}{s^p}$$

per ogni $s > 0$.

Per la disuguaglianza di Chebishev,

$$L^p(X, \mu) \subset L^{p,\infty}(X, \mu) \ .$$

In generale l'inclusione è propria. Se per es. $X = [0, 1]$ e μ è la misura di Lebesgue, la funzione $f(x) = x^{-1/p}$ è in L^p-debole ma non in L^p.

Per $p = \infty$, si pone $L^{\infty,\infty} = L^\infty$.

Definizione. *Sia T un operatore subadditivo definito su $L^p(X, \mu)$ a valori nelle funzioni misurabili su uno spazio di misura (Y, ν). Si dice che T è* di tipo debole *$p - q$ se esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$\lambda_{Tf}(s) \leq C \left(\frac{\|f\|_p}{s} \right)^q \ ,$$

per ogni $f \in L^p(X, \mu)$ e ogni $s > 0$.

Per sottolineare la differenza, si dice anche che un operatore subadditivo è *di tipo forte* $p - q$ se esiste $C > 0$ tale che $\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$ per ogni $f \in L^p(X, \mu)$. Per la (11.1), un operatore di tipo forte $p - q$ è anche di tipo debole $p - q$.

Se $q = \infty$, le nozioni di operatore di tipo forte e di tipo debole coincidono per definizione.

Enunciamo il *Teorema di Marcinkiewicz* in forma generale, anche se ne daremo la dimostrazione solo nel caso particolare che ci servirà nel seguito.

Teorema 11.2. *Siano (X, μ) e (Y, ν) spazi di misura, e sia T un operatore subadditivo definito sia su $L^{p_0}(X, \mu)$ che su $L^{p_1}(X, \mu)$, $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, a valori nelle funzioni misurabili su Y. Supponiamo che T sia di tipo debole $p_0 - q_0$ e di tipo debole $p_1 - q_1$, con $p_0 \leq q_0$, $p_1 \leq q_1$ e $q_0 \neq q_1$. Dato $t \in (0, 1)$, siano*

$$p = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \ , \qquad q = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} \ .$$

Allora T è di tipo forte $p - q$.

Considereremo solo il caso in cui $p_0 = q_0 < p_1 = q_1$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, se $f = g + h$,

$$\{x : |f(x)| > s\} \subset \{x : |g(x)| > s/2\} \cup \{x : |h(x)| > s/2\} ,$$

per cui

$$\lambda_f(s) \leq \lambda_g(s/2) + \lambda_h(s/2) .$$

Supponiamo ora che $p_1 = q_1 < \infty$, e sia $f \in L^p(X, \mu)$.

Dato $s > 0$, decomponiamo f come $f_s + f^s$, dove $f_s = f\chi_{\{x:|f(x)| \leq s\}}$ e $f^s = f\chi_{\{x:|f(x)|>s\}}$. Allora

$$\lambda_{Tf}(s) \leq \lambda_{Tf_s}(s/2) + \lambda_{Tf^s}(s/2) ,$$

e si ha

$$\begin{aligned} \int_Y |Tf(y)|^p \, d\nu(y) &= p \int_0^\infty s^{p-1} \lambda_{Tf}(s) \, ds \\ &\leq p \int_0^\infty s^{p-1} \lambda_{Tf_s}(s/2) \, ds + p \int_0^\infty s^{p-1} \lambda_{Tf^s}(s/2) \, ds . \end{aligned} \tag{11.3}$$

Essendo $p_0 < p < p_1$, risulta $f_s \in L^{p_1}(X, \mu)$, in quanto

$$\begin{aligned} \|f_s\|_{p_1}^{p_1} &= \int_{\{x:|f(x)| \leq s\}} |f(x)|^{p_1} \, d\mu(x) \\ &\leq s^{p_1 - p} \int_{\{x:|f(x)| \leq s\}} |f(x)|^p \, d\mu(x) < \infty . \end{aligned}$$

Poiché T è di tipo debole $p_1 - p_1$, esiste una costante C_1 (indipendente da f e da s) tale che

$$\lambda_{Tf_s}(s/2) \leq C_1 \left(\frac{2\|f_s\|_{p_1}}{s} \right)^{p_1} = \frac{C_1'}{s^{p_1}} \int_{\{x:|f(x)| \leq s\}} |f(x)|^{p_1} \, d\mu(x) .$$

In modo analogo si verifica che $f^s \in L^{p_0}(X, \mu)$ e che esiste una costante C_0 tale che

$$\lambda_{Tf^s}(s/2) \leq C_0 \left(\frac{2\|f^s\|_{p_0}}{s} \right)^{p_0} = \frac{C_0'}{s^{p_0}} \int_{\{x:|f(x)| < s\}} |f(x)|^{p_0} \, d\mu(x) .$$

Inserendo queste disuguaglianze nella (11.3), si ha(*)

$$\begin{aligned} \int_Y |Tf(y)| \, d\nu(y) &\leq c \int_0^\infty s^{p-p_1-1} \int_{\{x:|f(x)| \leq s\}} |f(x)|^{p_1} \, d\mu(x) \, ds \\ &\quad + c \int_0^\infty s^{p-p_0-1} \int_{\{x:|f(x)| > s\}} |f(x)|^{p_0} \, d\mu(x) \, ds \\ &= c \int_X |f(x)|^{p_1} \int_{|f(x)|}^\infty s^{p-p_1-1} \, ds \, d\mu(x) \\ &\quad + c \int_X |f(x)|^{p_0} \int_0^{|f(x)|} s^{p-p_0-1} \, ds \, d\mu(x) \\ &\leq c \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) . \end{aligned}$$

(*)Nelle disuguaglianze che seguono compare una costante moltiplicativa non precisata c, che può variare da un passaggio all'altro. Per i nostri scopi non è importante tener traccia di come si modifica di volta in volta questa costante. Basta solo osservare che essa non dipende dalla particolare funzione con cui si lavora.

Passiamo ora al caso in cui $p_1 = q_1 = \infty$.

Moltiplicando l'operatore T per un opportuno scalare, possiamo supporre che la norma di T come operatore da $L^\infty(X, \mu)$ in $L^\infty(Y, \nu)$ non superi $1/2$, cioè che $\|Tf\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty$.

Decomponendo f come la somma di f_s e f^s, come nel caso precedente, si osserva ora che $\lambda Tf_s(s/2) = 0$ per ogni $s > 0$. La dimostrazione svolta nel caso $p_1 < \infty$ può essere ripetuta con le dovute semplificazioni. $\square$

Il Teorema di Marcinkiewicz si applica, in particolare agli operatori massimali introdotti nei paragrafi precedenti. Per quanto visto, è sufficiente considerare l'operatore massimale $\mathcal{M}$ introdotto nel paragrafo 10.

Corollario 11.3. *Sia (X, d, m) uno spazio di tipo omogeneo. L'operatore $\mathcal{M}$ è di tipo forte $p - p$ per ogni $p > 1$.*

Dimostrazione. La disuguaglianza $\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ è evidente. Inoltre $\mathcal{M}$ è di tipo debole $1 - 1$, per il Teorema 10.3. $\square$

12. Coefficienti di Fourier di misure e distribuzioni.

Indichiamo con $M(\mathbb{T})$ lo spazio di Banach delle misure complesse di Borel regolari su $\mathbb{T}$, con la norma $\| \, \|_1$. Data $\mu \in M(\mathbb{T})$, possiamo definire i suoi coefficienti di Fourier (detti anche di *Fourier-Stjeltjes*)

$$\hat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-int}\, d\mu(t) \ .$$

Questa definizione è coerente con quella data per funzioni integrabili, qualora si identifichi la funzione $f \in L^1(\mathbb{T})$ con la misura μ tale che $d\mu(t) = \frac{1}{2\pi} f(t)\, dt$.

Si verifica facilmente la disuguaglianza

$$|\hat{\mu}(n)| \le \|\mu\|_1 \ , \tag{12.1}$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Definizione. *Date due misure $\mu, \nu \in M(\mathbb{T})$, la loro convoluzione $\mu * \nu$ è data da*

$$(\mu * \nu)(E) = (\mu \times \nu)\Big(\big\{(t,u) \in \mathbb{T}^2 : t+u \in E\big\}\Big) \ , \tag{12.2}$$

per ogni Boreliano E.

Questa definizione è giustificata dalla parte (1) del seguente enunciato, dove m indica la misura di Lebesgue su $\mathbb{T}$.

Proposizione 12.1. *La* (12.2) *definisce una misura di Borel regolare su $\mathbb{T}$. Inoltre*

(1) *se $\mu = \frac{1}{2\pi} f m$ e $\nu = \frac{1}{2\pi} g m$, allora $\mu * \nu = \frac{1}{2\pi}(f * g) m$;*
(2) *se $f \in C(\mathbb{T})$,*

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)\, d(\mu * \nu)(t) = \iint_{\mathbb{T}^2} f(t+u)\, d\mu(t)\, d\nu(u) \ ;$$

(3) *se $\mu \in M(\mathbb{T})$ e $f \in L^1(\mathbb{T})$, la convoluzione di μ con $\frac{1}{2\pi} f m$ è data dalla misura, assolutamente continua rispetto a m, $\frac{1}{2\pi}(\mu * f) m$; se f è continua, $\mu * f$ coincide con la funzione*

$$\mu * f(t) = \int_{\mathbb{T}} f(t-u)\, d\mu(u) \ ;$$

(4) *la convoluzione tra misure gode delle proprietà associativa, commutativa e distributiva rispetto alla somma;*
(5) $\|\mu * \nu\|_1 \le \|\mu\|_1 \|\nu\|_1$;
(6) $\widehat{\mu * \nu}(n) = \hat{\mu}(n) \hat{\nu}(n)$.

Dimostrazione. Sia φ il funzionale lineare su $C(\mathbb{T})$ dato da

$$\varphi(f) = \iint_{\mathbb{T}^2} f(t+u)\, d\mu(t)\, d\nu(u) \ .$$

Si ha

$$\begin{aligned}\big|\varphi(f)\big| &\le \iint_{\mathbb{T}^2} \big|f(t+u)\big|\, d|\mu|(t)\, d|\nu|(u)\\ &\le \|f\|_\infty \|\mu\|_1 \|\nu\|_1 \ .\end{aligned}$$

Per il Teorema di rappresentazione di Riesz, esiste una misura $\sigma \in M(\mathbb{T})$ tale che $\varphi(f) = \int_{\mathbb{T}} f(t)\, d\sigma(t)$.

Dato $K \subset \mathbb{T}$ compatto, sia $\{U_n\}$ un sistema fondamentale di intorni di K, e, per ogni n, sia f_n una funzione continua tale che $0 \le f_n \le 1$, $f_n = 1$ su K, $\operatorname{supp} f_n \subset U_n$. Allora, per convergenza dominata,

$$\begin{aligned}\sigma(K) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} f_n(t)\, d\sigma(t)\\ &= \lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{T}^2} f_n(t+u)\, d\mu(t)\, d\nu(u)\\ &= \iint_{\mathbb{T}^2} \chi_{\tilde K}\, d\mu(t)\, d\nu(u)\\ &= \mu \times \nu(\tilde K) \ .\end{aligned}$$

dove $\tilde K = \big\{(t,u) \in \mathbb{T}^2 : t+u \in K\big\}$.

Se E è un Boreliano, dato $\varepsilon > 0$, sia $K \subset E$ compatto tale che $|\sigma|(E \setminus K) < \varepsilon$ e $|\mu| \times |\nu|(\tilde E \setminus \tilde K) < \varepsilon$. Allora

$$\big|\sigma(E) - \sigma(K)\big| = \left|\int_{E\setminus K} d\sigma(t)\right| \le |\sigma|(E \setminus K) < \varepsilon \ ,$$

e analogamente,

$$\big|\mu \times \nu(\tilde E) - \mu \times \nu(\tilde K)\big| < \varepsilon \ .$$

Si ha dunque che $\sigma(E) = \mu \times \nu(\tilde E)$.

Questo dimostra che $\mu * \nu$ è regolare, la (2) e la (5).

Per dimostrare la (1), siano μ e ν come indicato. Allora

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} h(t)\, d(\mu*\nu)(t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{T}^2} h(t+u) f(t) g(u)\, dt\, du\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{T}^2} h(s) f(t) g(s-t)\, dt\, ds\\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} h(s)(f*g)(s)\, ds \ .\end{aligned}$$

La (3) si dimostra in modo analogo. Della (4) dimostriamo solo l'associatività, le altre dimostrazioni essendo analoghe.

Se $\mu, \nu, \sigma \in M(\mathbb{T})$, allora

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} f(t)\, d\big((\mu*\nu)*\sigma\big) &= \iint_{\mathbb{T}^2} f(t+u)\, d(\mu*\nu)(t)\, d\sigma(u)\\ &= \iiint_{\mathbb{T}^3} f(s+t+u)\, d\mu(s)\, d\nu(t)\, d\sigma(u) \ ,\end{aligned}$$

e si giunge allo stesso risultato integrando f rispetto a $\mu * (\nu * \sigma)$.

Infine la (6):

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mu * \nu}(n) &= \int_{\mathbb{T}} e^{-int}\, d(\mu * \nu)(t) \\
&= \iint_{\mathbb{T}^2} e^{-in(t+u)}\, d\mu(t)\, d\nu(u) \\
&= \int_{\mathbb{T}} e^{-int}\, d\mu(t) \int_{\mathbb{T}} e^{-inu}\, d\nu(u) \\
&= \hat{\mu}(n)\hat{\nu}(n)\ . \qquad \square
\end{aligned}
$$

Lo spazio $M(\mathbb{T})$ ha dunque la struttura di *algebra di Banach*. In $M(\mathbb{T})$ esiste un elemento identico per la convoluzione, la delta di Dirac δ_0 nell'origine. È facile rendersi conto del fatto che in $L^1(\mathbb{T})$ non c'è invece elemento identico (se ci fosse, i suoi coefficienti di Fourier dovrebbero essere tutti uguali a 1). Le identità approssimate, viste nei paragrafi precedenti, possono essere viste come quanto di meglio si avvicini a un elemento identico. Si noti che, se $\{K_n\}$ è un'identità approssimata (v. la definizione nel paragrafo 5) allora $\lim K_n = \delta_0$ nella topologia debole-* di $M(\mathbb{T})$.

Introduciamo ora oggetti ancora più generali delle misure di Borel regolari su $\mathbb{T}$, cui abbia pure senso associare la successione dei coefficienti di Fourier.

Una motivazione per fare questo è la descrizione degli operatori invarianti per traslazioni. Abbiamo visto nel paragrafo 1 che ogni operatore invariante per traslazioni che sia limitato su $L^2(\mathbb{T})$ si descrive attraverso il suo *moltiplicatore di Fourier*, nel senso che c'è una corrispondenza biunivoca tra tali operatori e le successioni $m \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, in modo tale che

$$
Tf(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) m_n e^{int}\ . \tag{12.3}
$$

Esempi di tali operatori sono gli operatori di convoluzione con funzioni o, più in generale, con misure:

$$
Tf(t) = f * \mu(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\hat{\mu}(n) e^{int}\ ,
$$

in cui la convergenza in $L^2(\mathbb{T})$ è assicurata dalla (12.1).

Possiamo chiederci se tutti gli operatori (12.3) siano operatori di convoluzione con misure, in altri termini se ogni successione limitata sia la successione dei coefficienti di Fourier di una misura.

La risposta è negativa. Per esempio l'operatore H definito nella (7.7) non è di questo tipo. Si osservi infatti che l'operatore di convoluzione con una misura μ è limitato su $L^1(\mathbb{T})$, in base agli enunciati (3) e (5) della Proposizione 12.1, mentre H non è limitato su $L^1(\mathbb{T})$.

Dato $k \geq 0$, indichiamo con $C^k(\mathbb{T})$ lo spazio di Banach delle funzioni di classe C^k su $\mathbb{T}$, con la norma

$$
\|f\|_{C^k} = \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|_\infty\ .
$$

Definizione. *Si chiama* distribuzione di ordine k *su* $\mathbb{T}$ *un funzionale lineare continuo su* $C^k(\mathbb{T})$*. Lo spazio delle distribuzioni di ordine* k*, ossia lo spazio duale di* $C^k(\mathbb{T})$*, si indica con* $\mathcal{D}'_k(\mathbb{T})$*.*

Le distribuzioni di ordine 0 non sono altro che le misure di Borel regolari, ossia $\mathcal{D}'_0(\mathbb{T}) = M(\mathbb{T})$.

Se $\Phi \in \mathcal{D}'_k(\mathbb{T})$, indicheremo con $\langle \Phi, f\rangle$ il valore $\Phi(f)$, per $f \in C^k(\mathbb{T})$.

Poiché $C^k(\mathbb{T}) \subset C^m(\mathbb{T})$ se $k > m$, e l'inclusione è continua, ogni distribuzione di ordine m definisce, per restrizione, un funzionale continuo su $C^k(\mathbb{T})$. L'operatore di restrizione

$$\mathcal{D}'_m(\mathbb{T}) \ni \Phi \longmapsto \Phi_{|_{C^k(\mathbb{T})}} \in \mathcal{D}'_k(\mathbb{T})$$

è iniettivo, in quanto $C^k(\mathbb{T})$ è denso in $C^m(\mathbb{T})$. Ciò è immdiata conseguenza del seguente enunciato.

Proposizione 12.2. *Lo spazio dei polinomi trigonometrici è denso in* $C^k(\mathbb{T})$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Se $f \in C^k(\mathbb{T})$, integrando per parti si ha

$$\widehat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\,dt = in\hat{f}(n) \ ,$$

e, più in generale, per $j \leq k$,

$$\widehat{f^{(j)}}(n) = (in)^j \hat{f}(n) \ . \tag{12.4}$$

Sia $P_N = \sigma_N[f]$. Derivando P_N termine a termine e confrontando con la (12.4), si vede che $P_N^{(j)} = \sigma_N[f^{(j)}]$ per $j \leq k$. Allora

$$\lim_{N\to\infty} \|f - P_N\|_{C^k} = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)} - \sigma_N[f^{(j)}]\|_\infty = 0 \ . \qquad \square$$

L'operatore di restrizione definisce allora una inclusione naturale

$$\mathcal{D}'_m(\mathbb{T}) \subset \mathcal{D}'_k(\mathbb{T}) \ .$$

Viceversa, data una distribuzione di ordine k, ci si può domandare se, come funzionale lineare, può essere estesa con continuità a qualche spazio $C^m(\mathbb{T})$ con $m < k$. In altri termini, ci si può chiedere quale sia il minimo dei suoi ordini. Ciò consente di sapere quale sia il minimo grado di regolarità da imporre su una funzione f per poter applicare ad essa la distribuzione data.

Per la Proposizione 12.2, se una tale estensione esiste, essa è unica.

Definizione. *Sia* $\Phi \in \mathcal{D}'_k(\mathbb{T})$*. La sua* derivata distribuzionale $\Phi' \in \mathcal{D}'_{k+1}(\mathbb{T})$ *è definita come*

$$\langle \Phi', f\rangle = -\langle \Phi, f'\rangle \ ,$$

per $f \in C^{k+1}(\mathbb{T})$.

Questa definizione è motivata dalla formula di integrazione per parti (supponendo Φ una funzione di classe C^1). L'asserzione che $\Phi' \in \mathcal{D}'_{k+1}(\mathbb{T})$ è giustificata dal fatto che

$$\big|\langle \Phi', f\rangle\big| \leq \|\Phi\|_{\mathcal{D}'_k} \|f'\|_{C^k} \leq \|\Phi\|_{\mathcal{D}'_k} \|f\|_{C^{k+1}} \ .$$

Si ha anzi la disuguaglianza

$$\|\Phi'\|_{\mathcal{D}'_{k+1}} \leq \|\Phi\|_{\mathcal{D}'_k} \ .$$

Esempi.

1. Sia $\varphi(t) = \chi_{[a,b]}(t)$, con $[a,b] \subset [0,2\pi]$. In modo naturale, φ definisce una distribuzione di ordine 0:

$$\langle \varphi, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(t)\,dt\ .$$

Se $f \in C^1(\mathbb{T})$, la derivata (distribuzionale) φ' di φ è tale che

$$\langle \varphi', f\rangle = -\langle \varphi, f'\rangle = -\frac{1}{2\pi}\int_a^b f'(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\big(f(a) - f(b)\big)\ .$$

Quindi $\varphi' = \frac{1}{2\pi}(\delta_a - \delta_b)$.
Si osservi che φ' è in realtà una distribuzione di ordine 0.

2. La derivata δ'_a della delta di Dirac nel punto a è data da

$$\langle \delta'_a, f\rangle = -f'(a)\ .$$

3. Sia $\varphi(t) = \log|t|$, per $t \in [-\pi,\pi]$. Poiché $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$, essa definisce una distribuzione di ordine 0, come nel primo esempio. La derivata "puntuale" $\varphi'(t) = 1/t$ non è integrabile, per cui la derivata distribuzionale di φ deve essere definita con attenzione. Se $f \in C^1(\mathbb{T})$, avremo per definizione

$$\langle \varphi', f\rangle = -\langle \varphi, f'\rangle = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f'(t)\log|t|\,dt\ .$$

A questo punto è opportuno integrare per parti, ma ciò può essere fatto solo al di fuori di un intorno di 0. Partiamo dunque dal fatto che

$$\int_{\mathbb{T}} f'(t)\log|t|\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|t|<\pi} f'(t)\log|t|\,dt\ .$$

L'ultimo integrale può essere sviluppato per parti:

$$\int_{\varepsilon<|t|<\pi} f'(t)\log|t|\,dt = \big(f(-\varepsilon) - f(\varepsilon)\big)\log\varepsilon - \int_{\varepsilon<|t|<\pi} f(t)\frac{1}{t}\,dt\ ,$$

da cui

$$\langle \varphi', f\rangle = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\big(f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)\big)\log\varepsilon + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon<|t|<\pi} f(t)\frac{1}{t}\,dt\ .$$

Essendo f di classe C^1, $f(\varepsilon) - f(-\varepsilon) = O(\varepsilon)$, e il primo limite è nullo. Quindi

$$\langle \varphi', f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon<|t|<\pi} f(t)\frac{1}{t}\,dt\ . \tag{12.5}$$

Si osservi che il secondo membro della (12.5) è ben definito se $f \in C^1(\mathbb{T})$, ma non per una generica funzione continua. La distribuzione così ottenuta è di ordine 1, ma non di ordine 0. Essa si chiama una *distribuzione a valore principale* e si scrive $\varphi' = p.v.\frac{1}{t}$, o anche

$$\langle \varphi', f\rangle = \frac{1}{2\pi}p.v.\int_{\mathbb{T}} f(t)\frac{1}{t}\,dt\ .$$

Definizione. *I coefficienti di Fourier di una distribuzione* $\Phi \in \mathcal{D}'_k(\mathbb{T})$ *sono definiti come*

$$\hat{\Phi}(n) = \langle \Phi, e_{-n} \rangle \ . \tag{12.6}$$

Dalla Proposizione 12.2 segue il seguente teorema di unicità.

Proposizione 12.3. *Se* $\Phi \in \mathcal{D}'_k(\mathbb{T})$ *e* $\hat{\Phi}(n) = 0$ *per ogni* n*, allora* $\Phi = 0$*.*

Dimostrazione. Segue dall'ipotesi che $\langle \Phi, P \rangle = 0$ per ogni polinomio trigonometrico P. Per densità, $\Phi = 0$. $\square$

Poiché

$$\big|\langle \Phi, e_{-n} \rangle\big| \le \|\Phi\|_{\mathcal{D}'_k} \|e_{-n}\|_{C^k} \le C(1 + |n|^k) \ ,$$

si ha la seguente proprietà.

Proposizione 12.4. *Se* $\Phi \in \mathcal{D}'_k(\mathbb{T})$*,* $\hat{\Phi}(n) = O(n^k)$ *per* $n \to \pm\infty$*.*

Come abbiamo detto, siamo più interessati a una implicazione nel verso opposto. Premettiamo alcune osservazioni sulla relazione tra regolarità di una funzione e decadimento all'infinito dei suoi coefficienti di Fourier.

Lemma 12.5. *Se* $f \in C^k(\mathbb{T})$*, allora* $\hat{f}(n) = o(n^{-k})$ *per* $n \to \pm\infty$ *e*

$$|\hat{f}(n)| \le \frac{\|f\|_{C^k}}{1 + |n|^k} \ . \tag{12.7}$$

Inoltre, se $k \ge 1$*,*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|^{k-1}) |\hat{f}(n)| \le C \|f\|_{C^k} \ . \tag{12.8}$$

Se $f \in C^\infty(\mathbb{T})$*, la successione* $\{\hat{f}(n)\}$ *è a decrescenza rapida, nel senso che*

$$\hat{f}(n) = o(|n|^{-k}) \qquad (n \to \pm\infty) \tag{12.9}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$*. Viceversa, data una successione* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *a decrescenza rapida, la serie* $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int}$ *converge, uniformemente con tutte le sue derivate, a una funzione in* $C^\infty(\mathbb{T})$*.*

Dimostrazione. Dalla (12.4) e dal Teorema di Riemann-Lebesgue segue che

$$\lim_{n \to \pm\infty} (in)^k \hat{f}(n) = 0 \ .$$

Inoltre

$$\big|(in)^k \hat{f}(n)\big| \le \|f^{(k)}\|_\infty \ ,$$

da cui

$$(1 + |n|^k) |\hat{f}(n)| \le \|f\|_\infty + \|f^{(k)}\|_\infty \le \|f\|_{C^k} \ .$$

Per l'identità di Parseval,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|^{2k}) |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2 + \|f^{(k)}\|_2^2 \le \|f\|_\infty^2 + \|f^{(k)}\|_\infty^2 \le \|f\|_{C^k}^2 \ .$$

Quindi

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|^{k-1})|\hat f(n)| \le \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|n|^{k-1})^2}{1+|n|^{2k}}\right)^{1/2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|^{2k})|\hat f(n)|^2\right)^{1/2}$$
$$\le C\|f\|_{C^k}\ ,$$

dove C^2 è la somma della serie (convergente) sotto la prima radice.

Per quanto riguarda l'ultima parte dell'enunciato, dalla (12.7) segue che i coefficienti di Fourier di una funzione di classe C^∞ sono a decrescenza rapida. Il viceversa è ovvio. □

Si osservi che la relazione (12.4) si estende a distribuzioni, in quanto

$$\widehat{\Phi^{(k)}}(n) = \langle \Phi^{(k)}, e_{-n}\rangle = (-1)^k\langle \Phi, e_{-n}^{(k)}\rangle = (in)^k\langle\Phi, e_{-n}\rangle\ .$$

Teorema 12.6. *Sia $\{m_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una successione tale che $m_n = O(n^k)$ per $n\to\pm\infty$, con $k\ge 0$. Esiste allora una e una sola distribuzione $\Phi\in\mathcal{D}'_{k+1}(\mathbb{T})$ tale che $\hat\Phi(n) = m_n$ per ogni n.*

Dimostrazione. Data $f\in C^{k+1}(\mathbb{T})$, consideriamo la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} m_n\hat f(-n)\ . \tag{12.10}$$

Essa è assolutamente convergente per la (12.8) e

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} m_n\hat f(-n)\right| \le C\|f\|_{C^{k+1}}\ .$$

L'applicazione $f\mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} m_n\hat f(-n)$ è dunque lineare e continua su C^{k+1} e definisce pertanto una distribuzione $\Phi\in\mathcal{D}'_{k+1}$. Inoltre

$$\hat\Phi(n) = \langle\Phi, e_{-n}\rangle = m_n\ .$$

L'unicità segue dalla Proposizione 12.3. □

Un commento sulle notazioni usate e sulla (12.10). Il simbolo $\langle\ ,\ \rangle$ è stato usato prima per il prodotto scalare in $L^2(\mathbb{T})$ e poi per indicare la dualità tra distribuzioni e funzioni. Le due notazioni non coincidono, in quanto il primo è sesquilineare, la seconda bilineare. Se manteniamo questa notazione per la dualità bilineare, e invece indichiamo con $\langle\ |\ \rangle$ il prodotto scalare, la corrispondenza è data da

$$\langle f|g\rangle = \langle f,\bar g\rangle\ ,$$

modulo la canonica identificazione della funzione f con la misura $\frac{1}{2\pi}fm$.

Questo fa sì che la formula

$$\langle f|g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat f(n)\overline{\hat g(n)}$$

(identità di Parseval polarizzata) diventi

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\hat{g}(-n) \ ,$$

per la Proposizione 4.3.

Si noti inoltre che l'identità

$$\langle \Phi, f\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\Phi}(n)\hat{f}(-n) \tag{12.11}$$

vale purché la serie a secondo membro sia convergente. La dimostrazione del Teorema 12.6 mostra che questo è il caso se $\Phi \in \mathcal{D}'_k(\mathbb{T})$ e $f \in C^{k+1}(\mathbb{T})$.

In generale la serie non converge per una generica $f \in C^k(\mathbb{T})$. Per esempio, si prenda $k = 0$ e $\Phi = \delta_0$. La (12.11) diventa allora

$$f(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) \ .$$

Se valesse per ogni f continua, ciò implicherebbe che la serie di Fourier di ogni funzione continua convergerebbe in 0, il che è falso.

Si verifica facilmente che la serie nella (12.11) converge nel senso di Cesaro per ogni $\Phi \in \mathcal{D}'_k(\mathbb{T})$ e $f \in C^k(\mathbb{T})$.

13. $C^\infty(\mathbb{T})$ E CONVOLUZIONE TRA DISTRIBUZIONI.

Analizziamo in questo paragrafo la struttura di $C^\infty(\mathbb{T})$. Nel definirne la topologia si enfatizza il fatto che $C^\infty(\mathbb{T}) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(\mathbb{T})$.

Come sottospazio di $C^k(\mathbb{T})$, $C^\infty(\mathbb{T})$ ne eredita la topologia, che chiamiamo τ_k. Le τ_k sono ordinate per finezza: $\tau_k \subset \tau_{k+1}$, come si verifica facilmente.

Definizione. *La topologia τ su $C^\infty(\mathbb{T})$ è la topologia generata dall'unione delle topologie τ_k.*

Poiché le τ_k sono indotte dalle metriche $d_k(f,g) = \|f-g\|_{C^k}$, τ è una topologia metrizzabile. Il modo abituale di definire una metrica che induca la topologia τ è

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{d_k(f,g)}{1+d_k(f,g)} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|f-g\|_{C^k}}{1+\|f-g\|_{C^k}} \ . \tag{13.1}$$

Come le metriche indotte da norme, questa metrica è invariante per traslazioni, cioè $d(f+h,g+h) = d(f,g)$. Tuttavia $d(f,0)$ non è una norma, e si ha anzi il seguente risultato più forte.

Proposizione 13.1. *Non esiste una norma su $C^\infty(\mathbb{T})$ che induca la topologia τ.*

Dimostrazione. Segue dalla definizione che un sistema fondamentale di intorni di 0 è costituito dagli insiemi

$$U_{k,r} = \{f : \|f\|_{C^k} < r\} \ , \tag{13.2}$$

con $k \in \mathbb{N}$ e $r > 0$. Se τ fosse indotta da una norma, indicata con B_1 la palla unitaria in tale norma, esisterebbe un intorno U_{k_0,r_0} contenuto in B_1.

D'altra parte, ogni altro $U_{k,r}$ conterrebbe una palla sB per qualche $s > 0$.

Avremmo dunque che per ogni scelta di k e r esisterebbe s tale che $sU_{k_0,r_0} = U_{k_0,sr_0} \subset U_{k,r}$. Ma ciò vorrebbe dire che

$$\|f^{(j)}\|_\infty < sr_0 \ \forall\, j \leq k_0 \Longrightarrow \sum_{j=0}^{k} \|f^j\|_\infty < r \ ,$$

il che è assurdo se $k > k_0$. $\square$

Teorema 13.2. *Come spazio metrico, $C^\infty(\mathbb{T})$ è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy rispetto alla metrica (13.1). Per ogni k,

$$\frac{\|f_n - f_m\|_{C^k}}{1+\|f_n - f_m\|_{C^k}} \leq 2^k d(f_n, f_m) \ ,$$

per cui $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in $C^k(\mathbb{T})$. Essa converge dunque, per ogni k, a una funzione $g_k \in C^k(\mathbb{T})$ nella norma di $C^k(\mathbb{T})$. Chiaramente le funzioni g_k coincidono con un'unica funzione, che chiamiamo f ed è in $C^\infty(\mathbb{T})$.

Dato $\varepsilon > 0$, sia k tale che $2^{-k} < \varepsilon$, e sia n_0 tale che $\|f - f_n\|_{C^k} < \varepsilon$ per $n \geq n_0$. Allora, per tali n,

$$d(f, f_n) \leq \sum_{j\leq k} 2^{-j} \frac{\|f - f_n\|_{C^j}}{1+\|f-f_n\|_{C^j}} + \sum_{j>k} 2^{-j} < C\varepsilon \ . \qquad \square$$

$C^\infty(\mathbb{T})$ è un esempio di *spazio di Fréchet*. Per definizione, uno spazio di Fréchet è uno spazio vettoriale X dotato di una famiglia numerabile di seminorme p_k tali che, posto

$$d(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} \frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)} \ ,$$

d sia una distanza e X sia completo rispetto a d.

Sostituendo alle seminorme p_k le seminorme $\tilde{p}_k = p_0 + \cdots + p_k$, si ottiene una metrica $\tilde{d}$ equivalente a d, per cui si può sempre supporre che le seminorme siano crescenti con k.

Un sistema fondamentale di intorni di 0 è costituito dagli insiemi $U_{k,r} = \{x : \tilde{p}_k(x) < r\}$, al variare di $k \in \mathbb{N}$ e di $r > 0$.

Proposizione 13.3. *Sia X uno spazio di Fréchet. Un funzionale lineare φ è continuo su X se e solo se esistono un intero k e una costante $C > 0$ tali che*

$$|\varphi(x)| \leq C\tilde{p}_k(x) \tag{13.3}$$

per ogni $x \in X$.

Dimostrazione. Se vale la (13.3), dati $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, si ha $\varphi(x + U_{k,\varepsilon/C}) \subset B\big(\varphi(x), \varepsilon\big)$, per cui φ è continuo in 0.

Viceversa, sia φ continuo. Esistono allora k e r tali che $\varphi(U_{k,r}) \subset B(0,1)$. Con procedimento standard, si verifica che

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{r}\tilde{p}_k(x) \ . \qquad \square$$

Corollario 13.4. *I funzionali lineari continui su $C^\infty(\mathbb{T})$ sono tutte e sole le distribuzioni su $\mathbb{T}$. Ogni funzionale lineare continuo su $C^\infty(\mathbb{T})$ di estende per continuità a $C^k(\mathbb{T})$ per qualche k.*

Lo spazio $C^\infty(\mathbb{T})$ si indica anche con $\mathcal{D}(\mathbb{T})$, e si chiama $\mathcal{D}'(\mathbb{T}) = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{D}'_k(\mathbb{T})$.

Data una funzione f su $\mathbb{T}$, indichiamo con $\check{f}$ la funzione

$$\check{f}(t) = f(-t) \ .$$

Allora la convoluzione tra due funzioni f e g può essere descritta come

$$f * g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u)\tau_t\check{g}(u)\,du = \langle f, \tau_t g\rangle \ .$$

Questa formula ci consente di estendere la definizione al caso in cui uno dei due fattori sia una distribuzione, e l'altro una funzione C^∞.

Definizione. *Siano $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ e $f \in C^\infty(\mathbb{T})$. Si pone*

$$\Phi * f(t) = \langle \Phi, \tau_t\check{f}\rangle \ .$$

Proposizione 13.5. *La funzione $\Phi * f$ è in $C^\infty(\mathbb{T})$ e valgono le identità*

$$(\Phi * f)' = \Phi' * f = \Phi * f' \ . \tag{13.4}$$

Inoltre, se $\Phi \in \mathcal{D}'_k(\mathbb{T})$, per ogni m vale la maggiorazione

$$\|\Phi * f\|_{C^m} \le \|\Phi\|_{\mathcal{D}'_k} \|f\|_{C^{k+m}} \ . \tag{13.5}$$

La dimostrazione è basata sul seguente lemma.

Lemma 13.6. *Sia $f \in C^k(\mathbb{T})$, $k \ge 1$. Posto*

$$f_h(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \ , \tag{13.6}$$

si ha $\lim_{h\to 0} f_h = f'$ in C^{k-1}.

Dimostrazione. Si ha

$$f_h(t) - f'(t) = \frac{1}{h}\int_0^h f'(t+s)\, ds - f'(t) = \frac{1}{h}\int_0^h \big(f'(t+s) - f'(t)\big)\, ds \ ,$$

e, per $j \le k-1$,

$$f_h^{(j)}(t) - f^{(j+1)}(t) = \frac{1}{h}\int_0^h \big(f^{(j+1)}(t+s) - f^{(j+1)}(t)\big)\, ds \ .$$

Quindi

$$\|f_h^{(j)} - f^{(j+1)}\|_\infty \le \frac{1}{h}\int_0^h \big\|\tau_{-s} f^{(j+1)} - f^{(j+1)}\big\|_\infty\, ds \ .$$

Per la continuità uniforme delle f^{j+1}, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|s| < \delta \Longrightarrow \big\|\tau_s f^{(j+1)} - f^{(j+1)}\big\|_\infty < \varepsilon$$

per $j \le k-1$. $\square$

Dimostrazione della Proposizione 13.5. Sia $\Phi \in \mathcal{D}'_k$. Allora, se f_h è data dalla (13.6),

$$\begin{aligned}\frac{\Phi * f(t+h) - \Phi * f(t)}{h} - \Phi * f'(t) &= \Phi * (f_h - f')(t) \\ &= \big\langle \Phi, \tau_t (f_h - f')\check{\ }\big\rangle \ ,\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Phi * f(t+h) - \Phi * f(t)}{h} - \Phi * f'(t)\right| &\le \|\Phi\|_{\mathcal{D}'_k} \big\|\tau_t (f_h - f')\check{\ }\big\|_{C^k} \\ &= \|\Phi\|_{\mathcal{D}'_k} \|f_h - f'\|_{C^k} \ .\end{aligned}$$

Essendo $f \in C^{k+1}(\mathbb{T})$, segue dal Lemma 13.6 che $\Phi * f$ è derivabile e che $\Phi * f(t) = \Phi * f'(t)$. Per l'altra uguaglianza, basta osservare che

$$\Phi' * f(t) = \langle \Phi', \tau_t \check{f}\rangle = -\langle \Phi, (\tau_t \check{f})'\rangle \ ,$$

e che

$$\frac{d}{du}\tau_t\check{f}(u) = \frac{d}{du}f(t-u) = -f'(t-u) = -\tau_t(f')\check{}(u) \ .$$

Reiterando, si ha $(\Phi * f)^{(j)} = \Phi * f^{(j)}$ per ogni j. Quindi

$$\big|(\Phi * f)^{(j)}(t)\big| \le \|\Phi\|_{\mathcal{D}'_k}\|f^{(j)}\|_{C^k} \ ,$$

da cui segue la (13.5). $\square$

La dimostrazione prova che, più in generale, se $\Phi \in \mathcal{D}'_k(\mathbb{T})$ e $f \in C^{k+m}(\mathbb{T})$, allora $\Phi * f$ è in $C^m(\mathbb{T})$.

Vogliamo ora definire la convoluzione di due distribuzioni. Per fare ciò osserviamo che se f, g, h sono tre funzioni, diciamo continue, su $\mathbb{T}$, vale l'identità

$$\int_{\mathbb{T}}(f * g)(t)h(t)\, dt = \int_{\mathbb{T}} f(t)(\check{g} * h)(t)\, dt \ .$$

Definizione. *Siano $\Phi, \Psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$. La convoluzione $\Phi * \Psi$ è la distribuzione data da*

$$\langle \Phi * \Psi, f\rangle = \langle \Phi, \check{\Psi} * f\rangle \ , \tag{13.7}$$

dove $\check{\Psi}$ è la distribuzione tale che

$$\langle \check{\Psi}, f\rangle = \langle \Psi, \check{f}\rangle \ . \tag{13.8}$$

Perché questa sia una buona definizione, bisogna verificare che il funzionale definito dalla (13.7) dipenda con continuità da f. Ma questo segue dalla (13.5), in quanto, se Φ è di ordine k e Ψ di ordine m,

$$\big|\langle \Phi, \check{\Psi} * f\rangle\big| \le \|\Phi\|_{\mathcal{D}'_k}\|\check{\Psi} * f\|_{C^k} \le \|\Phi\|_{\mathcal{D}'_k}\|\Psi\|_{\mathcal{D}'_m}\|f\|_{C^{k+m}} \ .$$

Proposizione 13.7. *Vale l'identità*

$$\widehat{\Phi * \Psi}(n) = \hat{\Phi}(n)\hat{\Psi}(n) \ .$$

Dimostrazione. Si ha

$$\widehat{\Phi * \Psi}(n) = \langle \Phi * \Psi, e_{-n}\rangle = \langle \Phi, \check{\Psi} * e_{-n}\rangle \ .$$

Ma

$$\begin{aligned}
\check{\Psi} * e_{-n}(t) &= \langle \check{\Psi}, \tau_t(e_{-n})\check{}\rangle \\
&= \langle \check{\Psi}, \tau_t e_n\rangle \\
&= e^{-int}\langle \check{\Psi}, e_n\rangle \\
&= e^{-int}\langle \Psi, e_{-n}\rangle \\
&= \hat{\Psi}(n)e^{-int} \ .
\end{aligned}$$

Quindi

$$\widehat{\Phi * \Psi}(n) = \hat{\Psi}(n)\langle \Phi, e_{-n}\rangle = \hat{\Psi}(n)\hat{\Phi}(n) \ .$$

Per il Teorema di unicità (Proposizione 12.3) si ha la tesi. $\square$

Questo risultato fornisce il modo più semplice per verificare quanto segue.

Corollario 13.8. *La convoluzione tra distribuzioni gode delle proprietà commutativa e associativa.*

Cè un altro modo di definire la convoluzione tra due distribuzioni, del tutto analogo a quello con cui è stata definita la convoluzione tra misure. Esso utilizza la nozione di prodotto tensoriale di due distribuzioni. Indichiamo il procedimento, lasciando le dimostrazioni per esercizio.

Lemma 13.9. *Sia $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ e sia $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Indichiamo con $f_u(t) = f(t,u)$. La funzione*

$$g(u) = \langle \Phi, f_u \rangle$$

è in $C^\infty(\mathbb{T})$ e, per ogni k,

$$\|g\|_{C^k} \leq \|\Phi\|_{\mathcal{D}'_m} \|f\|_{C^{\max\{k,m\}}} \ .$$

Definizione. *Siano $\Phi, \Psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$. La distribuzione $\Phi \times \Psi$ (indicata anche con $\Phi \otimes \Psi$) su $\mathbb{T}^2$ è definita da*

$$\langle \Phi \times \Psi, f \rangle = \langle \Psi, g \rangle = \big\langle \Psi, \langle \Phi, f_u \rangle \big\rangle \ .$$

Il Lemma 13.9 garantisce che questa è una buona definizione.

Proposizione 13.10. *Data $f \in C^\infty(\mathbb{T})$, sia $\tilde{f}(t,u) = f(t+u)$. Allora, se $\Phi, \Psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$,*

$$\langle \Phi * \Psi, f \rangle = \langle \Phi \times \Psi, \tilde{f} \rangle \ .$$

La dimostrazione più semplice consiste nel verificare che

$$\langle \Phi \times \Psi, \widetilde{e_{-n}} \rangle = \hat{\Phi}(n) \hat{\Psi}(n) \ .$$

14. Convolutori e moltiplicatori di $L^p(\mathbb{T})$

La definizione degli operatori di traslazione τ_u, che abbiamo già introdotto per funzioni su $\mathbb{T}$, può essere estesa a distribuzioni, ponendo

$$\langle \tau_u \Phi, f \rangle = \langle \Phi, \tau_{-u} f \rangle \ , \tag{14.1}$$

o anche

$$\tau_u \Phi = \Phi * \delta_u \ .$$

Come per le funzioni, vale la regola

$$\widehat{\tau_u \Phi}(n) = e^{-inu} \hat{\Phi}(n) \ . \tag{14.2}$$

Sullo spazio $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$ delle distribuzioni sul toro introduciamo la topologia debole indotta dalla dualità con $C^\infty(\mathbb{T})$. In particolare diremo che una successione $\{\Phi_n\}$ di distribuzioni converge a Φ *nel senso delle distribuzioni* se per ogni $f \in C^\infty(\mathbb{T})$

$$\lim_{n \to \infty} \langle \Phi_n, f \rangle = \langle \Phi, f \rangle \ .$$

Consideriamo ora un operatore lineare T definito su $C^\infty(\mathbb{T})$ a valori in $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$, che commuti con le traslazioni e che sia continuo. Quest'ultima condizione equivale a dire che per ogni $g \in C^\infty(\mathbb{T})$ il funzionale lineare

$$f \in C^\infty(\mathbb{T}) \longmapsto \langle Tf, g \rangle$$

è continuo.

La condizione di continuità imposta su T è più debole della convergenza nelle varie topologie introdotte sugli spazi considerati finora (convergenza forte e debole in L^p, convergenza forte e debole-* in L^∞ e in M, ecc.). Per esempio, un operatore lineare, che commuti con le traslazioni, e continuo da $L^p(\mathbb{T})$ a $L^q(\mathbb{T})$ rientra in questa classe, a causa della continuità delle inclusioni $C^\infty(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$ e $L^q(\mathbb{T}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{T})$.

Lemma 14.1. *Sia T un operatore lineare definito su $C^\infty(\mathbb{T})$ a valori in $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$, continuo, e che commuti con le traslazioni. Esiste allora una e una sola $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ tale che $Tf = f * \Phi$ per ogni $f \in C^\infty(\mathbb{T})$.*

Dimostrazione. Sia $h_n = Te_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$. Allora $\tau_u h_n = T(\tau_u e_n) = e^{-inu} h_n$ per ogni $u \in \mathbb{T}$. Da questa identità, passando ai coefficienti di Fourier, si ricava che, per ogni $u \in \mathbb{T}$ e ogni $j \in \mathbb{Z}$,

$$e^{-iju} \hat{h}_n(j) = e^{-inu} \hat{h}_n(j) \ ,$$

per cui $\hat{h}_n(j) = 0$ se $j \neq n$. Quindi $Te_n = m_n e_n$.

Vogliamo dimostrare che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $m_n = O(n^k)$ per $n \to \pm\infty$. Dati un polinomio trigonometrico $P(t)$ e una funzione $g \in C^\infty(\mathbb{T})$, si ha

$$\begin{aligned} \langle TP, g \rangle &= \sum_n \hat{P}(n) \langle Te_n, g \rangle \\ &= \sum_n \hat{P}(n) m_n \hat{g}(-n) \ . \end{aligned}$$

Segue dal Lemma 12.5 che, se $f \in C^\infty(\mathbb{T})$, la sua serie di Fourier converge a f uniformemente con tutte le sue derivate, e dunque nella topologia di $C^\infty(\mathbb{T})$. Quindi

$$
\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle &= \lim_{N\to\infty} \langle T\big(S_N[f]\big), g\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\le N} \hat f(n) m_n \hat g(-n) \ .
\end{aligned}
\tag{14.3}
$$

Sia ora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una successione a termini positivi a decrescenza rapida. Allora anche $\{\sqrt{a_n}\}$ è a decrescenza rapida, e, sempre per il Lemma 12.5, esistono $f, g \in C^\infty(\mathbb{T})$ tali che $|\hat f(n)| = |\hat g(-n)| = \sqrt{a_n}$ e $\hat f(n) m_n \hat g(-n) = |m_n| a_n$ per ogni n. Per la (14.3), la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |m_n| a_n$$

converge.

Se, per assurdo, non fosse $m_n = O(n^k)$ per nessun k, si troverebbero induttivamente indici $n_k > 0$ tali che $n_{k+1} > n_k$ e $|m_{n_k}| > n_k^k$ per ogni $k > 0$. Avremmo allora che la successione

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n_k^k} & \text{se } n = n_k \ , \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

sarebbe a decrescenza rapida e al tempo stesso la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |m_n| a_n$ divergerebbe, il che è assurdo.

Sapendo che $m_n = O(n^k)$ per qualche k, il Teorema 12.6 implica l'eistenza di una e una sola $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ tale che $\hat\Phi(n) = m_n$ per ogni n.

Dalla (14.3) otteniamo che, per ogni $f, g \in C^\infty(\mathbb{T})$,

$$\langle Tf, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat f(n) \hat\Phi(n) \hat g(-n) = \langle f * \Phi, g\rangle \ ,$$

da cui $Tf = f * \Phi$. $\square$

Una semplice osservazione: si noti che l'immagine di $C^\infty(\mathbb{T})$ secondo T è contenuta in $C^\infty(\mathbb{T})$.

La distribuzione Φ si chiama il *convolutore* dell'operatore T, e $m = \hat\Phi$ il suo *moltiplicatore di Fourier.* Vale l'identità

$$\widehat{Tf}(n) = m_n \hat f(n) \ .$$

La definizione di moltiplicatore di L^p è stata data nel paragrafo 8 per $p < \infty$. Essa si estende senza modifiche anche a $p = \infty$, richiedendo che

$$\|T_m P\|_p \le C \|P\|_p \tag{14.4}$$

con $C > 0$ per ogni polinomio trigonometrico P.

Definizione. *Si chiama* convolutore di $L^p(\mathbb{T})$ *una distribuzione* Φ *tale che* $m = \{\hat{\Phi}(n)\}$ *sia un moltiplicatore di* $L^p(\mathbb{T})$.

Indichiamo con M_p (risp. con C_p) lo spazio dei moltiplicatori (risp. convolutori) di $L^p(\mathbb{T})$. I due spazi sono ovviamente isomorfi, attraverso la corrispondenza $\Phi \in C_p \mapsto \{\hat{\Phi}(n)\} \in M_p$.

Ricordiamo che la norma in M_p è stata definita come

$$\|m\|_{M_p} = \sup_{P\in\mathcal{P}\setminus\{0\}} \frac{\|T_m P\|_p}{\|P\|_p} \ .$$

Analogamente poniamo $\|\Phi\|_{C_p} = \|\{\hat{\Phi}(n)\}\|_{M_p}$.

Abbiamo già visto che, se $1 \le p < \infty$, la condizione (14.4) implica che T_m si estende con continuità a un operatore limitato da $L^p(\mathbb{T})$ in sé. Se $p = \infty$, T_m si estende a un operatore limitato da $C(\mathbb{T})$ in sé. Vedremo che in realtà T_m può essere esteso a $L^\infty(\mathbb{T})$ rimanendo continuo.

Lemma 14.2. M_p *è un'algebra di Banach.*

Dimostrazione. Se $p < \infty$, l'applicazione $F : m \mapsto T_m$ fornisce un'inclusione isometrica di M_p nello spazio di Banach $\mathcal{L}\big(L^p(\mathbb{T}), L^p(\mathbb{T})\big)$ degli operatori lineari continui da $L^p(\mathbb{T})$ in sé. Verifichiamo che l'immagine di F è chiusa.

Sia allora $\{T_{m_n}\}$ una successione convergente a $T \in \mathcal{L}\big(L^p(\mathbb{T}), L^p(\mathbb{T})\big)$. Poiché i T_{m_n} commutano con le traslazioni,

$$T(\tau_u f) = \lim_{n\to\infty} T_{m_n}(\tau_u f) = \lim_{n\to\infty} \tau_u(T_{m_n} f) = \tau_u(Tf) \ .$$

Per il Lemma 14.1 esiste una successione temperata m tale che $T = T_m$, ed essendo T continuo, si ha $m \in M_p$.

Inoltre, se $m, m' \in M_p$, anche $mm' \in M_p$ perché $T_m T_{m'} = T_{mm'}$, e $\|mm'\|_{M_p} = \|T_m T_{m'}\| \le \|T_m\|\|T_{m'}\| = \|m\|_{M_p}\|m'\|_{M_p}$.

Per $p = \infty$ basta sostituire $C(\mathbb{T})$ a $L^p(\mathbb{T})$. $\square$

Il Lemma 8.1 dice che se p, p' sono esponenti coniugati, con $1 < p, p' < \infty$, allora $M_p = M_{p'}$ con uguaglianza delle norme. Vediamo ora che lo stesso vale per $p, p' = 1, \infty$, caso in cui ulteriori precisazioni sono necessarie, in quanto intervengono più spazi interessanti.

Proposizione 14.3. $M_1 = M_\infty$ *con uguaglianza di norme. Se* $m \in M_1$, T_m *è limitato da ciascuno degli spazi* $L^1(\mathbb{T})$, $C(\mathbb{T})$, $M(\mathbb{T})$, $L^\infty(\mathbb{T})$ *in sé, con norma uguale a* $\|m\|_{M_1}$ *in tutti questi casi.*

Dimostrazione. Siano P, Q polinomi trigonometrici. Data una successione m, si ha

$$\langle T_m P, \check{Q}\rangle = \sum m(n)\hat{P}(n)\hat{Q}(n) = \langle T_m Q, \check{P}\rangle \ .$$

Quindi

$$\begin{aligned} \|m\|_{M_1} &= \sup_{P\in\mathcal{P}\setminus\{0\}} \frac{\|T_m P\|_1}{\|P\|_1} \\ &= \sup_{P,Q\in\mathcal{P}\setminus\{0\}} \frac{\big|\langle T_m P, \check{Q}\rangle\big|}{\|P\|_1\|Q\|_\infty} = \sup_{P,Q\in\mathcal{P}\setminus\{0\}} \frac{\big|\langle T_m Q, \check{P}\rangle\big|}{\|P\|_1\|Q\|_\infty} \\ &= \sup_{Q\in\mathcal{P}\setminus\{0\}} \frac{\|T_m Q\|_\infty}{\|Q\|_\infty} \\ &= \|m\|_{M_\infty} \ . \end{aligned}$$

Questo dimostra la prima parte dell'enunciato.

Per la seconda, procediamo come nella dimostrazione del Lemma 8.1, ma con un po' più di formalismo. Stabiliamo corrispondenze biunivoche tra $L^1(\mathbb{T})^*$ e $L^\infty(\mathbb{T})$ come segue: alla funzione $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ associamo il funzionale

$$\varphi_g(f) = \langle g, \check{f} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(-t) g(t)\, dt \ . \tag{14.5}$$

Si vede facilmente che $\|\varphi_g\| = \|g\|_\infty$.

Analogamente identifichiamo $C(\mathbb{T})^*$ con $M(\mathbb{T})$ ponendo

$$\varphi_\mu(f) = \langle \mu, \check{f} \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(-t)\, d\mu(t) \ , \tag{14.6}$$

dove $\mu \in M(\mathbb{T})$ e $f \in C(\mathbb{T})$. Anche qui, $\|\varphi_\mu\| = \|\mu\|_1$.

Sia ora $m \in M_1$, e sia Φ il corrispondente convolutore, così che $T_m f = f * \Phi$.

Per la densità dei polinomi trigonometrici in $L^1(\mathbb{T})$, T_m è limitato da $L^1(\mathbb{T})$ in sé. L'operatore duale T_m^* è allora limitato da $L^\infty(\mathbb{T})$ in sé e, per la (14.5),

$$\langle T_m^* g, \check{f} \rangle = \langle g, (T_m f)\check{\ } \rangle = \langle g, \check{f} * \check{\Phi} \rangle = \langle \Phi * g, \check{f} \rangle = \langle T_m g, \check{f} \rangle \ .$$

Quindi $T_m^* = T_m$ è continuo da $L^\infty(\mathbb{T})$ in sé.

Poiché T_m applica polinomi trigonometrici in polinomi trigonometrici, per densità esso applica funzioni continue in funzioni continue. Inoltre, come operatore da $C(\mathbb{T})$ in sé, sempre per densità, la sua norma è uguale alla norma di m in M_∞, e dunque a $\|m\|_{M_1}$.

Ripetendo il ragionamento precedente sulla base della (14.6), $T_m^* = T_m$ è continuo da $M(\mathbb{T})$ in sé con la stessa norma. $\square$

Come visto nel Corollario 8.2, segue dal Teorema di Riesz-Thorin che, se $m \in M_p$ con $1 \le p < 2$, allora $m \in M_q$ per ogni $q \in [p, p']$ e $\|m\|_{M_q} \le \|m\|_{M_p}$.

I moltiplicatori di $L^2(\mathbb{T})$ sono stati identificati nel paragrafo 1 come le successioni $m \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, con $\|m\|_{M_2} = \|m\|_\infty$. Per $p = 1$ è possibile invece descrivere in modo semplice lo spazio $C_1 (= C_\infty)$ dei convolutori. Infatti si ha il seguente risultato.

Teorema 14.4. *$C_1 = M(\mathbb{T})$ con uguaglianza di norme.*

Dimostrazione. Data $\mu \in M(\mathbb{T})$, consideriamo l'operatore $T\nu = \nu * \mu$, definito su $M(\mathbb{T})$. Per la Proposizione 12.1, $\|T\nu\|_1 \le \|\mu\|_1 \|\nu\|_1$. Dunque $\mu \in C_1$ e $\|\mu\|_{C_1} \le \|\mu\|_1$.

D'altra parte,

$$\|\mu\|_1 = \|\mu * \delta_0\|_1 \le \|\mu\|_{C_1} \|\delta_0\|_1 = \|\mu\|_{C_1} \ ,$$

per cui $\|\mu\|_{C_1} = \|\mu\|_1$.

Per dimostrare l'inclusione $C_1 \subseteq M(\mathbb{T})$, sia $\Phi \in C_1$. Per la Proposizione 14.3, $\Phi * \mu \in M(\mathbb{T})$ per ogni $\mu \in M(\mathbb{T})$. In particolare, $\Phi * \delta_0 = \Phi \in M(\mathbb{T})$. $\square$

Non esiste una descrizione semplice dei moltiplicatori (o dei convolutori) di $L^p(\mathbb{T})$ per $p \neq 1, 2, \infty$.

Concludiamo con un esempio su cui abbiamo già lavorato precedentemente. Sappiamo che il moltiplicatore $m_n = -i\,\mathrm{sgn}\, n$ è in M_p per $1 < p < \infty$. Vogliamo individuare il convolutore Φ corrispondente.

Se $f \in C^\infty(\mathbb{T})$,

$$\begin{aligned}\langle \Phi, f\rangle &= -i\sum_{n\neq 0} \mathrm{sgn}\, n \hat{f}(-n)\\ &= \lim_{r\to 1} -i\sum_{n\neq 0} \mathrm{sgn}\, n r^{|n|}\hat{f}(-n)\\ &= \lim_{r\to 1}\langle Q_r, f\rangle\ ,\end{aligned}$$

dove Q_r è il nucleo di Poisson coniugato

$$Q_r(t) = \frac{2r\sin t}{1+r^2-2r\cos t} = \frac{d}{dt}\log(1+r^2-2r\cos t)\ .$$

Quindi

$$\begin{aligned}\langle \Phi, f\rangle &= \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{d}{dt}\log(1+r^2-2r\cos t) f(t)\, dt\\ &= -\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\log(1+r^2-2r\cos t) f'(t)\, dt\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\log 2(1-\cos t) f'(t)\, dt\ .\end{aligned}$$

Quindi Φ è la derivata distribuzionale di $\log 2(1-\cos t)$. Essa si determina in modo analogo a quanto visto nell'Esempio 3 del paragrafo 12, e si ottiene una distribuzione a valore principale:

$$\Phi = p.v. \frac{\sin t}{1-\cos t} = p.v. \cot\frac{t}{2}\ .$$

15. Convoluzione in $\mathbb{R}^n$

I metodi dell'analisi di Fourier sul toro possono essere utilizzati anche in altri contesti. L'ambito classico più rilevante in cui l'analisi di Fourier ha avuto maggiori applicazioni è $\mathbb{R}^n$[2].

La misura di Lebesgue m su $\mathbb{R}^n$ ha la proprietà di essere invariante per traslazioni: $m(x+E) = m(E)$ per ogni E misurabile e ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Analogamente a quanto visto sul toro, m è, a meno di costanti moltiplicative, l'unica misura di Borel regolare con questa proprietà.

La misura m gode di un'ulteriore proprietà: dato un insieme misurabile E, e posto $\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}$ per $\lambda > 0$, anche λE è misurabile e

$$m(\lambda E) = \lambda^n m(E) \ . \tag{15.1}$$

Questa identità è ovvia se E è un prodotto cartesiano di n intervalli, e si estende quindi a ogni insieme misurabile.

Saremo principalmente interessati alla limitatezza di operatori tra spazi L^p o su spazi di funzioni continue (o di classe C^k ecc.). Naturalmente bisogna tener conto delle complicazioni dovute al fatto che si lavora su uno spazio di misura infinita e non compatto.

Per esempio, gli spazi $L^p(\mathbb{R}^n)$ non sono inclusi l'uno nell'altro (in particolare non sono tutti inclusi in L^1). Tuttavia è utile ricordare la seguente proprietà.

Lemma 15.1. *Siano $p_0 < p < p_1$ tre esponenti in $[1, \infty]$. Ogni funzione $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ è la somma di due funzioni f_0 e f_1, con $f_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ e $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Sia $E = \{x : |f(x)| > 1\}$, e poniamo $f_0 = f\chi_E$, $f_1 = f\chi_{^cE}$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_0(x)|^{p_0}\, dx = \int_E |f(x)|^{p_0}\, dx \le \int_E |f(x)|^p\, dx < \infty \ ,$$

e analogamente

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^{p_1}\, dx = \int_{^cE} |f(x)|^{p_1}\, dx \le \int_{^cE} |f(x)|^p\, dx < \infty \ . \qquad \square$$

Un'altra complicazione è data dal fatto che ci sono più spazi di Banach di funzioni continue limitate (con la norma uniforme) che sono significativi.

Uno di questi è lo spazio $C_0(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni continue che si annullano all'infinito. Esso è propriamente contenuto nello spazio $C_{ub}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni uniformemente continue e limitate, che è a sua volta propriamente contenuto nello spazio $C_b(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni continue e limitate.

Indicheremo poi con $C_c(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto, che è uniformemente denso in $C_0(\mathbb{R}^n)$.

Date una funzione f e $h \in \mathbb{R}^n$, la traslata $\tau_h f$ è data da

$$\tau_h f(x) = f(x-h) \ .$$

[2] $\mathbb{T}$ e $\mathbb{R}^n$ sono due esempi di gruppi abeliani localmente compatti. Un buon riferimento su analisi di Fourier su g.a.l.c. è il libro di W. Rudin, Fourier Analysis on Groups.

Proposizione 15.2. *Se* $1 \le p < \infty$ *e* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *allora* $\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$. *Se* $f \in C_{ub}(\mathbb{R}^n)$, *allora* $\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_\infty = 0$.

Dimostrazione. Sia g continua a supporto compatto. Per la continuità uniforme di g, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta \in (0,1)$ tale che, se $|h| < \delta$, $\|\tau_h g - g\|_\infty < \varepsilon$. Se il supporto di g è contenuto nella palla B_r di centro l'origine e raggio r, il supporto di $\tau_h g - g$ è contenuto nella palla B_{r+1}. Allora

$$\|\tau_h g - g\|_p \le \left(\int_{B_{r+1}} \big|\tau_h g(x) - g(x)\big|^p \, dx \right)^{1/p} < \varepsilon m(B_{r+1})^{1/p} .$$

Quindi $\lim_{h\to 0} \|\tau_h g - g\|_p = 0$.

Sia ora $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tale che $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Sia $\delta > 0$ tale che $\|\tau_h g - g\|_p < \varepsilon$ per $|h| < \delta$. Allora $\|\tau_h f - f\|_p < 3\varepsilon$ per la disuguaglianza triangolare.

L'ultima affermazione è diretta conseguenza della definizione di continuità uniforme. □

La convoluzione di due funzioni f e g definite su $\mathbb{R}^n$ è data da

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \, dy . \tag{15.2}$$

Perché questa formula abbia senso, bisogna imporre delle condizioni su f e g. Enunciamo i fatti fondamentali, tralasciando quelle dimostrazioni che ricalcano quanto visto sul toro.

Proposizione 15.3.

(1) *Se* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *l'integrale* (15.2) *converge assolutamente per quasi ogni* x. *Inoltre* $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

(2) *La convoluzione gode della proprietà commutativa.*

(3) *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, *l'integrale* (15.2) *converge assolutamente per ogni* x. *Inoltre* $f * g \in C_{ub}(\mathbb{R}^n)$, *e*

$$\|f * g\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty .$$

(4) *Se* $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, *allora l'integrale* (15.2) *converge assolutamente per ogni* x. *Inoltre* $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\|f * g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_{p'} .$$

(5) *Se* $1 \le p, q \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$, *l'integrale* (15.2) *converge assolutamente per quasi ogni* x. *Inoltre* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, *con* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, *e*

$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q ;$$

(6) *in tutti i casi in cui la convoluzione di due funzioni* f *e* g *è definita,* $\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$.

Dimostrazione. La (1) e la (2) si dimostrano come sul toro.

Nella (3) e nella (4), la continuità uniforme di $f * g$ si deduce facilmente dalle seguenti maggiorazioni:

$$\begin{aligned}
|f * g(x+h) - f * g(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x+h-y) - f(x-y)\big) g(y)\, dy\right| \\
&\leq \|g\|_{p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x+h-y) - f(x-y)\right|^p dy\right)^{1/p} \\
&= \|g\|_{p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|f(t+h) - f(t)\right|^p dy\right)^{1/p} \\
&= \|g\|_{p'} \|\tau_{-h} f - f\|_p \ .
\end{aligned}$$

Nella (4) la novità è data dall'affermazione che $f * g$ tende a zero all'infinito. Dato $\varepsilon > 0$, sia $R > 0$ tale che

$$\int_{|x|>R} |f(x)|^p\, dx < \varepsilon^p \ , \qquad \int_{|x|>R} |g(x)|^{p'}\, dx < \varepsilon^{p'} \ .$$

Allora

$$\begin{aligned}
|f * g(x)| &\leq \int_{|x|<R} |f(x-y)||g(y)|\, dy + \int_{|x|>R} |f(x-y)||g(y)|\, dy \\
&\leq \left(\int_{|x|<R} |f(x-y)|^p\, dy\right)^{1/p} \left(\int_{|x|<R} |g(y)|^{p'}\, dy\right)^{1/p'} \\
&\quad + \left(\int_{|x|>R} |f(x-y)|^p\, dy\right)^{1/p} \left(\int_{|x|>R} |g(y)|^{p'}\, dy\right)^{1/p'} \\
&\leq \|g\|_{p'} \left(\int_{|x-t|<R} |f(t)|^p\, dy\right)^{1/p} + \varepsilon \|f\|_p \ .
\end{aligned}$$

Se ora prendiamo x tale che $|x| > 2R$, $|x-t| < R$ implica $|t| > R$, per la disuguaglianza triangolare. Quindi,

$$\int_{|x-t|<R} |f(t)|^p\, dy \leq \int_{|t|>R} |f(t)|^p\, dy < \varepsilon^p \ ,$$

e in conclusione, $|f * g(x)| < \big(\|f\|_p + \|g\|_{p'}\big)\varepsilon$.

La (5) si dimostra utilizzando il Teorema di Riesz-Thorin, come sul toro.

Per la (6), osserviamo che l'integrale (15.2) è esteso all'insieme degli y tali che $y \in \operatorname{supp} g$ e $x - y \in \operatorname{supp} f$. Se $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, tale insieme è vuoto, e dunque $f * g(x) = 0$. $\square$

Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$, la convoluzione di una funzione in $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $L^q(\mathbb{R}^n)$ potrebbe non risultare definita per nessun x. Vediamo un esempio in una dimensione.

Prendiamo le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{1}{p}+\varepsilon}} \ , \qquad g(x) = \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}}$$

sono rispettivamente in $L^p(\mathbb{R})$ e in $L^q(\mathbb{R})$ per ogni $\varepsilon > 0$. Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$, si può scegliere ε in modo che la somma dei due esponenti, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + 2\varepsilon = \alpha$, sia minore o uguale a 1.

Verifichiamo che, in tal caso, l'integrale (15.2) diverge per ogni $x \in R$. Se $|y| > 2|x|$, si ha $|x - y| \geq |y| - |x| > |x|$. Quindi

$$\int_{|y|>2|x|} \frac{1}{(1+|x-y|)^{\frac{1}{p}+\varepsilon}} \frac{1}{(1+|y|)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}}\, dy \leq \int_{|y|>2|x|} \frac{1}{(1+|y|)^{\alpha}}\, dy = \infty \ .$$

Per generalizzare questo esempio a n dimensioni, osserviamo preliminarmente che se due funzioni φ e ψ in n variabili hanno la forma

$$\varphi(x) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\cdots\varphi_n(x_n)\ , \qquad \psi(x) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\cdots\psi_n(x_n)\ ,$$

allora

$$\varphi * \psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1 * \psi_1(x_1)\varphi_2 * \psi_2(x_2)\cdots\varphi_n * \psi_n(x_n)\ ,$$

dove la convoluzione a primo membro è in $\mathbb{R}^n$ e quelle a secondo membro sono in $\mathbb{R}$.

Allora basta prendere

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\ , \qquad G(x_1, \dots, x_n) = g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_n)\ ,$$

e notare che $F \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $f \in L^p(\mathbb{R})$ (e analogamente per G e g, $F * G$ e $f * g$). Le considerazioni svolte in una dimensione si ripetono dunque tali e quali.

Le identità approssimate in $\mathbb{R}^n$ si definiscono come sul toro. Una successione $\{K_n\}$ di funzioni integrabili[3] è un'identità approssimata se valgono le condizioni:

(1) esiste una costante $C > 0$ tale che $\|K_n\|_1 \leq C$ per ogni n;
(2) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} K_n(x)\, dx = 1$;
(3) per ogni $\delta > 0$, $\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\delta} |K_n(x)|\, dx = 0$.

Come sul toro, queste condizioni implicano che se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $1 \leq p < \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f * K_n\|_p = 0\ .$$

L'uguaglianza

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f * K_n\|_\infty = 0$$

vale per $f \in C_{ub}(\mathbb{R}^n)$.

Un modo semplice (e molto comune) per costruire identità approssimate in $\mathbb{R}^n$ è il seguente. Si prenda una funzione $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$ e si ponga

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\ , \tag{15.3}$$

per $\varepsilon > 0$. Le tre proprietà delle identità approssimate sono allora verificate dalla famiglia $\{\varphi_\varepsilon\}$ per $\varepsilon \to 0$. Infatti

(1) $\|\varphi_\varepsilon\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n}\Big|\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x')|\, dx' = \|\varphi\|_1$;

[3] Prendiamo una successione di funzioni solo per comodità di notazioni. Presto lavoreremo con identità approssimate dipendenti da un parametro ε che tende a 0.

(2) $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x')\,dx' = 1$;

(3) si ha

$$\begin{aligned}\int_{|x|>\delta} \big|\varphi_\varepsilon(x)\big|\,dx &= \int_{|x|>\delta} \frac{1}{\varepsilon^n}\Big|\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big|\,dx \\ &= \int_{|x|>\frac{\delta}{\varepsilon}} \big|\varphi(x')\big|\,dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \big|\varphi(x')\big|\,dx' - \int_{|x|<\frac{\delta}{\varepsilon}} \big|\varphi(x')\big|\,dx' ,\end{aligned}$$

e il suo limite per $\varepsilon \to 0$ è nullo.

È spesso conveniente utilizzare identità approssimate che siano C^∞ a supporto compatto. Un esempio di funzione C^∞ su $\mathbb{R}^n$ avente come supporto la palla unitaria è la seguente:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} . \end{cases}$$

Dividendo φ per un'opportuna costante positiva (il suo integrale su $\mathbb{R}^n$) si ottiene una funzione $\tilde{\varphi}$ che, oltre ad essere C^∞ con supporto compatto, ha integrale uguale a 1. Le corrispondenti $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ formano allora un'identità approssimata.

L'importanza di avere a disposizione identità approssimate C^∞ a supporto compatto dipende dal seguente lemma.

Una funzione f misurabile su $\mathbb{R}^n$ si dice *localmente integrabile* se la sua restrizione a ogni palla è integrabile sulla palla stessa. Per esempio, le funzioni in $L^p(\mathbb{R}^n)$ sono localmente integrabili per ogni p.

Se f è localmente integrabile e $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ha supporto compatto, la convoluzione $f * g$ è ben definita in ogni punto e continua.

Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, indichiamo con $\partial^\alpha f$ la derivata

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1}\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^{\alpha_2}\cdots\Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\alpha_n} f .$$

Lemma 15.4. *Se f è localmente integrabile e g è C^∞ a supporto compatto, allora $f * g$ è C^∞ e*

$$\partial^\alpha f * g = f * (\partial^\alpha g) , \tag{15.4}$$

per ogni multiindice α.

Dimostrazione. Basta dimostrare che $f * g$ ha derivate del primo ordine e verificare per queste la (15.4). Il resto segue per induzione.

Fissato x_0, presi un incremento h e un versore e_j, si ha

$$\begin{aligned}&\frac{f * g(x_0 + he_j) - f * g(x_0)}{h} - f * (\partial_j g)(x_0) = \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\frac{g(x_0 + he_j - y) - g(x_0 - y)}{h} - \partial_j g(x_0 - y)\right) dy \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_0 - t)\left(\frac{g(t + he_j) - g(t)}{h} - \partial_j g(t)\right) dt .\end{aligned}$$

Sia B_r una palla di centro 0 contenente il supporto di g. Se $|h| < 1$, l'ultimo integrando è nullo per t esterno alla palla B_{r+1}. Inoltre, applicando due volte il Teorema del valor medio,

$$\left|\frac{g(t+he_j)-g(t)}{h} - \partial_j g(t)\right| = \left|\partial_j g(t+\theta h e_j) - \partial_j g(t)\right| < |h|\partial_j^2 g(t+\theta' h e_j) \ ,$$

per opportuni valori θ, θ' con $0 < \theta' < \theta < 1$. Se $C = \|\partial_j^2 g\|_\infty$, si ha allora

$$\left|\frac{f*g(x_0+he_j)-f*g(x_0)}{h} - f*(\partial_j g)(x_0)\right| < C|h|\int_{B_{r+1}} \left|f(x_0-t)\right| dt \ ,$$

da cui segue che

$$\partial_j(f*g)(x_0) = f*(\partial_j g)(x_0) \ . \qquad \square$$

Corollario 15.5. *Lo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni C^∞ a supporto compatto è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 \le p < \infty$ e uniformemente denso in $C_0(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, esiste $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tale che $\|f-g\|_p < \varepsilon$. Sia $\{\varphi_\delta\}$ un'identità approssimata C^∞ a supporto compatto. Esiste allora δ tale che $\|g - g*\varphi_\delta\|_p < \varepsilon$. Ma $g*\varphi_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Corollario 15.6. *Siano K compatto e A aperto in $\mathbb{R}^n$, con $K \subset A$. Esiste allora una funzione $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $0 \le f \le 1$, $\operatorname{supp} f \subset A$, e $f = 1$ su K.*

Dimostrazione. Sia $2\delta < d(K, {}^cA)$, e sia $K_\delta = \{x : d(x,K) \le \delta\}$. Allora K_δ è compatto e $d(K_\delta, {}^cA) > \delta$. Sia ora $\varphi \ge 0$ una funzione C^∞, con supporto contenuto nella palla B_δ di centro l'origine e raggio δ, e con integrale uguale a 1.

Per il Lemma 15.4, $f = \chi_{K_\delta} * \varphi$ è C^∞. Per la (6) della Proposizione 15.3, il suo supporto è contenuto in $K_\delta + B_\delta$, che è compatto e contenuto in A. Inoltre $\chi_{K_\delta} * \varphi \ge 0$, $\chi_{K_\delta} * \varphi(x) \le \|\chi_{K_\delta}\|_\infty \|g\|_1 = 1$. Infine, se $x \in K$, $x - y \in K_\delta$ per ogni $y \in B_\delta$, per cui

$$f(x) = \int_{B_\delta} \chi_{K_\delta}(x-y)\varphi(y)\, dy = 1 \ . \qquad \square$$

16. Trasformata di Fourier

Dati due vettori $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, indichiamo con $\xi \cdot x$ il loro prodotto scalare

$$\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n \ .$$

Definizione. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si chiama* trasformata di Fourier *di f la funzione, definita su $\mathbb{R}^n$,*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot x}\, dx \ . \tag{16.1}$$

L'integrale nella (16.1) converge assolutamente. Inoltre

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \|f\|_1 \ , \tag{16.2}$$

per cui la funzione $\hat{f}$ è limitata.

Elenchiamo le principali proprietà formali della trasformata di Fourier.

Proposizione 16.1. *L'applicazione che associa a una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la sua trasformata di Fourier è lineare. Inoltre*

(1) $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$;
(2) *se $\check{f}(x) = f(-x)$, allora $\widehat{\check{f}}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$; in particolare la trasformata di Fourier di una funzione pari è pari e quella di una funzione dispari è dispari;*
(3) *se $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, allora $\widehat{f^*}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$;*
(4) $\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{ih\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$;
(5) $\widehat{e^{ih\cdot x} f}(\xi) = \hat{f}(\xi - h) = \tau_h \hat{f}(\xi)$;
(6) *se A è una applicazione lineare invertibile di $\mathbb{R}^n$ in sé, allora*

$$\widehat{f \circ A}(\xi) = |\det A|^{-1} \hat{f}({}^tA^{-1}\xi) \ ; \tag{16.3}$$

(7) *se f è C^1 a supporto compatto, allora per ogni j*

$$\widehat{\partial_j f}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi) \ ; \tag{16.4}$$

Dimostrazione. I primi cinque punti sono di facile verifica. La (16.3) si dimostra con il cambiamento di variabile $x = A^{-1}x'$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax) e^{-i\xi\cdot x}\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x') e^{-i\xi\cdot A^{-1}x'}\, dx' \\ &= (\det A)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x') e^{-i\, {}^tA^{-1}\xi\cdot x'}\, dx' \\ &= (\det A)^{-1} \hat{f}({}^tA^{-1}\xi) \ .\end{aligned}$$

Per la (16.4) si integra per parti in dx_j, con le altre variabili fissate. □

Il seguente risultato incorpora la verione del *Teorema di Riemann-Lebesgue* per integrali di Fourier.

Teorema 16.2. *Se $f \in L^1(\mathbb{T})$, allora $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Consideriamo la quantità

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-i(\xi+h)\cdot x}-e^{-i\xi\cdot x}\right||f(x)|\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ih\cdot x}-1||f(x)|\,dx\ .\end{aligned}$$

Poiché

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{|x|<r} |f(x)|\,dx\ ,$$

dato $\varepsilon>0$, esiste $r>0$ tale che $\int_{|x|>r}|f(x)|\,dx<\varepsilon$. Se $|h|<\varepsilon/r$ e $|x|\leq r$ si ha $|e^{-ih\cdot x}-1|\leq |h||x|<\varepsilon$. Allora, per $|h|<\varepsilon/r$,

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)| &< \varepsilon\int_{|x|<r}|f(x)|\,dx + 2\int_{|x|>r}|f(x)|\,dx \\ &< \big(\|f\|_1+2\big)\varepsilon\ .\end{aligned}$$

Quindi $\hat{f}$ è uniformemente continua. Consideriamo ora il sottospazio $C^1_c(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni C^1 a supporto compatto. Per il Corollario 15.5, esso è denso in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Per la (16.4) e la (16.2), si ha

$$|\xi_j||\hat{f}(\xi)| \leq \|\partial_j f\|_1\ ,$$

per cui, elevando al quadrato e sommando rispetto a j,

$$|\xi|^2|\hat{f}(\xi)|^2 \leq C\ ,$$

per una costante C dipendente da f, ma non da ξ. Quindi

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C'}{|\xi|}\ ,$$

e in particolare $\hat{f}(\xi)$ tende a 0 all'infinito.

Quindi l'applicazione lineare $\mathcal{F}$ che associa a f la sua trasformata di Fourier applica $C^1_c(\mathbb{R}^n)$ in $C_0(\mathbb{R}^n)$ ed è continua rispetto alle norme $\|\ \|_1$ sul dominio e $\|\ \|_\infty$ sul codominio. Poiché $C_0(\mathbb{R}^n)$ è completo, l'immagine di $L^1(\mathbb{R}^n)$ secondo $\mathcal{F}$ è pure contenuta in $C_0(\mathbb{R}^n)$. □

Corollario 16.3. *Se $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ ed f è integrabile con tutte le sue derivate fino all'ordine k, allora $\hat{f}(\xi) = o\big(|\xi|^{-k}\big)$ per $\xi\to\infty$.*

Dimostrazione. Estendiamo innanzitutto la (16.4) al caso in cui f è C^1 ed è integrabile insieme con le sue derivate prime.

Sia φ una funzione C^1 a supporto compatto tale che $\varphi(0)=1$, e sia $\varphi_r(x)=\varphi(x/r)$. Per il Teorema di convergenza dominata,

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\widehat{f\varphi_r}(\xi) &= \lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi\Big(\frac{x}{r}\Big)e^{-i\xi\cdot x}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\xi\cdot x}\,dx \\ &= \hat{f}(\xi)\ .\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty}\widehat{\partial_j(f\varphi_r)}(\xi) &= \lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_j(f\varphi_r)(x)e^{-i\xi\cdot x}\,dx \\
&= \lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_j f)(x)\varphi\Big(\frac{x}{r}\Big)e^{-i\xi\cdot x}\,dx \\
&\qquad + \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)(\partial_j\varphi)\Big(\frac{x}{r}\Big)e^{-i\xi\cdot x}\,dx\ .
\end{aligned}$$

Il primo addendo tende a $\widehat{\partial_j f}(\xi)$, sempre per convergenza dominata. L'integrale nel secondo addendo è limitato indipendentemente da r, per cui il secondo limite è zero. Quindi, usando la (16.4),

$$\widehat{\partial_j f}(\xi) = \lim_{r\to\infty}\widehat{\partial_j(f\varphi_r)}(\xi) = i\xi_j\lim_{r\to\infty}\widehat{f\varphi_r}(\xi) = i\xi_j\hat f(\xi)\ .$$

Se ora f è integrabile con le sue derivate fino all'ordine k, si vede induttivamente che per ogni multi-indice α di lunghezza $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le k$, si ha

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha\hat f(\xi)\ ,$$

dove $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1}\cdots(i\xi_n)^{\alpha_n}$. In particolare,

$$(i\xi_j)^k\hat f(\xi) = \widehat{\partial_j^k f}(\xi)\ ,$$

per cui

$$\lim_{\xi\to\infty}\xi_j^k\hat f(\xi) = 0\ ,$$

per ogni j. Prendendo i valori assoluti e sommando su j,

$$\lim_{\xi\to\infty}\Big(\sum_{j=1}^n|\xi_j|^k\Big)|\hat f(\xi)| = 0\ .$$

Posto $c_n = \min_{|\xi|=1}\sum_{j=1}^n|\xi_j|^k$ e $c_n' = \max_{|\xi|=1}\sum_{j=1}^n|\xi_j|^k$, segue facilmente che per ogni ξ

$$c_n|\xi|^k \le \sum_{j=1}^n|\xi_j|^k \le c_n'|\xi|^k\ .$$

Quindi

$$\lim_{\xi\to\infty}|\xi|^k|\hat f(\xi)| = 0\ ,$$

da cui si ha la tesi. □

Il risultato che segue riguarda invece la derivabilità di $\hat f$.

Corollario 16.4. *Se $f(x)$ e $|x|^k f(x)$ sono entrambe integrabili, allora $\hat f$ è di classe C^k e, per $|\alpha| \le k$,*

$$\partial^\alpha\hat f(\xi) = \mathcal{F}\big((-ix)^\alpha f\big)(\xi)\ .$$

Osserviamo che, se $|\alpha| \leq k$, la funzione $(-ix)^\alpha f(x)$ è integrabile. Infatti, per $|x| \leq 1$ si ha $\left|(-ix)^\alpha f(x)\right| \leq |f(x)|$, mentre per $|x| > 1$ si ha $\left|(-ix)^\alpha f(x)\right| \leq |x|^{|\alpha|}|f(x)| \leq |x|^k|f(x)|$.

Dimostrazione. Basta considerare $k = 1$ e poi procedere per induzione. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{\hat{f}(\xi + he_j) - \hat{f}(\xi)}{h} &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{e^{-i(\xi+he_j)\cdot x} - e^{-i\xi\cdot x}}{h}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{e^{-ihx_j} - 1}{h}e^{-i\xi\cdot x}\,dx\ .\end{aligned}$$

Poiché $\left|\frac{e^{-ihx_j}-1}{h}\right| \leq |x_j| \leq |x|$, si può applicare il Teorema della convergenza dominata e ottenere che

$$\partial_j\hat{f}(\xi) = -i\int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x)e^{-i\xi\cdot x}\,dx = -i\widehat{x_j f}(\xi)\ .$$

Per il Teorema 16.2, $\partial_j\hat{f}$ è continua per ogni j, per cui $\hat{f}$ è di classe C^1. $\square$

17. La classe di Schwartz

Dai Corollari 16.3 e 16.4 si ricava facilmente il seguente enunciato.

Proposizione 17.1. *Se $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ la sua trasformata di Fourier è una funzione C^∞ e tutte le sue derivate sono* a decrescenza rapida, *cioè, per ogni multi-indice α e ogni $k > 0$ si ha*

$$\partial^\alpha \hat{f}(\xi) = o\big(|\xi|^{-k}\big) \tag{17.1}$$

per $\xi \to \infty$.

La condizione (17.1) ha notevole rilevanza e lo spazio delle funzioni che la soddisfano merita un'attenzione particolare.

Definizione. *Si chiama* classe di Schwartz *su $\mathbb{R}^n$, indicata con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, lo spazio delle funzioni f infinitamente derivabili su $\mathbb{R}^n$ tali che*

$$\partial^\alpha f(x) = o(|x|^{-k}) \qquad \text{per } x \to \infty$$

per ogni multi-indice α e ogni $k \in \mathbb{N}$.

La Proposizione 17.1 si estende facilmente come segue.

Proposizione 17.2. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la sua trasformata di Fourier è pure in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Si introduce su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ una struttura di spazio di Fréchet nel modo seguente.
Dato $k \in \mathbb{N}$ si considera la norma

$$\|f\|_{(k)} = \sum_{|\alpha| \le k} \|(1 + |x|^k)\partial^\alpha f\|_\infty \ . \tag{17.2}$$

Si osservi che $\|f\|_{(k)} \le \|f\|_{(k+1)}$.

Lemma 17.3. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è completo rispetto alla metrica indotta dalle norme $\| \ \|_{(k)}$.*

Dimostrazione. Sia $\{f_j\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ una successione di Cauchy rispetto a ciascuna delle norme $\| \ \|_{(k)}$. Dato un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$, si ha

$$\max_{x \in K} |\partial^\alpha f_j(x) - \partial^\alpha f_{j'}(x)| \le C_K \|f_j - f_{j'}\|_{(k)} \ ,$$

se $|\alpha| \le k$. Quindi le f_j convergono uniformemente sui compatti a una funzione f di classe C^∞, e tutte le loro derivate convergono alle corrispondenti derivate di f.
Dato $\varepsilon > 0$, sia $\bar{j}$ tale che $\|f_j - f_{j'}\|_{(k)} < \varepsilon$ per $j, j' \ge \bar{j}$. Se $|\alpha| \le k$ e $j \ge \bar{j}$,

$$(1 + |x|^k)|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f_j(x)| = \lim_{j' \to \infty} (1 + |x|^k)|\partial^\alpha f_{j'}(x) - \partial^\alpha f_j(x)| \le \varepsilon \ ,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.
Quindi

$$\|f - f_j\|_{(k)} \le c_k \varepsilon \ ,$$

indicando con c_k il numero di multi-indici α tali che $|\alpha| \le k$. Si deduce che $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e che $\{f_j\}$ converge a f nella metrica di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Proposizione 17.4. *Dati due multi-indici α, β si consideri la seminorma*

$$p_{\alpha,\beta}(f) = \|x^\alpha \partial^\beta f\|_\infty$$

su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora le famiglie $\{p_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n}$ e $\{\| \ \|_{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ definiscono su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la stessa topologia.

Dimostrazione. Per semplicità, diamo la dimostrazione in dimensione 1. In tal caso, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Siano α, β e k tali che $\alpha, \beta \leq k$. Se $|x| \leq 1$,

$$|x^\alpha f^{(\beta)}(x)| \leq |f^{(\beta)}(x)| \ ,$$

mentre se $|x| > 1$,

$$|x^\alpha f^{(\beta)}(x)| \leq |x|^k |f^{(\beta)}(x)| \ .$$

Quindi

$$p_{\alpha,\beta}(f) \leq \|(1+|x|^k) f^{(\beta)}\|_\infty \leq \|f\|_{(k)} \ .$$

Da questa disuguaglianza segue la seguente implicazione: se una successione converge in ciascuna norma $\| \ \|_{(k)}$, essa converge allo stesso limite in ciascuna delle seminorme $p_{\alpha,\beta}$.

Per dimostrare l'implicazione inversa, osserviamo che esistono costanti $c, c' > 0$ tali che

$$c \leq \frac{\sum_{\alpha=0}^k |x|^\alpha}{1+|x|^k} \leq c' \ .$$

Allora

$$\begin{aligned}
\|f\|_{(k)} &= \sum_{\beta\leq k} \|(1+|x|^k) f^{(\beta)}\|_\infty \\
&\leq \frac{1}{c} \sum_{\beta\leq k} \left\| \sum_{\alpha=0}^k |x|^\alpha f^{(\beta)} \right\|_\infty \\
&\leq \frac{1}{c} \sum_{\alpha,\beta\leq k} \left\| |x|^\alpha f^{(\beta)} \right\|_\infty \\
&= \frac{1}{c} \sum_{\alpha,\beta\leq k} p_{\alpha,\beta}(f) \ .
\end{aligned}$$

Quindi se una successione converge in ciascuna seminorma $p_{\alpha,\beta}$, essa converge allo stesso limite in ciascuna delle norme $\| \ \|_{(k)}$. $\square$

Naturalmente le funzioni C^∞ a supporto compatto sono in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Si ha il seguente risultato di densità.

Proposizione 17.5. *$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Consideriamo solo il caso unidimensionale per semplicità.

Sia η una funzione C^∞ a supporto compatto tale che $\eta(x) = 1$ per $|x| \leq 1$. Per $r > 1$ si ponga $\eta_{(r)}(x) = \eta(x/r)$. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la funzione $f\eta_{(r)}$ ha supporto compatto e coincide con f per $|x| \leq r$. Dati due interi α e β, si ha quindi

$$\begin{aligned} p_{\alpha,\beta}(f - f\eta_{(r)}) &= \|x^\alpha(f - f\eta_{(r)})^{(\beta)}\|_\infty \\ &\leq C_\beta \sum_{j=0}^{\beta} \|x^\alpha f^{(\beta-j)}(1-\eta_{(r)})^{(j)}\|_\infty \,. \end{aligned}$$

Se $j = 0$,

$$\begin{aligned} \|x^\alpha f^{(\beta)}(1-\eta_{(r)})\|_\infty &\leq \sup_{|x|>r} |x|^\alpha |f^{(\beta)}(x)| \\ &\leq \sup_{|x|>r} \frac{|x|^{\alpha+1}}{r} |f^{(\beta)}(x)| \\ &\leq \frac{1}{r} p_{\alpha+1,\beta}(f) \,, \end{aligned}$$

che tende a 0 se r tende a ∞.

Se $j > 0$, $(1-\eta_{(r)})^{(j)} = -\frac{1}{r^j}\eta^{(j)}(x/r)$, per cui

$$\|x^\alpha f^{(\beta-j)}(1-\eta_{(r)})^{(j)}\|_\infty \leq \frac{c_j}{r^j} \|x^\alpha f^{(\beta-j)}\|_\infty \,,$$

che pure tende a 0. $\square$

Elenchiamo senza dimostrazione alcune proprietà le cui verifiche sono noiose, ma non particolarmente difficili.

Proposizione 17.6.

(1) *la moltiplicazione* $(f, g) \mapsto fg$ *da* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *in* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *è continua;*

(2) *più in generale, sia* g *una funzione di classe* C^∞ *tale che ogni sua derivata* $\partial^\alpha g$ *sia a crescita lenta (vi sia cioè un intero* m_α *tale che* $|\partial^\alpha g(x)| \leq C_\alpha(1 + |x|)^{m_\alpha}$*); allora l'operatore* $f \mapsto fg$ *è continuo da* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *in* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*;*

(3) *le traslazioni* $\tau_h : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*, sono continue;*

(4) *la convoluzione* $(f, g) \mapsto f * g$ *è continua da* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *in* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*;*

(5) *le derivazioni* $f \mapsto \partial^\alpha f$ *da* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *a* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *sono continue;*

(6) *la trasformata di Fourier è continua da* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *a* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*;*

(7) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *è denso in* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *per* $1 \leq p < \infty$ *e l'inclusione è continua.*

18. Formule di inversione e di Plancherel

La (6) della Proposizione 17.6 afferma che la trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ è continua da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in sé. Dimostriamo ora che $\mathcal{F}$ è in realtà un isomorfismo suriettivo.

Lemma 18.1. *Se $\alpha > 0$, vale l'identità*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|x|^2} e^{-ix\cdot\xi}\, dx = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\alpha}} \ . \tag{18.1}$$

Dimostrazione. È sufficiente considerare il caso $n = 1$ perché

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|x|^2} e^{-i\xi\cdot x}\, dx = \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x_j^2} e^{-i\xi_j x_j}\, dx_j \ .$$

Partiamo dalla formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi} \ ,$$

da cui si ricava, con un cambiamento di variabile,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \ .$$

Sostituendo $t = u + \frac{s}{2\alpha}$, con s reale, si ottiene che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2 - su}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{s^2}{4\alpha}} \ . \tag{18.2}$$

Osserviamo ora che ambo i membri della (18.2) sono definiti per $s \in \mathbb{C}$ e sono entrambi funzioni olomorfe di s. Questo è evidente per il secondo membro, mentre richiede l'applicazione del Teorema di Cauchy per il primo. Poiché tali funzioni coincidono per s reale, esse coincidono per ogni s complesso.

Prendendo $s = i\xi$, si ottiene la (18.1). $\square$

Teorema 18.2. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vale la* formula di inversione

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi \ . \tag{18.3}$$

Dimostrazione. Partendo dall'integrale a secondo membro con $x = 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, d\xi &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-\varepsilon|\xi|^2}\, d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\xi\cdot y} e^{-\varepsilon|\xi|^2}\, dy\, d\xi \\
&= \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{n/2} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}}\, dy \\
&= 2^n \pi^{n/2} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(2\sqrt{\varepsilon} x) e^{-|x|^2}\, dx \\
&= (2\pi)^n f(0) \ ,
\end{aligned}$$

applicando due volte la convergenza dominata. Questo ci dà la (18.3) per $x = 0$.

Applicando ora questa identità alla funzione $\tau_h f(x) = f(x - h)$, si ottiene

$$\tau_h f(0) = f(-h) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\tau_h f}(\xi)\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-ih\cdot\xi}\, d\xi \ .$$

Ponendo $h = -x$ si ottiene la conclusione. $\square$

Corollario 18.3. *La trasformata di Fourier è un isomorfismo suriettivo di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in sé.*

Dimostrazione. Data $\varphi(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ponga

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{F}\varphi)(-x) \ .$$

Allora $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e, applicando la formula di inversione, $\hat{f}(\xi) = \varphi(\xi)$. Quindi $\mathcal{F}$ è suriettiva; inoltre

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}\varphi(-x) \ ,$$

per cui anche $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è continua. $\square$

La formula di inversione è valida più in generale a condizione che sia f che $\hat{f}$ siano integrabili. La dimostrazione del Teorema 18.2 si applica in queste ipotesi senza modifiche.

Dalla formula di inversione ricaviamo ora la *formula di Plancherel*, che ci consentirà di estendere la trasformata di Fourier a funzioni in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 18.4. *Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vale l'identità*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi \ .$$

Dimostrazione. Applichiamo la formula di inversione alla funzione $f * g^*$. Ricordando che $g^*(x) = \overline{g(-x)}$ e osservando che

$$\widehat{f * g^*} = \hat{f}\widehat{g^*} = \hat{f}\overline{\hat{g}} \ ,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\, dx &= (f * g^*)(0) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f * g^*}(\xi)\, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi \ . \end{aligned} \qquad \square$$

In particolare, prendendo $f = g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ottiene l'identità

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|\hat{f}\|_2^2 \ . \tag{18.4}$$

Corollario 18.5. *L'operatore* $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ *si estende in modo unico a un'isometria suriettiva di* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *in sé.*

Dimostrazione. La formula di Plancherel implica che $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ è un'isometria suriettiva di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ in sé. Poiché $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$, $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ si estende a un operatore continuo da $L^2(\mathbb{R}^n)$ in sé, con immagine densa. Ma l'operatore cosí esteso è pure un'isometria, per cui la sua immagine è chiusa. Quindi esso è suriettivo. $\square$

Tuttavia l'integrale di Fourier di una $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ non converge in generale. Per ottenere $\hat{f}$ occorre perciò approssimare f in norma L^2 con funzioni in $L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, e quindi cercare il limite delle loro trasformate.

Per esempio, si può approssimare $f(x)$ con $f_\varepsilon(x) = f(x)e^{-\varepsilon|x|^2}$, con $\varepsilon \to 0$, oppure ancora con $f_R = f\chi_{B_R}$, con $R \to \infty$. In questo caso si ottiene

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} f(x)e^{-i\xi\cdot x}dx \ ,$$

dove il limite va inteso in norma L^2.

Poiché, per il Lemma 15.1, ogni funzione in $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < 2$ è la somma di una funzione in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e di un'altra in $L^2(\mathbb{R}^n)$, la trasformata di Fourier è ben definita su $L^p(\mathbb{R}^n)$ per tali valori di p. Dal Teorema di Riesz-Thorin si ottiene il *Teorema di Hausdorff-Young.*

Corollario 18.6. *Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *con* $1 \le p \le 2$, *allora* $\hat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\|\hat{f}\|_{p'} \le \|f\|_p \ .$$

19. Teorema di Paley-Wiener e principio di indeterminazione

Abbiamo visto che la trasformata di Fourier applica $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in sé in modo biiettivo. Discutiamo ora il comportamento della trasformata sullo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Il primo commento in proposito è il seguente: la trasformata di una funzione a supporto compatto non può avere supporto compatto, a meno che non sia identicamente nulla.

Proposizione 19.1. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\hat{f}$ hanno entrambe supporto compatto, allora $f = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente $n = 1$. La funzione

$$G(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\zeta x}\,dx$$

è definita per ogni $\zeta \in \mathbb{C}$. Se γ è un arco chiuso in $\mathbb{C}$,

$$\oint_\gamma G(\zeta)\,d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \oint_\gamma e^{-i\zeta x}\,d\zeta\,dx = 0\ .$$

Per il Teorema di Morera, G è olomorfa. La sua restrizione a $\mathbb{R}$ è $\hat{f}$. Se $\hat{f}$ ha supporto compatto, G ha degli zeri non isolati, e dunque è identicamente nulla. Segue dalla formula di inversione che $f = 0$.

Se $n > 1$, basta applicare le stesse considerazioni alla funzione

$$G(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\zeta x_1}\,dx$$

e osservare che, per $\zeta \in \mathbb{R}$, $G(\zeta) = \hat{f}(\zeta, 0, \dots, 0)$. □

Quindi, se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ la sua trasformata di Fourier ammette un'estensione olomorfa,

$$F(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i(\zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_n x_n)}\,dx\ , \tag{19.1}$$

a tutto $\mathbb{C}^n$. Il *Teorema di Paley-Wiener* fornisce una caratterizzazione delle funzioni olomorfe ottenute in questo modo.

Se $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ e $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, chiamiamo $\Im\mathrm{m}\zeta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 19.2. *Sia $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, e sia $\operatorname{supp} f \subseteq \overline{B(0,r)}$. La funzione $F(\zeta)$ definita dalla (19.1) è olomorfa in $\mathbb{C}^n$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una costante C_k tale che*

$$|F(\zeta)| \le C_k \frac{e^{r|\Im\mathrm{m}\zeta|}}{(1 + |\zeta|)^k}\ . \tag{19.2}$$

Viceversa, data una funzione olomorfa F in $\mathbb{C}^n$ tale che valga la (19.2) per ogni $k \in \mathbb{N}$, la sua restrizione a $\mathbb{R}^n$ è la trasformata di Fourier di una funzione di classe C^∞ su $\mathbb{R}^n$ con supporto contenuto in $B(0,r)$.

Diamo la dimostrazione solo in dimensione $n = 1$.

Dimostrazione. Data f di classe C^∞ su $\mathbb{R}$ con supporto in $[-r,r]$, posto $\eta = \Im\mathrm{m}\zeta$, si ha

$$\begin{aligned} |F(\zeta)| &\le \int_{-r}^{r} |f(x)|\left|e^{-i\zeta x}\right| dx \\ &= \int_{-r}^{r} |f(x)| e^{\eta x}\, dx \\ &\le e^{|\eta| r} \|f\|_1 \ . \end{aligned}$$

Si ha anche

$$\begin{aligned} |\zeta|^k |F(\zeta)| &= \left| \int_{-r}^{r} f(x) \frac{d^k}{dx^k} e^{-i\zeta x}\, dx \right| \\ &= \left| \int_{-r}^{r} f^{(k)}(x) e^{-i\zeta x}\, dx \right| \\ &= \int_{-r}^{r} |f^{(k)}(x)| e^{\eta x}\, dx \\ &\le e^{|\eta| r} \|f^{(k)}\|_1 \ . \end{aligned}$$

Quindi

$$(1 + |\zeta|)^k |F(\zeta)| \le C_k e^{|\eta| r} \ ,$$

che è la (19.2).

Viceversa, supponiamo che valga la (19.2) per ogni k. Per ogni η fissato, poniamo

$$f_\eta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi + i\eta) e^{ix(\xi + i\eta)}\, d\xi \ .$$

L'integrale è assolutamente convergente perché $F(\xi + i\eta)$ è a decrescenza rapida in ξ.

Vediamo ora che f_η in realtà è indipendente da η. Per far ciò, dati due valori $\eta_1 < \eta_2$, consideriamo il rettangolo R di vertici $\pm a + i\eta_1, \pm a + i\eta_2$. Allora

$$\oint_{\partial R} F(\zeta) e^{ix\zeta}\, d\zeta = 0 \ .$$

Quindi

(19.3)
$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} F(\xi + i\eta_1) e^{ix(\xi + i\eta_1)}\, d\xi &= i \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(-a + is) e^{ix(-a+is)}\, ds \\ &\quad + \int_{-a}^{a} F(\xi + i\eta_2) e^{ix(\xi + i\eta_2)}\, d\xi - i \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(a + is) e^{ix(a+is)}\, ds \ . \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} \left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(a + is) e^{ix(a+is)}\, ds \right| &\le \int_{\eta_1}^{\eta_2} |F(a + is)| e^{-xs}\, ds \\ &\le C_1 \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{e^{(r-x)s}}{1 + a + |s|}\, ds \\ &\le \frac{C_1}{1 + a} \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{(r-x)s}\, ds \ . \end{aligned}$$

Sostituendo a con $-a$ si hanno le stesse maggiorazioni, per cui

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{\eta_1}^{\eta_2} F(\pm a+is)e^{ix(\pm a+is)}\,ds=0\ .$$

Passando al limite nella (19.3) per $a\to+\infty$, si ottiene che $f_{\eta_1}(x)=f_{\eta_2}(x)$. Quindi, per ogni η, $f_\eta=f_0$ è la trasformata inversa della restrizione di F a $\mathbb{R}$.

Se prendiamo $x\geq r$, abbiamo

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi+i\eta)e^{ix(\xi+i\eta)}\,d\xi\right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty}|F(\xi+i\eta)|e^{-x\eta}\,d\xi\\ &\leq C_2e^{-(x-r)\eta}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+|\xi|^2+|\eta|^2}\,d\xi\ ,\end{aligned}$$

che tende a 0 per $\eta\to+\infty$. Quindi

$$f_0(x)=\lim_{\eta\to+\infty}f_\eta(x)=0\ .$$

Analogamente si verifica che $f_0(x)=0$ per $x\leq -r$, considerando il limite per $\eta\to-\infty$.

Rimane da vedere che f_0 è C^∞. Applichiamo il Corollario 16.4 alla funzione $\varphi=F_{|\mathbb{R}}$. Poiché $\xi^kF(\xi)\in L^1(\mathbb{R})$ per ogni k, $\hat\varphi$ è C^∞. Ma $\hat\varphi(x)=2\pi f_0(-x)$, e questo dà la tesi. $\square$

La Proposizione 19.1 è un primo esempio di una classe più generale di risultati che affermano che una funzione $f\neq 0$ e la sua trasformata di Fourier non possono essere simultaneamente troppo "concentrate". Un altro risultato dello stesso tipo è il *principio di indeterminazione*, così chiamato perché rappresenta la formulazione matematica del principio di Heisenberg in meccanica quantistica.

Data una funzione $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $f\neq 0$, consideriamo la quantità

$$c(f)=\frac{\|xf\|_2^2}{\|f\|_2^2}\ ,$$

interpretata come una misura della concentrazione di f intorno all'origine: a parità di norma L^2, $c(f)$ è tanto minore quanto minore è il contributo all'integrale $\int|f|^2$ fornito dagli insiemi dove $|x|$ è grande. Per esempio, se, fissata f, consideriamo $f_\varepsilon(x)=f(x/\varepsilon)$, si calcola facilmente che $c(f_\varepsilon)$ tende a zero con ε.

Teorema 19.3. *Se $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $f\neq 0$, si ha*

$$c(f)+c(\hat f)\geq 1\ , \tag{19.4}$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $f(x)$ è un multiplo scalare di $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Dimostrazione. Per la formula di Plancherel,

$$\begin{aligned}\|\xi\hat f\|_2^2&=\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2|\hat f(\xi)|^2\,d\xi\\ &=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|f'(x)|^2\,dx\\ &=2\pi\|f'\|_2^2\ .\end{aligned}$$

Quindi

$$c(\hat{f}) = 2\pi \frac{\|f'\|_2^2}{\|\hat{f}\|_2^2} = \frac{\|f'\|_2^2}{\|f\|_2^2} \ .$$

Integrando per parti, si ha inoltre

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx &= -\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{d}{dx} |f(x)|^2 \, dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} x\big(f'(x)\overline{f(x)} + f(x)\overline{f'(x)}\, dx \\
&= -2\Re\mathrm{e} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\overline{f'(x)}\, dx \\
&= -2\Re\mathrm{e}\langle xf, f'\rangle \ ,
\end{aligned}$$

dove $\langle \ , \ \rangle$ indica il prodotto scalare in$L^2(\mathbb{R})$. Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= 2\big|\Re\mathrm{e}\langle xf, f'\rangle\big| \\
&\le 2\|xf\|_2\|f'\|_2 \\
&\le \|xf\|_2^2 + \|f'\|_2^2 \ ,
\end{aligned}$$

che fornisce la (19.4).

L'uguaglianza vale se e solo se si ha uguaglianza in ciascuno dei passaggi precedenti. Si richiedono quindi due condizioni:

$$\big|\Re\mathrm{e}\langle xf, f'\rangle\big| = \|xf\|_2\|f'\|_2 \ , \qquad \text{e} \qquad \|xf\|_2 = \|f'\|_2 \ .$$

Ma in uno spazio con prodotto scalare la condizione $\big|\Re\mathrm{e}\langle v, w\rangle\big| = \|v\|\|w\|$ implica, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, che $\langle v, w\rangle$ è reale.

Si ha pertanto $\big|\langle v, w\rangle\big| = \|v\|\|w\|$, il che si verifica se e solo se $w = \alpha v$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. Ma la condizione $\langle v, w\rangle$ reale implica che $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se vale l'uguaglianza nella (19.4) abbiamo quindi che $f' = \alpha x f$. La seconda condizione implica che $\alpha = \pm 1$. Risolvendo le due equazioni differenziali, si ottiene che $f(x) = ce^{\pm x^2/2}$. Poiché $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, deve essere $f(x) = ce^{-x^2/2}$. $\square$

Questo risultato si estende a $\mathbb{R}^n$ con semplici modifiche alla dimostrazione. Si ottiene la seguente disuguaglianza, che generalizza la (19.4):

$$\big\| |x| f \big\|_2^2 + \big\| |\xi| \hat{f} \big\|_2^2 \ge n \|f\|_2^2 \ , \tag{19.5}$$

per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. L'uguaglianza vale se e solo se $f(x) = ce^{-|x|^2/2}$.

Con un semplice argomento di densità, la (19.4) e la (19.5) si estendono a funzioni $f \in L^2$ tali che anche $|x|f$ e $|\xi|\hat{f}$ siano in L^2.

20. Distribuzioni temperate e non

Per sviluppare una teoria delle distribuzioni in $\mathbb{R}^n$ bisogna scegliere in primo luogo uno spazio di *funzioni test* di classe C^∞, in modo da definire le distribuzioni cone funzionali lineari su tale spazio, continui rispetto a una data topologia.

Abbiamo quindi a disposizione due spazi ragionevoli di funzioni test: uno è $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, l'altro è $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Iniziamo descrivendo la topologia di $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e i relativi funzionali lineari.

Dato un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$, indichiamo con $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni C^∞ su $\mathbb{R}^n$ con supporto contenuto in K. Su $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ si introduce la struttura di spazio di Fréchet definita dalle norme[4]

$$\|f\|_{K,m} = \sum_{|\alpha| \le m} \|\partial^\alpha f\|_\infty \ .$$

Su $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ si introduce allora la seguente topologia: un sottoinsieme è aperto se e solo se, per ogni compatto K, la sua intersezione con $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ è aperta in $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$.

Proposizione 20.1. *Un funzionale lineare Φ definito su $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è continuo se e solo se per ogni compatto K esistono un intero $m = m(K)$ e una costante C_K tali che*

$$|\langle \Phi, f\rangle| \le C_K \|f\|_{K,m} \ , \tag{20.1}$$

per ogni $f \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. In base alla definizione della topologia di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, Φ è continuo se e solo se la sua restrizione a $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ è continua per ogni compatto K. Il resto segue dalle proprietà dei funzionali continui su spazi di Fréchet. □

Definizione. *Si chiama* distribuzione *su $\mathbb{R}^n$ un funzionale lineare continuo su $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Le distribuzioni su $\mathbb{R}^n$ formano uno spazio vettoriale, indicato con $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Una distribuzione Φ si dice di ordine finito *se soddisfa la* (20.1) *con m indipendente da K.*

Un esempio di distribuzione su $\mathbb{R}$ che non è di ordine finito è dato dal funzionale

$$\langle \Phi, f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(n) \ .$$

Definizione. *Si dice che una distribuzione $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è nulla su un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, se per ogni $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con supporto contenuto in A, risulta $\langle \Phi, f\rangle = 0$.*

Lemma 20.2. *Se $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è nulla su due aperti A_1 e A_2, allora essa è nulla su $A_1 \cup A_2$.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con supporto K contenuto in $A_1 \cup A_2$. L'insieme $K_1 = K \setminus A_2$ è compatto e contenuto in A_1. Sia φ una funzione C^∞ con supporto

[4] L'indice K ricorda che questa norma si applica a funzioni con supporto contenuto in K. La completezza di $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ come spazio metrico si dimostra facilmente.

compatto contenuto in A_1 e uguale a 1 in un intorno V di K_1. Si decomponga f come $f = f\varphi + (f - f\varphi)$. Allora

$$\langle T, f\rangle = \langle T, f\varphi\rangle + \langle T, f - f\varphi\rangle \ .$$

Poiché T è nulla su A_1, $\langle T, f\varphi\rangle = 0$. Inoltre il supporto di $f - f\varphi$ è contenuto in $K \setminus V$, che è un compatto contenuto in A_2. Di conseguenza anche $\langle T, f - f\varphi\rangle = 0$.

Si conclude allora che $\langle T, f\rangle = 0$. □

Proposizione 20.3. *Sia $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Esiste un massimo aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ su cui Φ è nulla.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A}$ la famiglia degli aperti su cui Φ è nulla, e sia A l'unione dei suoi elementi. Se $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ha supporto contenuto in A, esiste una famiglia finita $\{A_1, \dots, A_k\} \subset \mathcal{A}$ che ricopre il supporto di f. Per il Lemma 20.2, Φ è nulla sull'unione degli A_i. Quindi $\langle\Phi, f\rangle = 0$. □

Definizione. *Si chiama* supporto *di Φ il complementare del massimo aperto su cui Φ è nulla.*

Dalla definizione segue immediatamente che, se $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ hanno supporti disgiunti, allora $\langle\Phi, f\rangle = 0$.

In generale non è vero che $\langle\Phi, f\rangle = 0$ nella semplice ipotesi che f si annulli sul supporto di Φ. Per esempio, si prenda la distribuzione $\langle\delta_0', f\rangle = -f'(0)$ su $\mathbb{R}$. Il suo supporto è costituito dal solo 0. La sola ipotesi che $f(0) = 0$ non implica che $f'(0) = 0$. Se invece il supporto di f non contiene 0, allora f è identicamente nulla in un intorno di 0, e dunque $f'(0) = 0$.

Teorema 20.4. *Le seguenti operazioni sono ben definite su $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:*

(1) *le derivazioni:*
$$\langle\partial_j\Phi, f\rangle = -\langle\Phi, \partial_j f\rangle \ ;$$

(2) *la moltiplicazione per una funzione $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:*
$$\langle\Phi g, f\rangle = \langle\Phi, fg\rangle \ ;$$

(3) *la convoluzione con una funzione $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:*
$$\Phi * g(x) = \langle\Phi, \tau_x\check{g}\rangle \ ;$$

(4) *la convoluzione con una distribuzione Ψ a supporto compatto:*
$$\langle\Phi * \Psi, f\rangle = \langle\Phi, \check{\Psi} * f\rangle \ .$$

In (3) *la funzione $\Phi * g(x)$ è C^∞, valgono le identità*
$$\partial_j(\Phi * g) = (\partial_j\Phi) * g = \Phi * (\partial_j g) \ ,$$
e inoltre
$$\mathrm{supp}\,(\Phi * g) \subseteq \mathrm{supp}\,\Phi + \mathrm{supp}\,g \ .$$

In (4) *si ha*
$$\mathrm{supp}\,(\Phi * \Psi) \subseteq \mathrm{supp}\,\Phi + \mathrm{supp}\,\Psi \ .$$

La dimostrazione della prima parte dell'enunciato richiede semplici modifiche a dimostrazioni analoghe già viste sul toro. In vari punti occorre notare che opportuni operatori lineari, come $f \mapsto \partial_j f$ in (1), $f \mapsto fg$ in (2) ecc., sono continui da $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in sé.

Discutiamo invece la parte riguardante i supporti. In (3), perché risulti $\Phi * g(x) \neq 0$, è necessario che non sia vuoto l'insieme

$$(\operatorname{supp}\Phi) \cap (\operatorname{supp}\tau_x\check{g}) = (\operatorname{supp}\Phi) \cap (x - \operatorname{supp} g) \ ,$$

e questo si verifica se e solo se $x \in \operatorname{supp}\Phi + \operatorname{supp} g$. Quindi

$$\{x : \Phi * g(x) \neq 0\} \subseteq \operatorname{supp}\Phi + \operatorname{supp} g \ .$$

Poiché $\operatorname{supp} g$ è compatto, l'insieme a secondo membro è chiuso, per cui si ha la prima inclusione nell'enunciato.

In (4), sia $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che $(\operatorname{supp} f) \cap (\operatorname{supp}\Phi + \operatorname{supp}\Psi) = \emptyset$. Si vede facilmente che $\operatorname{supp}(\check{\Psi} * f) = \operatorname{supp} f - \operatorname{supp}\Psi$ è disgiunto da $\operatorname{supp}\Phi$, per cui $\langle \phi, \check{\Psi} * f\rangle = 0$.

Si noti infine che la convoluzione $\Phi * \Psi$ in (4) è ben definita in virtù del fatto che $\check{\Psi} * f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Quando si lavora con la trasformata di Fourier è conveniente utilizzare come spazio di funzioni test $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dotato della struttura di spazio di Fréchet descritta nel paragrafo 17. I motivi dipendono principalmente dal fatto che, come abbiamo visto, la trasformata di Fourier è un isomorfismo di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ su se stesso.

Definizione. *Si chiama* distribuzione temperata *su* $\mathbb{R}^n$ *un funzionale lineare continuo su* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Lo spazio delle distribuzioni temperate si indica con* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Per la Proposizione 13.3, un funzionale lineare Φ su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è continuo se e solo se esistono un intero k e una costante $C > 0$ tali che

$$\big|\langle \Phi, f\rangle\big| \leq C\|f\|_{(k)} \ . \tag{20.2}$$

Proposizione 20.5. *L'applicazione che associa a* $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *la sua restrizione a* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *individua un'inclusione di* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *in* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. *Ogni distribuzione con supporto compatto è temperata*[5], *e ogni distribuzione temperata ha ordine finito.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 17.5, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mostriamo ora che l'inclusione è continua. Ciò equivale a dimostrare che per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$, l'inclusione di $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è continua.

Sia $r > 0$ tale che $K \subset B(0,r)$. Allora, se $\operatorname{supp} f \subseteq K$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{(m)} &= \sum_{|\alpha|\leq m} \big\|(1+|x|^m)\partial^\alpha f\big\|_\infty \\
&\leq (1+r^m)\| \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha f\|_\infty \\
&= (1+r^m)\|f\|_{K,m} \ .
\end{aligned}$$

[5] Questo è un abuso di linguaggio: sarebbe più corretto dire che una distribuzione con supporto compatto si estende, come funzionale lineare, a una distribuzione temperata

Ciò implica che

$$\left\{ f \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K,m} < \frac{\varepsilon}{1+r^m} \right\} \subset \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{(m)} < \varepsilon \right\} ,$$

per ogni m e ogni $\varepsilon > 0$, e questo dà la continuità dell'inclusione.

Quindi la restrizione di un elemento $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è continuo rispetto alla topologia di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Per densità, l'operatore di restrizione è iniettivo.

Sia ora $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ una distribuzione con supporto K compatto. Sia η una funzione C^∞ a supporto compatto e identicamente uguale a 1 in un intorno di K. Se $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\langle \Phi, f \rangle = \langle \Phi, f\eta \rangle , \tag{20.3}$$

in quanto $f - f\eta$ ha supporto disgiunto da K. Definiamo allora un funzionale $\tilde{\Phi}$ su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ponendo

$$\langle \tilde{\Phi}, f \rangle = \langle \Phi, f\eta \rangle .$$

Per la (20.3), $\tilde{\Phi}$, ristretto a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, coincide con Φ. Si tratta di vedere che $\tilde{\Phi}$ è continuo su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Sia $K' = \operatorname{supp} \eta$. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, risulta $f\eta \in \mathcal{D}_{K'}(\mathbb{R}^n)$, per cui esiste un intero m tale che

$$\begin{aligned}
\left|\langle \tilde{\Phi}, f \rangle\right| &= \left|\langle \Phi, f\eta \rangle\right| \\
&\leq C \|f\eta\|_{K',m} \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha (f\eta)\|_\infty \\
&\leq C' \sum_{|\beta|+|\gamma| \leq m} \|\partial^\beta f\|_\infty \|\partial^\gamma \eta\|_\infty \\
&\leq C'' \sum_{|\beta| \leq m} \|\partial^\beta f\|_\infty \\
&\leq C'' \sum_{|\beta| \leq m} \left\|(1+|x|^m)\partial^\beta f\right\|_\infty \\
&= C'' \|f\|_{(m)} .
\end{aligned}$$

Infine mostriamo che ogni distribuzione temperata ha ordine finito.

Sia $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e sia m tale che

$$\left|\langle \Phi, f \rangle\right| \leq C \|f\|_{(m)}$$

per $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Sia $f \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, con $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto. Se $K \subset B(0,r)$, si ha

$$\begin{aligned}
\left|\langle \Phi, f \rangle\right| &\leq C \|f\|_{(m)} \\
&= C \sum_{|\alpha| \leq m} \left\|(1+|x|^m)\partial^\alpha f\right\|_\infty \\
&\leq C(1+r^m) \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_\infty \\
&= C(1+r^m)\|f\|_{K,m} .
\end{aligned}$$

Dunque Φ ha ordine m. $\square$

Teorema 20.6. *Le seguenti operazioni sono ben definite su $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:*

(1) *le derivazioni:*
$$\langle \partial_j \Phi, f \rangle = -\langle \Phi, \partial_j f \rangle \ ;$$

(2) *la moltiplicazione per una funzione $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:*

$$\langle \Phi g, f \rangle = \langle \Phi, fg \rangle \ ,$$

purché g e le sue derivate siano a crescita lenta;

(3) *la convoluzione con una funzione $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\Phi * g(x) = \langle \Phi, \tau_x \check{g} \rangle \ ;$$

(4) *la convoluzione con una distribuzione Ψ a supporto compatto:*

$$\langle \Phi * \Psi, f \rangle = \langle \Phi, \check{\Psi} * f \rangle \ .$$

In (3) la funzione $\Phi * g(x)$ è C^∞, è a crescita lenta con tutte le sue derivate, valgono le identità
$$\partial_j(\Phi * g) = (\partial_j \Phi) * g = \Phi * (\partial_j g) \ ,$$

e inoltre
$$\mathrm{supp}\,(\Phi * g) \subseteq \overline{\mathrm{supp}\,\Phi + \mathrm{supp}\,g} \ .$$

Se Φ ha supporto compatto, $\Phi * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Tralasciamo le dimostrazioni, piuttosto laboriose, anche se non difficili.

21. Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate

Se $f(x)$ e $g(\xi)$ sono due funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vale la seguente identità:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\xi)\,d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx\,g(\xi)\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\,g(\xi)\,d\xi\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx\ .\end{aligned}$$

Identificando funzioni con misure (f con fm, ecc.), e dunque con distribuzioni, l'identità diventa

$$\langle \hat{f}, g\rangle = \langle f, \hat{g}\rangle\ .$$

Questa formula motiva la seguente definizione.

Definizione. *Data $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la sua trasformata di Fourier $\hat{\Phi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è data da*

$$\langle \hat{\Phi}, f\rangle = \langle \Phi, \hat{f}\rangle$$

per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Per vedere che questa è una buona definizione, ricordiamo che, per la (6) della Proposizione 17.6, la trasformata di Fourier è un operatore continuo da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in sé. Quindi la composizione delle due applicazioni

$$f \longmapsto \hat{f} \longmapsto \langle \Phi, \hat{f}\rangle$$

è continua, e dunque $\hat{\Phi}$ è un funzionale continuo.

Teorema 21.1. *Vale la "formula di inversione"*

$$\hat{\hat{\Phi}} = (2\pi)^n\check{\Phi}\ ,$$

per cui l'applicazione $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è biiettiva.

Dimostrazione. Data $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\hat{\hat{f}}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{-ix\cdot\xi}\,d\xi = (2\pi)^n f(-x)\ ,$$

per la formula di inversione. Allora

$$\begin{aligned}\langle \hat{\hat{\Phi}}, f\rangle &= \langle \hat{\Phi}, \hat{f}\rangle \\ &= \langle \Phi, \hat{\hat{f}}\rangle \\ &= (2\pi)^n\langle \Phi, \check{f}\rangle \\ &= (2\pi)^n\langle \check{\Phi}, f\rangle\ . \qquad \square\end{aligned}$$

Molte delle formule che valgono per trasformate di Fourier di funzioni si estendono a distribuzioni temperate.

Proposizione 21.2. *La trasformata di Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è lineare. Inoltre*

(1) *se* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{\Phi * f} = \hat{f}\hat{\Phi}$;
(2) $\widehat{\partial_j \Phi} = i\xi_j \hat{\Phi}$;
(3) $\widehat{x_j \Phi} = i\partial_j \hat{\Phi}$;
(4) $\hat{\check{\Phi}} = (\hat{\Phi})\check{}$.

Dimostrazione. Vediamo in dettaglio la (1). Data $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,
$$\langle \widehat{\Phi * f}, g\rangle = \langle \Phi * f, \hat{g}\rangle = \langle \Phi, \check{f} * \hat{g}\rangle \ .$$
Ma
$$\begin{aligned}\check{f} * \hat{g}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)\hat{g}(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{-iy\cdot\xi}\,d\xi\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)e^{-iy\cdot\xi}\,dy\right)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\hat{f}(\xi)e^{-ix\cdot\xi}\,d\xi \\ &= \widehat{g\hat{f}}(x) \ .\end{aligned}$$
Quindi
$$\langle \widehat{\Phi * f}, g\rangle = \langle \Phi, \widehat{g\hat{f}}\rangle = \langle \hat{\Phi}, g\hat{f}\rangle = \langle \hat{\Phi}\hat{f}, g\rangle \ .$$
Le altre identità si dimostrano facilmente. □

La (1) della Proposizione 21.2 si estende al caso di una convoluzione tra due distribuzioni temperate Φ e Ψ, assumendo che una delle due abbia supporto compatto. Per dare senso alla formula, bisogna però rendersi conto del fatto che la trasformata di Fourier di una distribuzione a supporto compatto è una funzione, per cui il prodotto $\hat{\Phi}\hat{\Psi}$ ha senso.

Questa proprietà segue dalla estensione del *Teorema di Paley-Wiener* a distribuzioni, che costituisce il prossimo Teorema 21.3. Dobbiamo premettere un'osservazione.

Date una distribuzione Φ a supporto compatto e una generica funzione f di classe C^∞ su $\mathbb{R}^n$, l'espressione $\langle \Phi, f\rangle$ può essere definita come segue: sia ψ una qualunque funzione C^∞ a supporto compatto e uguale a 1 su un intorno del supporto di Φ. Allora si pone

$$\langle \Phi, f\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle \Phi, f\psi\rangle \ . \tag{21.1}$$

Per vedere che questa è una buona definizione, occorre mostrare che essa non dipende dalla scelta di ψ.

Sia dunque $\tilde{\psi}$ un'altra funzione con le stesse caratteristiche di ψ. Allora $\psi - \tilde{\psi}$ ha un supporto disgiunto dal supporto di Φ, e lo stesso vale per $f(\psi - \tilde{\psi})$. Quindi
$$\langle \Phi, f\psi\rangle - \langle \Phi, f\tilde{\psi}\rangle = \langle \Phi, f(\psi - \tilde{\psi})\rangle = 0 \ .$$
Applicheremo la (21.1) al caso in cui
$$f(x) = e_{-\zeta}(x) = e^{-i\sum_{j=1}^n \zeta_j x_j} \ ,$$
con $\zeta \in \mathbb{C}^n$.

Teorema 21.3. *Sia Φ una distribuzione a supporto compatto, contenuto nella palla $B(0,r)$. La funzione*

$$F(\zeta) = \langle \Phi, e_{-\zeta} \rangle \ , \tag{21.2}$$

definita per $\zeta \in \mathbb{C}^n$, è olomorfa ed esiste una costante $C > 0$ tale che

$$|F(\zeta)| \le C\big(1 + |\zeta|\big)^m e^{r|\Im\mathrm{m}\zeta|} \ , \tag{21.3}$$

dove m è l'ordine di Φ.

La restrizione di F a $\mathbb{R}^n$ coincide con la trasformata di Fourier di Φ, nel senso che per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \hat{\Phi}, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi) f(\xi)\, d\xi \ . \tag{21.4}$$

Viceversa, data una funzione olomorfa F su $\mathbb{C}^n$ che soddisfi la (21.3), *esiste esiste una distribuzione Φ con supporto contenuto in $B(0,r)$ tale che valga la* (21.2).

Daremo la dimostrazione solo in dimensione 1.

Dimostrazione. Per ogni $\delta > 0$ costruiamo una funzione ψ_δ di classe C^∞, con supporto nell'intervallo $[-r-2\delta, r+2\delta]$, uguale a 1 su $[-r-\delta, r+\delta]$, e tale che

$$\big|(\psi_\delta)^{(j)}(x)\big| \le \frac{C_j}{\delta^j} \tag{21.5}$$

per ogni j e ogni x.

Per far questo prendiamo una identità approssimata $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\varphi(x/\varepsilon)$, dove φ è una funzione C^∞ con supporto in $[-1,1]$, tale che $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. Definiamo quindi

$$\psi_\delta = \chi_{\left[-r-\frac{3\delta}{2}, r+\frac{3\delta}{2}\right]} * \varphi_{\frac{\delta}{2}} \ .$$

Il supporto di ψ_δ è contenuto nella somma dei supporti dei due fattori

$$\Big[-r-\frac{3\delta}{2}, r+\frac{3\delta}{2}\Big] + \Big[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\Big] = \big[-r-2\delta, r+2\delta\big] \ .$$

Se $x \in [-r-\delta, r+\delta]$, si ha

$$\begin{aligned}
\psi_\delta(x) &= \int_{-r-\frac{3\delta}{2}}^{r+\frac{3\delta}{2}} \varphi_{\frac{\delta}{2}}(x-y)\, dy \\
&= \int_{x-\frac{\delta}{2}}^{x+\frac{\delta}{2}} \varphi_{\frac{\delta}{2}}(x-y)\, dy \\
&= \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \varphi_{\frac{\delta}{2}}(t)\, dt \\
&= 1 \ .
\end{aligned}$$

Inoltre

$$(\psi_\delta)^{(j)}(x) = \chi_{\left[-r-\frac{3\delta}{2}, r+\frac{3\delta}{2}\right]} * (\varphi_{\frac{\delta}{2}})^{(j)}(x) \ ,$$

per cui

$$\big|(\psi_\delta)^{(j)}(x)\big| \leq \|\chi_{\left[-r-\frac{3\delta}{2},r+\frac{3\delta}{2}\right]}\|_\infty \|(\varphi_{\frac{\delta}{2}})^{(j)}\|_1 = \|(\varphi_{\frac{\delta}{2}})^{(j)}\|_1 \ . \tag{21.6}$$

Ma

$$\begin{aligned}\frac{d^j}{dx^j}\varphi_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon}\frac{d^j}{dx^j}\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{1+j}}\varphi^{(j)}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \ ,\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}\|(\varphi_\varepsilon)^{(j)}\|_1 &= \frac{1}{\varepsilon^{1+j}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi^{(j)}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\right| dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon^j}\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi^{(j)}(x)|\, dx \\ &= \frac{C_j}{\varepsilon^j} \ .\end{aligned}$$

Inserendo questa disuguaglianza nella (21.6) si ottiene la (21.5).

Per l'arbitrarietà di ψ nella (21.1), possiamo porre

$$F(\zeta) = \langle \Phi, e_{-\zeta}\psi_\delta\rangle \ .$$

Questa espressione è definita per ogni $\zeta \in \mathbb{C}$ e non dipende dalla scelta di δ.

Indichiamo con m l'ordine di Φ.

Si verifica facilmente che la funzione $\zeta \longmapsto e_{-\zeta}\psi_\delta$ definita su $\mathbb{C}$ a valori in $\mathcal{D}_m\big([-r-2\delta, r+2\delta]\big)$ è continua, per cui F è continua. Se γ è un arco chiuso in $\mathbb{C}$, si ha inoltre

$$\oint_\gamma F(\zeta)\, d\zeta = \oint_\gamma \langle \Phi, e_{-\zeta}\psi_\delta\rangle\, d\zeta = \left\langle \Phi, \oint_\gamma e_{-\zeta}\psi_\delta\, d\zeta \right\rangle \ ,$$

dove l'ultimo integrale è l'integrale di Bochner di una funzione a valori in $\mathcal{D}_m\big([-r-2\delta, r+2\delta]\big)$.

Ma, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\oint_\gamma e_{-\zeta}(x)\psi_\delta(x)\, d\zeta = \psi_\delta(x)\oint_\gamma e^{-i\zeta x}\, d\zeta = 0 \ ,$$

per cui

$$\oint_\gamma F(\zeta)\, d\zeta = 0 \ .$$

Segue dal Teorema di Morera che F è olomorfa.

Posto $\zeta = \xi + i\eta$, si ha

$$\begin{aligned}|F(\zeta)| &\leq C\|e_{-\zeta}\psi_\delta\|_{C^m} \\ &= C\sum_{k\leq m}\|(e_{-\zeta}\psi_\delta)^{(k)}\|_\infty \\ &\leq C\sum_{k\leq m,\ j\leq k}\binom{k}{j}\sup_{|x|\leq r+2\delta}\big|(e_{-\zeta}^{(k-j)}(x)(\psi_\delta)^{(j)}(x)\big| \\ &\leq C\sum_{k\leq m,\ j\leq k}|\zeta|^{k-j}e^{|\eta|(r+2\delta)}\delta^{-j} \ .\end{aligned}$$

Prendendo $\delta = 1/|\zeta|$, risulta

$$e^{|\eta|(r+2\delta)} = e^{r|\eta|} e^{\frac{2|\eta|}{|\zeta|}} \leq C e^{r|\eta|} \ ,$$

per cui

$$\begin{aligned} |F(\zeta)| &\leq C \sum_{k \leq m,\ j \leq k} |\zeta|^k e^{r|\eta|} \\ &\leq C(1+|\zeta|)^m e^{r|\eta|} \ . \end{aligned}$$

Passiamo ora a verificare la (21.4). Si prenda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e si consideri

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)F(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \Phi, f(\xi)e_{-\xi}\psi_\delta \rangle\, d\xi \ .$$

Poniamo $\delta = 1$ e utilizziamo ancora il fatto che l'applicazione $\xi \longmapsto f(\xi)e_\xi\psi_1$ è continua da $\mathbb{R}^n$ in $\mathcal{D}_m\big([-r-2, r+2]\big)$. Possiamo quindi prendere in considerazione l'integrale di Bochner

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e_{-\xi}\psi_1\, d\xi$$

a valori in $\mathcal{D}_m\big([-r-2, r+2]\big)$. Esso è convergente, in quanto

$$\int |f(\xi)| \|e_{-\xi}\psi_1\|_{C^m}\, d\xi \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)| \big(1+|\xi|\big)^m\, d\xi < \infty \ .$$

Questo consente di portare l'integrale nell'argomento di Φ, ottenendo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)F(\xi)\, d\xi &= \left\langle \Phi, \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e_{-\xi}\psi_1\, d\xi \right\rangle \\ &= \langle \Phi, \hat{f}\psi_1 \rangle \\ &= \langle \Phi, \hat{f} \rangle \ . \end{aligned}$$

Ciò dimostra che $F_{|_\mathbb{R}} = \hat{\Phi}$.

Passiamo ora all'ultima parte dell'enunciato. Sia F una funzione intera che soddisfi la (21.3). Allora $F_{|_\mathbb{R}}$ definisce una distribuzione temperata F_0 ponendo

$$\langle F_0, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)f(\xi)\, d\xi \ .$$

Esiste quindi una distribuzione temperata Φ tale che $\hat{\Phi} = F_0$.

Riprendiamo in considerazione l'identità approssimata $\{\varphi_\varepsilon\}$ introdotta all'inizio della dimostrazione. Poiché $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$, la sua trasformata di Fourier $\widehat{\varphi_\varepsilon}$ si estende, per il Teorema 19.2, a una funzione intera (che continueremo a chiamare $\widehat{\varphi_\varepsilon}(\zeta)$) tale che per ogni intero k,

$$|\widehat{\varphi_\varepsilon}(\zeta)| \leq C_k \frac{e^{\varepsilon|\Im\mathrm{m}\zeta|}}{(1+|\zeta|)^k} \ . \tag{21.7}$$

Si ponga allora $\Phi_\varepsilon = \Phi * \varphi_\varepsilon$. Per la Proposizione 21.2 (1), la sua trasformata di Fourier è il prodotto $\hat{\Phi}(\xi)\widehat{\varphi_\varepsilon}(\xi)$, e dunque è una funzione che ammette un'estensione olomorfa a $\mathbb{C}$, uguale a $F(\zeta)\widehat{\varphi_\varepsilon}(\zeta)$. Inoltre dalla (21.3) e dalla (21.7) segue che

$$\left|F(\zeta)\widehat{\varphi_\varepsilon}(\zeta)\right| \le C_k \frac{e^{(r+\varepsilon)|\Im\mathrm{m}\zeta|}}{(1+|\zeta|)^k}$$

per ogni k.

Per il Teorema 19.2, Φ_ε ha supporto in $[-r-\varepsilon, r+\varepsilon]$. Mostriamo che questo implica che $\operatorname{supp}\Phi \subseteq [-r,r]$. Se f è in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ e il suo supporto è disgiunto da $[-r,r]$, esso è anche disgiunto da $[-r-\varepsilon, r+\varepsilon]$ per ε abbastanza piccolo.

Dunque $\langle \Phi_\varepsilon, f\rangle = 0$ per ε piccolo. Osservando che anche $\{\check{\varphi}_\varepsilon\}$ è un'identità approssimata, si ha

$$\begin{aligned}
\langle \Phi, f\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\langle \Phi, f * \check{\varphi}_\varepsilon\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\langle \Phi * \varphi_\varepsilon, f\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\langle \Phi_\varepsilon, f\rangle \\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

Questo dimostra che Φ è nulla fuori da $[-r,r]$. □

Siamo ora in grado di estendere la (1) della Proposizione 21.2 al prodotto di due distribuzioni, di cui una a supporto compatto.

Corollario 21.4. *Siano $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, con Ψ a supporto compatto, allora il prodotto $\hat{\Phi}\hat{\Psi}$ è ben definito e*

$$\widehat{\Phi * \Psi} = \hat{\Phi}\hat{\Psi}\ .$$

Dimostrazione. Per il Teorema 21.3, $\hat{\Psi}$ è una funzione C^∞ e

$$\left|\hat{\Psi}(\xi)\right| \le C(1+|\xi|)^m$$

per qualche m, e dunque è a crescita lenta. Se consideriamo una derivata prima di $\hat{\Psi}$, segue dalla (3) della Proposizione 21.2 che $\partial_j\hat{\Psi} = -i\widehat{x_j\Psi}$. Poiché $x_j\Psi$ è una distribuzione a supporto compatto, $\partial_j\hat{\Psi}$ è pure a crescita lenta. Lo stesso vale per le derivate di ordine superiore di $\hat{\Psi}$.

Possiamo quindi definire il prodotto $\hat{\Phi}\hat{\Psi}$ secondo la (2) del Teorema 20.6.

Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\langle \widehat{\Phi * \Psi}, f\rangle = \langle \Phi * \Psi, \hat{f}\rangle = \langle \Phi, \check{\Psi} * \hat{f}\rangle\ .$$

Ma

$$\begin{aligned}
\check{\Psi} * \hat{f}(x) &= \langle \check{\Psi}, \tau_x(\hat{f})\check{}\,\rangle \\
&= \langle \Psi, \tau{-x}\hat{f}\rangle \\
&= \langle \Psi, \widehat{e_{-x}f}\rangle \\
&= \langle \hat{\Psi}, e_{-x}f\rangle \\
&= \langle \hat{\Psi}f, e_{-x}\rangle \\
&= \widehat{\hat{\Psi}f}(x)\ .
\end{aligned}$$

Quindi

$$\langle \widehat{\Phi * \Psi}, f\rangle = \langle \Phi, \widehat{\hat{\Psi} f}\rangle = \langle \hat{\Phi}, \hat{\Psi} f\rangle = \langle \hat{\Phi}\hat{\Psi}, f\rangle \ ,$$

come da dimostrarsi. $\square$

Come seconda conseguenza del Teorema 21.3, otteniamo la seguente caratterizzazione delle distribuzioni con supporto nell'origine.

Corollario 21.5. *Sia Φ una distribuzione con* $\operatorname{supp}\Phi = \{0\}$. *Allora Φ è una combinazione lineare finita di derivate della delta di Dirac δ_0.*

Dimostrazione. Per il Teorema 21.3, $\hat{\Phi}$ coincide con la restrizione a $\mathbb{R}^n$ di una funzione F olomorfa in $\mathbb{C}^n$ tale che

$$|F(\zeta)| \leq C\big(1 + |\zeta|\big)^m \tag{21.8}$$

per qualche m. Dimostreremo più avanti che la (21.8) implica che F è un polinomio. Dando questo per buono, abbiamo allora che

$$\hat{\Phi}(\xi) = \sum_{\text{finita}} c_\alpha \xi^\alpha \ .$$

Ma per la (2) della Proposizione 21.2,

$$\widehat{\partial^\alpha \delta_0} = (i\xi)^\alpha \hat{\delta}_0 = (i\xi)^\alpha \ .$$

Quindi

$$\hat{\Phi}(\xi) = \sum c_\alpha (-i)^{|\alpha|} \widehat{\partial^\alpha \delta_0}(\xi) \ .$$

Poiché la trasformata di Fourier è iniettiva,

$$\Phi = \sum c_\alpha (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta_0 \ .$$

Dimostriamo dunque che la (21.8) implica che F è un polinomio, cominciando dal caso unidimensionale.

Per la formula integrale di Cauchy,

$$F^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{F(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(re^{it})}{r^k e^{ikt}}\, dt \ ,$$

da cui, usando la (21.8),

$$\big|F^{(k)}(0)\big| \leq C_k \frac{1 + r^m}{r^k} \ .$$

Se $k > m$, facendo tendere r a infinito, si ricava che $F^{(k)}(0) = 0$, per cui F è un polinomio di grado minore o uguale a m.

In n variabili, si verifica induttivamente la seguente formula:

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha F(0) &= \partial^{\alpha_1}_{\zeta_1} \cdots \partial^{\alpha_n}_{\zeta_n} F(0) \\
&= \frac{\alpha_1!}{2\pi i} \oint_{|\zeta_1|=r} \frac{\partial^{\alpha_2}_{\zeta_2} \cdots \partial^{\alpha_n}_{\zeta_n} F(\zeta_1, 0, \dots, 0)}{\zeta_1^{\alpha_1+1}}\, d\zeta_1 \\
&= \frac{\alpha_1!\alpha_2!}{(2\pi i)^2} \oint_{|\zeta_1|=r} \oint_{|\zeta_2|=r} \frac{\partial^{\alpha_3}_{\zeta_3} \cdots \partial^{\alpha_n}_{\zeta_n} F(\zeta_1, \zeta_2, 0, \dots, 0)}{\zeta_1^{\alpha_1+1}\zeta_2^{\alpha_2+1}}\, d\zeta_1\, d\zeta_2 \\
&= \cdots\cdots \\
&= \frac{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}{(2\pi i)^n} \oint_{|\zeta_1|=r} \cdots \oint_{|\zeta_n|=r} \frac{F(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_n^{\alpha_n+1}}\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n \ .
\end{aligned}$$

Procedendo ora come in una sola variabile, si ricava che

$$\left|\partial^\alpha F(0)\right| \leq C_\alpha \frac{1+r^m}{r^{|\alpha|}} \ .$$

Facendo tendere r a infinito, si vede che i coefficienti di Taylor di F sono nulli per $|\alpha| > m$. $\square$

22. Operatori differenziali a coefficienti costanti

L'analisi di Fourier si presta bene allo studio di operatori lineari che commutano con le traslazioni. In questo paragrafo concentriamo la nostra attenzione sugli operatori differenziali.

Consideriamo un operatore differenziale lineare definito su $\mathbb{R}^n$

$$Lf = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha f \ ,$$

e imponiamo la condizione

$$L(\tau_h f) = \tau_h(Lf)$$

per ogni $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e per ogni $h \in \mathbb{R}^n$. Essa si traduce nell'identità

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha f(x-h) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x-h)\partial^\alpha f(x-h)$$

che si verifica per ogni f se e solo se i coefficienti a_α sono costanti.

Conviene porre

$$D_j = -i\partial_j \ , \qquad D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n} \ ,$$

e riscrivere l'operatore nella forma

$$Lf = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha D^\alpha f = P(D)f = f * \big(P(D)\delta_0\big) \ . \tag{22.1}$$

Stiamo quindi parlando degli operatori di convoluzione con distribuzioni a supporto nell'origine. Se si applica la trasformata di Fourier, si ottiene

$$\widehat{Lf}(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \xi^\alpha \hat f(\xi) = P(\xi)\hat f(\xi) \ . \tag{22.2}$$

Il polinomio $P(\xi)$ si chiama anche il *simbolo* dell'operatore L.

Da un punto di vista formale, la (22.2) offre uno spunto per risolvere l'equazione differenziale

$$Lu = f \ , \tag{22.3}$$

con dato $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: se si può dare un senso all'espressione $\frac{\hat f}{P}$, almeno come distribuzione temperata, allora la distribuzione $u = \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\hat f}{P}\Big)$ fornisce una soluzione *debole* dell'equazione (22.3)[6].

Naturalmente la presenza di zeri di P pone delle serie difficoltà. Vediamo un paio di esempi in cui questo problema può essere aggirato.

[6] Questo vuol dire che la (22.3) vale come uguaglianza tra distribuzioni; in altri termini, per ogni funzione $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ha l'identità $\langle P(D)u, \varphi\rangle = \langle u, P(-D)\varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$.

Esempio 1.

Se $L = \Delta$ è il Laplaciano, si ha $P(\xi) = -|\xi|^2$.

Se $n \geq 3$, data $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la funzione $-\frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2}$ è integrabile, per cui la sua trasformata inversa u è ben definita ed è continua. Poiché anche $\frac{x^\alpha \hat{f}(\xi)}{|\xi|^2}$ è integrabile per ogni multi-indice α, u è C^∞.

Per verificare che $\Delta u = f$ basta osservare che $\widehat{\Delta u}(\xi) = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$.

Se $n = 2$, la funzione $\frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2}$ non è più integrabile, per cui $\hat{u}$ va definita in modo adeguato, utilizzando una forma di valore principale. Poniamo allora

$$\langle \hat{u}, \psi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} \big(\psi(\xi) - \psi(0) \big) \, d\xi \ .$$

Se $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, l'integrale è assolutamente convergente per il teorema del valor medio e semplici maggiorazioni implicano che $\hat{u}$ è una distribuzione temperata di ordine 1. Bisogna ora verificare che $\Delta u = f$ in senso debole. Ma

$$\begin{aligned}
\langle \Delta u, \varphi \rangle &= \langle u, \Delta \varphi \rangle \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \langle \hat{u}, (\widehat{\Delta \varphi})\check{} \rangle \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} |\xi|^2 \hat{\varphi}(-\xi) \, d\xi = \langle f, \varphi \rangle \ .
\end{aligned}$$

La soluzione debole u trovata è in realtà una funzione C^∞, e dunque una soluzione forte. Per vedere ciò, consideriamo la funzione

$$\tilde{u}(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} (e^{i\xi \cdot x} - 1) \, d\xi \ .$$

Questo integrale è assolutamente convergente e consente derivazioni di ogni ordine sotto integrale. Se $\psi(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, si ha allora

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}(x) \hat{\psi}(x) \, dx &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} (e^{i\xi \cdot x} - 1) \, d\xi \, \hat{\psi}(x) \, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} \big(\psi(\xi) - \psi(0) \big) \, d\xi \\
&= \langle \hat{u}, \psi \rangle \ .
\end{aligned}$$

Quindi $\tilde{u} = u$ come distribuzione. Si osservi che i primi due integrali sono assolutamente convergenti in quanto $\tilde{u}(x) = O(|x|)$ per $x \to \infty$.

Esempio 2.

In $\mathbb{R}^{n+1}$, con $n \geq 1$, introduciamo le variabili (t, x) con $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo *l'operatore del calore*

$$L = \partial_t - \Delta_x \ .$$

Il suo simbolo è $P(\tau, \xi) = i\tau + |\xi|^2$, che si annulla solo nell'origine. Tuttavia $1/P$ è integrabile in un intorno dell'origine in ogni dimensione, per cui si può procedere come nel caso precedente.

Esempio 3.

Le stesse considerazioni si applicano all'operatore di Cauchy-Riemann

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

in $\mathbb{R}^2$.

In altri casi il problema è più complesso. Si pensi all'*operatore delle onde*

$$\partial_t^2 - \Delta_x \ ,$$

il cui simbolo è $P(\tau, \xi) = -\tau^2 + |\xi|^2$, o all'*operatore di Schrödinger*

$$\partial_t - i\Delta_x \ ,$$

il cui simbolo è $P(\tau, \xi) = i(\tau + |\xi|^2)$.

Definizione. *Si chiama* soluzione fondamentale *dell'operatore a coefficienti costanti $P(D)$ una distribuzione $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tale che $P(D)\Phi = \delta_0$.*

Proposizione 22.1. *Sia Φ una soluzione fondamentale di $P(D)$. Data $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ la funzione $u = f * \Phi$ è una soluzione globale dell'equazione $P(D)u = f$.*

Dimostrazione. Si ha

$$P(D)(f * \Phi) = f * \big(P(D)\Phi\big) = f * \delta_0 = f \ . \qquad \square$$

Naturalmente, se $P(D)$ ha una soluzione fondamentale temperata, il dato f può essere preso nella classe di Schwartz.

La soluzione fondamentale di un operatore differenziale L non è unica: basta aggiungere a una di esse una qualunque soluzione distribuzionale dell'equazione omogenea $Lu = 0$.

Proposizione 22.2. *Se $P(D)$ ha una soluzione fondamentale, data una funzione f di classe C^∞ su un aperto A, e dato un aperto $A' \Subset A$, esiste una soluzione u dell'equazione $P(D)u = f$ su A' di classe C^∞.*

Dimostrazione. Sia h una funzione C^∞ con supporto compatto contenuto in A e uguale a 1 su A'. Basta prendere $u = (fh) * \Phi$. $\square$

Più in generale, per ottenere soluzioni locali è sufficiente avere a disposizione una *soluzione fondamentale locale* di $P(D)$, ossia una distribuzione Φ tale che $P(D)\Phi - \delta_0$ sia nulla in un intorno dell'origine.

Vediamo ora alcuni esempi di soluzioni fondamentali.

Esempio 1.

Riprendiamo il Laplaciano in dimensione $n \geq 3$. La distribuzione temperata

$$\langle \Psi, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^2}\, d\xi$$

è ben definita e, posto $\Phi = -\mathcal{F}^{-1}\Psi$, si ha

$$\langle \Delta\Phi, f \rangle = \langle \Phi, \Delta f \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^n}\langle \Psi, \widecheck{(\widehat{\Delta f})} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, d\xi = f(0) \ .$$

Quindi $\Delta\Phi = \delta_0$. Per ottenere l'espressione esplicita di Φ usiamo il seguente lemma.

Lemma 22.3. *Dato* $\alpha \in (0,n)$*, sia* $u_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$*. Allora* $u_\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $\widehat{u_\alpha} = c_\alpha u_{n-\alpha}$*, con* $c_\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)2^{n-\alpha}\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha/2)}$.

Dimostrazione. Partiamo dall'identità

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon|x|^2}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}-1}\,d\varepsilon = \Gamma(\alpha/2)|x|^{-\alpha} \ ,$$

ottenuta con un semplice cambiamento di variabile. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\hat{f}(x)}{|x|^\alpha}\,dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)\int_0^\infty e^{-\varepsilon|x|^2}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}-1}\,d\varepsilon\,dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^\infty \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}-1}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)e^{-\varepsilon|x|^2}\,dx\,d\varepsilon \ ,\end{aligned}$$

dove lo scambio di ordine di integrazione è giustificato dal fatto che l'integrale doppio è assolutamente convergente. Per il Lemma 18.1,

$$\mathcal{F}(e^{-\varepsilon|x|^2}) = \frac{\pi^{n/2}}{\varepsilon^{n/2}}e^{-\frac{|\xi|^2}{4\varepsilon}} \ ,$$

per cui (ponendo $s = 1/\varepsilon$)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\hat{f}(x)}{|x|^\alpha}\,dx &= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^\infty \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}-1-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(\xi)e^{-\frac{|\xi|^2}{4\varepsilon}}\,d\xi\,d\varepsilon \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha/2)}\int_{\mathbb{R}^n}f(\xi)\int_0^\infty \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}-1-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|\xi|^2}{4\varepsilon}}\,d\varepsilon\,d\xi \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha/2)}\int_{\mathbb{R}^n}f(\xi)\int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1+\frac{n}{2}}e^{-\frac{s|\xi|^2}{4}}\,ds\,d\xi \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha/2)}\int_{\mathbb{R}^n}f(\xi)\left(\frac{|\xi|}{2}\right)^{-n+\alpha}d\xi \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)2^{n-\alpha}\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha/2)}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)|\xi|^{-n+\alpha}\,d\xi \ . \qquad \square\end{aligned}$$

Prendendo quindi $\alpha = n-2$, la soluzione fondamentale Φ è dunque data da

$$\Phi(x) = -\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{4\pi^{n/2}}|x|^{-n+2} \ .$$

Esempio 2.

In relazione all'equazione del calore, vogliamo determinare la distribuzione temperata Φ su $\mathbb{R}^{n+1}$ tale che

$$\langle\hat{\Phi}, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^{n+1}}\frac{f(\xi,\tau)}{i\tau+|\xi|^2}\,d\xi\,d\tau \ .$$

Partiamo dall'identità

$$\int_0^{+\infty}e^{-at}e^{-i\tau t}\,dt = \frac{1}{i\tau+a} \ ,$$

valida per $a > 0$ e $\tau \in \mathbb{R}$. Se indichiamo con $g(\xi, t)$ la trasformata di Fourier parziale di f,

$$g(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi, \tau) e^{-it\tau} \, d\tau \ ,$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\Phi}, f \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi, \tau)}{i\tau + |\xi|^2} \, d\tau \right) \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{+\infty} g(\xi, t) e^{-t|\xi|^2} \, dt \right) \, d\xi \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi, t) e^{-t|\xi|^2} \, d\xi \right) \, dt \\
&= \pi^{n/2} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x, t) t^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \, dx \, dt \ .
\end{aligned}$$

Da ciò si deduce che

$$\Phi(x, t) = \pi^{n/2} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{n/2}} \chi_{\mathbb{R}^+}(t)$$

è una soluzione fondamentale dell'equazione del calore.

23. Il Teorema di Malgrange-Ehrenpreis

Alla luce degli esempi precedenti e delle relative difficoltà tecniche, è interessante conoscere risultati generali sull'esistenza di soluzioni fondamentali di operatori differenziali a coefficienti costanti.

Il *Teorema di Malgrange-Ehrenpreis* afferma l'esistenza, per ogni operatore $P(D)$, di una soluzione fondamentale, non necessariamente temperata.

Un altro risultato, noto come *Teorema di Hörmander-Łojasewicz* e che non presentiamo, afferma che esiste sempre una soluzione fondamentale temperata.

Per dimostrare il Teorema di Malgrange-Ehrenpreis occorre prima "preparare" il polinomio P cambiando variabili in modo opportuno.

Se m è il grado di $P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \xi^\alpha$, indichiamo con P_m la *parte principale* di P,

$$P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \xi^\alpha \ .$$

Sia ξ_0 un punto tale che $|\xi_0| = 1$ e $P(\xi_0) \neq 0$. A meno di un cambiamento di variabili, possiamo supporre che $\xi_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Allora $P_m(\xi)$ contiene il monomio ξ_1^m con coefficiente non nullo (che possiamo supporre uguale a 1), e dunque

$$P(\xi) = \xi_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} q_j(\xi')\xi_1^j \ , \tag{23.1}$$

dove abbiamo posto $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Indichiamo con $\zeta_k(\xi')$ le radici distinte di $P(\xi_1, \xi')$, come polinomio nella sola variabile ξ_1.

Lemma 23.1. *Dati $\xi'_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per $|\xi' - \xi'_0| < \delta$ ognuna delle radici $\zeta_k(\xi')$ disti da almeno una delle radici $\zeta_\ell(\xi'_0)$ per meno di ε.*

Dimostrazione. Siano $\zeta_1(\xi'_0), \dots, \zeta_\ell(\xi'_0)$ le radici distinte di $P(\cdot, \xi'_0)$, di molteplicità $\mu_1, \dots, \mu_\ell$ rispettivamente. Possiamo supporre ε sufficientemente piccolo perché i dischi di centro $\zeta_j(\xi'_0)$ siano a due a due disgiunti. Allora una semplice applicazione del teorema dei residui mostra che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-\zeta_j(\xi'_0)|=\varepsilon} \frac{\partial_1 P(z, \xi'_0)}{P(z, \xi'_0)}\, dz = \mu_j \ ,$$

per $j = 1, \dots, \ell$. L'integrale a secondo membro è ben definito perché $P(z, \xi'_0)$ non ha zeri (come funzione di z) sul cerchio $|z - \zeta_j(\xi'_0)| = \varepsilon$.

Sia $\delta_j > 0$ tale che per $|\xi' - \xi'_0| < \delta_j$ anche $P(z, \xi')$ non abbia zeri su tale cerchio. Allora l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-\zeta_j(\xi'_0)|=\varepsilon} \frac{\partial_1 P(z, \xi')}{P(z, \xi')}\, dz$$

è ben definito per tali ξ' e dipende con continuità da ξ'. Sempre per il teorema dei residui, il suo valore è uguale alla somma delle molteplicità degli zeri di $P(z, \xi')$ contenuti all'interno del cerchio. Trattandosi di un valore intero, esso rimane costantemente uguale a μ_j.

Quindi se $|\xi' - \xi'_0| < \delta_j$, il disco di centro $\zeta_j(\xi'_0)$ e raggio δ_j contiene μ_j radici di $P(z, \xi')$, se contate ciascuna con la sua molteplicità.

Basta quindi prendere $\delta = \min_j \delta_j$. $\square$

Indichiamo ora con $\eta_k(\xi')$ la parte immaginaria di $\zeta_k(\xi')$.

Fissato ξ'_0, i valori distinti $\eta_k(\xi'_0)$ sono al massimo m, per cui esiste $\nu(\xi'_0) \in [-m-1, m+1]$ tale che $|\nu(\xi'_0) - \eta_k(\xi'_0)| > 1$ per ogni k. Per il Lemma 23.1, esiste un intorno aperto $U_{\xi'_0}$ di ξ'_0 in $\mathbb{R}^{n-1}$ tale che $|\nu(\xi'_0) - \eta_k(\xi')| > 1$ per ogni $\xi' \in U_{\xi'_0}$. Possiamo supporre che ognuno di tali intorni abbia raggio minore di 1.

Dalla famiglia degli $U_{\xi'_0}$ si può estrarre un sottoricoprimento numerabile $\{U_i = U_{\xi'_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ e localmente finito di $\mathbb{R}^{n-1}$. Indicando con $V_i = U_i \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_{i-1})$ e con ν_i il valore $\nu(\xi'_i)$, la funzione

$$\varphi(\xi') = \sum_{i=0}^{\infty} \nu_i \chi_{V_i}(\xi')$$

è misurabile e limitata; inoltre $|\varphi(\xi') - \eta_k(\xi')| > 1$ per ogni ξ' e ogni k.

Data una funzione $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, poniamo allora

$$\langle u, f\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}\big(-\xi_1 - i\varphi(\xi'), -\xi'\big)}{P\big(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi'\big)}\, d\xi_1\, d\xi' \ , \tag{23.2}$$

dove la notazione $\hat{f}$ è stata estesa al prolungamento analitico della trasformata di Fourier di f.

Teorema 23.2. *La* (23.2) *definisce una distribuzione* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *tale che* $P(D)u = \delta_0$.

Dimostrazione. Riprendiamo l'inizio della dimostrazione del Teorema di Paley-Wiener (Teorema 19.2) per precisare la costante che figura nella (19.2).

Se $f \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, con $K \subset B(0, r)$, si ottengono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\zeta)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\zeta\cdot x}\, dx \right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| e^{\Im\mathrm{m}\zeta\cdot x}\, dx \\
&\le e^{r|\Im\mathrm{m}\zeta|} \|f\|_1 \\
&\le C r^n e^{r|\Im\mathrm{m}\zeta|} \|f\|_\infty \ ,
\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}
|\zeta_j^N \hat{f}(\zeta)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_{x_j}^N e^{-i\zeta\cdot x}\, dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j^N f(x) e^{-i\zeta\cdot x}\, dx \right| \\
&\le C r^n e^{r|\Im\mathrm{m}\zeta|} \|\partial_j^N f\|_\infty \ .
\end{aligned}$$

Quindi per ogni $N \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza

$$\Big(1 + \sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^N\Big) \big|\hat{f}(\zeta)\big| \le C r^n e^{r|\Im\mathrm{m}\zeta|} \|f\|_{K,N} \ .$$

Poiché $\sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^N \sim |\zeta|^N$, si ricava che

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq \frac{\|f\|_{K,N} r^n e^{|\eta| r}}{\bigl(1+|\zeta|\bigr)^N} \ .$$

Per come è stata scelta la funzione $\varphi(\xi')$, si ha

$$\bigl|P\bigl(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi'\bigr)\bigr| = \prod_k \bigl|\xi_1 + i\varphi(\xi') - i\zeta_k(\xi')\bigr| \geq 1 \ .$$

Quindi, se $N > n$,

$$\begin{aligned}
\bigl|\langle u, f\rangle\bigr| &\leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|f\|_{K,N} r^n e^{|\varphi(\xi')| r}}{\bigl(1+|\xi_1|+|\xi'|+|\varphi(\xi')|\bigr)^N} \, d\xi_1 \, d\xi' \\
&\leq C\|f\|_{K,N} r^n e^{(m+1)r} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|)^N} \, d\xi \\
&\leq C_K \|f\|_{K,N} \ .
\end{aligned}$$

Concludiamo allora che il funzionale lineare u è ben definito e continuo su $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, se $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\langle P(D)u, f\rangle &= \langle u, P(-D)f\rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{P(-D)f}\bigl(-\xi_1 - i\varphi(\xi'), -\xi'\bigr)}{P\bigl(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi'\bigr)} \, d\xi_1 \, d\xi' \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}\bigl(-\xi_1 - i\varphi(\xi'), -\xi'\bigr) \, d\xi_1 \, d\xi' \ .
\end{aligned}$$

Ma per ogni ξ' fissato, è possibile modificare il cammino di integrazione nel piano ζ_1, ottenendo l'uguaglianza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}\bigl(-\xi_1 - i\varphi(\xi'), -\xi'\bigr) \, d\xi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}\bigl(-\xi_1, -\xi'\bigr) \, d\xi_1 \ .$$

Pertanto

$$\langle P(D)u, f\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(-\xi) \, d\xi = f(0) = \langle \delta_0, f\rangle \ . \qquad \square$$

24. Convolutori e moltiplicatori di Fourier

Consideriamo per cominciare un operatore lineare continuo T di $L^2(\mathbb{R}^n)$ in sé che commuti con le traslazioni.

Indichiamo con $\tilde{T}$ l'operatore

$$\tilde{T} = \mathcal{F} \circ T \circ \mathcal{F}^{-1} ,$$

ossia l'operatore che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{T} & L^2(\mathbb{R}^n) \\ {\scriptstyle\mathcal{F}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mathcal{F}} \\ L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\tilde{T}} & L^2(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Per la formula di Plancherel, l'operatore $\tilde{T}$ è limitato su $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. Per le proprietà della trasformata di Fourier, si vede facilmente che esso soddisfa inoltre la seguente proprietà di commutazione:

$$\tilde{T}(e_h f) = e_h \tilde{T} f , \qquad \forall\, h \in \mathbb{R}^n , \tag{24.1}$$

dove $e_h(\xi)$ indica la funzione esponenziale $e^{ih\cdot\xi}$.

Un operatore della forma $\tilde{T} f = mf$, con $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ soddisfa la (24.1) ed è limitato su $L^2(\mathbb{R}^n)$ con norma uguale a $\|m\|_\infty$.

Vogliamo ora vedere che vale anche il viceversa. Supponiamo dunque $\tilde{T}$ limitato su $L^2(\mathbb{R}^n)$ e soddisfacente la (24.1).

Lemma 24.1. *Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ha che $\tilde{T}(fg) = g\tilde{T}(f)$.*

Dimostrazione. Sia $h = \mathcal{F}^{-1} g$. Allora

$$f(\xi)g(\xi) = f(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} h(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx . \tag{24.2}$$

Consideriamo dunque l'integrale di Bochner

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) e_{-x} f\, dx ,$$

a valori in $L^2(\mathbb{R}^n)$, e mostriamo che esso è convergente. La funzione $x \mapsto h(x)e_{-x}f$ a valori in $L^2(\mathbb{R}^n)$ è continua, per cui basta osservare che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| \|e_{-x} f\|_2\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| \|f\|_2\, dx < \infty .$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \tilde{T}(fg) &= \tilde{T}\left(\int_{\mathbb{R}^n} h(x) e_{-x} f\, dx \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \tilde{T}(e_{-x} f)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x) e_{-x} \tilde{T} f\, dx \\ &= (\tilde{T} f) g . \qquad \square \end{aligned}$$

Teorema 24.2. *Esiste una funzione $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\tilde{T}f = mf$. Inoltre $\|m\|_\infty = \|\tilde{T}\|$.*

Dimostrazione. Sia φ una funzione C^∞ a supporto nella palla $B(0,2)$ e identicamente uguale a 1 in $B(0,1)$, e sia $\varphi_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)$. Allora, se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{j\to\infty} \|f - f\varphi_j\|_2 = 0 \ .$$

Se inoltre $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, per il Lemma 24.1,

$$\tilde{T}f = \lim_{j\to\infty} \tilde{T}(f\varphi_j) = \lim_{j\to\infty} fT\varphi_j \ .$$

Poniamo $m_j = \tilde{T}\varphi_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Poiché $\varphi_j = \varphi_j\varphi_{j+1}$, risulta

$$m_j = m_{j+1}\varphi_j \ ,$$

per cui $m_j = m_{j+1}$ sulla palla $B(0,2^j)$.

Indichiamo con m la funzione ottenuta come limite quasi ovunque delle m_j. Allora, per $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, prendendo j abbastanza grande si ha

$$\tilde{T}(f) = \tilde{T}(f\varphi_j) = fm_j = fm \ .$$

Sia ora $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto. Se $\{\psi_\varepsilon\}$ è un'identità approssimata C^∞ a supporto compatto, $f * \psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, per cui

$$\tilde{T}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{T}(f * \psi_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}(f * \psi_\varepsilon)m = fm \ .$$

Data $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con supporto compatto, poniamo

$$g_1(x) = |g(x)|^{\frac{1}{2}} \ , \qquad g_2(x) = \begin{cases} \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|^{\frac{1}{2}}} & \text{se } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{se } g(x) = 0 \ . \end{cases}$$

Allora $g = g_1\bar{g}_2$, $g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\|g\|_1 = \|g_1\|_2\|g_2\|_2$. Allora

$$\left| \int m(\xi)g(\xi)\, d\xi \right| = \left| \langle \tilde{T}g_1, g_2 \rangle \right| \leq \|\tilde{T}\|\|g\|_1 \ ,$$

per cui $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\|m\|_\infty \leq \|\tilde{T}\|$. La disuguaglianza $\|\tilde{T}\| \leq \|m\|_\infty$ è ovvia. $\square$

Corollario 24.3. *Un operatore T è limitato su $L^2(\mathbb{R}^n)$ e commuta con le traslazioni se e solo se esiste una funzione $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $Tf = \mathcal{F}^{-1}(m\hat{f})$. In tal caso $\|T\| = \|m\|_\infty$.*

Coerentemente con la terminologia introdotta sul toro, la funzione m si chiama il moltiplicatore di Fourier dell'operatore T e la distribuzione $K = \mathcal{F}^{-1}m$ si chiama il suo convolutore. Notiamo però che l'uguaglianza $Tf = K * f$ va presa con cautela: a rigore il secondo membro è ben definito solo se f soddisfa particolari proprietà (per es. è di Schwartz, oppure è a supporto compatto).

Sia ora T un operatore limitato su $L^p(\mathbb{R}^n)$ e invariante per traslazioni. Supponiamo $1 \leq p < \infty$.

Lemma 24.4. *Se* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)g(-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} Tg(x)f(-x)\,dx \ .$$

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$, e sia $\{\varphi_\varepsilon\}$ la corrispondente identità approssimata. Allora $Tf = \lim_{\varepsilon\to 0} T(f * \varphi_\varepsilon)$. Ma

$$f * \varphi_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\tau_y\varphi_\varepsilon\,dy \ ,$$

inteso come integrale di Bochner della funzione $y \mapsto f(y)\tau_y\varphi_\varepsilon$ a valori in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Dunque

$$\begin{aligned} T(f * \varphi_\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)T(\tau_y\varphi_\varepsilon)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\tau_y T(\varphi_\varepsilon)\,dy \\ &= f * T(\varphi_\varepsilon) \ . \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)g(-x)\,dx &= \langle Tf, \check{g}\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\langle f * T(\varphi_\varepsilon), \check{g}\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\langle T(\varphi_\varepsilon), \check{f} * \check{g}\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\langle g * T(\varphi_\varepsilon), \check{f}\rangle \\ &= \langle Tg, \check{f}\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} Tg(x)f(-x)\,dx \ . \qquad \square \end{aligned}$$

Supponiamo ora che $1 < p < \infty$. Procedendo in modo analogo a quanto visto sul toro, si dimostra che

$$\sup_{f\in\mathcal{S},\, f\neq 0} \frac{\|Tf\|_p}{\|f\|_p} = \sup_{f\in\mathcal{S},\, f\neq 0} \frac{\|Tf\|_{p'}}{\|f\|_{p'}} \ .$$

Per la densità di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sia in $L^p(\mathbb{R}^n)$ che in $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, questo implica che T è anche limitato su $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ con la stessa norma[7].

Per il Teorema di Riesz-Thorin, T è anche limitato su $L^2(\mathbb{R}^n)$, per cui T ha un convolutore $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e un moltiplicatore di Fourier $m = \hat{K} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, con $\|m\|_\infty \leq \|T\|$.

Consideriamo ora il caso $p = 1$. Dimostriamo che, come per il toro, gli operatori limitati su $L^1(\mathbb{R}^n)$ e invarianti per traslazioni hanno un convolutore rappresentato da una misura di Borel regolare.

[7]Più precisamente T si estende per continuità a un operatore limitato su $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ con la stessa norma.

Teorema 24.5. *Un operatore T invariante per traslazioni è limitato su $L^1(\mathbb{R}^n)$ se e solo se esiste una misura $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ tale che $Tf = \mu * f$. In tal caso $\|T\| = \|\mu\|_1$.*

Dimostrazione. Se $Tf = \mu * f$, la conclusione è ovvia. Supponiamo dunque che T sia invariante per traslazioni e limitato su $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Sia $\{\varphi_\varepsilon\}$ un'identità approssimata in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e sia μ_ε la misura tale che $d\mu_\varepsilon(x) = T(\varphi_\varepsilon)(x)\,dx$. Allora

$$\|\mu_\varepsilon\|_1 = \|T(\varphi_\varepsilon)\|_1 \le \|T\| \ .$$

Per il Teorema di Banach-Alaoglu, esiste una succssione $\{\varepsilon_j\}$ tendente a 0 tale che le μ_{ε_j} tendano a una misura μ nella topologia debole-* di $M(\mathbb{R}^n)$. Come nella dimostrazione del Lemma 24.4, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \lim_{j\to\infty} T(f * \varphi_{\varepsilon_j})(x) \\ &= \lim_{j\to\infty} f * \mu_{\varepsilon_j})(x) \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,d\mu_{\varepsilon_j}(y) \\ &= f * \mu(x) \ . \end{aligned}$$

La conclusione segue per densità. $\square$

25. Relazioni tra moltiplicatori di Fourier su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{T}$ e formula di sommazione di Poisson

In questo paragrafo evidenziamo le connessioni tra l'analisi di Fourier su $\mathbb{T}$ e quella su $\mathbb{R}$, giustificando così una serie di analogie riscontrate in precedenza.

Vediamo per cominciare come le formule di Plancherel e di inversione su $\mathbb{R}$ si possano ottenere dalle corrispondenti formule sul toro. Questo metodo si applica anche in più dimensioni e ha applicazioni allo studio delle serie di Fourier multiple.

Prendiamo una funzione f a supporto compatto e sufficientemente regolare (diciamo C^2). Supponiamo che $\operatorname{supp} f \subset [-a, a]$. Dato $T > a$, sia f_T la funzione su $\mathbb{R}$ periodica di periodo $2T$ e coincidente con f su $[-T, T]$.

Allora

$$g_T(x) = f_T\Big(\frac{T}{\pi}x\Big)$$

è periodica di periodo 2π e di classe C^2. I suoi coefficienti di Fourier sono

$$\begin{aligned} \widehat{g_T}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_T\Big(\frac{T}{\pi}x\Big)e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T(x)e^{-in\frac{\pi}{T}x}\,dx \\ &= \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-in\frac{\pi}{T}x}\,dx \\ &= \frac{1}{2T}\hat{f}\Big(n\frac{\pi}{T}\Big)\ . \end{aligned} \tag{25.1}$$

La formula di inversione ci dà

$$g_T(x) = \frac{1}{2T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\Big(n\frac{\pi}{T}\Big)e^{inx}\ ,$$

da cui

$$f_T(x) = \frac{1}{2T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\Big(n\frac{\pi}{T}\Big)e^{in\frac{\pi}{T}x}\ . \tag{25.2}$$

Analogamente l'identità di Parseval ci dà

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{4T^2}\left|\hat{f}\Big(n\frac{\pi}{T}\Big)\right| &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|g_T(x)\big|^2\,dx \\ &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \big|f_T(x)\big|^2\,dx \\ &= \frac{1}{2T}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\ , \end{aligned}$$

da cui

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}\Big(n\frac{\pi}{T}\Big)\right|\ . \tag{25.3}$$

Lemma 25.1. *Sia h una funzione di classe C^1 su $[0,+\infty)$ integrabile con la sua derivata prima. Allora*

$$\int_0^\infty h(\xi)\,d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{n=1}^\infty h(n\varepsilon)\ .$$

Dimostrazione. Poiché

$$\varepsilon \sum_{n=1}^\infty h(n\varepsilon) = \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\varepsilon}^{n\varepsilon} h(n\varepsilon)\,d\xi\ ,$$

dobbiamo mostrare che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\varepsilon}^{n\varepsilon} \big(h(n\varepsilon)-h(\xi)\big)\,d\xi = 0\ .$$

Ma

$$\begin{aligned}\int_{(n-1)\varepsilon}^{n\varepsilon} \big(h(n\varepsilon)-h(\xi)\big)\,d\xi &= \int_{(n-1)\varepsilon}^{n\varepsilon} \int_\xi^{n\varepsilon} h'(t)\,dt\,d\xi \\ &= \int_{(n-1)\varepsilon}^{n\varepsilon} h'(t)\big(n\varepsilon - t\big)\,dt\ ,\end{aligned}$$

per cui

$$\left|\int_{(n-1)\varepsilon}^{n\varepsilon} \big(h(n\varepsilon)-h(\xi)\big)\,d\xi\right| \le \varepsilon \int_{(n-1)\varepsilon}^{n\varepsilon} |h'(t)|\,dt\ .$$

Sommando su n la tesi segue facilmente. □

Se nella (25.2) prendiamo $T > |x|$, abbiamo $f_T(x) = f(x)$. Allora

$$\begin{aligned}f(x) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat f\Big(n\frac{\pi}{T}\Big) e^{in\frac{\pi}{T}x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat f(\xi) e^{i\xi x}\,d\xi\ ,\end{aligned}$$

per il Lemma 25.1.

Analogamente, dalla (25.3),

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big|\hat f\Big(n\frac{\pi}{T}\Big)\Big|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\hat f(\xi)|^2\,d\xi\ .\end{aligned}$$

Questa idea di vedere funzioni a supporto compatto come “limiti” di funzioni periodiche con periodi sempre più ampi può essere utilizzata per studiare moltiplicatori di Fourier su $\mathbb{R}$.

Applichiamo questa idea al caso particolare del moltiplicatore $m(\xi) = \operatorname{sgn}\xi$. Utilizzeremo il fatto noto (v. Teorema 8.4) che sul toro il moltiplicatore $\mu_n = \operatorname{sgn} n$ è un moltiplicatore di L^p per $1 < p < \infty$.

Teorema 25.2. *Il moltiplicatore* $m(\xi) = \operatorname{sgn} \xi$ *su* $\mathbb{R}$ *è un moltiplicatore di* $L^p(\mathbb{R})$ *per* $1 < p < \infty$, *e* $\|m\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq \|\mu\|_{M_p(\mathbb{T})}$.

Dimostrazione. Fissiamo $p \in (1, \infty)$. Sia $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e siano f_T e g_T definite come sopra. Applichiamo a g_T, che è periodica di periodo 2π, il moltiplicatore μ. Otteniamo così la funzione

$$\tilde{g}_T(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn} n \widehat{g_T}(n) e^{inx} \ , \tag{25.4}$$

e

$$\|\tilde{g}_T\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|\mu\|_{M_p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^p(\mathbb{T})} \ . \tag{25.5}$$

Poniamo ora

$$\tilde{f}_T(x) = \tilde{g}_T\Big(\frac{\pi}{T} x\Big) \ ,$$

che è periodica di periodo $2T$. Allora

$$\int_{-T}^{T} |\tilde{f}_T(x)|^p \, dx = \frac{T}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{g}_T(x)|^p \, dx \ ,$$

e analogamente

$$\int_{-T}^{T} |f_T(x)|^p \, dx = \frac{T}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_T(x)|^p \, dx \ .$$

Dalla (25.5) segue che

$$\int_{-T}^{T} |\tilde{f}_T(x)|^p \, dx \leq \|\mu\|^p_{M_p(\mathbb{T})} \int_{-T}^{T} |f_T(x)|^p \, dx = \|\mu\|^p_{M_p(\mathbb{T})} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \ . \tag{25.6}$$

Ora, per la (25.4) e la (25.1),

$$\begin{aligned} \tilde{f}_T(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn} n \widehat{g_T}(n) e^{in\frac{\pi}{T}x} \\ &= \frac{1}{2T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn} \Big(n\frac{\pi}{T}\Big) \hat{f}\Big(n\frac{\pi}{T}\Big) e^{in\frac{\pi}{T}x} \ . \end{aligned}$$

Applicando il Lemma 25.1, si ottiene che

$$\lim_{T \to +\infty} \tilde{f}_T(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} \xi \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f} m)(x) = T_m f(x) \ ,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. La dimostrazione del Lemma 25.1 mostra che la convergenza è uniforme sui compatti: ripercorrendone i passi, si scopre infatti che

$$\big|\tilde{f}_T(x) - T_m f(x)\big| \leq \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{d\xi}\big(\hat{f}(\xi) e^{i\xi x}\big) \right| d\xi \leq C \frac{1 + |x|}{T} \ .$$

Quindi, fissato $r > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-r}^{r} |T_m f(x)|^p \, dx &= \lim_{T \to \infty} \int_{-r}^{r} |\tilde{f}_T(x)|^p \, dx \\ &\leq \limsup_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} |\tilde{f}_T(x)|^p \, dx \\ &\leq \|\mu\|^p_{M_p(\mathbb{T})} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \ , \end{aligned}$$

per la (25.6). Passando al limite per $r \to \infty$, si ricava che

$$\|T_m f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|\mu\|_{M_p(\mathbb{T})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \ .$$

Per la densità di $C_c^\infty(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R})$ segue che $\|m\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq \|\mu\|_{M_p(\mathbb{T})}$. $\square$

Corollario 25.3. *Se $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p \leq 2$, posto*

$$f_R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi \ ,$$

si ha $\lim_{R\to\infty} f_R = f$ nella norma di $L^p(\mathbb{R})$.

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 8.6.

La dimostrazione del Teorema 25.2 può essere adattata in modo da dimostrare il seguente *Primo Teorema di de Leeuw.*

Teorema 25.4. *Sia $m(\xi)$ continua e limitata su $\mathbb{R}$, e sia $p \in [1, \infty]$. Supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ la successione $\mu_\varepsilon(n) = m(n\varepsilon)$ sia un moltiplicatore di $L^p(\mathbb{T})$, e che le norme $\|\mu_\varepsilon\|_{M_p(\mathbb{T})}$ siano uniformemente limitate[8]. Allora m è un moltiplicatore di $L^p(\mathbb{R})$ e $\|m\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq \sup_\varepsilon \|\mu_\varepsilon\|_{M_p(\mathbb{T})}$.*

Esiste anche un *Secondo Teorema di de Leeuw*, che stabilisce una corrispondenza tra moltiplicatori nel senso inverso.

Teorema 25.5. *Sia $m(\xi)$ continua e limitata su $\mathbb{R}$ e in $M_p(\mathbb{R})$ per un certo $p \in [1, \infty]$. Allora dato $\varepsilon > 0$, la successione $\mu_\varepsilon(n) = m(n\varepsilon)$ è in $M_p(\mathbb{T})$ e $\|\mu_\varepsilon\|_{M_p(\mathbb{T})} \leq \|m\|_{M_p(\mathbb{R})}$.*

I due teoremi combinati danno l'uguaglianza

$$\|m\|_{M_p(\mathbb{R})} = \sup_\varepsilon \|\mu_\varepsilon\|_{M_p(\mathbb{T})} \ .$$

Non dimostriamo il Teorema 25.5, ma ci limitiamo a presentarne uno dei principi base, che è interessante anche per altri versi[9]. Esso a che fare con il fatto che $\mathbb{T}$ è un quoziente di $\mathbb{R}$.

Data una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$, consideriamo la famiglia di funzioni

$$f_n(x) = f(x + 2\pi n)$$

in $L^1\big([0, 2\pi]\big)$, con $n \in \mathbb{Z}$. La serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$ converge in $L^1\big([0, 2\pi]\big)$, in quanto

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f_n\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |f(x + 2n\pi)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \ .$$

Le stesse considerazioni valgono sostituendo l'intervallo $[0, 2\pi]$ con un qualunque intervallo di lunghezza 2π, per cui la serie definisce in modo naturale una funzione periodica $F \in L^1(\mathbb{T})$, tale che

$$\|F\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \ .$$

[8]Si possono assumere ipotesi su m più blande, per es. che essa presenti un salto in 0, ma in tal caso bisogna definire $m(0)$ opportunamente.

[9]Una dimostrazione completa, svolta in più dimensioni, si trova nell'ultimo capitolo del libro E.M. Stein, G. Weiss *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.*

Inoltre

$$\begin{aligned}
\hat{F}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} f(x+2n\pi)e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\hat{f}(k)\ .
\end{aligned}$$

Queste osservazioni ci portano alla *formula di sommazione di Poisson.* La sua formulazione richiede una condizione di decadimento puntuale sia su f che su $\hat{f}$.

Teorema 25.6. *Sia f una funzione continua su $\mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{1+\delta}}$ e che una maggiorazione analoga valga per $\hat{f}$. Allora*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(k)\ .$$

Dimostrazione. La funzione $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2n\pi)$ è continua e la sua serie di Fourier

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(k)e^{ikx}$$

converge uniformemente. In particolare $F(0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(k)$. $\square$

Applicando la formula di sommazione di Poisson a funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, si ricava l'identità

$$\mathcal{F}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi n}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_n\ .$$